



Katrin Schmid, BSc

Überblick über unterschiedliche Risikomaße- eine vergleichende Analyse deren Anwendbarkeit

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda Dragoti-Çela

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Graz, Juni 2014

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Personen bedanken, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Masterarbeit beigetragen haben.

Vor allem bei meinen Freunden, deren Unterstützung ich mir während meiner gesamten Studienzzeit sicher sein durfte.

Bei Nora Andracher, für die konstruktive Kritik und die stetige Motivation.

Ganz besonders bei Bernhard, der während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit und während des gesamten Studiums an meiner Seite war.

Mein Dank gilt meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Dragoti-Çela für das Bereitstellen des interessanten Themas für die Masterarbeit. Ebenso möchte ich mich dafür bedanken, dass Sie für meine Anliegen immer Zeit fand und mir stets mit gutem Rat zur Seite stand.

Einen ganz besonderen Dank möchte ich an meine Familie, insbesondere an meine Eltern richten, die mir mein Studium ermöglichten und die mich auf all meinen Wegen stets unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Motivation	1
2	Axiomatische Charakterisierung von Risikomaßen	3
2.1	Grundlagen - Definition eines Risikomaßes	3
Eigenschaft 1.	Verteilungsinvarianz	4
Eigenschaft 2.	Positive Homogenität	5
Eigenschaft 3.	Summe von Risiken	6
Eigenschaft 4.	Konvexität	8
Eigenschaft 5.	Monotonie	8
Eigenschaft 6.	Translationsinvarianz	9
Eigenschaft 7.	Konsistenz	11
Eigenschaft 8.	Nicht-Negativität	12
Eigenschaft 9.	Stetigkeit	13
Eigenschaft 10.	Strictly Expectation-boundedness	14
Eigenschaft 12.	Risiko mit risikofreiem Return C	14
Eigenschaft 14.	Allokation	15
3	Klassen von Risikomaßen	16
3.1	Momenten-basierende Risikomaße	16
3.1.1	Value at Risk ($VaR_\alpha(X)$)	16
3.1.2	Conditional Value at Risk ($CVaR_\alpha(X)$ oder Expected Shortfall (ES))	17
3.2	Das Axiomensystem von Pedersen und Satchell	18
3.3	Kohärente Risikomaße - Axiomensystem von Artzner et al.	19
3.4	Konvexe Risikomaße	21
3.5	Spektrale Risikomaße	22
3.5.1	Die Axiomatik spektraler Risikomaße	22
3.5.2	Spektrale Risikomaße als Erweiterung des Expected Shortfall-Konzepts	23
3.5.3	Die risikoaverse Funktion ϕ	27
3.5.4	Beispiele spektraler Risikomaße	30
3.6	Deviation-Maße und Expectation-bounded Risikomaße	35
3.6.1	Axiomatische Definition von Deviation-Maßen und Ex- pectation-bounded-Risikomaßen	36
3.6.2	Beispiele	44
3.7	Reward-Maße	45
3.7.1	Portfolio-Auswahl-Theorie und Entscheidungstheorie	45

INHALTSVERZEICHNIS

3.7.2	Axiomatischer Aufbau von Reward-Maßen und Risiko- maßen	49
3.7.3	Charakterisierung Reward-Maß	54
3.7.4	Beispiel für ein Reward-Maß	55
3.8	Parametrische Klasse von Risikomaßen	56
3.8.1	Dreiparametrische Klasse von Risikomaßen - Einleitung .	56
3.8.2	Definition dreiparametrischer Risikomaße	56
3.8.3	Beispiele	58
3.8.4	Fünfparametrische Klasse von Risikomaßen - Einleitung .	60
3.8.5	Definition der fünfparametrischen Klasse	60
3.8.6	Beispiele	60
4	Implementierung der Risikoklassen	63
5	Explorative Datenanalyse	64
5.1	Verteilungsannahmen	64
5.2	Renditenberechnung	67
6	CVaR-optimiertes Aktienportfolio für unterschiedlich ver- teilte Renditen	68
6.1	Ansätze zur Portfoliooptimierung	71
6.2	CVaR-optimale Portfolios für normalverteilte Aktienrenditen .	75
6.2.1	Anwendung der Risikomaße auf die CVaR-optimalen Portfolios für normalverteilte Aktienrenditen	79
6.3	CVaR-optimale Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen	85
6.3.1	Anwendung der Risikomaße auf die CVaR-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Ak- tienrenditen	88
7	MAD-optimiertes Aktienportfolio für unterschiedlich verteil- te Renditen	93
7.1	Ansätze zur MAD-Portfoliooptimierung	93
7.2	Ergebnisse	95
7.2.1	Anwendung der Risikomaße auf die MAD-optimalen Portfolios für unterschiedlich verteilte Aktienrenditen .	101
7.2.2	Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung . .	106
8	Fazit und Ausblick	111

Abbildungsverzeichnis

1	Graphische Darstellung des Risikospektrums des Expected Shortfalls	29
2	Darstellung des Expected Shortfalls als Fläche über der Verteilungsfunktion	29
3	Verlauf der exponentiellen Risikospektren für die Parameter $a = 1$, $a = 2$ und $a = 3$, vgl. Brandtner [2012a]	32
4	exemplarischer Verlauf der Power-Risikospektren für $b = 0.25$, $b = 0.5$ und $b = 0.75$, vgl. Brandtner [2012a]	34
5	Boxplots der Renditen der Komponenten 1-16 des EURO STOXX 50	65
6	Boxplots der Renditen der Komponenten 17-32 des EURO STOXX 50	66
7	Boxplots der Renditen der Komponenten 33-46 des EURO STOXX 50	66
8	Plot-Matrix aller berechneten Risikomaße	70
9	links: Mögliche effiziente Portfolios bezüglich des <i>CVaR</i> von log. Renditen; rechts: effiziente Portfolios auf der empirischen Effizienzkurve	75
10	Effizienzkurve des <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios (normalverteilte Aktienrenditen); exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet (siehe Tabelle 4)	76
11	Gewichte aller <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios (annähernd normalverteilte Aktienrenditen)	77
12	Denneberg-Risikomaß für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	80
13	Exponentiell-spektrales Risikomaß für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	81
14	Varianz für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	82
15	Mittlere absolute Abweichung für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	83
16	5-parametrisches Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$)	84
17	Effizienzkurve der <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet (siehe Tabelle 5)	86
18	Gewichte aller <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen	87
19	Denneberg-Maß für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	88
20	Exponentiell-spektrales Risikomaß für alle <i>CVaR</i> -optimalen Portfolios	89

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

21	Varianz für alle CVaR-optimalen Portfolios	90
22	Mittlere absolute Abweichung für alle CVaR-optimalen Portfolios	91
23	5-parametriges Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für alle CVaR-optimalen Portfolios ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$)	92
24	Effizienzkurve der MAD-optimalen Portfolios für annähernd normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet	97
25	Effizienzkurve der MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet	98
26	Gewichte aller MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) normalverteilte Aktienrenditen	99
27	Gewichte aller MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen	100
28	Denneberg-Maß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)	102
29	Denneberg-Maß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)	102
30	Exponentiell-spektrales Risikomaß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)	103
31	Exponentiell-spektrales Risikomaß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)	103
32	Varianz für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)	104
33	Varianz für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)	104
34	5-parametriges Risikomaß mit selbst gewählten Parametern ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$) für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)	105
35	5-parametriges Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)	105
36	Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung für (annähernd) normalverteilte Aktienrenditen	107
37	Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen	108

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- 38 Gewichte der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung im Vergleich ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen) 109
- 39 Gewichte der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung im Vergleich ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen) . . . 110

Tabellenverzeichnis

1	Gegenüberstellung der Eigenschaften von Risikomaßen laut Artzner et al. und Deviation-Maßen	40
2	Vergleich der Axiome zwischen Deviation-Maßen und Expectation-bounded-Risikomaßen	41
3	Unternehmen des Euro Stoxx 50 mit ihren Kürzeln für <i>Yahoo Finance</i> . Rot unterlegt: nicht verwendet. Gelb unterlegt: nicht-normalverteilte Renditen	65
4	Beispiele von CVaR-effizienten Portfolios	78
5	Beispiele von CVaR-effizienten Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen	85
6	Beispiele von MAD-effizienten Portfolios	96
7	Beispiele von MAD-effizienten Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen	97

1 Einführung und Motivation

Der Markteinbruch 2008 hat gezeigt, wie wichtig die Quantifizierung von Risiko und die Auswahl eines adäquaten Risikomaßes ist. Risikomaße können dabei helfen, die Performance eines Portfolios abzuschätzen und zu verbessern. Durch die Optimierung anhand eines bestimmten Risikomaßes kann gezielt in die Zusammenstellung eines Portfolios eingegriffen werden, um einen Wertverlust zu minimieren. Zur Berechnung des Risikos stehen nun verschiedene Maße in unterschiedlichen Klassen zur Wahl.

Im ersten Teil der Arbeit wird ein grober Überblick über vier Klassen von Risikomaßen gegeben, die als Alternative zum allseits bekannten und vielfach verwendeten Value-at-Risk untersucht werden. Diese vier Risikoklassen sind folgende:

1. Spektrale Risikomaße
2. Deviation-Maße und Expectation-bounded-Risikomaße
3. Reward-Maße
4. 3/5-parametrische Klasse von Risikomaßen

Es soll ein Überblick über den derzeitigen Stand der Klassen von Risikomaßen gegeben werden. Anhand dieser theoretischen und exemplarischen Einführung wird dann in späterer Folge auf die Implementierung - mittels der Statistik-Software *R* und auch *MATLAB* - eingegangen, um ein „ideales“ Maß bestmöglich zu spezifizieren. Da das Gebiet der Risikomaße relatives Neuland ist und erst seit ungefähr 15 Jahren intensiv wissenschaftlich aufgearbeitet wird, erfolgt die Implementierung der Risikomaße für diese Arbeit größtenteils selbstständig, nur einige wenige sind als Funktionen bereits verfügbar.

Der Fokus der Arbeit liegt auf der Zusammenstellung eines eigenen Aktienportfolios (bestehend aus Aktien des EURO STOXX 50), welches ad hoc bezüglich eines CVaR-Ansatzes optimiert wird. Es gilt die verschiedenen Aktienportfolios aus Einzelaktien zu analysieren, um die effizienten Zusammenstellungen von Portfolios zu bestimmen. Auf diese optimierten Aktienportfolios sollen nun die neu zu untersuchenden Risikomaße angewendet werden. Auch komplizierter verteilte Renditen (sprich annähernd nicht-normalverteilte Aktienrenditen) sollen genau untersucht werden, um die Unterschiede der Risikomaße deutlich herauszuarbeiten.

Für eine weitere Analyse soll in späterer Folge auch noch eine MAD-Portfoliooptimierung durchgeführt werden. Auch hier werden die effizienten Zusammenstellungen von Portfolios bestimmt. Auf diese optimierten Aktienportfolios sollen dann die neu zu untersuchenden Risikomaße angewendet werden. Diese Untersuchungen sollen insgesamt zu einem besseren Verständnis der Risikomaße beitragen.

2 Axiomatische Charakterisierung von Risikomaßen

Im Entwicklungsprozess der Theorie über Risikomaße werden verschiedene Axiomensysteme angeführt, welche jeweils eine Reihe der nachfolgenden Eigenschaften aufweisen.

Diese Eigenschaften stellen verschiedene Anforderungen an „gute“ bzw. vielleicht sogar „ideale“ Risikomaße.

Nun sollen die zugehörigen Axiome mathematisch aufbereitet werden, wobei auch der wirtschaftliche Hintergrund erläutert wird. Die vorgestellten Anführungen der Eigenschaften halten sich zum größten Teil an die Arbeit “Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization“ von Sereda, Bronshtein, Rachev, Fabozzi, Sun, und Stoyanov [2010]. Um einen vollständigen Überblick zu liefern, werden hier alle möglichen Eigenschaften von Risikomaßen aufgelistet. Die vier in dieser Arbeit behandelten Klassen von Risikomaßen (vgl. Auflistung auf Seite 1) weisen jedoch nicht alle vorgestellten Eigenschaften auf.

2.1 Grundlagen - Definition eines Risikomaßes

„Risk, like beauty, is in the eye of the beholder.“ [Leslie Balzer]

Der Abschnitt 2.1 hält sich größtenteils an die Arbeiten von Brandtner [2012a] und Kriele und Wolf [2012].

In der Finanzwelt werden bewusst Risiken zur Ertragserzielung eingegangen. Dabei entwickelt sich die Fähigkeit eines Finanzunternehmens, Risiken umfassend zu messen, zu überwachen und zu steuern, zu einem entscheidenden Parameter seiner strategischen Positionierung im zunehmend global ausgerichteten Wettbewerb.

Risiko wird nachfolgend somit als ein eigenständiges Konzept verstanden und in Gestalt von Risikomaßen, die unsicheren Positionen einen sicheren Risikowert zuweisen, quantifiziert.

Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer σ -Algebra \mathcal{M} und einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Ω beschreibt die Menge der möglichen Umweltzustände bzw. der möglichen Ergebnisse für welchen man $n := |\Omega| < \infty$ annimmt. Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine Zufallsvariable X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, die eine Abbildung von der Ergebnismenge Ω in die reellen Zahlen darstellt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $\mathcal{L}^{(0)}(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ die Menge aller Zufallsvariablen aus (Ω, \mathcal{M}) , die fast sicher endlich sind. Sei $V \subseteq \mathcal{L}^{(0)}$ die Menge, die die Zufallsvariablen der Verluste beinhaltet.

Definition 2.1. Ein Risikomaß $\rho \in V$ ist eine Abbildung

$$\rho : V \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X),$$

d.h. eine Abbildung der Zufallsvariablen in die reellen Zahlen, die jeder Zufallsvariable X eine reelle Zahl $\rho(X) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Bemerkung 2.1. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es in der Fachliteratur zwei Möglichkeiten der Darstellung von Wertentwicklungen gibt. Das heißt, Verluste können als negative oder als positive Zufallsvariablen betrachtet werden:

- a) „heutiger Wert“ – „gestriger Wert“ des Portfolios (Verlust < 0)
- b) „gestriger Wert“ – „heutiger Wert“ des Portfolios (Verlust > 0)

Die Definition eines Verlustes wirkt sich in Folge dessen auch auf die Eigenschaft der Monotonie (fallende oder steigende) bzw. der Translationsinvarianz aus (siehe Eigenschaft 5 und 6). In dieser Arbeit betrachten wir Verluste als negative Zufallsvariablen; sei also X eine Verlustfunktion dann gilt $X < 0$ (Risiko). Der Gewinn ist ein Ergebnis größer als 0. Beide Arten der Betrachtung sind richtig, es ist lediglich eine Frage der Konvention.

Axiome zur Bestimmung von bestimmten Risikomaßen können generell in drei Typen unterteilt werden:

- Grundlegende rationale Axiome: Werden von den meisten Risikomaßen erfüllt (zum Beispiel: Monotonie)
- Additive Axiome: Behandeln Summen von Risiko
- Technische Axiome: Befassen sich größtenteils mit Stetigkeitsbedingungen

Eigenschaft 1. Verteilungsinvarianz

Die Verteilungsinvarianz sagt aus, dass das Risikomaß $\rho(X)$ nicht vom realisierten Verlust im Speziellen abhängt, sondern von seiner zugrundeliegenden Verteilung, d.h. $\rho(X) = \rho(F_X)$, wobei F_X die Verteilungsfunktion von X ist ($F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$).

Die Bedingung stellt sicher, dass F_X alle verwendeten Informationen beinhaltet, um das Risiko von X zu messen.

Verteilungsinvarianz kann wie folgt formuliert werden:

$$F_X = F_Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y),$$

für alle zufälligen Portfolio-Renditen X und Y mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y .

In anderen Worten, ρ ist verteilungsinvariant im Sinne von $\rho(X) = \rho(Y)$, solange X und Y die gleiche Verteilungsfunktion bezüglich des Anfangswahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} haben.

Das heißt, dass bei Vorlage von zwei identischen Verteilungsfunktionen auch das Risiko identisch sein soll. Eine Abhängigkeit von Expertenwissen oder Ähnlichem soll also nicht bestehen. Diese Annahme ist für ein Risikomaß, das von empirischen Daten abgeschätzt wird, essentiell, da dies die Einsetzbarkeit in der Praxis garantiert.

Verteilungsinvarianz bedeutet, dass es unerheblich ist, in welchem Umweltzustand eine finanzielle Position eine bestimmte Realisierung annimmt. Relevant für die Risikohöhe sind allein die Realisierungen in Verbindung mit den ihnen zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten. Präferenzen für bestimmte Umweltzustände, die etwa bei der Bewertung auf arbitragefreien Kapitalmärkten durch umweltzustandsabhängige Diskontfaktoren umgesetzt werden, können durch verteilungsinvariante Risikomaße nicht abgebildet werden (vgl. Kriele und Wolf [2012]).

Eigenschaft 2. Positive Homogenität

Positive Homogenität (auch als positive Skalierbarkeit bekannt) wird wie folgt definiert: Für jedes positive λ , $k \in \mathbb{N}$ und einer zufälligen Portfolio-Rendite $X \in V$ gilt:

$$\rho(\lambda X) = \lambda^k \rho(X).$$

Positive Homogenität bedeutet demnach, dass ein Risikomaß die gleiche Dimension (Skalierung) wie die Zufallsvariable X hat. Wenn der Parameter $k = 0$ ist, dann hängt das Risikomaß nicht von der Skalierung ab.

Von der finanziellen Perspektive aus gesehen bedeutet positive Homogenität demnach, dass ein lineares Wachstum des Investitionsvolumens durch einen positiven Faktor zu einem linearen Anstieg des Risikos durch den selben Faktor führt. Obwohl Artzner et al. [1999] adäquate Risikomaße fordern, um die Eigenschaft der positiven Homogenität zu erfüllen, lassen Föllmer und Schied

[2002c,d] diese Annahme wieder mit der Begründung fallen, dass das Risiko nichtlinear steigen könnte, wenn die Größe der Position ansteigt. Dies würde etwa beim Liquiditätsrisiko der Fall sein.

Positive Homogenität ist skalierungsinvariant: Es ist unwesentlich, ob man das Risiko in Cent oder Euro misst. Würde die positive Homogenität nicht gelten, hätte die willkürlich gewählte Geldeinheit einen Einfluss auf das Kapital, was natürlich nicht sein sollte. Man kann die Homogenität auch in dem Sinne real interpretieren, dass eine Vervielfachung der Versicherungssummen eines Portfolios eine entsprechende Vervielfachung des Risikos nach sich zieht. Dies ist bei kleinen Beständen plausibel. Bei größeren Beständen werden die Liquiditätsrisiken jedoch zunehmend größer, da im Falle eines Versicherungsfalls größere Zahlungen geleistet werden müssen (vgl. Kriele und Wolf [2012]).

Eigenschaft 3. Summe von Risiken

Es seien zwei verschiedene Finanzgüter mit zufälligen Gewinnen $X, Y \in V$ gegeben. Die Auszahlung eines Portfolios bestehend aus diesen zweien Finanzgütern ist gleich $X + Y$.

Eigenschaft 3.1. Subadditivität

Die Eigenschaft der Subadditivität wird wie folgt ausgedrückt:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Subadditivität besagt demnach, dass das Risiko eines Portfolios nicht größer als die Summe der Risiken der einzelnen Komponenten des Portfolios ist. In anderen Worten: „a marger does not create extra risk“ (Artzner et al. [1999]). Die Erfüllung dieser Eigenschaft führt zum Diversifikationseffekt. Obwohl Artzner et al. [1999] die Subadditivität als notwendige Voraussetzung sehen, um ein kohärentes Risikomaß zu konstruieren, gibt es empirische Anhaltspunkte, dass die Subadditivität in der Realität nicht immer erfüllt ist. Diese Eigenschaft besagt also, dass es bei der Kombination von risikobehafteten Portfolios Diversifizierungseffekte gibt. Subadditivität ist für einen Versicherer besonders intuitiv, da das Geschäftsmodell der Versicherung auf dem Diversifizierungseffekt beruht.

Auch hier kann argumentiert werden, dass Subadditivität nicht immer gelten muss. Wenn zum Beispiel zwei Unternehmen verschmelzen, kann es durch interne Machtkämpfe zu einer insgesamt schlechteren Risikolage kommen,

sodass dem verschmolzenen Unternehmen in der Gesamtbetrachtung ein Risikokapital zuzuordnen wäre, das größer als die Summe der Einzelkapitale ist. Man kann auch argumentieren, dass bei einer Vervielfachung der Versicherungssumme wegen der höheren Liquiditätsrisiken Super-Additivität (siehe Eigenschaft 3.3) anstelle der Subadditivität angemessen sei (vgl. Kriele und Wolf [2012]).

Eigenschaft 3.2. Komonotone Additivität

Definition 2.2 (Wang et al. [1997]). *X und Y heißen komonoton, falls für alle $\omega, \omega' \in \Omega$ gilt*

$$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0$$

Der Ausdruck komonoton kommt von dem Term 'common monotonic' und wurde von Schmeidler [1986] und Yaari [1987] diskutiert.

Die komonotone Additivität ist wie folgt ausgedrückt:

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

Diese Eigenschaft wird für unabhängige und komonotone Zufallsvariablen X und Y vorausgesetzt.

Komonotone Risiken sind Wetten auf das gleiche Ereignis, daher stellt keine der beiden eine Absicherung für die andere dar. Aufgrund dieser no-hedge Bedingung findet keine Risikominderung für ein derartig kombiniertes Portfolio statt, wodurch sich die komonotone Additivität ergibt.

Komonotonie ist dabei im Risikomanagement die „schlimmste Art“ der Abhängigkeit, da sie nicht nur lineare, wie die Korrelation, sondern auch nicht-lineare Abhängigkeiten erfassen kann.

Das bedeutet, es tritt kein Diversifizierungseffekt ein. Folglich mindert ein Portfolio von komonotonen Risiken das Risiko nicht.

Eigenschaft 3.3. Super-Additivität

Super-Additivität besagt, dass das Risikomaß des gesamten Portfolios größer ist als die Summe der einzelnen Risikomaße

$$\rho(X + Y) \geq \rho(X) + \rho(Y).$$

Die Super-Additivität gilt überwiegend als unerwünscht. Betrachtet man sie zum Beispiel im Bereich der Versicherungsmathematik, gilt demnach, dass sie

mit zunehmender Größe des Kollektives den Prämienanteil für ein einzelnes Risiko des Kollektivs nicht nur nicht geringer werden, sondern im Allgemeinen sogar wachsen lässt.

Eigenschaft 4. Konvexität

(1) Ein Risikomaß ρ ist konvex wenn für alle $X, Y \in V$, $0 \leq \lambda \leq 1$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$$

Konvexität stellt die Diversifikations-Eigenschaft sicher und schwächt die Anforderung ab, dass ein Risikomaß sensitiver im Bezug auf die Summierung von großen Risiken sein muss.

Die folgenden zwei Eigenschaften sind äquivalente Definitionen zur Eigenschaft der Konvexität wobei hier ein Risikomaß über die Verteilungsfunktion definiert wird. (2) Ein Risikomaß ρ ist konvex wenn für alle $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, und Verteilungsfunktionen F, G , folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\rho(\lambda F + \mu G) \leq \lambda\rho(F) + \mu\rho(G).$$

(3) *Verallgemeinerte Konvexität.*

Ein Risikomaß ρ erfüllt die Eigenschaft der Verallgemeinerten Konvexität, wenn für alle $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, und Verteilungsfunktionen U, V, H , sodass die folgenden Zufallsvariablen $X, Y, \lambda X + \lambda Y$ existieren, für die $F_X = U$, $F_Y = V$, $F_{\lambda X + \mu Y} = H$ gilt, folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\rho(H) \leq \lambda\rho(U) + \mu\rho(V).$$

Eigenschaft 5. Monotonie

Für alle zufälligen Portfolio-Renditen X und Y , sodass $X \stackrel{f.s.}{\geq} Y$ gilt, folgt

$$\rho(X) \leq \rho(Y),$$

dies entspricht einer fallenden Monotonie.

Das heißt, dass die Ungleichung $X \leq Y$ fast sicher gilt. In weitere Folge wird für $\stackrel{f.s.}{\geq}$ immer $X \geq Y$ geschrieben. Aus der Monotonie folgt, dass wenn die Rendite X eines Finanzgutes nicht kleiner als die Rendite Y eines zweiten Finanzgutes ist, das Risiko des ersten Produktes nicht größer als das Risiko des

zweiten Produktes ist. Eine andere Darstellung der Monotonie-Eigenschaft eines risiko-freien Finanzgutes ist die Folgende:

$$X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(0)$$

für alle $X \in V$.

Bemerkung 2.2. $X \stackrel{f.s.}{\geq} Y$ bedeutet, dass die Ungleichung $X \leq Y$ fast sicher gilt. In weitere Folge wird für $\stackrel{f.s.}{\geq}$ immer $X \geq Y$ geschrieben.

Eigenschaft 6. Translationsinvarianz

Eigenschaft 6.1.

Für die nicht-negative Konstante $\alpha \geq 0$ und $C \in \mathbb{R}$, wird die Eigenschaft wie folgt dargestellt:

$$\rho(X + C) = \rho(X) - \alpha C.$$

Diese Eigenschaft besagt, dass wenn die Auszahlung durch eine bestimmte Konstante ansteigt, sich das Risiko verringert. In der Praxis werden $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ häufig verwendet.

Eigenschaft 6.2.

Mit $\alpha = 0$ folgt, dass durch Aufschlag eines gewissen Vermögens das Risiko unverändert bleibt: Für alle X und Konstanten C gilt,

$$\rho(X + C) = \rho(X)$$

Diese Eigenschaft wird auch als *Gajvoronsky-Pflug (G-P) Translationsinvarianz* bezeichnet.

Eigenschaft 6.3.

Der Fall $\alpha = 1$ bedeutet, dass wenn die Auszahlung um einen gewissen Betrag erhöht wird, das Risiko um den selben Betrag sinkt.

$$\rho(X + C) = \rho(X) - C.$$

Eigenschaft 6.4.

Ist ein konstantes, positives Vermögen gegeben, d.h. $C \geq 0$, erhalten wir

$$\rho(X + C) \leq \rho(X).$$

Dieses Ergebnis stellt eine Übereinstimmung mit der Monotonie-Eigenschaft $X + C \geq X$ dar und wird auch als *Shift-Invarianz* bezeichnet.

Eigenschaft 6.5.

In der Praxis beinhaltet die Translationsinvarianz (mit $\alpha = 1$)

$$\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0,$$

d.h. wir erhalten eine risiko-neutrale Position indem wir $\rho(X)$ zur Anfangsposition X hinzufügen.

Translationsinvarianz besagt, dass sichere Verluste vollkommen mit Kapital hinterlegt werden müssen, aber nicht das Restrisiko beeinflussen: Ein sicherer Verlust ist kein Risiko, weil er vollkommen absehbar ist. Aus der Translationsinvarianz folgt außerdem $\rho(X - \rho(X)) = 0$. Das Risikokapital $\rho(X)$ ist also genau der Geldbetrag, der gehalten werden muss, um bezüglich des Risikomaßes das Risiko vollkommen abzufedern (vgl. Kriele und Wolf [2012]).

Definition 2.3. (*Risikoaversions-Konzept*)

Sei $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion. Wir bezeichnen mit $u(X)$ den Nutzen der Rendite X . Die Entscheidung wird nicht bezüglich der erwarteten Rendite getroffen, sondern bezüglich des erwarteten Nutzens der Rendite.

Sei u zweimal differenzierbar und streng monoton wachsend.

- Wenn $u''(X) < 0$ gilt, spricht man von Risikoaversion (konkave Nutzenfunktion).
- Wenn $u''(X) = 0$ gilt, spricht man von Risikoneutralität (lineare Nutzenfunktion).
- Wenn $u''(X) > 0$ gilt, spricht man von Risikoaffinität (konvexe Nutzenfunktion).

Definition 2.4. (*Arrow-Pratt-Maß*)

Der Grad der Risikoaversion lässt sich anhand des Arrow-Pratt-Maßes messen. Das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion ist definiert als negativer Quotient der zweiten und ersten Ableitung der Nutzenfunktion

$$ARA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \tag{1}$$

Dabei implizieren positive Werte Risikoaversion, negative Werte Risikofreude und für den Wert Null liegt für das Arrow-Pratt-Maß Risikoneutralität vor. Zusätzlich zum absoluten Arrow-Pratt-Maß kann mit Hilfe des relativen Arrow-Pratt-Maßes

$$ARR(x) = ARA(x) \cdot x = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x \tag{2}$$

der relative Grad der Risikoaversion gemessen werden. Hier wird die Höhe des Anfangsvermögens mit in Betracht gezogen.

Eigenschaft 7. Konsistenz

Ziel ist hier die Messung der Risiken verschiedener Alternativen. Es soll eine Aussage im Sinne von „eine Alternative ist riskanter als eine andere Alternative“ getroffen werden. Zwischen den Alternativen wird eine Ordnungsrelation \geq_n erzeugt.

Definition 2.5. (*Stochastische Dominanz erster Ordnung (First-order stochastic dominance - FSD)*)

Seien X und Y Zufallsvariablen mit zugehöriger Verteilungsfunktion F_X, F_Y . X dominiert Y stochastisch in erster Ordnung (i.Z. $X \geq_1 Y$), falls gilt:

$$F_X(x) \leq F_Y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Wenn ein Investor nun X gegenüber Y vorzieht, dann folgt aus der FSD, dass das Risiko von X kleiner ist als das Risiko von Y . Ausgedrückt durch die Nutzenfunktion u gilt Folgendes

$$X \geq_1 Y \rightarrow \mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$$

für alle monoton wachsenden Nutzenfunktionen u .

FSD charakterisiert die Vorlieben von risikoaffinen Investoren. Ortobelli et al. [2006] klassifizierten die Konsistenz der Risikomaße in Bezug auf die stochastische Dominanz erster Ordnung als „safety - risk measures“.

Definition 2.6. (*Stochastische Dominanz 2. Ordnung (SSD)*)

Das Konzept der SSD wurde von Hader und Russell [1969] eingeführt, obwohl Rothschild und Stiglitz [1970] es dann als erstes in der Portfolio-Theorie eingesetzt haben. Die Stochastische Dominanz 2. Ordnung hat folgende Form: X dominiert Y stochastisch zweiter Ordnung (i.Z. $X \geq_2 Y$), falls gilt:

$$X \geq_2 Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$$

für alle wachsenden und konkaven Nutzenfunktionen u . SSD charakterisiert nicht-sättigende risikoaverse Investoren.

Eine weitere Definition des Konzepts der stochastischen Dominanz 2. Ordnung ist Folgende:

X dominiert Y stochastisch zweiter Ordnung (i.Z. $X \geq_2 Y$), falls gilt:

$$\int_{-\infty}^x F_X(t)dt \leq \int_{-\infty}^x F_Y(t)dt \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Definition 2.7. (*Konvexe Dominanzbeziehung*)
 Y dominiert X bezüglich der konvexen Ordnung (i.Z. $X \leq_{CX} Y$), wenn gilt

$$\mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)]$$

für alle konvexen Nutzenfunktionen u .

Aus den obigen Definitionen lassen sich nun die Eigenschaften für die stochastischen Dominanzbeziehungen ableiten.

Eigenschaft 7.1.

Besteht zwischen zwei Alternativen eine Ordnung, dann besteht eine Beziehung zwischen der Ordnung der Alternativen und der Risikohöhe. Konsistenz bezüglich *stochastischer Dominanz n -ter Ordnung* hat folgende allgemeine Form:

$$X \geq_n Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

d.h. eine Alternative X ist mindestens so riskant wie eine Alternative Y , wenn das Risiko der Alternative X größer oder gleich dem Wert des Risikomaßes der Alternative Y ist. In der Praxis ist der maximale Wert $n = 2$ (Stochastische Dominanz 2.Ordnung). Der Wert $n = 0$ hingegen entspricht der Monotonie-Eigenschaft.

Die Konsistenz bezüglich der stochastischen Dominanz ist eine notwendige Eigenschaft für ein Risikomaß, weil es uns erlaubt, die Menge aller optimalen Portfolioauswahlen zu treffen, wenn entweder die Vermögensverteilung oder die erwartete Nutzenfunktion von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt.

Eigenschaft 8. Positivität

$\rho(X) > 0$ für alle nicht-konstanten X , wobei $\rho(X) = 0$ für ein konstantes X gilt.

Eigenschaft 9. Stetigkeit

Definition 2.8.

- Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \geq 1}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Schreibweise: $X_n \xrightarrow{P} X$

- Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \geq 1}$ konvergiert schwach gegen X , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Verteilungsfunktion F_X .

Schreibweise: $X_n \xrightarrow{w} X$

Eigenschaft 9.1.

Probability convergence continuity: Wenn $X_n \xrightarrow{P} X$, dann konvergiert $\rho(X_n)$ und hat den Grenzwert $\rho(X)$.

Eigenschaft 9.2.

Schwache topologische Stetigkeit: Wenn $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$, dann konvergiert $\rho(F_{X_n})$ gegen $\rho(F_X)$.

Eigenschaft 9.3.

Horizontale Shift-Stetigkeit: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(X + \delta) = \rho(X)$.

Diese Eigenschaften bezüglich der Stetigkeit sind äußerst wichtig. Aus der Nichterfüllung der Stetigkeits-Eigenschaft folgt, dass sogar eine kleine Abweichung einer Prognose zu einer großen Wertveränderung des Risikomaßes führen kann.

Eigenschaft 10. Strictly Expectation-boundedness

Das Risiko eines Portfolios ist immer größer als der negative erwartete Portfolio-Return.

$$\rho(X) \geq -\mathbb{E}[X], \text{ solange } \rho(X) > -\mathbb{E}[X] \text{ für alle nicht konstanten } X,$$

wobei $\mathbb{E}[X]$ der mathematische Erwartungswert von X ist.

Eigenschaft 11. Risiko mit risikofreiem Return C

Laut Klassifikationen, die von Albrecht [2004] gegeben sind, kann eine bestimmte Anzahl von Risikomaßen in zwei Kategorien, bezogen auf den Typ der Risiko-Auffassung, unterteilt werden: Maße erster Art („measures of the first kind“) und Maße zweiter Art („second kind“). Risikomaße mit Eigenschaft 2 und Eigenschaft 11.1 sind Risikomaße der zweiten Art, hier wird Risiko als „notwendiges Kapital bzw. notwendige Prämie“ betrachtet.

Eigenschaft 11.1

$\rho(C) = -C$, für konstante C , folgt aus der Invarianzeigenschaft 2.1:

- Wenn $C > 0$ und $C \in \mathbb{R}$, ist die Situation ausgeglichen und das Risiko ist negativ.
- Die Umkehrung gilt für $C < 0$.

Risikomaße mit Eigenschaft 2 und Eigenschaft 11.2 gehören zu Klasse der ersten Art. Hier wird das Risiko als „die Größe der Abweichung von der Vorgabe“ wahrgenommen.

Eigenschaft 11.2

$\rho(C) = 0$, das heißt es gibt bei einem bestimmten, risikofreien Kapital kein Risiko.

Eigenschaft 12. Symmetrie

$\rho(-X) = -\rho(X)$, bezogen auf Eigenschaft 8.

Eigenschaft 13. Allokation

Ein Risikomaß muss nicht auf dem ganzen Wertebereich einer Zufallsvariable definiert sein. Sei U eben so eine Menge von Zufallsvariablen. Aus der Bedingung $F_X = F_Y$, wobei $X \notin U$, folgt, dass $\rho(X) = \rho(Y)$. Offensichtlich ist diese Eigenschaft nur für verteilungsinvariante Maße erfüllt. Meistens wird ein Grenzwert T für U festgelegt mit $U = (-\infty, T]$ oder $U = [T, \infty)$.

Eigenschaft 14. Statistische und dynamische Eigenschaft

Es ist nützlich, ein dynamisches und mehr-periodisches Modell zu verwenden, um die folgenden Fragen zu beantworten: Wie sollte ein Unternehmen mit neuen Informationen in jeder Periode umgehen und wie sollte das Risikomaß der neuen Position erörtert werden?

Riedel [2004] führte diese spezifischen Eigenschaften, sowie vorhersagbare Translationsinvarianz und dynamische Konsistenz für ein Risikomaß ein, um die dynamische Natur der Finanzmärkte zu erfassen.

3 Klassen von Risikomaßen

Zur Vorbereitung auf die Diskussion über die unterschiedlichen Risikomaße, deren Vor- und Nachteile, sowie deren Einsetzbarkeit in der Portfoliooptimierung, werden hier die Klassen der Risikomaße definiert und charakterisiert. Das Augenmerk wird auf vier Klassen gelegt: Spektrale Risikomaße, Deviation-Maße und Expectation-bounded-Risikomaße (zusammengefasst in einer Klasse), Reward-Maße und die Klasse der 3/5- parametrischen Risikomaße.

Auf die Konzepte der folgenden Klassen (Momenten-basierende, kohärente und konvexe Risikomaße) wird jeweils nur kurz eingegangen, da sie nur der Vollständigkeit dienen sollen. Sie halten sich größtenteils an das Vorlesungsskriptum *Risikotheorie und -management* von Dragoti-Çela [2009].

3.1 Momenten-basierende Risikomaße

3.1.1 Value at Risk ($VaR_\alpha(X)$)

Der Value at Risk ist ein direktes und einfaches finanzmathematisches Maß und zählt zur Klasse der Downside-Maße. Er beschreibt den Betrag, den man mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit höchstens „verlieren“ wird.

Der Value at Risk, $VaR_\alpha(X)$, ist der minimale Verlust, der in $100(1 - \alpha)\%$ der schlechtesten Szenarien für das Portfolio entsteht.

Mit anderen Worten, wenn ein Unternehmen mit der Wahrscheinlichkeit α im Laufe einer Periode sein Eigenkapital verzehren möchte, muss es als Eigenkapital *mindestens* den Betrag $VaR_\alpha(X)$ vorhalten, wobei X den Verlust in dieser Periode bezeichnet (vgl. Kriele und Wolf [2012]).

Definition 3.1. Sei X eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0, 1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau. $VaR_\alpha(X)$ ist die kleinste Zahl x , sodass $\mathbb{P}(X > x) \leq 1 - \alpha$ gilt.

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : 1 - F_X(x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Definition 3.2. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. Die Funktion

$$F^{\leftarrow} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$$

heißt verallgemeinerte inverse Funktion von F .

Hier gilt $\inf\{\emptyset\} = -\infty$

Falls F streng monoton steigend ist, gilt $F^{-1} = F^{\leftarrow}$

Definition 3.3. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$ heißt α -Quantil von F .

Für die Funktion L und ihre Verlustverteilung F gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha).$$

Bemerkung 3.1. (Vor- und Nachteile des VaR)

- Der Vorteil des VaR liegt vor allem in seiner einfachen Interpretierbarkeit, da das Marktrisiko in einer einzigen Zahl zusammengefasst wird.

Vor allem von akademischer Seite sieht sich der Value-at-Risk, trotz - oder gerade wegen - seiner einfachen Konzeption massiver Kritik ausgesetzt:

- Der größte Nachteil des VaR ist in der fehlenden Subadditivität zu sehen. Daher können die Effekte der Portfolio-Diversifikation nicht richtig beschrieben werden. Es ist also möglich, dass die Summe der VaR-Werte von Teilportfolios kleiner ist als der VaR-Wert des Gesamtportfolios.
- Nachteilig ist auch, dass durch ihn alle Extremverluste im α -Tail der Verteilung nicht berücksichtigt werden, obgleich gerade diese Verluste eine wesentliche Risikoquelle für die Stabilität des Finanzsystems darstellen.
- Darüber hinaus ist die Berechnung des VaR im Allgemeinen schwierig, da Quantile nicht additiv sind. (vgl. Eddari [2007])

3.1.2 Conditional Value at Risk ($\text{CVaR}_\alpha(X)$ oder Expected Shortfall (ES))

Ein Nachteil des VaR ist, dass er keine Auskunft darüber gibt, wie groß der Verlust sein könnte, falls $X \geq \text{VaR}_\alpha(X)$. Aus diesem Grund wird hier ein häufig verwendetes Risikomaß - der Conditional Value at Risk, von Rockafellar, Uryasev, und Zabarankin [2002] eingeführt, besprochen.

Definition 3.4. Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und X eine kontinuierliche Verlustverteilung mit Verteilungsfunktion F_X .

$$\text{CVaR}_\alpha(X) := \text{ES}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)].$$

Definition 3.5. Conditional Value at Risk - Expected Shortfall

Der α - Expected Shortfall wird für ein vorgegebenes Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1]$ und einer verallgemeinerten Inversen von $F_X(x)$ definiert als

$$CVaR_\alpha(X) := ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(p) dp = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(X) dp.$$

Ausgehend von der Interpretation des VaR als $100(\alpha-1)\%$ -Maximalschaden, kann der Expected Shortfall als durchschnittlicher Maximalschaden in den $100 \cdot \alpha\%$ schlimmsten Fällen interpretiert werden.

3.2 Das Axiomensystem von Pedersen und Satchell

Die in diesem Unterkapitel besprochene Thematik hält sich im Wesentlichen an die Arbeit von Albrecht [2004].

Das Axiomensystem von Pedersen und Satchell [1998] wurde als eines der ersten Axiomensysteme für Risikomaße entwickelt. Die Axiome lauten:

Definition 3.6. Sei V die Menge aller in $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ definierten reellwertigen Zufallsvariablen.

- (i) (Positivität) $\rho(X) \geq 0$
- (ii) (Positive Homogenität) $X \in V, \lambda > 0, \lambda X \in V \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- (iii) (Subadditivität) $X, Y, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- (iv) (Shift-Invarianz) $X \in V, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + C) \leq \rho(X)$

Bemerkung 3.2. (*Erklärung der Axiome*)

- *Risiko wird hier grundsätzlich als Abweichung von einem Lage-Maß verstanden, insofern gilt stets $\rho(X) \geq 0$.*
- *Die Homogenität impliziert, dass das Risiko eines Vielfachen einer bestimmten Basisfinanzposition das entsprechende Vielfache des Risikos dieser Basisposition ist (z.B. beinhaltet der Kauf von zwei Wertpapieren doppelt so viel Risiko wie der Kauf nur eines Papiers).*
- *Die Subadditivitätseigenschaft besagt, dass das Risiko von in einem Bestand zusammengefassten Einzelengagements nicht höher sein soll als die Summe der jeweiligen Einzelrisiken.*
- *Die Shift-Invarianz bedeutet, dass das Hinzufügen einer sicheren Größe nur die Lage, aber nicht das Risiko ändert.*

Das von Rockafellar, Uryasev, und Zabarankin [2002] postulierte Axiomensystem für Deviation-Maße (Abweichungsmaße) ist fast vollständig identisch mit diesem System von Pedersen und Satchell [1998] (enthält nur leichte Verschärfungen). Hierauf wird in Kapitel 3.6 wieder zurückgekommen.

Die folgenden Abschnitte 3.3 und 3.4 halten sich inhaltlich an die Arbeiten von Sereda et al. [2010] und Dragoti-Çela [2009].

3.3 Kohärente Risikomaße - Axiomensystem von Artzner et al.

Die Kritik am Value-at-Risk veranlasste Artzner et al. [1999] einen konzeptionellen neuartigen Zugang zur Risikomessung vorzuschlagen. Sie formulieren dazu in axiomatischer Form Anforderungen, die ein dann als kohärent bezeichnetes Risikomaß erfüllen muss. Ein Axiomensystem, das in der Literatur starke Beachtung gefunden hat, wurde von Artzner, Delbaen, Eber, und Heath [1999] postuliert.

Definition 3.7. Kohärente Risikomaße

Sei V die Menge aller in $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ definierten reellwertigen Zufallsvariablen. Eine Abbildung $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ wird ein kohärentes Risikomaß genannt, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(i) \text{ (Monotonie) } X, Y \in V, X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

$$(ii) \text{ (Subadditivität) } X, Y, X + Y \in V, \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

$$(iii) \text{ (Positive Homogenität) } X \in V, \lambda > 0, \lambda X \in V \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

$$(iv) \text{ (Translationsinvarianz) } X \in V, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + C) = \rho(X) - C$$

Bemerkung 3.3.

Im Falle $\rho(X) \geq 0$ kann dabei $\rho(X)$ als (minimales) zusätzliches Kapital interpretiert werden, das der risikobehafteten Finanzposition hinzugefügt werden muss, um eine „risikolose“ Position zu erreichen. In der Tat folgt aus der Eigenschaft der Translationsinvarianz:

$$\rho(X + \rho(X)) = 0.$$

Translationsinvarianz beinhaltet im dargelegten Kontext die Forderung, dass das Hinzufügen eines sicheren Betrags das notwendige Kapital um diesen Betrag reduziert. Man beachte, dass hier von einer fallenden Monotonie ausgegangen wird und auf Grund dessen auch bei der Translationsinvarianz der Betrag auf der rechten Seite der Gleichung abgezogen wird. Hier wird das Risiko als (minimal) notwendiges (zusätzliches) Risikokapital verstanden.

Bemerkung 3.4. (Beispiele)

- Ein prominentes kohärentes Risikomaß, das in dieser Arbeit in weiterer Folge noch oft vorkommen wird, ist der Expected Shortfall (ES), auch bekannt als Tail (oder Conditional) VaR.

Laut Acerbi [2002] kann gezeigt werden, dass der Expected Shortfall ein Risikomaß ist, dass die Axiome eines kohärenten Risikomaßes in V , für alle $\alpha \in (0, 1)$ erfüllt.

- Ein Beispiel für ein Risikomaß, das kein kohärentes Maß ist, ist der VaR.

3.4 Konvexe Risikomaße

Konvexe Risikomaße (auch schwache kohärente Risikomaße genannt) wurden von Föllmer und Schied [2002a] und Föllmer und Schied [2002b] sowie von Frittelli und Gianin [2005] studiert und eingeführt. Konvexe Risikomaße sind eine Verallgemeinerung von kohärenten Risikomaßen.

Definition 3.8. Konvexe Risikomaße

Sei V die Menge aller in $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ definierten reellwertigen Zufallsvariablen. Eine Abbildung $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ wird ein konvexes Risikomaß genannt, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) (Monotonie) $X, Y \in V, X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- (ii) (Translationsinvarianz) $X \in V, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + C) = \rho(X) - C$
- (iii) (Konvexität)
 $\forall X, Y \in V, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$

Die Konvexitäts-Eigenschaft ist schwächer als die Eigenschaften der Subadditivität und der positiven Homogenität, die unter den Eigenschaften der kohärenten Risikomaße eine wichtige Rolle spielen. D.h. die Subadditivität und die positive Homogenität implizieren die Konvexität-Eigenschaft, jedoch gilt dies umgekehrt nicht.

Hier gehen wir nun auf die vier wichtigen Klassen von Risikomaßen ein, die in dieser Arbeit genauer behandelt werden. Hauptliteratur für die Überlegungen in den Kapiteln zu den einzelnen Risikoklassen sind: Sereda, Bronshtein, Rachev, Fabozzi, Sun, und Stoyanov [2010] und Brandtner [2012b].

3.5 Spektrale Risikomaße

„Spectral measures of risk are a coherent representation of subjective risk aversion“ [Acerbi [2002]]

Dieser Abschnitt basiert auf dem Originalwerk von Acerbi [2002].

Acerbi [2002] erweitert das Axiomensystem der kohärenten Risikomaße um zwei weitere Anforderungen, die dann auf die Klasse der spektralen Risikomaße führen.

Sie bilden eine Subklasse kohärenter Risikomaße. Das Konzept der spektralen Risikomaße, deren Diskussion Inhalt dieses Kapitels ist, wird hier auf zwei Wegen hergeleitet. Im ersten Zugang werden die Eigenschaften spektraler Risikomaße axiomatisch postuliert.

Im zweiten Zugang, der auf die erste Arbeit zu spektralen Risikomaßen von Acerbi [2002] zurückgeht, wird diese Klasse als Verallgemeinerung des Expected Shortfalls (CVaR) verstanden. Dies war die ursprüngliche Herangehensweise an das Konzept der Charakterisierung der spektralen Risikomaße.

3.5.1 Die Axiomatik spektraler Risikomaße

Die erste Art, um spektrale Risikomaße zu definieren ist die axiomatische Charakterisierung (vgl. Acerbi und Tasche [2004]).

Definition 3.9. Eine Abbildung $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ wird ein *spektrales Risikomaß* genannt, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) (Monotonie) $X, Y \in V, X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- (ii) (Subadditivität) $X, Y, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- (iii) (Positive Homogenität) $X \in V, \lambda > 0, \lambda X \in V \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- (iv) (Translationsinvarianz) $X \in V, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + C) = \rho(X) - C$
- (v) (Verteilungsinvarianz) $F_X = F_Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$ für alle zufälligen Portfolio-Gewinne X und Y mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y

(vi) (Komonotone Additivität) Für alle komonotonen Zufallsvariablen $X, Y \in V, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

Bemerkung 3.5. Die ersten vier Axiome definieren die kohärenten Risikomaße nach Artzner et al. [1999]. Das Axiomensystem für spektrale Risikomaße wurde im Bezug auf jenes der kohärenten Risikomaße um zwei weitere Anforderungen erweitert. Die Eigenschaft der komonotonen Additivität und der Verteilungsinvarianz.

Das Axiom der Verteilungsinvarianz besagt demzufolge, dass zwei Zufallsvariablen mit gleicher Verteilungsfunktion auch denselben Risikowert zugewiesen bekommen. (vgl. Brandtner [2012a]).

Um spektrale Risikomaße in Zusammenhang mit der Klasse der kohärenten Maße zu bringen, gilt also Folgendes:

Die Abbildung $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *spektrales Risikomaß*, falls die kohärenten Axiome (i) - (iv) und zusätzlich die Axiome (v) und (vi) erfüllt sind.

3.5.2 Spektrale Risikomaße als Erweiterung des Expected Shortfall-Konzepts

Als zweiten Zugang werden die spektralen Risikomaße als Erweiterung des Expected Shortfalls definiert. Der α - Expected Shortfall $ES_{(\alpha)}$, genauer definiert als der „Durchschnitt der $\alpha \cdot 100\%$ schlimmsten Verluste“ eines Portfolios, ist ein kohärentes Risikomaß für jedes beliebige Konfidenz-Intervall $\alpha \in [0, 1]$. Es sei darauf hingewiesen, dass der ES nur eine mögliche Wahl aus einer großen Menge von Risikomaßen ist. Hat man bereits bekannte Risikomaße zur Verfügung, ist es leicht, neue Risikomaße zu „entwickeln“. Es ist zum Beispiel einfach zu zeigen, dass eine konvexe Kombination von Risikomaßen ebenso kohärent ist.

Die Idee ist es also, die Eigenschaften des Raumes der kohärenten Risikomaße, aufgespannt durch eine sehr allgemeine Kombination von α - Expected Shortfalls, zu studieren.

Der Expected Shortfall $ES_{\alpha}(X)$, als kohärente Version, kann als Grundbaustein zur Erlangung von neuen Risikomaßen verwendet werden. Er stellt eine direkte Verallgemeinerung dar, um die individuelle Risikoaversion zu berücksichtigen.

Folgende Proposition bildet den Ausgangspunkt für eine Erweiterung der

kohärenten Risikomaße und die Grundlage der Argumentation in Acerbi [2002]. Zur axiomatischen Charakterisierung der kohärenten Risikomaße siehe Definition (3.7).

Proposition 3.1. *Sei ρ_i ein kohärentes Risikomaß für $i = 1, \dots, n$. Dann ist jede konvexe Kombination $\rho = \sum_i \alpha_i \cdot \rho_i$ (mit $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ und $\sum_i \alpha_i = 1$) ein kohärentes Risikomaß.*

Analog gilt, wenn ρ_α eine einparametrische Familie von Risikomaßen mit $\alpha \in [a, b]$, dann gilt für jedes Gewicht $d\mu(\alpha)$ auf $[a, b]$ mit $\int_a^b d\mu(\alpha) = 1$ und $d\mu(\alpha) \geq 0$, dass

$$\rho = \int_a^b \rho(\alpha) \cdot d\mu(\alpha)$$

ein kohärentes Risikomaß ist.

Zur Wiederholung wird hier nochmals die Definition des Expected Shortfalls wiederholt.

Definition 3.10. *Der α - Expected Shortfall wird für ein vorgegebenes Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1]$ und einer verallgemeinerten Inversen von $F_X(x)$ definiert als*

$$CVaR_\alpha(X) := ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(p) dp.$$

Aufgrund der vorangegangenen Erläuterungen ist es naheliegend, in der Proposition 3.1 den Expected Shortfall als Grundstein zu wählen, um neue Risikomaße zu definieren. Die Proposition besagt also, dass jede Konvexkombination kohärenter Risikomaße erneut zu einem kohärenten Risikomaß führt. Die Wahl der Gewichtsfunktion $d\mu(\alpha)$ dient der Umsetzung individueller Risikoverständnisse. Wird der Expected Shortfall zu verschiedenen Konfidenzniveaus $\alpha \in [0, 1]$ als kohärentes Risikomaß verwendet, resultiert unter Verwendung der Gewichtsfunktion $\alpha \cdot d\mu(\alpha)$

$$\rho_\mu(X) = \int_0^1 ES_\alpha(X) \cdot \alpha \cdot d\mu(\alpha) = - \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(p) dp. \quad (3)$$

$\rho_\mu(X)$ ist ein Risikomaß, solange die Normalisierungs-Bedingung

$$\int_0^1 \alpha \cdot d\mu(\alpha) = 1 \quad (4)$$

erfüllt ist. Wegen Fubini-Tonelli (siehe Tonelli und Fubini [1915]) können wir die Integrale tauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
 \rho_\mu(X) &= - \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(p) dp \\
 &= - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) dp \underbrace{\int_p^1 d\mu(\alpha)}_{=\phi(p)} \\
 &= - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \cdot \phi(p) \cdot dp \equiv \rho_\phi(X)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Durch die vorangegangenen Umformungen erfolgt der Übergang von einer Gewichtung von Expected Shortfalls zu einer Gewichtung von Quantilen, wobei die Gewichtsfunktion der Quantile

$$\phi(p) = \int_p^1 d\mu(\alpha)$$

als positiv, fallendes *Risikospektrum* bezeichnet wird.

Die Norm-Bedingung $\int_0^1 \alpha \cdot d\mu(\alpha)$ kann in eine Norm-Bedingung für ϕ umgewandelt werden:

$$\int_0^1 \phi(p) dp = \int_0^1 dp \int_p^1 d\mu(\alpha) = \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_0^\alpha dp = \int_0^1 \alpha d\mu(\alpha) = 1 \tag{6}$$

Das heißt, für jedes Gewicht $d\mu(\alpha)$, das (4) erfüllt, hat man ein weiteres Risikomaß, das durch Gleichung (3) definiert wird, aber auch durch Gleichung (5) mit $\phi(p) = \int_p^1 d\mu(\alpha)$ ausgedrückt werden kann.

Umgekehrt gilt, dass Gleichung (5) für jede positiv fallende Funktion $\phi(p) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, welche Gleichung (6) erfüllt, ein Risikomaß beschreibt. Dieses Risikomaß kann auch durch Gleichung (3) mit $d\mu(\alpha) = -d\phi(\alpha)$ ausgedrückt werden.

Die Gewichtsfunktion der Quantile

$$\phi(p) = \int_p^1 d\mu(\alpha)$$

resultiert als Summe der Expected Shortfall-Gewichte $d\mu(\alpha)$ im Intervall $[p, 1]$. Demzufolge (es sei nochmals auf Proposition 3.1 verwiesen) weist die

Gewichtsfunktion $\phi(p)$ die Eigenschaften der Nichtnegativität (infolge der Nichtnegativität von $d\mu(\alpha)$), sowie der Monotonie und der Normalisierung (infolge der Integralbildung im Intervall $[p, 1]$) auf (vgl. Brandtner [2012b]). Diese Eigenschaften zeichnen ein „akzeptables“ Risikomaß (siehe Definition 3.12) aus. Um die Eigenschaften eines akzeptablen Risikomaßes zu definieren, werden folgenden Überlegungen angestellt.

Bei genauerer Betrachtung von Gleichung (5), sieht man, dass es nicht reicht, ϕ punktweise zu charakterisieren. Man definiert die Eigenschaften als ein Element des normierten Raumes $\mathcal{L}^1([0, 1])$, wo jedes Element durch eine Klasse von Funktionen repräsentiert wird, die sich auf einer Teilmenge von $[0, 1]$ nur von einem Nullmaß unterscheiden.

Die Norm in diesem Raum ist gegeben durch

$$\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(p)| dp. \quad (7)$$

Verschiedene repräsentative Funktionen ϕ_1, ϕ_2 ($\|\phi_1 - \phi_2\| = 0$) des gleichen Elements $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ definieren de facto dasselbe Maß ρ_ϕ .

Die Eigenschaften der Monotonie und Positivität eines Elements von $\mathcal{L}^1([0, 1])$ können nicht punktweise definiert werden wie für Funktionen. Deswegen werden folgende Definitionen eingeführt:

Definition 3.11. Das Element $\phi \in \mathcal{L}^1([a, b])$ sei „positiv“, wenn für alle $I \subset [a, b]$

$$\int_I \phi(p) dp \geq 0$$

gilt. Das Element $\phi \in \mathcal{L}^1([a, b])$ sei „nicht-wachsend“, wenn für alle $q \in (a, b)$ und für alle $\epsilon > 0$, sodass $[q - \epsilon, q + \epsilon] \subset [a, b]$, gilt

$$\int_{q-\epsilon}^q \phi(p) dp \geq \int_q^{q+\epsilon} \phi(p) dp.$$

Insgesamt folgt daher folgende Definition

Definition 3.12. Ein Element $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ ist ein „akzeptables“ Risikospektrum, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

1. Nicht-Negativität: ϕ ist positiv,
2. Monotonie: $\phi(p_1) \geq \phi(p_2)$ für alle $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$,
3. Normalisierung: $\|\phi\| = 1$

Aus den oberen Überlegungen lässt sich nun leicht folgende hinreichende Bedingung für ein spektrales Risikomaß formulieren und beweisen:

Satz 3.1. $\rho_\phi(X)$ sei definiert als

$$\rho_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \phi(p) dp \quad (8)$$

mit $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. Wenn ϕ ein akzeptables Risikospektrum ist, also die Eigenschaften aus Definition (3.12) erfüllt, dann ist $M_\phi(X)$ ein spektrales Risikomaß.

Beweis. Für alle akzeptablen Risikospektren $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ ist es immer möglich, eine repräsentative, positive und fallende Funktion $\phi(p)$ zu finden, die ein Maß μ auf $[0, 1]$ durch $d\mu(\alpha) = -d\phi(\alpha)$ definiert. Dann folgt die Kohärenz von $\rho_\phi(X)$ aus Gleichung (3) und (5) und Proposition 3.1. \square

Bemerkung 3.6. Die Integrationsbedingung aus Gleichung (8) definiert den Raum V_ϕ von Zufallsvariablen auf denen ρ_ϕ ein Risikomaß ist:

$$V_\phi = \{X \mid \phi F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{L}^1([0, 1])\}$$

In einer realen Risikomanagement-Anwendung wird das Integral

$$\rho_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \phi(p) dp$$

immer wohldefiniert und endlich sein. Es gilt zum Beispiel: Damit ρ_ϕ endlich ist, ist es notwendig, dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X^+] = \mathbb{E}[\max(X, 0)]$ und $\mathbb{E}[X^-] = -\mathbb{E}[\min(X, 0)]$ endlich sind und dass $\phi(p)$ beschränkt ist.

3.5.3 Die risikoaverse Funktion ϕ

Um die Bedeutung der risikoaversen Funktion (des Risikospektrums) $\phi(p)$ in Gleichung (11) zu verstehen, betrachten wir sie als Beispiel des Expected Shortfalls. Der ES kann durch ein Risikospektrum charakterisiert werden, da er schließlich den Grundbaustein der Konstruktion spektraler Risikomaße bildet.

$$ES_{(\alpha)}(X) = \rho_\mu(X) = \rho_\phi(X) \text{ für } \begin{cases} d\mu(\beta) = \frac{1}{\alpha} \delta(\alpha - \beta) d\beta \\ \phi(p) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_{\{0 \leq p \leq \alpha\}} = \frac{1}{\alpha} \delta(\alpha - p) \end{cases} \quad (9)$$

wobei die Dirac-Delta-Funktion $\delta(x)$ definiert ist als: $\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c)$ für alle $c \in (a, b)$.

Das heißt, das Risikospektrum hat somit die Gestalt

$$\phi(p) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{für } 0 \leq p \leq \alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

Das Risikospektrum zeigt die Gleichgewichtung der unteren Quantile bis zum α -Quantil mit dem Gewicht $\frac{1}{\alpha}$ auf. Alle Quantile, die größer als das α -Quantil sind, erhalten ein Gewicht von 0. Das Risikospektrum des Expected Shortfalls ist in Abbildung 1 dargestellt. Abbildung 2 stellt den Zusammenhang zwischen Expected Shortfall und der Fläche über der Verteilungsfunktion her. (vgl. Brandtner [2012b])

Das Maß $ES_{(\alpha)}$ stellt das „Mittel der $\alpha \cdot 100\%$ schlimmsten Verluste“ von X dar. In anderen Worten ermittelt dieses Maß im Durchschnitt die möglichen Ergebnisse, die sich im linken α -Ende der Zufallsvariable X mit gleichen Gewichten befinden. Im allgemeinen Fall legt die Funktion $\phi(p)$ in Gleichung (8) verschiedene Gewichte $\phi(p)$ zu verschiedenen „ p -Konfidenz-Intervall-Stücken“ des linken Tails fest. Die Normalisierung $\|\phi\| = 1$ gewährleistet, dass die Gewichte im Mittel 1 ergeben.

Die Tatsache, dass ein akzeptables Risikospektrum $\phi(p)$ eine monotone fallende Funktion in p ist, liefert uns einen intuitiven Einblick in das Konzept der Kohärenz. Durch Satz (3.1) erhalten wir eine vernünftige Regel für die Kohärenz:

„Ein Maß ist kohärent, wenn es größere Gewichte zu schlechteren Szenarien zuteilt.“

Jeder rationale Investor kann seine subjektive Risikoaversion äußern, indem er eine andere Form für die Gewichtsfunktion ϕ wählt. Um Kohärenz zu erlangen, muss man die Wahl der Gewichtsfunktion auf eine positiv nicht-wachsende und normierte Funktion des Intervalls $[0, 1]$ einschränken.

Mit diesen Bedingungen kann jede Wahl von ϕ eine perfekt legitime Stellung zum Risiko repräsentieren. Die Funktion ϕ taucht als Instrument auf, mit dem der Investor seine subjektive Einstellung zum Risiko ausdrücken kann. Das Konzept des spektralen Risikomaßes ermöglicht somit die Abbildung eines individuellen Profils der Risikoaversion.

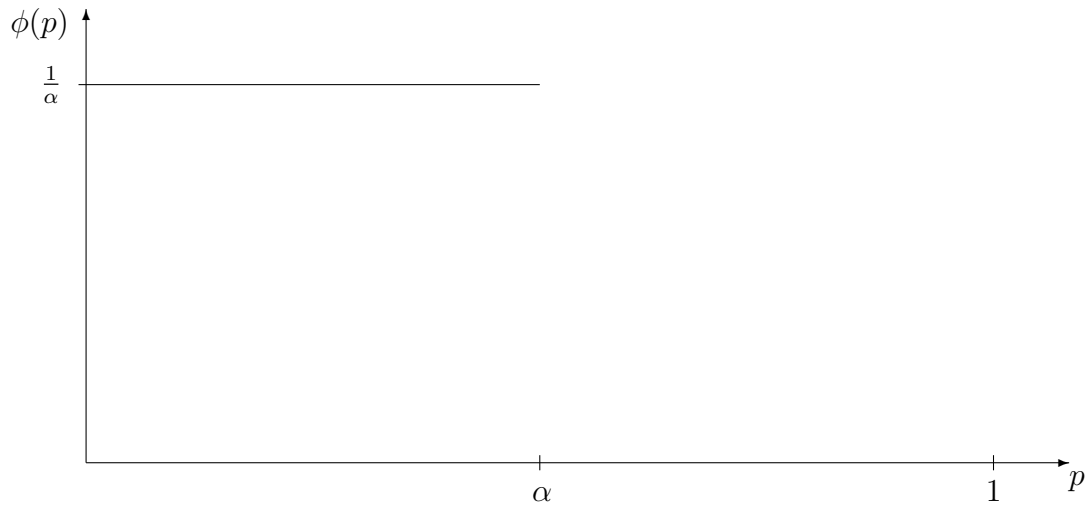


Abbildung 1: Graphische Darstellung des Risikospektrums des Expected Shortfalls

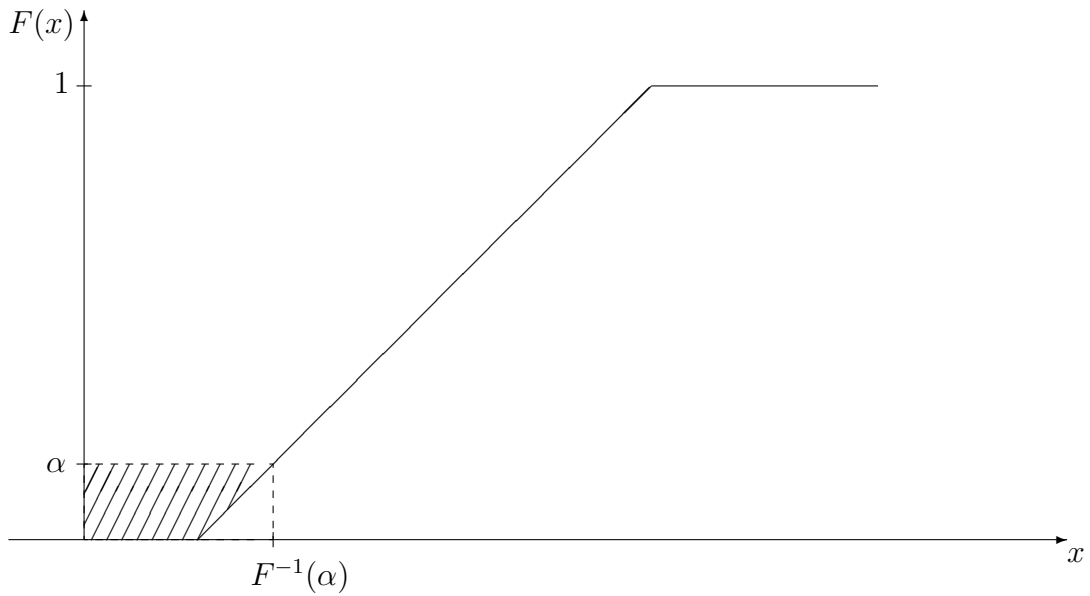


Abbildung 2: Darstellung des Expected Shortfalls als Fläche über der Verteilungsfunktion

Bemerkung 3.7. (*Nachteile des Expected Shortfalls*)

Der ES kann nur solche Risikoverständnisse abbilden, die eine risikoneutrale Verrechnung von Realisationen innerhalb des α -Tails und keine Verrechnung mit Realisationen außerhalb des α -Tails vorsehen. Dies wird am konstanten Verlauf des Risikospektrums in Höhe von $\frac{1}{\alpha}$ bis zum Wert α und anschließend in Höhe von Null bis zum Wert 1 deutlich (vgl. Brandtner [2012b]).

Definition 3.13. (*Risikoaverse Funktion und spektrales Risikomaß*)

Ein akzeptables Risikomaß $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ wird risikoaverse Funktion oder Risikospektrum des Risikomaßes

$$\rho_\phi(X) \equiv - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \cdot \phi(p) \cdot d(p)$$

genannt. Im Gegensatz wird das Risikomaß ρ_ϕ , das „spektrale Risikomaß“, erzeugt durch ϕ , genannt.

Im Folgenden wird nun bewiesen, dass die Bedingungen der Akzeptanz für die risikoaverse Funktion ϕ nicht nur hinreichend (siehe Satz 3.1) sondern sogar notwendig sind um ρ_ϕ als spektrales Risikomaß zu identifizieren.

Satz 3.2. *Ein Risikomaß $\rho_\phi(X)$ ist definiert durch*

$$\rho_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \cdot \phi(p) \cdot dp \tag{11}$$

mit $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. $\rho_\phi(X)$ ist ein spektrales Risikomaß genau dann wenn ϕ ein akzeptables Risikospektrum ist.

Beweis. Vergleiche Acerbi [2002], Theorem 4.1 □

3.5.4 Beispiele spektraler Risikomaße

Die weiteren Beispiele halten sich größtenteils an die Arbeit von Brandtner [2012b] und Brandtner [2012a].

Grundsätzlich ist als Risikospektrum ϕ jede nichtnegative, auf dem Intervall $[0, 1]$ fallend verlaufende und flächenmäßig auf Eins normierte (Dichte-)Funktion anwendbar. Das prominenteste spektrale Risikomaß, der ES, wurde bereits in Abschnitt 3.5.3 erläutert.

Beispiel 3.1. (*Negativer (empirischer) Erwartungswert*)

Beim negativen (empirischen) Erwartungswert $-\mathbb{E}[X]$ handelt es sich um

ein kohärentes Risikomaß. Insbesondere besitzt er auch die Eigenschaft der Verteilungsinvarianz und der komonotonen Additivität und kann daher mit

$$\phi_{\mathbb{E}}(p) = 1, p \in [0, 1]$$

als spektrales Risikomaß ρ_{ϕ} notiert werden. Das Risikospektrum verläuft hier mit dem Wert Eins parallel zur Abszisse, da die α -Quantile bei der empirischen Erwartungswertbildung eben gerade keiner weiteren Bewertung unterzogen werden.

Die folgenden Beispiele beziehen sich auf die Arbeit von Brandtner [2012a].

Beispiel 3.2. (Exponentielle spektrale Risikomaße)

Dowd und Blake [2006], Cotter und Dowd [2006] und insbesondere Dowd, Cotter, und Sorwar [2008] führten die Subklasse der exponentiellen spektralen Risikomaße ein. Ausgehend von der Klasse der ARA-(Erwartungs-)Nutzenfunktion $u(x) = -e^{-a \cdot x}$ (siehe Definition 2.4) wird das Risikospektrum unter Einhaltung der Normierungsbedingung durch

$$\phi_{Exp}(p) = \lambda \cdot e^{-a \cdot p}, p \in [0, 1], a \geq 0 \quad (12)$$

festgelegt.

Primär ausschlaggebend für die Wahl der Exponentialfunktion sind eher technische Gründe: Die exponentielle Nutzenfunktion $u(x)$ verläuft im Intervall $[0, 1]$ monoton wachsend und nimmt dort ausschließlich negative Werte an. Insofern gestatten die Multiplikation mit (-1) und die flächenmäßige Normierung auf Eins die unmittelbare Ableitung eines Risikospektrums. Die Nichtnegativität und der fallende Verlauf werden somit durch Gleichung (12) unmittelbar erfüllt. Die Normierungsbedingung erfordert zudem die Festlegung des Parameters λ durch

$$\int_0^1 \phi(p) dp = \int_0^1 \lambda \cdot e^{-a \cdot p} dp = 1$$

Durch Umstellung ergibt sich für λ

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \int_0^1 e^{-a \cdot p} dp &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(-\frac{1}{a} e^{-a} + \frac{1}{a} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{a}{1 - e^{-a}} \end{aligned}$$

sodass sich für das spektrale Risikospektrum

$$\phi(p) = \frac{a \cdot e^{-a \cdot p}}{1 - e^{-a}}$$

ergibt und für das exponentielle spektrale Risikomaß insgesamt

$$\rho_\phi(X) = -\frac{a}{1 - e^{-a}} \cdot \int_0^1 F^{-1}(p) \cdot e^{-a \cdot p} dp \quad (13)$$

resultiert.

Der Verlauf des Risikospektrums ist somit grundsätzlich durch die Exponentialfunktion vorgegeben und kann durch die Wahl des Risikoaversions-Parameters a konkretisiert werden. Ein größeres a repräsentiert dabei einen größeren Grad der Risikoaversion in dem Sinne, dass für $a_1 \leq a_2$ ein auf dem Risikospektrum ϕ_{Exp, a_1} basierendes spektrales Risikomaß für alle finanziellen Positionen $X \in \mathcal{M}$ stets höchstens so viele Haftungsmittel erfordert wie ein auf dem Risikospektrum ϕ_{Exp, a_2} basierendes spektrales Risikomaß.

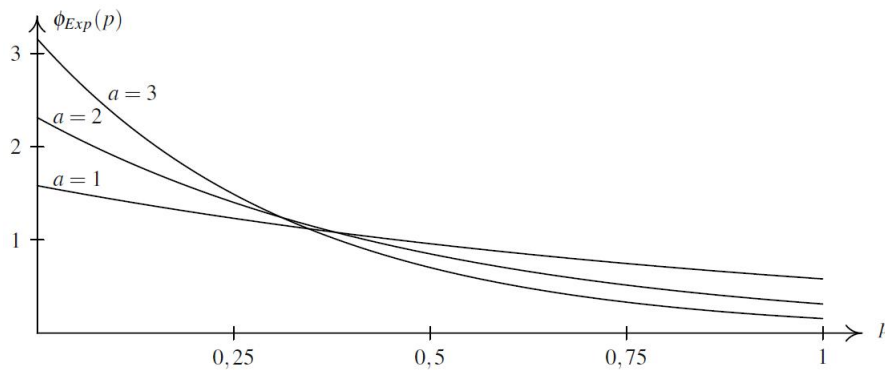


Abbildung 3: Verlauf der exponentiellen Risikospektren für die Parameter $a = 1$, $a = 2$ und $a = 3$, vgl. Brandtner [2012a]

In Abbildung 3 sieht man, dass die Gewichtung kleiner Quantile und somit der Grad der Risikoaversion offensichtlich mit steigendem a zunimmt.

Dowd, Cotter, und Sorwar [2008] geben den Parameter a als den relevanten Risikoaversionskoeffizienten an und begründen dies über den Arrow-Pratt-Koeffizienten (siehe Kapitel 2, Gleichung (1)) der absoluten Risikoaversion, den sie aus der Nutzenfunktion $u(x) = -e^{-ax}$ durch

$$ARA_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = a$$

ableiten.

Beispiel 3.3. (Power-spektrale Risikomaße)[Brandtner [2012a]]

Eine ebenfalls von Dowd und Cotter [2007] und Dowd, Cotter, und Sorwar [2008] vorgeschlagenen Subklasse der spektralen Risikomaße sind die power-spektralen Risikomaße.

Das Risikospektrum folgt hier einer Potenzfunktion und hat die Form

$$\phi(p) = \lambda \cdot \frac{p^{b-1}}{b}, (b \in (0, 1)). \quad (14)$$

Auch die Gestalt dieses Risikospektrums wird dabei von der Bernoulli-Nutzenfunktion

$$u(x) = \frac{x^{1-b} - 1}{1 - b}$$

motiviert und in gewisser Weise willkürlich in die Darstellung (14) überführt. Die Bedingung der Nichtnegativität und Monotonie werden durch das Risikospektrum in Gleichung (14) erneut unmittelbar erfüllt, für die Normierungsbedingung muss zusätzlich $\lambda = b^2$ gelten, sodass sich für das Risikospektrum schließlich

$$\phi_{POW}(p) = b \cdot p^{b-1}, (b \in (0, 1)), p \in [0, 1]$$

ergibt.

Der Verlauf des power-spektralen Risikospektrums ist für die Parameter $b = 0.25$, $b = 0.5$ und $b = 0.75$ beispielhaft in Abbildung 4 abgetragen.

Offensichtlich steuert der Parameter b den Grad der Risikoaversion, wobei ein kleineres b infolge der stärkeren Gewichtung kleinerer Quantile, einen höheren Grad an Risikoaversion repräsentiert.

Beispiel 3.4. (Denneberg Risikomaße)

Für $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt

$$\rho_\phi(X) = -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p)\phi(p)dp$$

wobei

$$\phi(p) = (1 + a)\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(p) + (1 - a)\mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(p)$$

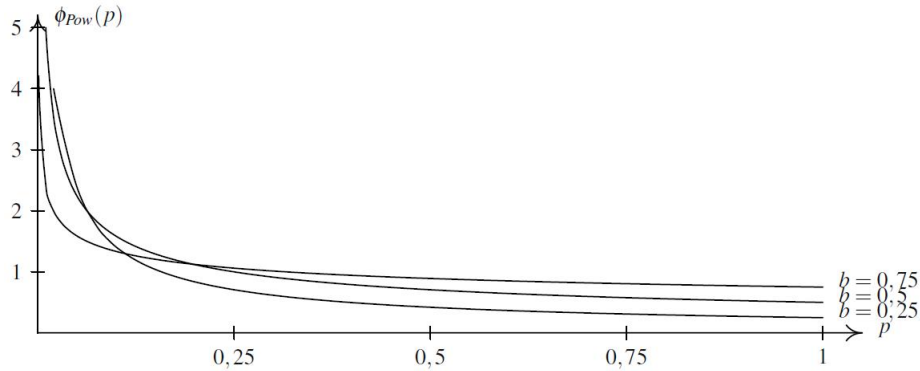


Abbildung 4: exemplarischer Verlauf der Power-Risikospektren für $b = 0.25$, $b = 0.5$ und $b = 0.75$, vgl. Brandtner [2012a]

Die Funktion $p \mapsto \phi(p)$ erfüllt die Eigenschaften eines spektralen Risikomaßes. Insbesondere kann gezeigt werden, dass das Denneberg Risikomaß äquivalent zu

$$\rho_\phi(X) = (1 - a)ES_1(X) + aES_{1/2}(X)$$

ist.

Beweis. Betrachtet man zwei Expected Shortfalls zum Niveau α_1 und α_2 (o.B.d.A. $\alpha_1 < \alpha_2$)

$$ES_{\alpha_1}(X) = -\frac{1}{\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} F_X^{\leftarrow}(p) dp$$

$$ES_{\alpha_2}(X) = -\frac{1}{\alpha_2} \int_0^{\alpha_2} F_X^{\leftarrow}(p) dp$$

Wählen wir für $\alpha_1 = 1/2$ und für $\alpha_2 = 1$ dann ist auch

$$\rho_\phi(X) = (1 - a)ES_1(X) + aES_{1/2}(X), \quad a \in [0, 1]$$

ein kohärentes bzw. spektrales Risikomaß. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 F_X^{\leftarrow} \phi(p) dp &= -(1+a) \int_0^1 F^{\leftarrow}(p) \mathbb{1}_{[0,1/2)}(p) dp \\
 &\quad - (1-a) \int_0^1 F^{\leftarrow}(p) \mathbb{1}_{[1/2,1]}(p) dp \\
 &= -(1+a) \int_0^{1/2} F^{\leftarrow}(p) dp - (1-a) \int_{1/2}^1 F^{\leftarrow}(p) dp \\
 &= -(1+a) \int_0^{1/2} F^{\leftarrow}(p) dp - (1-a) \int_0^1 F^{\leftarrow}(p) dp \\
 &\quad + (1-a) \int_0^{1/2} F^{\leftarrow}(p) dp \\
 &= a(-2) \int_0^{1/2} F^{\leftarrow}(p) dp + (1-a)(-1) \int_0^1 F^{\leftarrow}(p) dp \\
 &= aES_{1/2}(X) + (1-a)ES_1(X) \\
 &= \rho_\phi(X)
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.5. (*Value-at-Risk*)

Dass der Value-at-Risk kein kohärentes und demzufolge auch kein spektrales Risikomaß ist, lässt sich über die Gestalt des ihm zugehörigen Risikospektrums

$$\phi_{VaR}(p) = \delta(p - \alpha), p \in [0, 1]$$

nochmals verdeutlichen. Das Risikospektrum ist erneut das Dirac-Delta, diesmal jedoch an der Stelle α . Es erfüllt offensichtlich nicht die Anforderung der Monotonie, da es unterhalb und oberhalb von α den Wert Null und an der Stelle α den Wert unendlich annimmt, sodass der Value-at-Risk kein spektrales Risikomaß ist.

3.6 Deviation-Maße und Expectation-bounded Risikomaße

Dieser Abschnitt basiert auf dem Originalwerk von Rockafellar, Uryasev, und Zabarankin [2002].

Nach Rockafellar et al. [2002] werden allgemeine Deviation-Maße eingeführt, diese sogenannten Streuungs- oder Abweichungsmaße wollen eine Aussage über die Abweichung der Daten vom Zentrum geben.

Im Allgemeinen werden zwei idealtypische Konzeptionen von Risiko unterschieden:

- I) Risiko als Ausmaß der Abweichungen von einer Zielgröße.
- II) Risiko als negatives Kapital bzw. notwendige Prämie.

Zwischen diesen beiden Typen von Risiko besteht ein intuitiver Zusammenhang. Wendet man ein Risikomaß des Typus II nicht auf die Zufallsvariable X , sondern auf die zentrale Zufallsvariable $X - \mathbb{E}[X]$ an, so resultiert ein - nun lageunabhängiges - Risikomaß des Typus I. Auf diese Weise werden Zusammenhänge zwischen Deviation-Maßen und kohärenten Risikomaßen im Sinne von Artzner et al. [1999] erläutert. Diese Risikomaße, die zum größten Teil auf die Idee von Artzner et al. [1999] basieren, nennt man Expectation-bounded Risikomaße oder auch erwartungswertbezogene Risikomaße.

3.6.1 Axiomatische Definition von Deviation-Maßen und Expectation-bounded-Risikomaßen

Vorbemerkungen

Gegeben sei also ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, wobei die Ereignisse $\omega \in \Omega$ die zukünftigen Finanzmittel darstellen;

\mathcal{M} ist die Menge der messbaren Teilmengen von Ω , und \mathbb{P} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{M} . Die Zufallsvariablen sind die Funktionen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich des linearen Raums $\mathcal{L}^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, das heißt (messbare) Funktionen für die Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega), \\ \sigma^2(X) &= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2 = \int_{\Omega} [X(\omega) - \mu(X)]^2 dP(\omega),\end{aligned}$$

existieren (d.h. diese Integrale sind wohldefiniert).

1. Der Unterraum von \mathcal{L}^2 , der aus allen X , für die $\mathbb{E}[X] = 0$ gilt, besteht, wird mit \mathcal{L}_0^2 bezeichnet.
2. Das innere Produkt in \mathcal{L}^2 zwischen den X und Y ist $\mathbb{E}[XY]$, was gleichzusetzen ist mit $covar(X, Y) + \mu(X)\mu(Y)$.
3. Die verwendete Norm ist $\|X\| := (\mathbb{E}[X^2])^{1/2}$.

4. Die Konvergenz $X_k \rightarrow X$ einer Folge von Zufallsvariablen X_k für $k = 1, 2, \dots$, zu X im Sinne von $\|X_k - X\| \rightarrow 0$ ist äquivalent damit, dass $\mu(X_k - X) \rightarrow 0$ und $\sigma(X_k - X) \rightarrow 0$ konvergieren.

Beweis. (Beweis zu Behauptung 4)

” \Rightarrow ”

Sei

$$\|X\| := (\mathbb{E}[X^2])^{1/2} \quad (15)$$

die definierte Norm auf \mathcal{L}^2 . Weiters konvergiert $(X_k - X)$ im \mathcal{L}^2 -Raum gegen 0, das heißt

$$\|X_k - X\| \stackrel{(14)}{=} \sqrt{\mathbb{E}[(X_k - X)^2]} \rightarrow 0 \quad (16)$$

Zu zeigen ist die Konvergenz von

- (i) $\mu(X_k - X) \rightarrow 0$ und
- (ii) $\sigma(X_k - X) \rightarrow 0$.

ad (i)

Behauptung folgt aus der Annahme in Gleichung (16), da aus der \mathcal{L}^2 -Konvergenz die \mathcal{L}^1 -Konvergenz folgt:

$$\mu(X_k - X) = \mathbb{E}[(X_k - X)^1] \rightarrow 0 \quad (17)$$

ad (ii)

Nach dem Verschiebungssatz gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_k - X) = \sigma^2(X_k - X) &= \mathbb{E}[((X_k - X) - \mathbb{E}[(X_k - X)])^2] \\ &= \mathbb{E}[(X_k - X)^2] - \mathbb{E}^2[(X_k - X)] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Die Konvergenz gegen 0 folgt schlussendlich aus Gleichung (16) und Gleichung (17).

” \Leftarrow ”

Es gelte nun $\mu(X_k - X) \rightarrow 0$ und $\sigma(X_k - X) \rightarrow 0$. Zu zeigen ist, dass $(X_k - X)$ im \mathcal{L}^2 -Raum gegen 0 konvergiert:

$$\begin{aligned} \|X_k - X\|^2 &= \mathbb{E}[(X_k - X)^2] \\ &= \text{Var}(X_k - X) + \mathbb{E}^2[(X_k - X)] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Also gilt $X_k \rightarrow X$, was zu zeigen war.

□

Insbesondere enthält dieser Raum $\mathcal{L}^2(\Omega)$ alle konstanten Zufallsvariablen $X \equiv C$. Der Buchstabe C steht immer für eine Konstante aus der Menge der reellen Zahlen. Falls C oder eine Zahl wie 0, 1 oder -1 anstelle der Zufallsvariable X auftreten, bedeutet das, dass die Zufallsvariable den konstanten Wert fast sicher annimmt. Ähnliches gilt für die Ungleichung $X \geq C$ oder $X \leq C$, die fast sicher gilt.

Nach diesen Vorbemerkungen wird nun die axiomatische Beschreibung der Klasse der Deviation-Maße diskutiert. In weiterer Folge wird erklärt, wie Deviation-Maße mit Risikomaßen in Verbindung gebracht werden.

Definition 3.14. (*Allgemeine Deviation-Maße - Das Axiomensystem von Rockafellar*)

Unter einem Deviation-Maß auf \mathcal{L}^2 versteht man eine Abbildung $\mathcal{D} : \mathcal{L}^2 \rightarrow [0, \infty]$, welche folgende Eigenschaften erfüllt

- (D1) (*G-P Translationsinvarianz*) $\mathcal{D}(X + C) = \mathcal{D}(X)$ für alle X und Konstanten C
- (D2) (*Positive Homogenität*) $\mathcal{D}(0) = 0$, und $\mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X)$ für alle X und alle $\lambda > 0$
- (D3) (*Subadditivität*) $\mathcal{D}(X + X') \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(X')$ für alle X und X'
- (D4) (*Positivität*) $\mathcal{D}(X) > 0$ für alle nicht konstanten X , wobei $\mathcal{D}(X) = 0$ für ein konstantes X also $\mathcal{D}(X) \geq 0$ für alle X

Dieses Axiomensystem ist fast vollständig identisch mit dem System von Pedersen und Satchell [1998] (siehe Abschnitt 3.6), enthält aber leichte Verschärfungen. So wird zum Beispiel die Shift-Invarianz-Bedingung (G-P Translationsinvarianz) verschärft. Es folgt insbesondere das $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(X - \mathbb{E}[X])$, d.h. das Risikomaß ist exakt lageunabhängig (siehe auch Albrecht [2004]).

Unter den Axiomen in Definition 3.14, hängt $\mathcal{D}(X)$ also nur von $X - \mathbb{E}[X]$ (Eigenschaft D1, wobei $C = -\mathbb{E}[X]$) ab.

Des Weiteren verschwindet $\mathcal{D}(X)$ nur wenn $X - \mathbb{E}[X] \equiv 0$ (wie in der Eigenschaft D4 mit $X - \mathbb{E}[X]$ anstelle von X gesehen werden kann; Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Eigenschaft D4 für konstante X direkt aus den Eigenschaften D1 und D2 folgt). Das heißt, \mathcal{D} gibt den Grad der *Unsicherheit* von X an.

Es handelt sich um eine Art Norm der „reinen Unsicherheit“ des Unterraums \mathcal{L}_0^2 von \mathcal{L}^2 , ausgenommen jedoch ist die Symmetrie (normalerweise nötig bei der Definition einer Norm), d.h. die zusätzliche Bedingung $\mathcal{D}(-X) = \mathcal{D}(X)$ für alle X fehlt. Bei der Berücksichtigung der Asymmetrie baut Definition 3.14 auf der weit verbreiteten Auffassung auf, dass Symmetrie nicht immer wünschenswert im Umgang mit Unsicherheiten ist, da Verluste in der Praxis nicht im gleichen Ausmaß wie Gewinne betrachtet bzw. gemessen werden.

Die Eigenschaft D2 ist die positive Homogenität. Die Kombination von D2 und D3 nennt man *Sublinearität*, daraus folgt, dass \mathcal{D} ein konvexes Funktional auf \mathcal{L}^2 ist. Des Weiteren erlaubt Definition 3.14 einem Deviation-Maß \mathcal{D} , dass $\mathcal{D}(X) = \infty$ für Zufallsvariablen X . Wenn ∞ nicht im Definitionsbereich ist, dann sprechen wir von einem endlichen Deviation-Maß.

Ogleich Deviation-Maße für die Risiko-Analyse konstruiert worden sind, sind sie jedoch kein „*Risikomaß*“ wie sie im Sinne von Artzner et al. [1999] definiert werden. Der Konnex zwischen Deviation-Maßen und Risikomaßen liegt sehr eng beieinander, jedoch mit einem entscheidenden Unterschied. Anstatt die Unsicherheit von X zu messen, im Sinne von „Nicht-Konstant“, wertet ein Risikomaß die „overall seriousness of possible losses“ bezogen auf X aus.

Hierbei ist ein Verlust ein Ergebnis unter 0 und im Gegensatz dazu ein Gewinn ein Ergebnis über 0. Bei der Anwendung eines Risikomaßes ist diese Richtung entscheidend; wenn es Bedenken über einen Wertebereich gibt, zu dem eine gegebene Zufallsvariable X mögliche Werte $X(\omega)$ annimmt, die unter eine bestimmte Schwelle C fallen, muss man X durch $X - C$ ersetzen.

Das heißt: Sei X eine Zufallsvariable, dann ist es eine Sache ein Risikomaß für eine fixe Konstante C bzgl. $X - C$ zu messen und eine ganz andere ein Risikomaß auf $X - \mathbb{E}[X]$ anzuwenden. Eine grundlegende Annahme ist also, das durch Anwendung von Risikomaßen (mehr oder weniger im Sinne von Artzner et al.) auf $X - \mathbb{E}[X]$ eine gesonderte Klasse von Maßen gewonnen wird, die Klasse der Deviation-Maße.

Die Risikomaße, die nun in eine Beziehung zu den Deviation-Maßen gesetzt werden wollen, basieren zum größten Teil auf den Ideen von Artzner et al. [1999] und verwenden diese Axiome bzw. Eigenschaften, jedoch mit dem Unterschied, dass wir die Eigenschaft der Monotonie nicht berücksichtigen und stattdessen eine neue Eigenschaft „Expectation-boundedness“ hervorheben. Rockafellar et al. [2002] stellen ein zweites Axiomensystem für Risiken im Sinne von notwendigem Risikokapital auf.

Risikomaße laut Artzner et al.	Deviation-Maße
Monotonie	-
-	Positivität
Subadditivität	Subadditivität
Positive Homogenität	Positive Homogenität
Translationsinvarianz	(G-P) Translationsinvarianz

Tabelle 1: Gegenüberstellung der Eigenschaften von Risikomaßen laut Artzner et al. und Deviation-Maßen

Definition 3.15. (*Expectation-Bounded Risikomaße/ Erwartungswert-bezogene Risikomaße*)

Unter einem *Expectation-Bounded Risikomaß* auf \mathcal{L}^2 versteht man eine Funktion $\rho : \mathcal{L}^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(R1) (*Translationsinvarianz*) $\rho(X + C) = \rho(X) - C$ für alle X und C konstant,

(R2) (*Positive Homogenität*) $\rho(0) = 0$, und $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ für alle X und alle $\lambda > 0$,

(R3) (*Subadditivität*) $\rho(X + X') \leq \rho(X) + \rho(X')$ für alle X und X' ,

(R4) (*Strictly expectation boundedness*) $\rho(X) > \mathbb{E}[-X]$ für alle nicht-konstanten X , wohingegen $\rho(X) = \mathbb{E}[-X]$ für konstante X .

Ein *Expectation-Bounded Risikomaß* nennt man *kohärent*, wenn es noch das zusätzliche Axiom (R5) erfüllt:

(R5) (*Monotonie*) $\rho(X) \leq \rho(X')$ solange $X \geq X'$.

Bemerkung 3.8. (*Erklärung der Axiome*)

- Eine Funktion ρ , die die Axiome R1, R2, R3 und R5 (nicht notwendigerweise R4) erfüllt, ist ein kohärentes Risikomaß (siehe Kapitel 3.3).
- Bei Axiom R2 handelt es sich um die positive Homogenität, R3 die Subadditivität und die Kombination aus R2 und R3 ist die Eigenschaft der Sublinearität, wobei daraus die Konvexität folgt.
- Eigenschaft R4 ist die Expectation - boundedness. Das heißt, das Risiko eines Portfolios ist immer größer als der negative erwartete Portfolio-Return.
- Aus R1 wissen wir bereits, dass $\rho(X) = \mathbb{E}[-X]$ für konstante X gilt, d.h. die neu dazugekommene Bedingung ist wirklich nur die Ungleichung $\rho(X) > \mathbb{E}[-X]$ für nicht konstante X . Expectation-boundedness ist zuvor nicht als fundamental wichtig für Risikomaße definiert worden, erst in der Arbeit von Rockafellar et al. [2006] wurde diese Eigenschaft aufgegriffen und behandelt.

Wenn man nun die Axiome der Deviation-Maße und die der Expectation-bounded-Risikomaße miteinander vergleicht, sieht man, dass die Axiome R2 und R3 für ein Risikomaß mit den Axiomen D2 und D3 eines Deviation-Maßes übereinstimmen, jedoch unterscheiden sich R1 und D1 stark voneinander - keine Abbildung auf \mathcal{L}^2 kann beide Axiome R1 und D1 erfüllen.

D1	$\mathcal{D}(X + C) = \mathcal{D}(X)$ für alle X und Konstanten C	R1	$\rho(X + C) = \rho(X) - C$ für alle X und C konstant
D2	$\mathcal{D}(0) = 0$, und $\mathcal{D}(\lambda X) = \lambda \mathcal{D}(X)$ für alle X und alle $\lambda > 0$	R2	$\rho(0) = 0$, und $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für alle X und alle $\lambda > 0$
D3	$\mathcal{D}(X + X') \leq \mathcal{D}(X) + \mathcal{D}(X')$ für alle X und X'	R3	$\rho(X + X') \leq \rho(X) + \rho(X')$ für alle X und X'

Tabelle 2: Vergleich der Axiome zwischen Deviation-Maßen und Expectation-bounded-Risikomaßen

Definition 3.16. Ein Deviation-Maß \mathcal{D} wird lower ranged dominated genannt, falls gilt

$$\mathcal{D}(X) \leq \mathbb{E}[X] - \inf X \quad \text{für alle } X$$

Satz 3.3. (*Deviation versus Risiko*)

Deviation-Maße entsprechen 1 : 1 Expectation-bounded-Risikomaßen, wenn die Beziehungen

$$(a) \mathcal{D}(X) = \rho(X - \mathbb{E}[X]),$$

$$(b) \rho(X) = \mathcal{D}(X) - \mathbb{E}[X].$$

erfüllt sind.

Ist also ρ ein Expectation-bounded-Risikomaß und \mathcal{D} ist definiert durch (a), dann ist \mathcal{D} ein Deviation-Maß, das ρ über (b) zurückgibt. Auf der anderen Seite gilt, wenn \mathcal{D} ein Deviation-Maß ist und ρ durch (b) definiert ist, dann ist ρ ein Risikomaß, das \mathcal{D} über (a) zurückgibt. In diesem Zusammenhang ist ρ also kohärent genau dann, wenn \mathcal{D} die weitere Eigenschaft (lower range dominance)

$$(D5) \mathcal{D}(X) \leq \mathbb{E}[X] - \inf X \text{ für alle } X$$

erfüllt.

Die Basisidee ist dabei, von einem Risikomaß $\rho(X)$ des Typus II (siehe Abschnitt 3.6, Seite 37) durch Anwendung auf $X - \mathbb{E}[X]$, d.h. Betrachtung von $\rho(X - \mathbb{E}[X]) = \rho(X) - \mathbb{E}[X]$ auf ein lageunabhängiges Risikomaß des Typus I zu gelangen und vice versa. Formal gilt der Zusammenhang, dass die Maße $\mathcal{D}(X)$, die den Bedingungen unter 3.14 genügen und die erwartungswertbegrenzten Risikomaße $\rho(X)$ einer 1:1-Korrespondenz genügen, wobei $\mathcal{D}(X) = \rho(X - \mathbb{E}[X])$ und $\rho(X) = \mathcal{D}(X) - \mathbb{E}[X]$ (vgl. Albrecht [2004])

Beweis. (zu Satz 3.3.)

Um die 1:1-Übereinstimmung der Deviation-Maße und Expectation-Bounded Risikomaße zu zeigen, wird zuerst jene Richtung betrachtet, in der man von einem Risikomaß ρ zu einem Deviation-Maße \mathcal{D} gelangt.

” \Rightarrow ”

Es gelten die Bedingungen

$$(a) \mathcal{D}(X) = \rho(X - \mathbb{E}[X]) \text{ und}$$

$$(R1) \rho(X + C) = \rho(X) - C .$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X + C) &\stackrel{(a)}{=} \rho((X + C) - \mathbb{E}[X + C]) \stackrel{(R1)}{=} (\rho(X) - C) - (\rho(\mathbb{E}[X]) - C) \\ &= \rho(X - \mathbb{E}[X]) = \mathcal{D}(X) \end{aligned}$$

Das heißt Axiom D1 ist erfüllt. Die Axiome D2 und D3 folgen aus R2 und R3, so wie D4 aus R4 folgt. Da ebenso $\rho(X - \mathbb{E}[X]) = \rho(X) + \mathbb{E}[X]$ gilt folgt, auch

$$\mathcal{D}(X) - \mathbb{E}[X] \stackrel{(a)}{=} \rho(X - \mathbb{E}[X]) - \mathbb{E}[X] = \rho(X) + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = \rho(X)$$

also Bedingung (b).

” \Leftarrow ”

Auf der anderen Seite, um von \mathcal{D} auf ρ über die Bedingung (b) zu gelangen, können die Eigenschaften R2, R3 und R4 direkt von D2, D3 und D4 abgeleitet werden.

Noch zu zeigen ist, dass ρ auch das Axiom R1 erfüllt:

$$\rho(X + C) \stackrel{(b)}{=} \mathcal{D}(X + C) - \mathbb{E}[X + C] \stackrel{(D1)}{=} \mathcal{D}(X) - \mathbb{E}[X] - C \stackrel{(b)}{=} \rho(X) - C$$

Als letztes wird die Bedingung D5 nachgewiesen.

Seien R2 (Positive Homogenität) und R3 (Subadditivität) gegeben. Aus der Monotonie-Eigenschaft R5 folgt $\rho(X) \leq 0$ mit $X \geq 0$. Diese scheinbar schwächere Eigenschaft ist jedoch zur Monotonie-Eigenschaft äquivalent:

Sei $X \geq X'$, dann gilt $X = X' + X''$ für $X'' \geq 0$, und wegen R3 auch $\rho(X) \leq \rho(X') + \rho(X'')$ und daraus folgt $\rho(X) \leq \rho(X')$ mit $\rho(X'') \leq 0$, also R5.

In der Analogie zwischen (a) und (b) ergibt sich die Bedingung $\rho(x) < 0$ mit $X \geq 0$ notwendigerweise durch $\mathcal{D}(X) \leq \mathbb{E}[X]$ mit $X \geq 0$. Das ist definitiv unter Bedingung D5 erfüllt, insbesondere folgt daraus sogar D5.

D.h. damit $\mathcal{D}(X) \leq \mathbb{E}[X] - \inf(X)$ gilt, muss auch $\mathcal{D}(X) \leq \mathbb{E}[X] - C$ für $X \geq C$ und wegen D1 ist das äquivalent zu $\mathcal{D}(X - C) \leq \mathbb{E}[X - C]$ für $X - C \geq 0$.

□

Sind die Beziehungen (a) und (b) aus Satz 3.3 erfüllt, nennt man \mathcal{D} das Deviation-Maß verknüpft mit ρ ; während ρ das Risikomaß verknüpft mit \mathcal{D} genannt wird. Insbesondere ist \mathcal{D} endlich, genau dann wenn ρ endlich ist. Aufgrund der Aussagen des Satzes macht es also Sinn, von \mathcal{D} als einem kohärenten Deviation-Maß zu sprechen, wenn das Axiom D5 mit den weiteren Eigenschaften D1, D2, D3 und D4 erfüllt ist.

3.6.2 Beispiele

Als nächstes werden einige wenige Beispiele erläutert, die die Definition der Deviation-Maße oder die der Expectation-bounded Risikomaße ganz oder nur zum Teil erfüllen.

Beispiel 3.6. (*Standard-Deviation und Semideviation*)

Für $\mathcal{D}(X) = \sigma(X) = \|X - \mathbb{E}[X]\|$ sind die Eigenschaften D1, D2, D3 und D4 erfüllt. Dieses Deviation-Maß ist symmetrisch. Die untere und obere Standard-Semideviation σ_+ und σ_- mit

$$\sigma_+(X) = \|[X - \mathbb{E}[X]]_+\| \quad \sigma_-(X) = \|[X - \mathbb{E}[X]]_-\|,$$

erfüllen ebenso alle Eigenschaften D1 - D4, sind aber nicht symmetrisch.

Wobei $X_+ = \max\{0, X\}$ und $X_- = \min\{0, -X\}$.

Alle drei Maße sind endlich und stetig.

Beispiel 3.7. (*Mixed CVaR-Deviation*)

Für eine Gewichtsfunktion λ auf $(0, 1)$ (nichtnegativ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$), ist die Funktion

$$\mathcal{D}(X) = \int_0^1 CVaR_\alpha(X - \mathbb{E}[X])d\lambda(\alpha)$$

ein endliches, lower-range-bounded-Deviation-Maß und die Funktion

$$\rho(X) = \int_0^1 CVaR_\alpha(X)d\lambda(\alpha)$$

ist ein endliches, kohärentes, strictly-expectation-bounded Risikomaß. Insbesondere, wenn λ aus einzelnen Gewichten λ_i zu verschiedenen Punkten α_i besteht, erhält man für $i = 1, \dots, m$ mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$:

$$\mathcal{D} = \lambda_1 CVaR_{\alpha_1}(X - \mathbb{E}[X]) + \dots + \lambda_m CVaR_{\alpha_m}(X - \mathbb{E}[X])$$

$$\rho(X) = \lambda_1 CVaR_{\alpha_1}(X) + \dots + \lambda_m CVaR_{\alpha_m}(X)$$

Beispiel 3.8. (*Worst-Case CVaR-Deviation*)

Für jede Menge Λ von Gewichtsfunktionen λ auf $(0, 1)$, ist die Abbildung

$$\mathcal{D}(X) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 CVaR_\alpha(X - \mathbb{E}[X])d\lambda(\alpha)$$

ein lower-range-bounded-Deviation-Maß. Die zugehörige Funktion

$$\rho(X) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 CVaR_\alpha(X)d\lambda(\alpha)$$

ist ein kohärentes, strictly-expectation-bounded Risikomaß.

3.7 Reward-Maße

Dieser Abschnitt basiert auf dem Originalwerk von De Giorgi [2005].

Das Portfolio-Auswahl-Problem (Portfoliotheorie) wird traditionell durch zwei verschiedene Ansätze modelliert. Der erste Ansatz basiert auf einem axiomatischen Modell von risikoaversen Präferenzen, wobei Entscheidungsträger annehmen, dass sie über eine erwartete Nutzenfunktion und eine nutzenmaximierende Portfolio-Auswahl (d.h. welche und wie viele Wertpapiere in ein optimales Portfolio aufgenommen werden sollen) der zulässigen Portfolios verfügen.

Der zweite Ansatz, der (μ, σ) -Ansatz von Markowitz [1952], ist sehr intuitiv und reduziert die Portfolio-Auswahl auf eine Menge von zwei Kriterien, Reward (=Geldmenge, Kapitalmenge, Rendite) und Risiko, mit Kombinationsmöglichkeiten.

Normalerweise ist das Reward-Risiko-Modell nicht konsistent mit dem ersten Ansatz. De Giorgi [2005] definierte aber Eigenschaften von Maßen die die Voraussetzungen des ersten Ansatzes sehr wohl erfüllen und führt eine erste axiomatische Definition von Reward-Maßen sowie deren Charakterisierung ein.

Des Weiteren wird ein bekanntes Beispiel für ein *Reward-Maß* angegeben: Die *Sharpe-Ratio*. Dieses Maß wurde von Sharpe [1994] eingeführt. Sharpe [1994] beschäftigte sich bereits 1963 mit dem Modell von Markowitz und vereinfachte es.

3.7.1 Portfolio-Auswahl-Theorie und Entscheidungstheorie

Wir betrachten eine 2-Perioden-Wirtschaft. Ω beschreibt den Ereignisraum der Veranlagung in der letzten Periode $t = T$. Wir nehmen an, dass Ω endlich ist und schreiben $\Omega = 1, \dots, S$.

Sei \mathcal{M} eine σ -Algebra auf Ω . Man setzt $\mathcal{M} = 2^\Omega$. (Ω, \mathcal{M}) beschreibt den Messraum auf dem man ein Wahrscheinlichkeits-Maß \mathbb{P} definiert. Man bezeichnet mit \mathbb{P} ein physikalisches oder objektives Wahrscheinlichkeitsmaß und nimmt an, dass $\mathbb{P}[s] > 0$ für alle $s \in \Omega$. Da sich diese Analyse mit dem Portfolio-Auswahl-Problem beschäftigt, wird angenommen, dass $K + 1$ Assets zur Investition zur Verfügung stehen und die Preise zur Zeit $t = 0$ durch q^k für $k = 0, \dots, K$ gegeben sind. Die Auszahlung $A^k \geq 0$ zum Zeitpunkt $t = T$ des Assets ist eine Zufallsvariable auf Ω , gegeben durch die Auszahlung A_s^k des Assets k für jedes $s \in \Omega$.

Sei $R^k = (A^k/q^k) - 1$ die Rendite eines Assets k zum Zeitpunkt T für $k = 0, \dots, K$ und $R = (R^0, \dots, R^K)^T$. Es wird angenommen, dass das Asset $k = 0$ ein risiko-freier Asset ist und $\mathbb{P}[R^k < R^0] > 0$ für alle $k = 1, \dots, K$; sonst existiert ein risikoreiches Asset k' , welches noch immer, von jedem rationalen Investor, dem risiko-freien Asset 0 vorgezogen wird und das Asset 0 wird niemals gewählt.

Wir nehmen an, dass ein Investor sich entschieden hat, sein gesamtes Vermögen ω_0 zu investieren. Der gesamtwirtschaftliche Verbrauch zum Zeitpunkt $t = 0$ hat bereits stattgefunden. Das Portfolio-Auswahl-Problem besteht nun darin, die Anzahl z^k von Finanzgütern des Typs k zu finden, $k = 0, \dots, K$, um ein *zulässiges* und *optimales* Portfolio $z = (z^0, \dots, z^K)^T$ zu bekommen. Das endgültige Vermögen eines Investors bezüglich des Portfolios z ist eine durch

$$W = \sum_{k=0}^K z^k A^k,$$

gegebene Zufallsvariable im Ereignisraum Ω .

Um das Portfolio-Auswahl-Problem noch genauer auszuführen, werden noch die beiden Begriffe „zulässig“ und „optimal“ definiert:

Unter der Annahme, dass das gesamte Anfangskapital am Finanzmarkt investiert wurde bedeutet „zulässig“, dass die Kosten zum Zeitpunkt $t = 0$ des Portfolios z , d.h. $\sum_{k=0}^K q^k z^k$, exakt mit dem Anfangskapital ω_0 übereinstimmen. Das heißt:

$$\mathbf{z} \in \mathcal{B} = \left\{ \mathbf{z} = (z^0, \dots, z^K)' \in \mathbb{R}^{K+1} \mid \mathbf{q}^T \mathbf{z} = \sum_{k=0}^K q^k z^k = \omega_0 \right\},$$

wobei $q = (q^0, q^1, \dots, q^K)^T$ und mit q^T wird der transponierte Vektor von q bezeichnet. Diese Bedingung wird auch Budget-Bedingung genannt.

Optimalität ist ein Begriff, der viel unklarer als „zulässig“ ist, und die Debatte über die Wahl eines Kriteriums in Bezug darauf, wie man ein Portfolio optimieren kann, ist noch immer offen.

Es wurden bereits einige Modelle dazu betrachtet, wie zum Beispiel:

- Differenz zwischen Return und Varianz (Markowitz 1952)
- Differenz zwischen Return und Semi-Varianz (Ogryczak and Ruszczyński 1997)
- Differenz zwischen Return und oberer Schranke für VaR (Jorion 1997 and Duffie and Pan 1997)

- Differenz zwischen Return und oberer Schranke für CVaR (Acerbi und Tasche 2001)

Das Portfolio-Auswahl-Problem kann auch noch auf einem anderen Weg definiert werden. Wir führen den Vektor $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^K)^T \in \mathbb{R}^{K+1}$ ein, gegeben durch die Budget-Anteile $\lambda^k, k = 0, \dots, K$, investiert in das Finanzgut k . Formell bedeutet das

$$\lambda^k = \frac{q^k z^k}{\omega_0}.$$

λ wird auch Strategie genannt, da es unabhängig von ω_0 den Anteil des Kapitals angibt, der in jedem Finanzgut investiert wird. Die Zulässigkeit oder Budget-Bedingung ist nun als

$$\sum_{k=0}^K \lambda^k = 1,$$

gegeben, d.h. $\lambda \in \Delta^K = \left\{ x \in \mathbb{R}^{K+1} \mid \sum_{k=0}^K \lambda^k = 1 \right\}$. Das endgültige Vermögen wird durch

$$W = \omega_0 \left(1 + \sum_{k=0}^K R^k \lambda^k \right)$$

ausgedrückt. Die absolute Änderung des Vermögens ergibt sich zu

$$\omega_0 \sum_{k=0}^K R^k \lambda^k.$$

Präferenzen

Des Weiteren wird angenommen, dass ein Investor *Präferenzen* $\{\succ\}$ für eine Teilmenge \mathcal{H} von $V = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ ist } \mathcal{M} \text{ messbar}\}$, (wobei V den Raum der reellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ beschreibt) hat. Wenn sich ein Investor zwischen zwei zufälligen Ereignissen $X, Y \in \mathcal{H}$ entscheiden soll, dann kann eines der drei folgenden Ereignisse eintreten:

1. $X \succ Y$, d.h. X wird Y vorgezogen;
2. $Y \succ X$ oder $(X \prec Y)$, d.h. Y wird X vorgezogen;
3. $X \sim Y$, d.h. der Investor ist indifferent zwischen X und Y .

Man beachte, dass \succ , \prec und \sim Operatoren sind, wo hingegen die zugehörigen Präferenz-Relationen $\{\succ\}$, $\{\prec\}$ und $\{\sim\}$ Teilmengen des kartesischen Produktes $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sind, d.h.

$$\{\succ\} = \{(X, Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid X \succ Y\},$$

$$\{\prec\} = \{(X, Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid (Y, X) \in \{\succ\}\}$$

und

$$\{\sim\} = \mathcal{H} \times \mathcal{H} \setminus \{\succ\} \cup \{\prec\}.$$

Die Präferenzordnung $\{\succeq\}$ ist üblicherweise transitiv und reflexiv aber nicht vollständig.

Definition 3.17. Die Präferenz-Relation $\{\succ\}$ kann als eine der drei folgenden Relationen bezeichnet werden:

1. Sie ist eine partielle Ordnung, wenn $\{\succ\}$ transitiv ist;
2. eine schwache Ordnung, wenn $\{\succ\}$ transitiv und auch $\{\succeq\}$ transitiv ist;
3. eine strikte Ordnung, wenn $\{\succ\}$ eine vollständige, schwache Ordnung ist.

Wenn $\{\succ\}$ eine schwache Ordnungsrelation ist, dann ist $\{\sim\}$ eine Äquivalenz.

Wertefunktion

Laut Yu [1985] sind die Bedingungen dafür, dass eine Präferenz-Relation $\{\succ\}$ auf einer Menge \mathcal{H} durch die Wertefunktion $v : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ repräsentiert wird:

$$(X, Y) \in \{\succ\} \Leftrightarrow v(X) > v(Y).$$

Dieser Fall ist interessant, solange die erwartete Nutzen-Präferenz-Relation zu dieser Klasse von Präferenzen gehört, in der die Wertefunktion, also die erwartete Nutzenfunktion, eine spezielle Form hat (siehe Beispiel 3.9).

Beispiel 3.9. Sei \mathbb{P} das Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{M}) . $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine reelle Funktion auf \mathcal{H} mit $u(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, $\forall X \in \mathcal{H}$. Wir definieren eine Präferenz-Relation $\{\succ_u\}$ auf \mathcal{H} durch

$$X \{\succ_u\} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)].$$

Laut Definition hat $\{\succ_u\}$ eine Repräsentation der Wertefunktion mit $v(\cdot) = [u(\cdot)]$. Die obige Repräsentation nennt man erwartete Nutzen-Repräsentation und u wird als Nutzenfunktion bezeichnet.

Sei \mathcal{U}_2 die Menge aller wachsenden, konkaven Nutzenfunktionen. Zur Wiederholung wird hier noch folgende Definition angeführt:

Definition 3.18. (Stochastische Dominanz 2. Ordnung)

Sei $X, Y \in V$. X dominiert Y stochastisch zweiter Ordnung (i.Z. $X \succ_2 Y$), falls gilt:

$$X \succ_2 Y \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u(X)] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u(Y)]$$

für alle $u \in \mathcal{U}_2$ und es existiert zumindest ein Element in \mathcal{U} , sodass die Ungleichung sogar strikt ist.

3.7.2 Axiomatischer Aufbau von Reward-Maßen und Risikomaßen

In diesem Abschnitt werden Reward-Maße und Risikomaße laut De Giorgi [2005] definiert, indem eine handvoll Eigenschaften für beide Konzepte angegeben werden. Eine dieser Eigenschaften wird die Konsistenz bzgl. der stochastischen Dominanz 2. Ordnung sein. Durch diese wird ein Zusammenhang mit dem erwarteten Nutzen einer Portfolio-Auswahl garantiert.

Sei $\mathcal{H}^i = \left\{ \omega_0^i \sum_{k=0}^K R^k \lambda^{i,k} \mid \sum_{k=0}^K \lambda^{i,k} = 1 \right\}$ die Renditen-Menge aller zulässigen Portfolios des Investors i , $i = 1, \dots, I$, mit Anfangskapital ω_0^i .

Die Menge \mathcal{H}^i gibt die absolute Änderung der Werte für jedes Portfolio, das zum Zeitpunkt 0 mit dem Anfangskapital ω_0 finanziert wird an. Man beobachtet nun absolute und nicht relative Änderungen der Werte, da auch De Giorgi [2005] angibt, dass ein Anstieg des Anfangskapitals nicht notwendigerweise zu einem proportionalen Anstieg der Bereitschaft, sich mit risikoreicheren Positionen auseinanderzusetzen, führt.

Wenn man relative Änderungen des Kapitals anstatt absoluter Änderungen betrachtet, bleibt die relative Rendite eines Portfolios mit dem Anstieg oder der Senkung des Anfangsinvestments unverändert. Daher wird die Portfolio-Entscheidung unabhängig vom Anfangskapital sein.

Definition 3.19. (*Reward-Maß*)

Ein Reward-Maß $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die folgenden Bedingungen

(i) *Linearität.* für alle $X, Y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y),$$

$$\mu(\alpha X) = \alpha \mu(X).$$

(ii) *Risiko-freie Bedingung.*

$$\mu(X(\mathbf{e}_0)) = R^0,$$

wobei $X(\mathbf{e}_j)$ die Wertänderung des Portfolios mit nur einer Einheit des Anfangskapitals, investiert in das Finanzgut j , $j = 0, \dots, K$ beschreibt und das Finanzgut $j = 0$ das risikofreie Finanzgut $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te}}, 0, \dots, 0)'$ ist.

(iii) *Stochastische Dominanz.* Für $X, Y \in V$ gelte

$$X \succ_2 Y \rightarrow \mu(X) \geq \mu(Y).$$

Man sagt, μ ist konsistent bezüglich der stochastischen Dominanz 2. Ordnung.

Bemerkung 3.9. (*Erklärung der Axiome*)

Analog zum Erwartungswert im (μ, σ) -Ansatz von Markowitz [1952] ist das Reward-Maß ein Positions-Maß für die Effizienz eines Portfolios. Noch zu beachten ist, dass man die absolute Wertänderung der Position betrachtet.

- Die Linearitätsbedingung besagt, dass man den Kapitalbetrag eines Portfolios nicht erhöhen oder senken kann, indem man nur die einzelnen Positionen trennt. Tatsächlich kann man, wenn das Reward-Maß nicht linear wäre, Risiken $X, Y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, sodass der Kapitalbetrag des Portfolios $X + \alpha Y$ größer (oder kleiner) als die Summe des Kapitalbetrags der einzelnen Positionen ist. Das heißt man kann den Kapitalbetrag erhöhen oder senken, indem man einzelne Positionen in das Portfolio aufnimmt. Ein Reward-Maß sollte dieses Verhalten ver-

meiden.

- Die risikofreie Bedingung bedeutet, dass der Kapitalbetrag einer gewissen Auszahlung die Differenz dieser Auszahlung und des Anfangskapitals deckt. Angenommen man investiert sein gesamtes Anfangskapital ω_0 in ein risikofreies Finanzgut mit einer Rendite von R^0 . Dann ist das endgültige Vermögen gegeben durch $(1 + R^0)$ und somit die absolute Vermögensänderung durch $\omega_0 R^0$. Solange auf dieser Position kein Risiko besteht (also auch keine Streuung) wird erwartet, dass das Reward-Maß exakt dasselbe Anfangskapital $\omega_0 R^0$ annimmt, um den Wert des Portfolios zu beschreiben. Wenn das nicht der Fall ist, jedoch die Linearität erfüllt ist, kann man noch immer ein Reward-Maß normieren, sodass die risikofreie Bedingung erfüllt ist.
- Zu guter Letzt sichert die Konsistenz bezüglich der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung die Verbindung zur erwarteten Nutzenannahme für die Portfolio-Auswahl. De facto, immer wenn ein Risiko X ein anderes Risiko Y durch die stochastische Dominanz 2. Ordnung dominiert, präferiert jeder risikoaverse, erwartete Nutzenmaximierer X vor Y .

Beispiel 3.10. Der Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$, wobei \mathbb{P} das physikalische Maß ist, bezüglich welchem die stochastische Dominanz 2. Ordnung erfüllt ist, ist ein Reward-Maß.

In weiterer Folge (siehe Abschnitt 3.7.3) wird man sehen, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$ das einzige Reward-Maß auf V ist.

Bevor nun jedoch näher auf die Charakterisierung der Reward-Maße eingegangen wird, wird analog zu den Reward-Maßen auch die Definition eines Risikomaßes laut De Giorgi [2005] eingeführt, um in einem zweiten Schritt dann das *Reward-Risiko-Paar* zu definieren.

Definition 3.20. (Risikomaß laut De Giorgi)

Ein Risikomaß $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die folgenden Bedingungen

(i) *Konvexität.* Für alle $X, Y \in V$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt die Ungleichung

$$\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y).$$

(ii) *Risiko-freie Bedingung.* Für $X \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\rho(X + \alpha X(\mathbf{e}_0)) = \rho(X),$$

wobei $X(\mathbf{e}_j)$ die Wertänderung des Portfolios mit nur einer Einheit des Anfangskapitals, investiert in das Finanzgut $j, j = 0, \dots, K$, beschreibt und das Finanzgut $j = 0$ das risikofreie Finanzgut $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te}}, 0, \dots, 0)'$ ist.

(iii) *Zero payoff.*

$$\rho(0) = 0$$

(iv) *Stochastische Dominanz.* Für $X, Y \in V$ gilt

$$X \succ_2 Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

Man sagt, ρ ist konsistent bezüglich der stochastischen Dominanz 2. Ordnung.

Insbesondere kann man sagen, dass ein Risikomaß positiv homogen ist genau dann wenn

$$\forall X \in V, \alpha > 0 \Rightarrow \rho(\alpha X) = \alpha\rho(X).$$

Bemerkung 3.10. (Erklärung der Axiome)

- Die Konvexität sichert den Diversifikations-Effekt. Das bedeutet, wenn die Konvexität für einige $X, Y \in V$ und $\alpha \in (0, 1)$ nicht erfüllt ist, dann kann das Portfolio $\alpha X + (1 - \alpha)Y$ in zwei Teile geteilt werden: α mal der Position X und $1 - \alpha$ mal der Position Y , womit man das Risiko reduziert.
- Die risikofreie Bedingung sagt aus, dass sich durch Hinzufügen einer risikofreien Position zum Portfolio das Risiko nicht ändert bzw. es kein

Risiko gibt.

Diese Eigenschaft unterscheidet sich stark von der Definition von kohärenten Risikomaßen wie sie von Artzner et al. [1999] definiert werden. Hier interpretieren die Autoren das Risikomaß als das Minimum an Kapital, das man zusätzlich zu seiner risikoreichen Position mit Bedacht hinzufügen sollte, um das Investment tragbar zu machen. Wenn man sich mit dem Portfolio-Auswahl-Problem beschäftigt, sollte der Beitrag einer risiko-freien Position zum Portfolio vom Reward-Maß und nicht vom Risikomaß erfasst werden.

- *Die zero-payoff Bedingung ist eine logische Annahme, denn „kein Investment“ bedeutet auch „kein Risiko“.*
- *Die stochastische Dominanz zweiter Ordnung stellt, analog zur gleichen Eigenschaft wie bei den Reward-Maßen, sicher, dass ein Investment, das einem anderen Investment von allen risikoaversen, erwarteten Nutzenmaximierern vorgezogen wird, maximal so risikoreich wie das dominierte Investment sein kann.*

Gegenbeispiel 3.1. *Ein kohärentes Risikomaß im Sinne von Artzner et al. [1999] ist kein Risikomaß wie es in Definition 3.20 definiert wurde. Erstens ist die risikofreie Bedingung für ein kohärentes Maß nicht erfüllt, da für ein kohärentes Risikomaß $\tilde{\rho}$ die Bedingung $\tilde{\rho}(X(\mathbf{e}_0)) = -R^0$ erfüllt ist. Zweitens ist ein kohärentes Risikomaß normalerweise nicht konsistent bezüglich der stochastische Dominanz zweiter Ordnung.*

Bemerkung 3.11.

1. *Aus der risikofreien Bedingung folgt*

$$\rho(X(e_0)) = \rho(\alpha X(e_0) + (1 - \alpha)X(e_0)) = \rho(\alpha X(e_0)).$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir $\rho(X(e_0)) = \rho(0) = 0$, das heißt das risiko-freie Asset hat ein Risiko von Null.

2. *Für $X \in V$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt*

$$\rho(\alpha X) \leq \alpha \rho(X)$$

3. Für $X \in V$, $X < 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt $0 \succ_2 \alpha X \succ_2 X$, also auch

$$0 \leq \rho(\alpha X) \leq \alpha \rho(X) \leq \rho(X)$$

wegen der Konsistenz bzgl. der Stochastischen Dominanz und der Konvexität.

4. Für $X \in V$, $X > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt $X \succ_2 \alpha X \succ_2 0$, also auch

$$\rho(X) \leq \rho(\alpha X) \leq \alpha \rho(X) \leq 0$$

wegen der Konsistenz bzgl. der Stochastischen Dominanz und der Konvexität.

Auf der anderen Seite gilt für $\alpha = \max_{s \in \Omega} (X(s))$ und $\epsilon > 0$, $(\alpha + \epsilon)X(e_0) \succ_2 X$ also auch $\rho(X) \geq \rho((\alpha + \epsilon)X(e_0))$. Daraus folgt, dass für $X > 0$, $\rho(X) = 0$ gilt.

Mit der Definition eines Reward-Maßes und eines Risikomaßes im Sinne von De Giorgi [2005] können wir nun ein Reward-Risiko-Paar auf V definieren.

Definition 3.21. Sei μ ein Reward-Maß auf V und ρ ein Risikomaß V . Dann wird das Paar (μ, ρ) Reward-Risiko-Paar auf V genannt.

3.7.3 Charakterisierung Reward-Maß

Nachdem die laut De Giorgi [2005] eingeführten Eigenschaften für die Reward-Maße festgelegt wurden, wird nun eine Charakterisierung dieser Maße angegeben. Wie man bereits gesehen hat, finden sich Abbildungen auf V , die die Bedingungen für Reward-Maß erfüllen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es auf V nur eine solche lineare Abbildung gibt, die die risikofreie Bedingung und die Bedingung der Konsistenz bezüglich der stochastischen Dominanz 2. Ordnung erfüllt. Diese Abbildung ist der Erwartungswert bezüglich des physikalischen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Satz 3.4. Sei $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Reward-Maß und $\mathbb{P} = (\mathbb{P}(1), \dots, \mathbb{P}(S))$ sei das physikalische Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{M}) (stochastische Dominanz 2. Ordnung ist definiert bezüglich dem Maß \mathbb{P}).

Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}(s) > 0$ für alle $s \in \Omega$. Dann ist

$$\mu(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$$

Beweis. Siehe De Giorgi [2005], Theorem 4.1. □

Bemerkung 3.12. *Der Satz besagt, dass wenn man die stochastische Dominanz 2. Ordnung auf (Ω, \mathcal{M}) bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} definiert, das eindeutige Reward-Maß, welches konsistent mit \succ_2 auf V ist, gleich dem Erwartungswert bezüglich des Maßes \mathbb{P} ist.*

Im Folgenden wird nun ein bekanntes Risikomaß als Beispiel für ein Reward-Maß eingeführt.

3.7.4 Beispiel für ein Reward-Maß

Beispiel 3.11. *(Sharpe-Ratio)*

Diese Beispiel bezieht sich auf das Originalwerk von ?. Die Sharpe-Ratio, von Sharpe [1994] eingeführt, ist jene Kennzahl, die die Überrendite, also die Rendite einer Geldmenge, soweit sie den risikofreien Zinssatz übersteigt, in Abhängigkeit vom Risiko angibt.

Vorbemerkung 3.1. *(Konvention)*

- $k = 0, \dots, K$ beschreibt die Anzahl der Assets
- Die Auszahlung $A^k \geq 0$ des Assets ist eine Zufallsvariable auf Ω gegeben durch die Auszahlung A_s^k des Assets k für jedes $s \in \Omega$.
- R^k gibt die Rendite eines Assets k zum Zeitpunkt T an.
- Das Asset $k = 0$ ist ein risikofreies Asset und wird mit R^0 bezeichnet.

Im Ex-ante-Kontext ergibt sich die Sharpe-Ratio eines beliebigen Assets k über den Erwartungswert μ_k und die Standardabweichung σ_k der Fondsrenditen sowie den risikofreien Zins R^0 für einen bestimmten Anlagehorizont:

$$(Ex - ante-)SR_k = \frac{\mu_k - R^0}{\sigma_k}$$

Die Sharpe-Ratio misst folglich das Verhältnis, die Korrelation, zwischen der erwarteten Überschussrendite des Assets über dem risikofreien Zinssatz (reward) und der Standardabweichung (variability). Auf diesem Zusammenhang beruht die ursprüngliche Bezeichnung „reward-to-variability ratio“ von Sharpe [1994].

Die Ex-post-Performance eines Fonds k wird über die „klassische“ Sharpe-Ratio SR_k üblicherweise gemessen, indem auf die Kennzahlen arithmetischer

Mittelwert \bar{D} und empirische Standardabweichung s_k monatlicher Fondsüberschussrenditen über dem risikofreien Zins R_t^0 für den jeweiligen Monat t zurückgegriffen wird. Berechnet für einen bestimmten Ex-post-Untersuchungszeitraum. Folglich gilt:

$$(Ex - post-)SR_k = \frac{\bar{D}}{s_k} = \frac{\bar{R}^k - \bar{R}^0}{s_k}.$$

\bar{D} bezeichnet die durchschnittliche Überrendite $D_t := R_t^k - R_t^0$ der Geldanlage mit der Rendite (R_t^k) im Vergleich zur risikolosen Anlage mit Rendite (R_t^0), also:

$$\bar{D} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T D_k^t.$$

D_k^t bezeichnet die Überrendite des Assets k zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$. Mit s_k wird die empirische Standardabweichung ermittelt:

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (D_k^t - \bar{D}_k)^2}.$$

Die Interpretation der klassischen (Ex-post-)Sharpe-Ratio besagt im Wesentlichen: Weisen zwei Portfolios mit identischen durchschnittlichen Renditen unterschiedliche Risiken auf, so erzielt das Portfolio mit dem geringeren Risiko eine höhere Performance. (vgl. Scholz und Wilkens [2006] und Sharpe [1994])

3.8 Parametrische Klasse von Risikomaßen

3.8.1 Dreiparametrische Klasse von Risikomaßen - Einleitung

Dieser Abschnitt basiert auf dem Originalwerk von Stone [1973]. Er definiert zwei ähnliche dreiparametrische Klassen von Risikomaßen und zeigt, dass bereits bekannte Risikomaße wie die Varianz, Semivarianz, die mittlere absolute Abweichung und die Standard-Abweichung Spezialfälle dieser *dreiparametrischen Risikomaße* sind.

3.8.2 Definition dreiparametrischer Risikomaße

Bemerkung 3.13. Wir führen folgende Notation ein:

$W =$ zukünftiges Kapital, Zufallsvariable

$F(W) =$ die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$\bar{W} = \mathbb{E}[W] =$ Erwartungswert von W

$$V = V(W) = \text{Varianz von } W = \int_{-\infty}^A |W - \bar{W}|^2 dF(W)$$

$$SV = SV(W) = \text{Semivarianz von } W = \int_{-\infty}^A |W - \bar{W}|^2 dF(W)$$

$$MAD = MAD(W) = \text{Mittlere Abweichung von } W = \int_{-\infty}^A |W - \bar{W}| dF(W)$$

$$\mathbb{P}(W \leq W_0) = \int_{-\infty}^{W_0} dF(W) = F(W_0)$$

Definition 3.22. Man definiert die dreiparametrische Klasse von Risikomaßen $L(W_0, k, A)$ als

$$L(W_0, k, A) = \int_{-\infty}^A |W - W_0|^k dF(W),$$

wobei $A, W_0 \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.

- Genauer gesagt beschreibt W_0 das Referenzlevel des Kapitals, über dem die Abweichung gemessen wird;
- k ist die Potenz um die die Abweichung des Kapitals vom Referenzlevel erhöht wird und gibt auch das Maß des relativen Einflusses von großen und kleinen Abweichungen an;
- A ist der Wertebereich der festlegt, welche Abweichungen ins Risikomaß miteinbezogen werden.

Definition 3.23. Als weitere, zu $L(W_0, k, A)$ ähnliche dreiparametrische Klasse von Risikomaßen, definiert man nun $R(W_0, k, A)$ als k -te Wurzel von $L(W_0, k, A)$, d.h.

$$R(W_0, k, A) = \left[\int_{-\infty}^A |W - W_0|^k dF(W) \right]^{1/k} = [L(W_0, k, A)]^{1/k},$$

wobei $A, W_0 \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.

Definition 3.24. (*Verlustfunktion*)

Eine Verlustfunktion gibt in der statistischen Entscheidungstheorie den erwarteten Wert eines Verlustmaßes $l(W)$, falls $W \leq A$ und 0 sonst, an, d.h. es gilt

$$\text{Verlustfunktion} = \int_{-\infty}^A l(W) dF(W).$$

Betrachtet man die dreiparametrische Klasse von Risikomaßen $L(W_0, k, A)$, sieht man, dass sie mit der Verlustfunktion übereinstimmt, indem $L(W_0, k, A)$ der erwartete (oder teilweise erwartete) Wert des Verlustmaßes $l(W) = |W - W_0|^k$ ist.

$R(W_0, k, A)$ ist eine Verallgemeinerung der Form der Verlustfunktion. Das Risikomaß $R(W_0, k, A)$ ist die k -te Wurzel des Erwartungswertes, der k -ten Potenz der Abweichung von W_0 . Das Maß repräsentiert eine Verallgemeinerung der „root mean square deviation“ und repräsentiert in diesem Sinne eine Art Durchschnitt (oder teilweisen Durchschnitt).

3.8.3 Beispiele

Es werden einige Beispiele von Risikomaßen als Spezialfall von $L(W_0, k, A)$ und $R(W_0, k, A)$ angeführt. Varianz, Semivarianz und die mittlere absolute Abweichung sind alles Spezialfälle von $L(W_0, k, A)$ und die Standard-Abweichung ist ein Spezialfall von $R(W_0, k, A)$.

Lemma 3.1. *Varianz ist ein Spezialfall von $L(W_0, k, A)$ mit den Parametern $W_0 = \bar{W}$, $k = 2$ und $A = +\infty$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} L(W_0, k, A | W_0 = \bar{W}, k = 2, A = \pm\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} |W - \bar{W}|^2 dF(W) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (W - \bar{W})^2 dF(W) = V(W) \end{aligned}$$

wobei $V(W) = \text{Varianz von } W$. □

Lemma 3.2. *Semivarianz ist ein Spezialfall von $L(W_0, k, A)$ mit den Parametern $W_0 = \bar{W}$, $k = 2$ und $A = \bar{W}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} L(W_0, k, A|W_0 = \bar{W}, k = 2, A = \bar{W}) &= \int_{-\infty}^{\bar{W}} |W - \bar{W}|^2 dF(W) \\ &= \int_{-\infty}^{\bar{W}} (W - \bar{W})^2 dF(W) = SV(W) \end{aligned}$$

wobei $SV(W)$ = Semivarianz von W . □

Varianz und Semivarianz unterscheiden sich voneinander also nur in der Größe der Abweichungen vom Erwartungswert, die im Risikomaß vorkommen.

Lemma 3.3. *Die mittlere Abweichung ist ein Spezialfall von $L(W_0, k, A)$ mit den Parametern $W_0 = \bar{W}$, $k = 1$ und $A = \pm\infty$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} L(W_0, k, A|W_0 = \bar{W}, k = 1, A = \pm\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} |W - \bar{W}| dF(W) \\ &= MAD(W) \end{aligned}$$

wobei $MAD(W)$ = die mittlere Abweichung von W . □

Die Standard-Abweichung ist funktionell ähnlich zur Varianz. Trotzdem ist es kein Spezialfall von $L(W_0, k, A)$, sondern ein Spezialfall von $R(W_0, k, A)$ für $W_0 = \bar{W}$, $k = 2$, und $A = \infty$.

Um ein Risikomaß festzulegen, sollte man sich mit drei Problemstellungen auseinandersetzen. Diese werden hier erwähnt, um sie mit den Parametern in Verbindung zu bringen:

1. Ab welchem Punkt können die Abweichungen gemessen werden? (Wahl von W_0 .)
2. Was ist die relative Gewichtung von großen Abweichungen in Bezug auf kleine Abweichungen? (Wahl von k .)
3. Welche Abweichungen sollen verwendet werden, um ein Risikomaß festzulegen? (Wahl von A .)

3.8.4 Fünfparametrische Klasse von Risikomaßen - Einleitung

1973 veröffentlichte Stone [1973] seine dreiparametrische Klasse von Risikomaßen, die die meist-verwendeten Risikomaße enthalten. Seitdem gab es dann deutliche Entwicklungen im Risiko-Management, nicht nur im Bereich der Finanz-Wirtschaft, sondern auch in anderen Feldern wie der Psychologie, Operation Research et cetera. Pedersen und Satchell [1998] haben die *Stonesche* Klasse von Risikomaßen erweitert und vier wünschenswerte Eigenschaften für ein *gutes* Risikomaß erläutert.

3.8.5 Definition der fünfparametrischen Klasse

Basierend auf der *Stoneschen* Klasse, wird eine erweiterte Klasse von Risikomaßen eingeführt: *Die fünfparametrische Klasse von Risikomaßen*. Die Notation ist die selbe wie in Abschnitt 3.13.

Definition 3.25.

Die fünfparametrische Klasse von Risikomaßen $R[A, W_0, \alpha, \theta, y(\cdot)]$ ist definiert als

$$R[A, W_0, \alpha, \theta, y(\cdot)] = \left[\int_{-\infty}^A |W - W_0|^\alpha y[F(W)] dF(W) \right]^\theta$$

für beschränkte Funktionen $y(\cdot)$ und A, W_0, α und $\theta \in \mathbb{R}$ und $\theta > 0$ und $\alpha > 0$.

3.8.6 Beispiele

Diese neue Familie enthält eine große Anzahl von Risikomaßen. Es werden nun einige Beispiele angeführt, die Spezialfälle dieser fünfparametrischen Klasse sind.

- Stone's Maß:

$$R \left[A, W_0, \alpha, \frac{1}{\alpha}, 1 \right].$$

Daraus folgen automatisch:

- Die Standard-Abweichung:

$$R \left[\infty, \bar{W}, 2, \frac{1}{2}, 1 \right].$$

- Die Semistandard-Abweichung:

$$R \left[\bar{W}, \bar{W}, 2, \frac{1}{2}, 1 \right].$$

- Die mittlere absolute Abweichung (MAD):

$$R [\infty, \bar{W}, 1, 1, 1].$$

Weitere Beispiele sind:

- Die Varianz:

$$R [\infty, \bar{W}, 2, 1, 1].$$

- Die Semivarianz:

$$R [\bar{W}, \bar{W}, 2, 1, 1].$$

- Die Wahrscheinlichkeit einen Verlust zu machen:

$$R [0, 0, 0, 1, 1].$$

- Das Lower Partial Moment (LPM):

$$R \left[\bar{W}, \bar{W}, \alpha, \frac{1}{\alpha}, 1 \right].$$

Diese neue Klasse von Risikomaßen enthält viele allgemeine Klassen und Spezialfälle. Um möglichst viele Spezialfälle in diese Klasse einfließen zu lassen, haben Pedersen und Satchell [1998] eine noch allgemeinere Familie eingeführt, die 6 K -Parameter Familie

$$R[K, A_k, c_k, W_k^0, \alpha_k, \theta_k, y_k(\cdot)] = \left[\sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{A_k} e^{-c_k W} |W - W_0|^{\alpha_k} y_k[F(W)] dF(W) \right]^{\theta_k}.$$

Wünschenswerte Eigenschaften für ein finanzielles Risikomaß

Es werden nun Axiome definiert, um passende Risikomaße aus einer großen Menge von Maßen, auszuwählen. Als erster Schritt ist es demnach essentiell, genau zu verstehen, was man messen will. *Ein Risikomaß im finanziellen*

Sinn ist ein Maß, das, gegeben eine Zufallsvariable W , einen positiven Wert der reellen Zahlengerade zurückgibt.

D.h. man sucht also eine Abbildung

$$R[W] : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+,$$

wobei es erlaubt ist, dass W verschiedene Werte in Ω annimmt, abhängig von der Wahl des Risikomaßes, das man messen will. Das Kapital soll positiv sein und die arithmetischen Renditen sollen größer als -1 sein (das nennt man begrenzte Verbindlichkeiten). Es wird kein negatives Risiko erlaubt und die Abbildung soll eine binäre Relation des Risikos wiedergeben. Im Folgenden werden nun Eigenschaften aufgelistet, die erfüllt sein müssen.

Definition 3.26. *Sei W eine Zufallsvariable. Die Basiseigenschaften (BE) einer finanziellen Risikomaß-Abbildung $R[W]$ laut Pedersen und Satchell [1998] sind:*

(BE1) (Positivität) $R[W] \geq 0$.

(BE2) (Homogenität) $R[\lambda W] = |\lambda|R[W]$ für $\lambda \geq 0$.

(BE3) (Subadditivität) $R[W_1 + W_2] \leq R[W_1] + R[W_2]$.

(BE4) (Shift-Invarianz) $R[W + \lambda] \leq R[W]$ für alle y .

Dies entspricht unseren Eigenschaften 2, 3.1 und 6.4.

Einen Unterschied zu den Eigenschaften, die im Kapitel 2 erläutert wurden, findet man in der Eigenschaft BE4, hier stimmt die Ungleichung für alle λ und nicht nur für positives Vermögen $\lambda \geq 0$.

Auch die Eigenschaften BP2 und BP4 werden verwendet um zu zeigen, dass das Maß $R[W]$ konvex ist. Daraus folgt, dass die Diversifikation das Risiko reduzieren wird und man zu einer Trennung in der optimalen Portfolio-Auswahl kommt.

4 Implementierung der Risikoklassen

Der Fokus dieser Arbeit liegt nun auf einer Analyse der folgenden vier Klassen von Risikomaßen:

1. Spektrale Risikomaße
2. Deviation-Maße und Expectation-bounded-Risikomaße
3. Reward-Maße
4. 3/5-parametrische Klasse von Risikomaßen

Als Referenz-Risikomaß wird an dieser Stelle der CVaR verwendet. Dieses auf der Verlustverteilung basierende Risikomaß gilt im Allgemeinen als gut erforscht.

In diesem praktischen Teil der Arbeit sollen nun gezielt die Eingangs erwähnten Risikomaße auf ihre Tauglichkeit und Einsetzbarkeit hin getestet werden. Zur Untersuchung der Risikomaße werden Aktien aus einem europäischen Indexportfolio, dem EURO STOXX 50, verwendet. Dieser beinhaltet 50 der bedeutendsten Unternehmen der Eurozone. Diese Risikomaße (siehe Kapitel 3) wurden mithilfe von MATLAB implementiert.

Die Implementierung erfolgte über die Studenten-Version von MATLAB R2014a. Eine große Hilfe stellten dabei die Toolboxen *Optimization* und *Statistics* dar. Der Hauptteil der Implementierung basiert allerdings auf der *Financial* sowie der *Database* Toolbox. Diese beiden Pakete bieten eine Vielzahl an nützlichen Funktionen und Objekten zur Bearbeitung und Weiterverarbeitung von Finanzmarkt-Daten. Die beiden Funktionen *'PortfolioCVaR'* und *'PortfolioMAD'* wurden im Speziellen dazu genutzt, das jeweilige Portfolio nach dem CVaR bzw. der mittleren absoluten Abweichung zu optimieren. Neben bloßer Berechnung des CVaR bzw. der MAD erlaubt es dieses Tool, umfangreiche Untersuchungen und Berechnungen zur Effizienzkurve durchzuführen.

Für eine genaue Erläuterung der Vorgehens- und Funktionsweise dieses Tools sei auf die wirklich sehr ausführlich gestaltete Dokumentation von MATLAB verwiesen. Die restlichen Risikomaße wurden selbst in MATLAB implementiert, da keine vorgefertigten Funktionen dazu existieren.

5 Explorative Datenanalyse

Um überhaupt Daten zu den einzelnen Aktien verwenden und verarbeiten zu können, müssen diese als erstes in den Workspace von MATLAB geladen werden. Dies geschieht über die Funktion *'fetch'* aus der *Database* Toolbox. Über diese Funktion kann direkt via MATLAB auf Datenbanken führender Finanzdienstleister zugegriffen werden, wie z.B. Yahoo, Bloomberg oder Thomson Reuters. Auf diese Weise können historische Kursverläufe beliebiger Aktien geladen werden. In unserem Fall wurde auf Aktienkurse in der Yahoo-Datenbank zurückgegriffen. Als Alternative zum direkten Laden via *'fetch'* könnte man die Daten auch über <https://de.finance.yahoo.com/q/hp?s=~STOXX50E> im .csv-Format downloaden und dann mit MATLAB manuell importieren.

Aus den in den Workspace von MATLAB geladenen und nun vorliegenden Tagesschlusskursen der jeweiligen Aktien müssen noch die täglichen logarithmierten Renditen berechnet werden, um auf diese dann die Risikomaße anwenden zu können. Dies wird über die MATLAB-eigene Funktion *'tick2ret'* realisiert, welche aus n Tagesschlusskursen $n - 1$ Tagesrenditen berechnet. Die nach diesem Schritt vorliegenden Daten sind nun soweit aufbereitet, dass sie für eine Risikomaß-Kalkulation verwendet werden können.

5.1 Verteilungsannahmen

Mit Hilfe von Boxplots und p -Werten werden die Daten vorher noch auf ihre Verteilung hin untersucht. Die p -Werte werden mittels der MATLAB-Funktion *'ttest'* bestimmt. Als Konfidenzintervall für den t-Test wurde $\alpha = 0.25$ gewählt.

In den Abbildungen 5, 6 und 7 werden auch noch jeweils 16 bzw. 14 Boxplots der Aktien des EURO STOXX 50 (alphabetisch geordnet) geplottet. Vier Aktien des Indexportfolios wurden bei der Analyse vernachlässigt, da der Zugriff auf die Daten nicht immer gewährleistet werden konnte bzw. teilweise nicht möglich war. Aus diesem Grund ergibt sich von den 50 Aktien im EURO STOXX 50 eine Anzahl von 46 Aktien, mit denen effektiv gearbeitet wurde. (Anmerkung: Wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit vom EURO STOXX 50 gesprochen, ist immer die Rede von diesen 46 Aktien.) Zur Veranschaulichung sind in Tabelle 3 alle Komponenten des EURO STOXX 50 aufgelistet. Jene vier, welche für die Berechnungen vernachlässigt werden, sind rot hinterlegt. Aufgrund der Auswertung des t-Tests wurden aus den 46 Aktien 38 ausgewählt, deren Renditen annähernd normalverteilt sind (siehe Tabelle 3, weiße Füllung). Für die restlichen acht Aktienrenditen erfolgte mittels t-Test

5 EXPLORATIVE DATENANALYSE

Nr.	Symbol (Yahoo)	Unternehmen	Nr.	Symbol (Yahoo)	Unternehmen
1	ABI.BR	Anheuser-Busch InBev	26	GLE.PA	Societe Generale Group
2	AI.PA	Air Liquide	27	GSZ.PA	GDF SUEZ
3	AIR.PA	Airbus Group NV	28	IBE.MC	IBERDROLA
4	ALV.DE	Allianz	39	INGA.AS	ING Group
5	ASML.AS	ASML	30	ISP.MI	Intesa Sanpaolo
6	BAS.DE	BASF	31	ITX.MC	INDITEX
7	BAYN.DE	Bayer	32	MC.PA	LVMH Moet Hennessy Louis Vuitton
8	BBVA.MC	BBVA	33	MUV2.DE	Münchener Rück
9	BMW.DE	Bayerische Motoren Werke	34	OR.PA	L'Oreal
10	BN.PA	Danone	35	ORA.PA	ORANGE
11	BNP.PA	BNP Paribas	36	PHIA.AS	ROY.PHILIPS
12	CA.PA	Carrefour	37	REP.MC	REPSOL
13	CRG.IR	CRH PLC	38	RWE.DE	RWE
14	CS.PA	AXA Group	39	SAN.MC	Banco Santander
15	DAI.DE	Daimler	40	SAN.PA	Sanofi
16	DBK.DE	Deutsche Bank	41	SAP.DE	SAP
17	DG.PA	VINCI	42	SGO.PA	Compagnie de Saint-Gobain
18	DPW.DE	Deutsche Post	43	SIE.DE	Siemens
19	DTE.DE	Deutsche Telekom	44	SU.PA	Schneider Electric
20	EI.PA	Essilor International	45	TEF.MC	TELEFONICA
21	ENEL.MI	Enel	46	UCG.MI	UniCredit
22	ENI.MI	Eni	47	UL.PA	Unibail-Rodamco
23	EOAN.DE	E.ON	48	UNA.AS	UNILEVER
24	FP.PA	Total	49	VIV.PA	Vivendi Soci
25	G.MI	Assicurazioni Generali	50	VOW3.DE	Volkswagen

Tabelle 3: Unternehmen des Euro Stoxx 50 mit ihren Kürzeln für *Yahoo Finance*. Rot unterlegt: nicht verwendet. Gelb unterlegt: nicht-normalverteilte Renditen

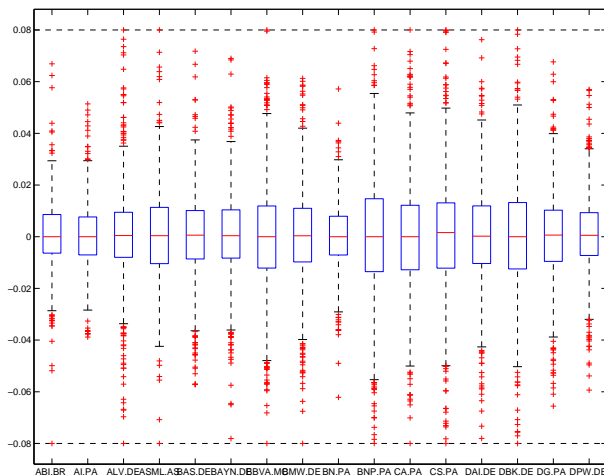


Abbildung 5: Boxplots der Renditen der Komponenten 1-16 des EURO STOXX 50

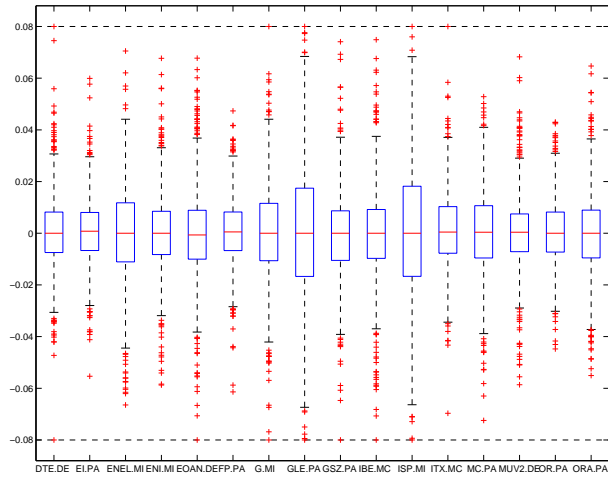


Abbildung 6: Boxplots der Renditen der Komponenten 17-32 des EURO STOXX 50

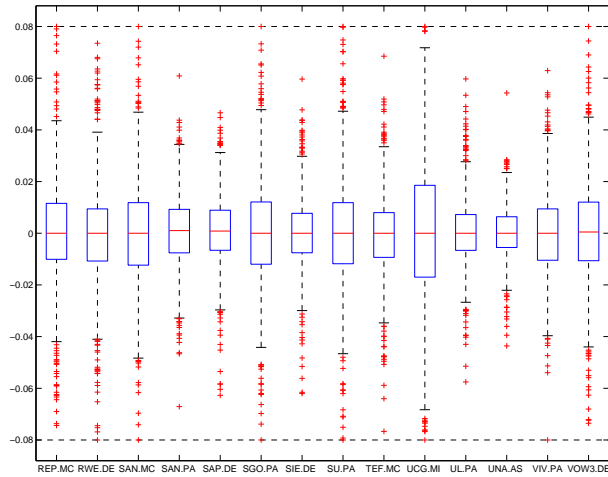


Abbildung 7: Boxplots der Renditen der Komponenten 33-46 des EURO STOXX 50

die Annahme, dass sie (annähernd) nicht-normalverteilt sind (siehe Tabelle 3, gelbe Füllung).

5.2 Renditenberechnung

Kurz soll noch darauf eingegangen werden, auf welche Weise die Tagesrenditen berechnet werden. Diese Überlegungen beziehen sich auf das Buch von Adelmeyer und Warmuth [2005]. Beim Handeln mit Wertpapieren wird das Verhältnis zwischen Gewinn und Einsatz bzw. Verlust und Einsatz als einfache Rendite bezeichnet und üblicherweise in Prozent angegeben. Das Wort 'Rendite' gibt an, dass damit der Ertrag eines Handels erfasst wird. Renditen können positiv oder negativ sein. Durch das Wort 'einfach' grenzt sich diese Art der Renditenberechnung von den logarithmischen Renditen ab.

Renditen, einfache wie logarithmische, beziehen sich immer auf einen bestimmten Zeitraum, typischerweise auf einen Tag, eine Woche, einen Monat, ein Vierteljahr, ein Halbjahr oder ein Jahr. Berechnet wird die einfache Rendite aus den Kursen am Anfang und Ende des Zeitraums gemäß der Formel

$$\text{einfache Rendite} = \frac{\text{Endkurs} - \text{Anfangskurs}}{\text{Anfangskurs}}$$

Die logarithmischen Renditen werden gemäß der Formel

$$\text{logarithmische Rendite} = \ln \left(\frac{\text{Endkurs}}{\text{Anfangskurs}} \right).$$

berechnet.

Eine Untersuchung der Daten zeigt, dass die einfache und logarithmische Rendite meistens fast übereinstimmen. Aufgrund der Additivitätstheorie und der Symmetrie-Eigenschaft ziehen Finanzmathematiker die logarithmische Renditen jedoch den einfachen Renditen vor.

Aus diesem Grund werden auch in dieser Arbeit logarithmische Renditen für die weitere Analyse verwendet. Zur Berechnung der logarithmierten Renditen werden die täglichen adjustierten Schlusskurse der Aktien herangezogen.

6 CVaR-optimiertes Aktienportfolio für unterschiedlich verteilte Renditen

In diesem Abschnitt wird nun ein eigenes Aktienportfolio, bestehend aus 38 normalverteilten Aktien (vgl. Kapitel 5.1) aus dem EURO STOXX 50, zusammengestellt. Mithilfe dieses Portfolios soll nun analysiert werden, wie sich die in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten Risikomaße im Vergleich zum *CVaR* verhalten. Zu diesem Zweck wird nun zuerst dieses aus 38 Aktien bestehende Portfolio bezüglich des *CVaRs* optimiert, wodurch sich für unterschiedliche Werte der Mindestrendite μ verschiedene effiziente Portfolio-Zusammensetzungen ergeben (vgl. Gleichungen 19).

In weiterer Folge wird mithilfe dieser optimierten Aktienportfolios (*CVaR*-optimale Portfolios) ein ausgewählter Teil an Risikomaßen getestet.

Es gilt zu analysieren, ob die optimierten Portfolios auch für andere Risikomaße *effizient* (siehe zur genauen Erklärung Abschnitt 6.3) sind, oder ob etwa ein Risikomaß total abweicht.

In einem nächsten Schritt werden dann acht (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen von Aktien aus dem EURO STOXX 50 analysiert. Um den Unterschied zwischen den Risikomaßen noch deutlicher herauszuarbeiten, sollen die Ergebnisse dieser beiden Analysen von normal- und nicht-normalverteilten Renditen verglichen werden.

Um nun festzulegen, welche Risikomaße für diese Tests und Vergleiche ausgewählt werden, kann auf eine bereits erfolgte Analyse aller vorgestellten Risikomaße zurückgegriffen werden:

In einer dieser Arbeit vorangegangenen Untersuchung wurde bereits eine Vorauswahl an zu implementierenden Risikomaßen getroffen. Hierbei wurde analysiert, wie die empirische Berechnung verschiedener Risikomaße die naiven Vorstellungen eines Investors widerspiegeln. Zu diesem Zweck wurden zuerst verschiedene Kursverläufe des gesamten EURO STOXX 50 ausgewählt.

Im ersten Zeitraum wurde der Kurs von Januar 1999 bis kurz nach dem Platzen der Dotcom-Blase im März 2000 betrachtet und soll als Referenz für eine historisches Zeitintervall in dem Kurse tendentiell steigen dienen. Der zweite Zeitraum bewegt sich zwischen dem Beginn der Wirtschaftskrise im August 2007 und März 2009 und gibt den Verlauf eines deutlich fallenden Kurses wider. Als dritte Referenz wurde der Zeitraum zwischen Jänner 1994 und Oktober 1995 gewählt, da in diesem Bereich der Kurs gleichmäßig bleibt und nur leichten Schwankungen unterliegt.

Durch naives Betrachten des Kursverlaufes nehmen wir also an, dass im ersten Zeitraum (steigender Kursverlauf) ein Gewinn erzielt wurde. Im zweiten

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

Bereich (fallender Kursverlauf) wird ein Verlust erzielt. Im letzten Zeitraum, der einen gleichmäßig bleibenden Kursverlauf widerspiegelt, gehen wir ebenfalls von einem Gewinn aus, jedoch ist dieser im Vergleich nicht so stark wie im Falle des steigenden Kursverlaufs. Bezüglich des gleichbleibenden Kursverlaufes könnte man auch von einem gleichbleibenden Wert des Portfolios ausgehen.

Nun wurden für diese drei Bereiche jeweils die Risikomaße zur Kursentwicklung des EURO STOXX 50 berechnet. Zur Veranschaulichung werden alle berechneten Risikomaße noch in Abbildung 8 in einer gemeinsamen Plot-Matrix dargestellt. Die einzelnen Plots beinhalten die Ergebnisse zu den drei Datensätzen (Kurs fallend, Kurs steigend, Kurs gleichbleibend) des jeweiligen Risikomaßes. Von den fünf Zeilen der Plot-Matrix beinhaltet die erste die Momenten-basierenden Risikomaße, die zweite die spektralen Risikomaße, Zeile drei die Deviation- und Expectation-bounded-Risikomaße, die vierte Zeile ein Reward-Maß und die fünfte und letzte Zeile umfasst schließlich die parametrische Klasse von Risikomaßen.

Es stellte sich die Frage, ob die zu untersuchenden Risikomaße nun das naive Betrachten der Kursverläufe widerspiegeln. Prinzipiell würde man ja bei einer solchen Betrachtung eines Long-only-Portfolios (wie in unserem Fall vorliegend) davon ausgehen, dass ein fallender Kurs ein größeres Risiko birgt, als ein steigender Kurs. Einen gleichbleibenden Kurs kann man etwas schwerer einschätzen, jedoch würde man auch dazu tendieren, das Risiko als eher gering einzustufen.

Unter diesen einfachen Standpunkten wurden danach die Risikomaße bewertet. Betrachtet man die Werte der einzelnen Risikomaße, die in Abbildung 8 aufgetragen sind, erkennt man, dass der Wert für den fallenden Kurs betragsmäßig am höchsten ist. Dies scheint erwartungsgemäß auch logisch. Ausgenommen hiervon ist die Sharpe Ratio, die als Beispiel für die Klasse der Reward Maße steht; hier konnte kein aussagekräftiges Ergebnis erzielt werden.

Aus der Sicht eines Investors werden vor allem unerwartet negative Kursveränderungen als Risiko angesehen. Aus diesen Grund eignen sich am besten Risikomaße, die das „downside tail risk“ (Randrisiko im Verlustbereich) einer Verteilung erfassen. Diese wünschenswerten Eigenschaften findet man vor allem in der Klasse der kohärenten Risikomaße.

Die spektralen Risikomaße sind die Klasse aller kohärenten und zudem verteilungsinvarianten und komonotonen additiven Risikomaße. Aufgrund ihrer Eigenschaften und der bestehenden Freiheitsgrade bei der Wahl von Risiko-

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

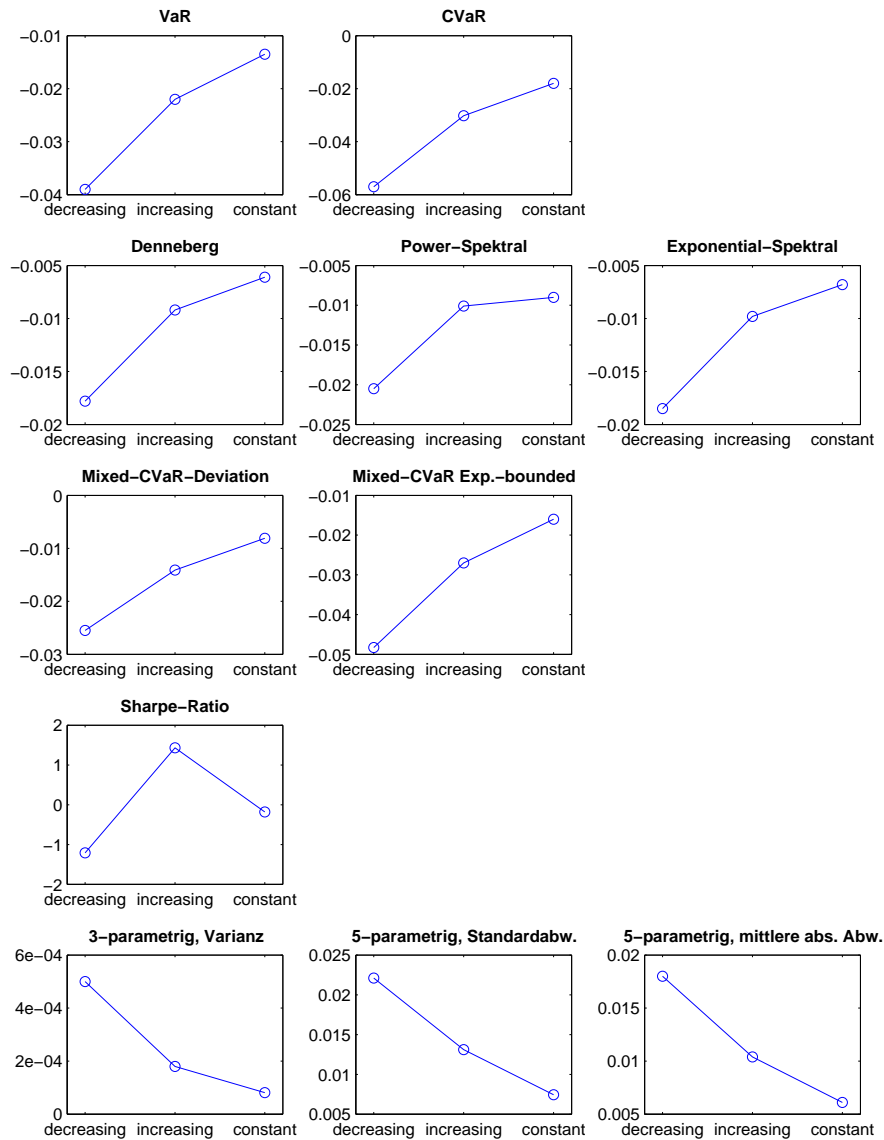


Abbildung 8: Plot-Matrix aller berechneten Risikomaße

spektren eignen sich spektrale Risikomaße zur Abbildung individueller Risikoverständnisse im Regulierungskontext sehr gut (vgl. hierzu Kischka [2013], Kapitel 3). Dies gilt ebenso für die Klasse der 3/5-parametrischen Risikomaße.

Auch hier erlauben die Parameter eine hohe Diversifikation des Risikomaßes auf spezielle Umstände bzw. Vorstellungen hin.

Aus diesem Grund beschränken wir uns bei der weiteren Analyse nur mehr auf Risikomaße aus den Klassen der „spektralen Risikomaße“ und der „3/5-parametrischen Risikomaße“, da diese eine bessere Darstellung des Verhaltens eines Investors erlauben.

6.1 Ansätze zur Portfoliooptimierung

„I was stuck with the notion that you should be interested in risk as well as return“ [Markowitz [1952]], beschreibt Markowitz rückblickend den Beginn seiner Arbeit. Markowitz [1952] geht davon aus, dass jemand, der Geld anlegt, sein Augenmerk nicht nur auf die damit zu erzielende Rendite richtet, sondern auch das damit einhergehende Risiko in Betracht zieht. Dies alles unter der Annahme, dass Investoren risikoavers handeln.

Das heißt: Wenn mehrere Anlagemöglichkeiten mit gleichem erwarteten Ertrag zur Auswahl stehen, so wählen Investoren diejenige mit dem kleinsten Risiko. Markowitz entwickelte ein Verfahren, wie man in Bezug auf Rendite und Risiko optimierte Portfolios zusammenstellen kann (Adelmeyer und Warmuth [2005]).

Im Markowitz $(\mu-\sigma)$ - Ansatz (Mittelwert-Varianz-Ansatz) wird das Risiko anhand der Standardabweichung von Aktienkursrenditen gemessen. Wie bereits erwähnt, wird in dieser Arbeit ein Optimierungsansatz unter Berücksichtigung des $CVaR$ sowie der MAD (mittlere absolute Abweichung) verwendet (siehe in weitere Folge Kapitel 7).

Ein Investor möchte nun also in d (risikoreiche) Assets investieren, sodass der erwartete Portfolioertrag μ_p beträgt und das Risiko des Ertrags minimiert wird.

Bemerkung 6.1. (Bezeichnungen)

- d ... Anlagen $i = 1, \dots, d$
- $w = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{R}^d$... Anteile/Gewichtung der Anlagen
- $X_i = (X_1, \dots, X_d)^T$... sei der Zufallsvektor der Renditen der d Aktien
- $X_p(w) = \sum_{i=1}^d w_i X_i$... (zukünftige) Portfoliorendite (Zufallsvariable)

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

- μ ... Mindestrendite
- $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$... erwartete Rendite von Anlage i
- $\mu_p = \sum_{i=1}^d w_i \mu_i$... erwartete Portfoliorendite

- $\Sigma = \sigma_{ij}$... Kovarianz von Anlage i mit Anlage j
- $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$... Varianz von Anlage i
- σ_p^2 ... Portfoliovarianz, d.h. die Varianz des Portfolios

Zuerst wird hier das Portfolio-Optimierungsmodell (das klassische Markowitz-Modell, siehe Dragoti-Çela [2009]) angeführt.

Die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems erfolgt durch die Quantifizierung der Rendite (durch Portfoliorenditen) und des Risikos (durch Portfoliovarianz) und anschließender Optimierung unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
 & \min_w w^T \Sigma w, \\
 & \text{sodass} \\
 & w^T \mu_i \geq \mu \\
 & \sum_{i=1}^d w_i = 1
 \end{aligned} \tag{18}$$

Es werden nun zwei Alternativen vorgestellt, die neben dem klassischen (μ - σ)-Ansatz bereits in der Fachwelt ihre Anwendung finden. Als erstes wird hier die CVaR-Portfolio-Optimierung vorgestellt (die zweite Alternative wird in dem dazugehörigen Kapitel 7 diskutiert). Anstatt der Varianz wird hier der Conditional Value at Risk als zu minimierendes Risikomaß eingesetzt.

$$CVaR_\alpha(X_p(w)) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_\alpha(X_p(w)) d\alpha,$$

wobei $VaR_\alpha(X_p(w))$ der Portfolio-VaR mit Konfidenzniveau α repräsentiert. Die Gewichte des Minimum-CVaR sind als Lösung des folgenden quadratischen Optimierungsproblems gegeben:

$$\begin{aligned}
 & \min_w CVaR_\alpha(X_p(w)), \\
 & \text{sodass} \\
 & w^T \mu_i \geq \mu \\
 & \sum_{i=1}^d w_i = 1
 \end{aligned} \tag{19}$$

$w = (w_1, \dots, w_d)$ beschreibt hierbei den Vektor aus Portfoliogewichten.

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Definition 6.1. (*Sphärische Verteilung*)

Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine sphärische Verteilung genau dann wenn eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die charakteristische Funktion von X folgendermaßen gegeben ist:

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 \dots + t_d^2)$$

Definition 6.2. (*Elliptische Verteilung*)

Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine elliptische Verteilung, wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$, wobei $Y \sim S_k(\psi)$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ein konstanter Vektor und $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ eine konstante Matrix ist.

Die charakteristische Funktion ist

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= \mathbb{E}(\exp\{it^T X\}) = \mathbb{E}(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T \mu\} \mathbb{E}(\exp\{i(A^T t)^T Y\}) \\
 &= \exp\{it^T \mu\} \psi(t^T \Sigma t),
 \end{aligned}$$

wobei $\Sigma = AA^T$.

Dieser Abschnitt bezieht sich auf das Vorlesungsskriptum von [Dragoti-Çela, 2009], die Notationen sind äquivalent zu denen in Bemerkung 6.1.

Es werden d Aktien und die Klasse \mathcal{P} aller Portfolios bestehend aus diesen Aktien betrachtet. Jedes Portfolio aus \mathcal{P} ist eindeutig durch den Gewichtsparameter $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$, mit $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = Cov(X)$. Sei \mathcal{P}_m die Klasse jener Portfolios aus \mathcal{P} , sodass $\mu_p = \sum_{i=1}^d w_i \mu_i = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{P}_m = \{w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^d w_i = 1, \mu_p = \sum_{i=1}^d w_i \mu_i = m\}$$

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

Sei ρ ein Risikomaß, dann gilt für ein Mean- ρ Portfolio-Optimierungsmodell

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \rho(X_p(w))$$

und das Mean- Variance Portfolio-Optimierungsmodell nach Markowitz [1952] hat die Form

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \text{Var}(X_p(w))$$

Diese beiden Optimierungsmodelle hängen über folgenden Satz zusammen.

Satz 6.1. (Dragoti-Çela [2009])

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^d \times k$, und einem sphärisch verteilten Zufallsvektor $Y \sim S_k(\psi)$ und $\mathbb{E}(X_k^2 < \infty)$, $\forall k$. Sei ρ ein Risikomaß, das die Eigenschaften der Translationsinvarianz und der positiven Homogenität besitzt, und $\rho(Y_1) \geq 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente des sphärisch verteilten Zufallsvektors Y ist.

Es gilt dann:

$$\arg \min\{\rho(X_p(w)) : w \in \mathcal{P}_m\} = \arg \min\{\text{Var}(X_p(w)) : w \in \mathcal{P}_m\}$$

Beweis. Siehe [Dragoti-Çela, 2009]. □

Effizientes Portfolio

Um eine möglichst exakte Entscheidung treffen zu können, muss noch das Konzept der Effizienz betrachtet werden.

Definition 6.3. Ein Portfolio P heißt effizient, genau dann wenn für jedes andere Portfolio Q gilt: $\mu_Q \leq \mu_P$ oder $\sigma_Q \geq \sigma_P$

Graphisch bedeutet das, dass im Rendite-Risiko-Diagramm keine Portfolios Q links oberhalb von P liegen, wenn P effizient ist. Zur Illustration dient Abbildung 9, in der exemplarisches ein effizientes Portfolio markiert wurde, als Risikomaß wird hier der *CVaR* verwendet. Des Weiteren enthält die rechte Grafik in Abbildung 9 alle Portfolios, die in Bezug zu den anderen Portfolios aus der linken Grafik effizient sind.

Die Gesamtheit aller effizienten Portfolios liegen auf einer Kurve, der sogenannten Effizienzkurve (“Efficient Frontier”).

Nach Markowitz [1952] entscheiden sich also rational handelnde Investoren für ein effizientes Portfolio. Die Wahl des Portfolios hängt dann von der Risikobereitschaft ab. (vgl. Adelmeyer und Warmuth [2005])

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

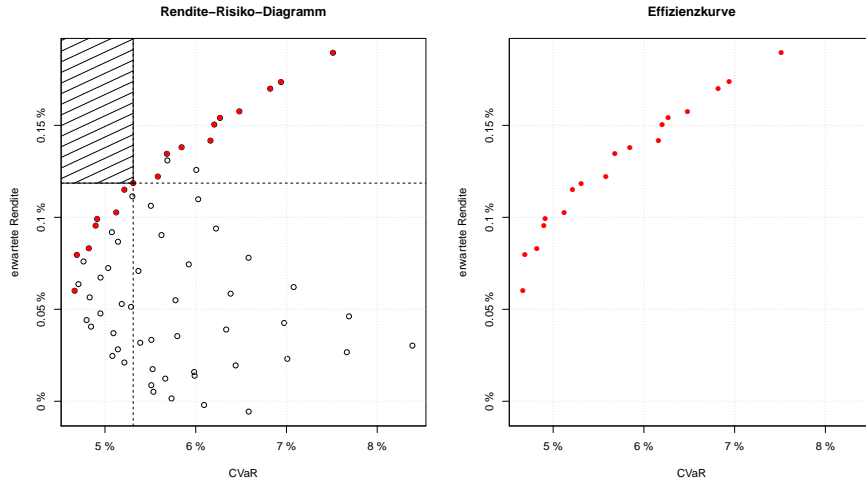


Abbildung 9: links: Mögliche effiziente Portfolios bezüglich des $CVaR$ von log. Renditen; rechts: effiziente Portfolios auf der empirischen Effizienzkurve

6.2 $CVaR$ -optimale Portfolios für normalverteilte Aktienrenditen

Zur Berechnung und Optimierung der effizienten Portfolios werden die von Dividenden und Splits bereinigten täglichen Schlusspreise von *Yahoo Finance* in MATLAB geladen (vgl. Beginn Kapitel 6). Der Zeitraum der Schlusskurse liegt zwischen 01.01.2011 und 31.12.2013. Danach werden die täglichen logarithmierten Renditen der 38 Schlusskurse berechnet. Mit diesen Renditen wird danach die Optimierung des Portfolios durchgeführt.

MATLAB benötigt zur Portfolio-Optimierung eine Vorgabe, für wie viele Werte der Mindestrendite die Efficient Frontier berechnet werden soll. Beim Vergleich verschiedener Werte für diese Vorgabe wurde der Wert mit $n = 500$ festgelegt, da in diesem Falle die Rechenzeit der Portfolio-Optimierung mit $t \approx 160 \text{ sec.}$ akzeptabel erschien.

Die $CVaR$ -Portfolio-Optimierung wurde mittels MATLAB durchgeführt. Wie bereits erwähnt, wurden $n = 500$ verschiedene Gewichte ausgegeben, für die das Portfolio effizient ist. Das Rendite-Risiko-Diagramm der effizienten Portfolios in Abbildung 10 stellt die Effizienzkurve des Portfolios dar.

Die Effizienzkurve lässt sich für diese 38 Aktien grob in zwei Bereiche teilen: Im ersten Teil steigt die Kurve steil nach oben, das Risiko ändert sich nur minimal, die Rendite erhöht sich allerdings rasant. Danach folgt ein annähernd

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

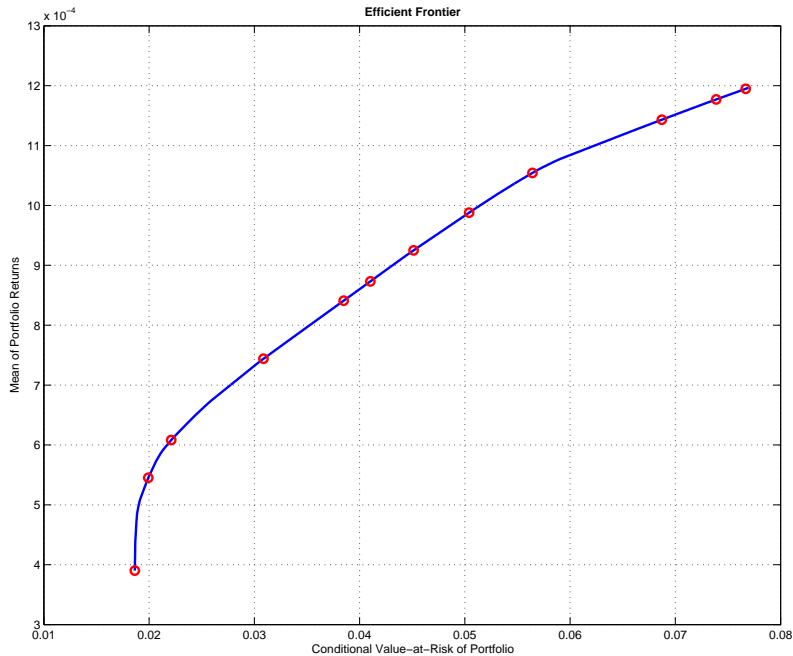


Abbildung 10: Effizienzkurve des CVaR-optimalen Portfolios (normalverteilte Aktienrenditen); exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet (siehe Tabelle 4)

linearer zweiter Teil. Anhand des Kurvenverlaufs kann man schließen, dass eine Portfolio-Auswahl in der Praxis nur im oberen, zweiten Teil wirklich Sinn macht. Der untere Kurventeil erscheint durch den sehr steilen Verlauf weniger vorteilhaft, da hier durch eine minimale Senkung des Risikos ein beachtlicher Abfall der Rendite beobachtet werden kann. Ein rationaler Investor würde daher immer das obere Ende dieses Segmentes für seine Portfolio-Zusammensetzung wählen.

In Abbildung 11 sind die Gewichte über den $n = 500$ optimalen Portfolios aufgetragen. Man erkennt aus der Zusammensetzung, dass aus ursprünglich 38 ausgewählten Aktien lediglich zehn ins Portfolio aufgenommen wurden, die sich dann im weiteren Verlauf der Effizienzkurve weiter reduzieren. Ab etwa der Hälfte scheinen gar nur mehr fünf Aktien im effizienten Portfolio auf.

In Tabelle 4 sind nun für zwölf der 500 Portfolio-Zusammensetzungen die

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

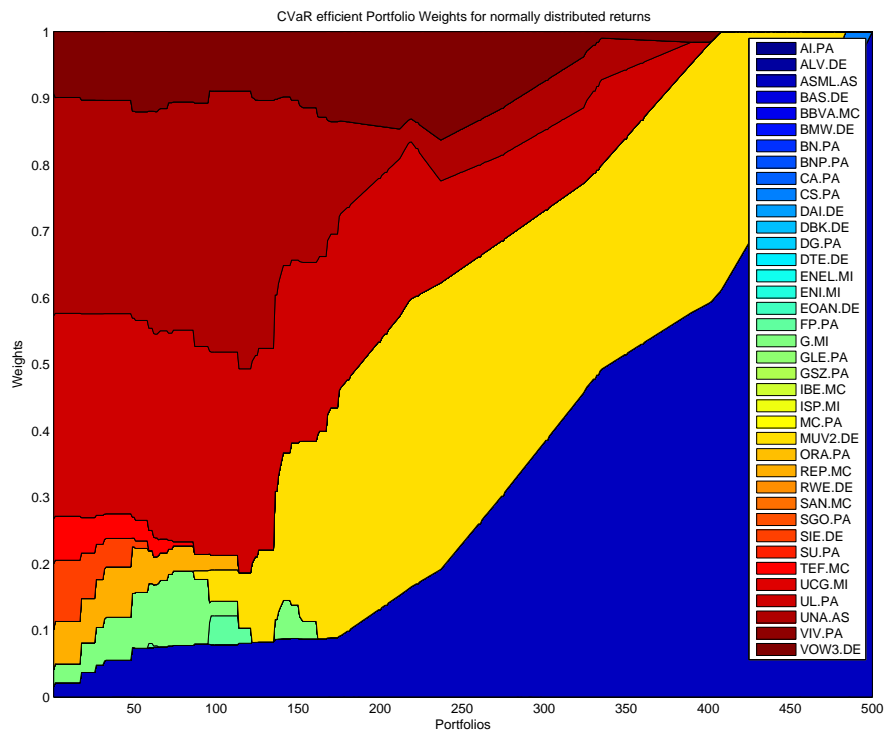


Abbildung 11: Gewichte aller CVaR-optimalen Portfolios (annähernd normalverteilte Aktienrenditen)

Gewichte sowie deren CVaR und die Renditen gegeben. Die ausgewählten Portfolios entsprechen den rot markierten Punkten in Abbildung 10.

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

Nr	1	102	136	220	280	300	333	371	412	467	488	499
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
w_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_3	1.55	7.86	8.65	16.71	32.05	38.26	48.38	54.87	62.88	85.55	94.01	99.50
w_4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{10}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.44	5.99	0.50
w_{11}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{13}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{14}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{15}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{16}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{17}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{18}	-	4.32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{19}	2.55	2.20	2.97	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{20}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{21}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{22}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{23}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{24}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{25}	-	4.72	19.26	43.28	37.54	34.79	30.81	35.13	37.12	11.02	-	-
w_{26}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{27}	5.97	2.17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{28}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{29}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{30}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{31}	9.94	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{32}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{33}	6.80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{34}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{35}	30.49	30.56	29.52	23.11	12.69	12.08	12.56	6.49	-	-	-	-
w_{36}	33.39	39.23	29.43	3.62	7.11	7.36	6.65	2.13	-	-	-	-
w_{37}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{38}	9.30	8.94	10.16	13.29	10.61	7.50	1.61	1.38	-	-	-	-
<i>CVaR</i>	1.86	1.99	2.21	3.09	3.85	4.10	4.51	5.04	5.64	6.87	7.39	7.67
<i>Rendite</i>	0.039	0.055	0.061	0.074	0.084	0.087	0.092	0.099	0.105	0.114	0.118	0.119

Tabelle 4: Beispiele von CVaR-effizienten Portfolios

6.2.1 Anwendung der Risikomaße auf die CVaR-optimalen Portfolios für normalverteilte Aktienrenditen

Zu Beginn von Kapitel 6 wurde bereits erklärt, wie einige aus den in Kapitel 3 eingeführten Risikomaße daraufhin getestet wurden, ob sie das Verhalten eines Investors gut widerspiegeln oder nicht.

Aufgrund dieser Analysen werden hier nicht mehr alle Risikomaße getestet, sondern nur jene, die man als „gutes“ Risikomaß einstufen würde. Dies sind im Speziellen die Maße aus der Klasse der spektralen Risikomaße (Denneberg-Maß sowie das exponentielle spektrale Risikomaß) und jene aus der Klasse der 3/5-parametrischen Risikomaße (Varianz, die mittlere absolute Abweichung sowie ein durch Parameter-Wahl selbst gewähltes Risikomaß).

Um ein Risikomaß auf das jeweilige gewichtete Portfolio anwenden zu können, werden zuerst die Renditen der einzelnen Aktien dem Optimierungsergebnissen (siehe Abschnitt 6.2) entsprechend gewichtet und anschließend addiert. Der dadurch entstehende 'Gesamtkurs' des Portfolios wird dann für die weitere Berechnung herangezogen. Durch Vergleich des sich ergebenden Kurvenverlaufs mit der CVaR-Effizienz-Kurve können die so erhaltenen Werte auf ihre Qualitäten hin überprüft und diskutiert werden.

Da die Normalverteilung einen Spezialfall von elliptischen Verteilungen darstellt, sollten nach Satz 6.1 alle kohärenten Risikomaße dieselben optimalen Portfolios kreieren. In unserem Fall liegen jedoch nur annähernd normalverteilte Renditen vor, wodurch sich doch leichte Unterschiede zwischen den einzelnen Risikomaßen für den normalverteilten Fall ergeben.

In Abbildung 12 sind die Werte für das **Denneberg-Risikomaß** gegen die mittleren Renditen aufgetragen. Man erkennt einen ähnlichen Verlauf zum CVaR des Portfolios aus Abbildung 10. Lediglich am Beginn der Kurve unterhalb der Ausbuchtung sind einige Portfolios nach dem Denneberg-Risikomaß nicht effizient. Die Kurve selbst schwankt etwas, folgt jedoch im Großen und Ganzen, abgesehen von der Beule zu Beginn, einem sehr ähnlichen Verlauf wie die CVaR-Effizienz-Kurve. Dass CVaR und Denneberg-Risikomaß ähnlich aussehen liegt nahe, da das Denneberg-Risikomaß ja eine Linearkombination des CVaR ist. Das Ergebnis scheint somit plausibel zu sein und sich mit den Erwartungen zu decken. Der primäre Unterschied der beiden liegt in der Höhe der Risikobewertung. Während sich der CVaR zwischen 1.8% und 7.7% bewegt, liegt das Denneberg-Risikomaß zwischen 0.55% und 1.2%. Dies bedeutet, dass das Denneberg-Risikomaß tendenziell einen risikoaffinen Standpunkt vertritt und somit Risiko niedriger bewertet als dies für den CVaR der Fall ist.

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

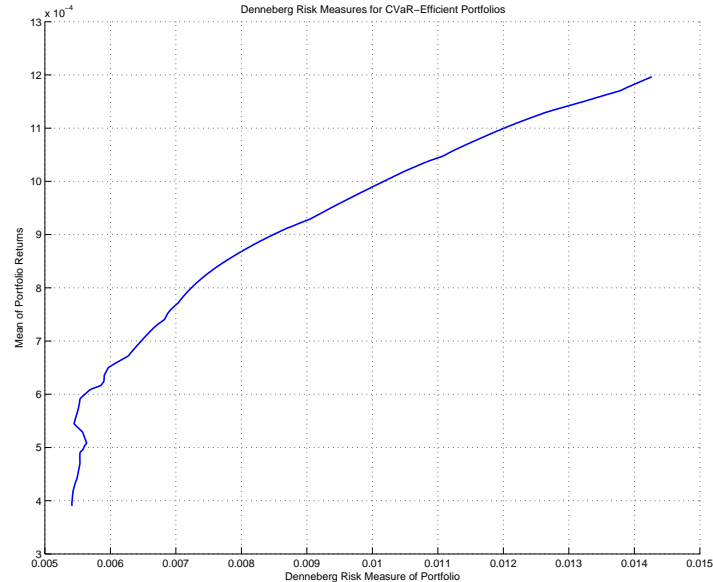


Abbildung 12: Denneberg-Risikomaß für alle CVaR-optimalen Portfolios

Für den Vergleich des **exponentiell-spektralen Risikomaßes** mit dem CVaR wurde als Parameter $a = 5$ gewählt. Durch Verändern des Parameters lässt sich die Risikobereitschaft eines Investors, mit anderen Worten die Sensitivität des Investors dem Risiko gegenüber, steuern. Auch dieses Risikomaß lässt sich durch den CVaR darstellen und verzeichnet daher einen ähnlichen Verlauf im Vergleich zum CVaR. Auffällig ist lediglich wieder die Ausbuchtung zu Beginn der Kurve, unter deren Beginn einige Portfolios nach dem exponentiellen spektralen Risikomaß nicht mehr effizient erscheinen.

Der unbestrittene Vorteil des exponentiell-spektralen Risikomaßes liegt zweifelsohne in der Justierbarkeit bezüglich der Risikovorlieben eines Investors. Hierdurch kann individuell auf einen bestimmten Finanzakteur eingegangen werden.

An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass diese Ergebnisse durchaus plausibel sind. Da die Klasse der spektralen Risikomaße insbesondere auch kohärent ist und die Optimierung über alle kohärenten Risikomaße bei elliptisch verteilten Portfoliorenditen dasselbe optimierte Portfolio zurück gibt. Hierzu sei noch einmal auf den Satz 6.1 in Abschnitt 6.1 verwiesen.

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

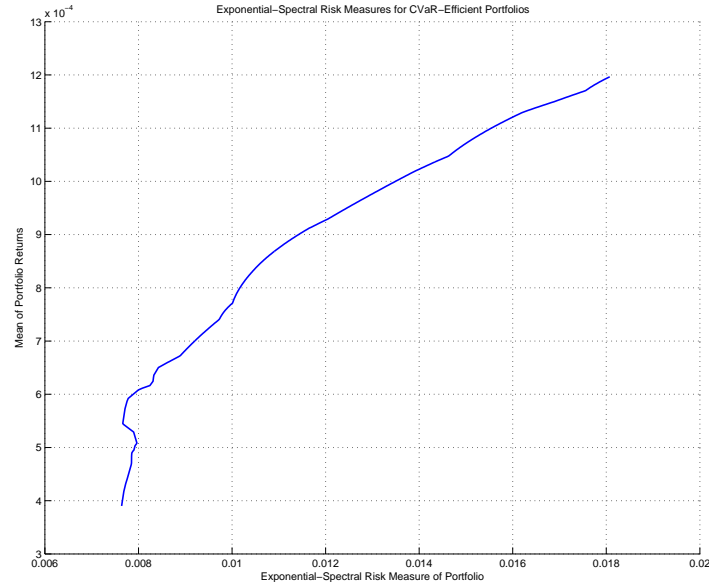


Abbildung 13: Exponentiell-spektrales Risikomaß für alle CVaR-optimalen Portfolios

Die **Varianz** verzeichnet in Abbildung 14 auch einen sehr ähnlichen Kurvenverlauf im Vergleich zu den effizienten Portfolios des *CVaR* (vergleiche Abbildung 10). Dies beruht auf der Tatsache, dass sich die beiden Risikomaße bei normalverteilten sowie bei nicht-schief leptokurtisch verteilten Renditen kaum bis gar nicht voneinander unterscheiden. Der große Vorteil des *CVaR* gegenüber den herkömmlichen Risikomaßen wie Standardabweichung und Varianz liegt eigentlich genau in der Miteinbeziehung dieser 'fat tails' bzw. der Kurtosis der jeweiligen Verteilung. Da die zur Untersuchung der Risikomaße herangezogenen Daten nun aber normalverteilt sind (vergleiche Kapitel 5.1), ergibt sich für den *CVaR* gegenüber der Varianz auch kein entscheidender Vorteil bzw. Unterschied. Auch hier sei wieder auf den Satz 6.1 verwiesen.

Die **mittlere absolute Abweichung** (MAD) ist in Grafik 15 gegen die mittlere Rendite aufgetragen. Auch dieses Risikomaß ist wie die vorhergehend Untersuchten dem *CVaR* ähnlich, sieht man von der Ausbuchtung zu Beginn der Kurve ab.

Das **5-parametrische Risikomaß** mit selbst gewählten Parametern wurde hinzugenommen, um ein besseres Verständnis dafür zu entwickeln, wie die einzelnen Parameter Einfluss auf das Risikomaß nehmen. Durch die festgeleg-

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

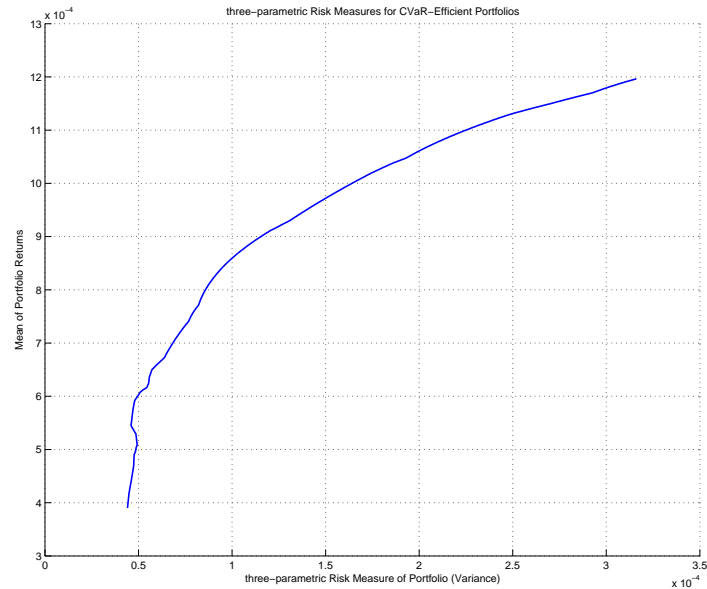


Abbildung 14: Varianz für alle CVaR-optimalen Portfolios

ten Parameter zu $\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $\gamma = 2$ ergibt sich ein Rendite-Risiko-Plot wie in Abbildung 16 ersichtlich. Im Vergleich mit den *CVaR*-optimalen Portfolios sieht man, dass sich auch dieses Maß nicht maßgebend von den anderen unterscheidet.

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

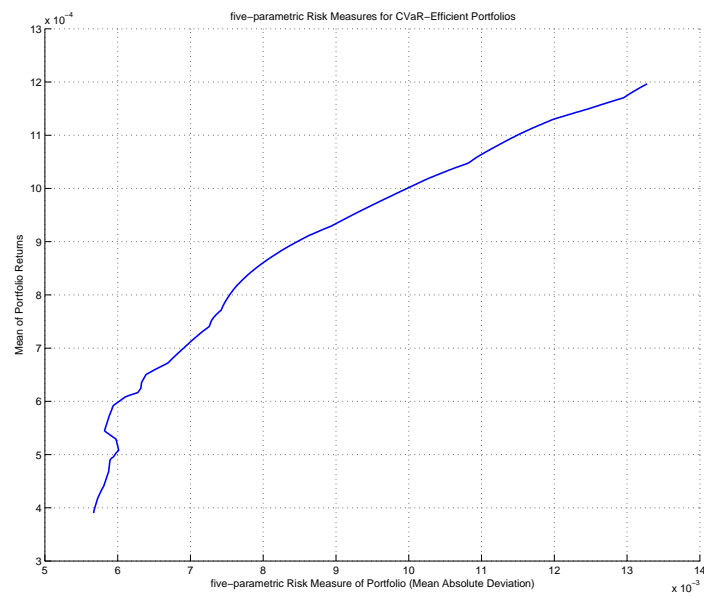


Abbildung 15: Mittlere absolute Abweichung für alle CVaR-optimalen Portfolios

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

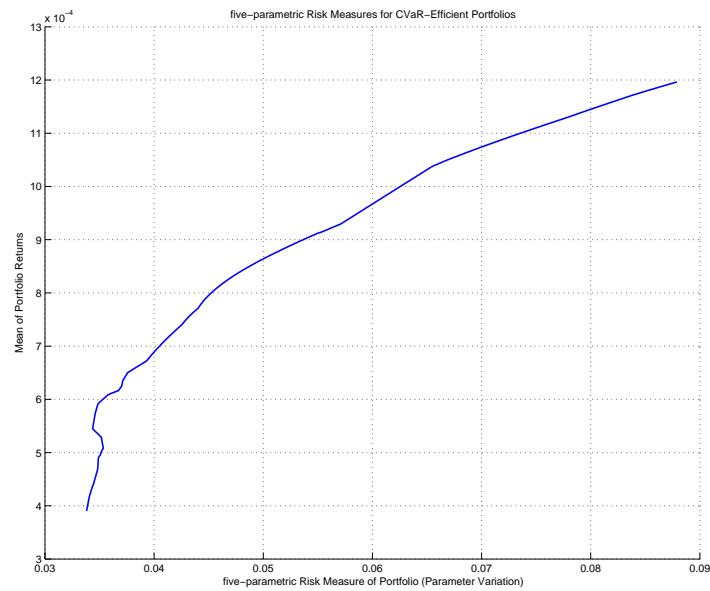


Abbildung 16: 5-parametriges Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für alle CVaR-optimalen Portfolios ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$)

6.3 CVaR-optimale Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen

Analog wie in Kapitel 6.2 werden auch hier die Effizienzkurve und die Area-Plots der optimalen CVaR-Portfolios gezeigt, einzig alleine mit dem Unterschied, dass nun die Renditen von den übrigen acht annähernd nicht-normalverteilten Aktien des EURO STOXX 50 analysiert werden.

In Abbildung 17 wird die Effizienzkurve des CVaR für die annähernd nicht-normalverteilten Aktienrenditen dargestellt. Den Kurvenverlauf kann man wieder unterteilen; in diesem Fall in drei Teile: im ersten Teil steigt der Verlauf rasant an, im zweiten Teil ist er annähernd linear. Der dritte und letzte Teil flacht extrem ab, wodurch sich in der Praxis eine effektive Portfolioauswahl aus dem mittleren Teil ergibt. Die rot markierten Punkte in der Grafik stellen exemplarisch wieder zwölf Punkte dar, für die Gewichte, CVaR und Rendite in Tabelle 5 angegeben sind.

In Abbildung 18 ist wiederum die Gewichtsverteilung über den $n = 500$ verschiedenen Portfolios aufgetragen. Man erkennt, dass hier von den acht Aktien letztlich sieben übrigbleiben, die an der Portfolio-zusammensetzung beteiligt sind.

In Tabelle 5 sind nun für zwölf der 500 Portfolio-Zusammensetzungen die Gewichte sowie deren CVaR und die Renditen gegeben.

Nr	1	102	136	220	280	300	333	371	412	467	488	499
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
w_1	-	5.17	5.39	6.69	9.13	6.16	4.14	2.66	6.31	4.66	0.16	-
w_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_3	-	-	4.72	15.03	15.55	20.94	26.25	31.59	31.05	32.09	32.86	7.08
w_4	18.50	28.31	28.50	29.98	35.39	33.34	28.24	21.85	11.81	2.44	1.29	-
w_5	10.70	23.51	25.72	32.22	39.94	39.56	41.37	43.90	50.82	60.81	65.69	92.92
w_6	50.63	24.62	22.77	16.08	-	-	-	-	-	-	-	-
w_7	8.09	11.39	8.25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_8	12.08	7.01	4.64	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<i>CVaR</i>	3.04	3.10	3.15	3.28	3.38	3.42	3.48	3.55	3.63	3.77	3.84	4.15
<i>Rendite</i>	0.067	0.075	0.077	0.083	0.088	0.089	0.092	0.095	0.098	0.102	0.104	0.104

Tabelle 5: Beispiele von CVaR-effizienten Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

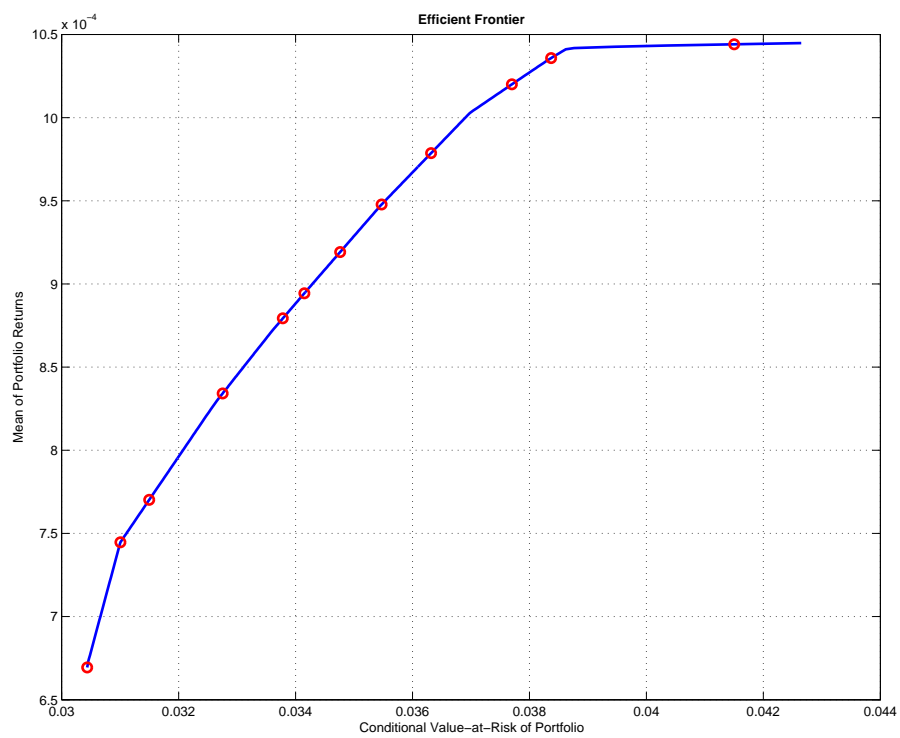


Abbildung 17: Effizienzkurve der CVaR-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet (siehe Tabelle 5)

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

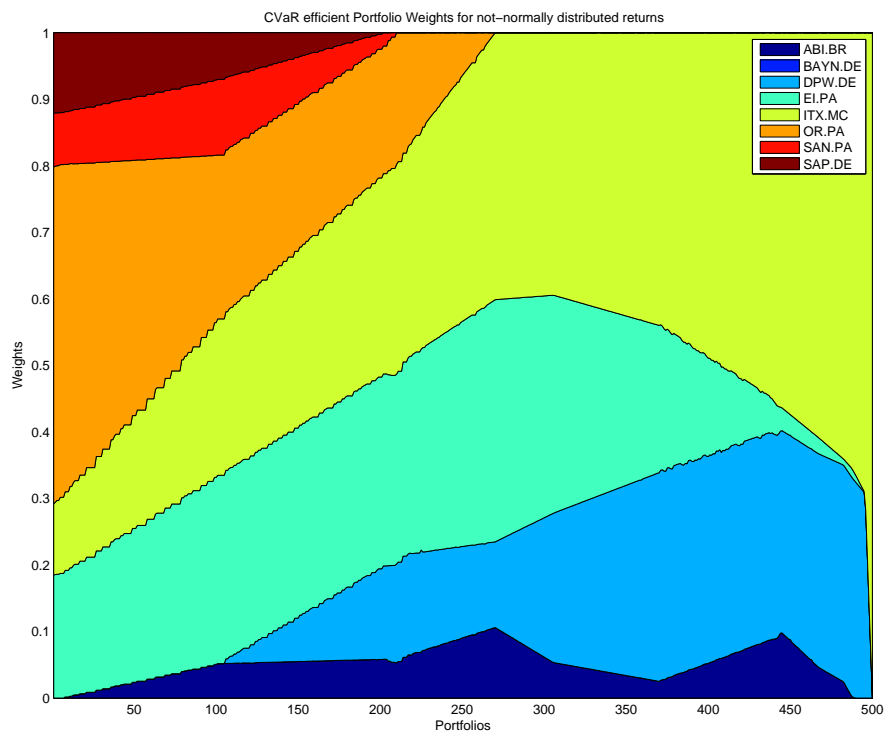


Abbildung 18: Gewichte aller CVaR-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen

6.3.1 Anwendung der Risikomaße auf die CVaR-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen

Nun sollen, wie schon im vorangegangenen Kapitel, die unterschiedlichen Risikomaße auf die CVaR-optimalen Portfolios angewendet werden. Es soll darauf geachtet werden, ob sich markante Unterschiede zwischen den Risikomaßen und dem CVaR ergeben, die auf der Verteilung der Renditen beruhen könnten.

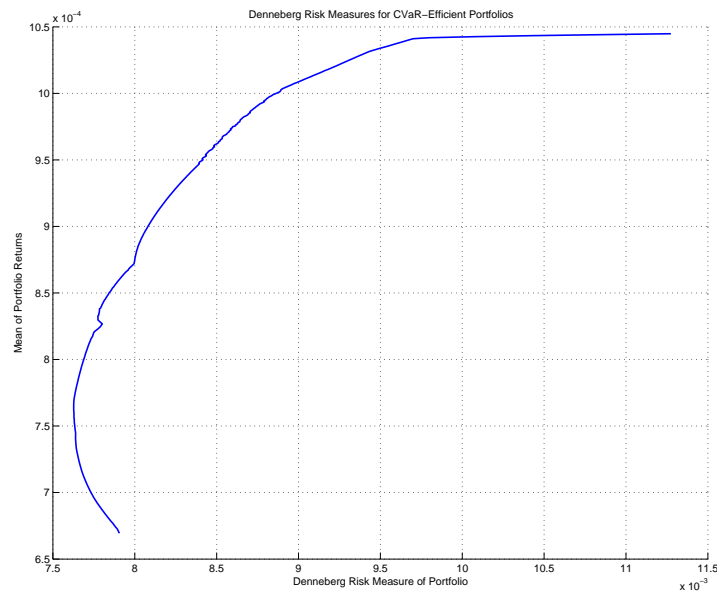


Abbildung 19: Denneberg-Maß für alle CVaR-optimalen Portfolios

In Abbildung 19 sind die Werte für das **Denneberg-Risikomaß** gegen die mittleren Renditen aufgetragen. Am Beginn der Kurve sind einige Portfolios nach dem Denneberg-Risikomaß nicht effizient, außerdem ist im mittleren Teil der Kurve ein leicht konkaver Verlauf zu sehen, wohingegen der CVaR in diesem Teil annähernd linear verläuft. Das Denneberg-Risikomaß ist generell risikoaffiner eingestellt als der CVaR, was mathematisch durch seine Formel auch begründet werden kann, da sich das Denneberg-Risikomaß hauptsächlich aus dem CVaR mit einem Konfidenzintervall von 50% zusammensetzt (Vgl. Kapitel 3.4).

Für den Vergleich des **exponentiell-spektralen Risikomaßes** mit dem CVaR in Abbildung 20 wurde als Parameter $a = 5$ gewählt. Durch Verändern

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

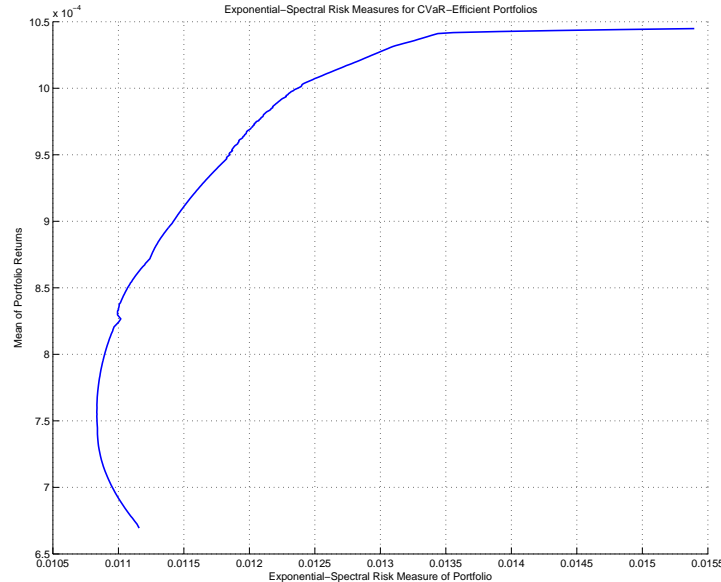


Abbildung 20: Exponentiell-spektrales Risikomaß für alle CVaR-optimalen Portfolios

des Parameters lässt sich, wie bereits mehrfach erwähnt, die Risikobereitschaft eines Investors, mit anderen Worten also die Sensitivität des Risikos, steuern. Das exponentielle spektrale Risikomaß verzeichnet einen sehr ähnlichen Verlauf wie das Denneberg-Risikomaß, hat jedoch den Vorteil, dass die Risikobereitschaft vorgegeben werden kann.

Die **Varianz** verzeichnet in Abbildung 21 einen deutlich größeren Unterschied im Vergleich mit dem CVaR in Abbildung 17 als dies noch für normalverteilte Aktienrenditen der Fall war. Im Vergleich zum Denneberg- oder exponentiellen spektralen Risikomaß verläuft die Kurve der Varianz noch etwas konkaver. Zu Beginn sind wie bei allen vorherigen Risikomaßen auch einige Portfolio-Zusammensetzungen nicht effizient.

Die **mittlere absolute Abweichung** (MAD) ist in Grafik 22 gegen die mittleren Renditen aufgetragen. Auch dieses Risikomaß weicht nun etwas mehr vom CVaR ab, als dies noch für normalverteilte Renditen der Fall war.

Die Parameter für das **5-parametrische Risikomaß** wurden wieder zu $\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $\gamma = 2$ festgelegt, wodurch sich ein Rendite-Risiko-Plot wie in Abbildung 23 ergibt. Von allen Risikomaßen zeigte das 5-parametrische mit den

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

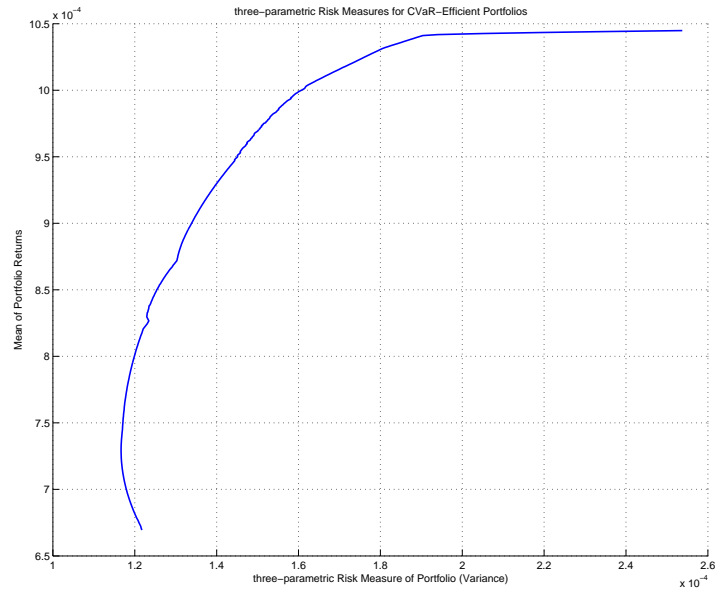


Abbildung 21: Varianz für alle CVaR-optimalen Portfolios

selbst gewählten Parametern den ähnlichsten Verlauf zum CVaR. Dies zeigt, wie sehr auch dieses Risikomaß von der Verteilung der Renditen abhängt und wie stark die Parametereinstellung das Ergebnis beeinflusst.

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

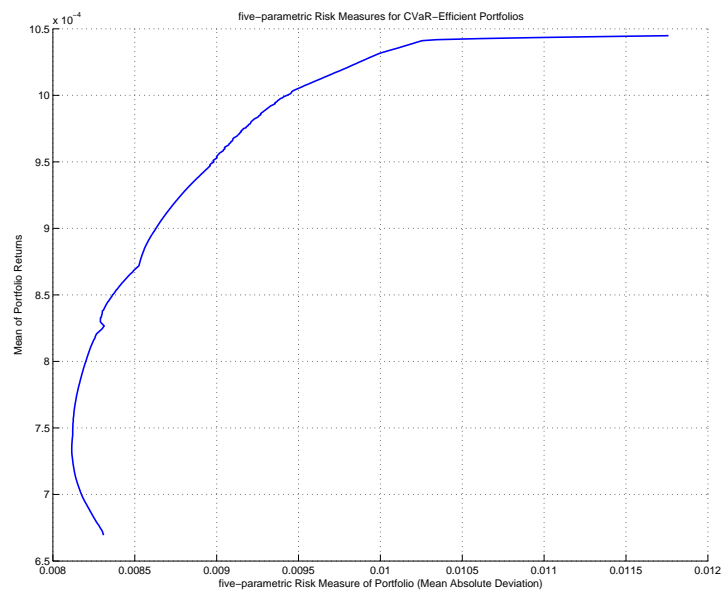


Abbildung 22: Mittlere absolute Abweichung für alle CVaR-optimalen Portfolios

6 CVAR-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

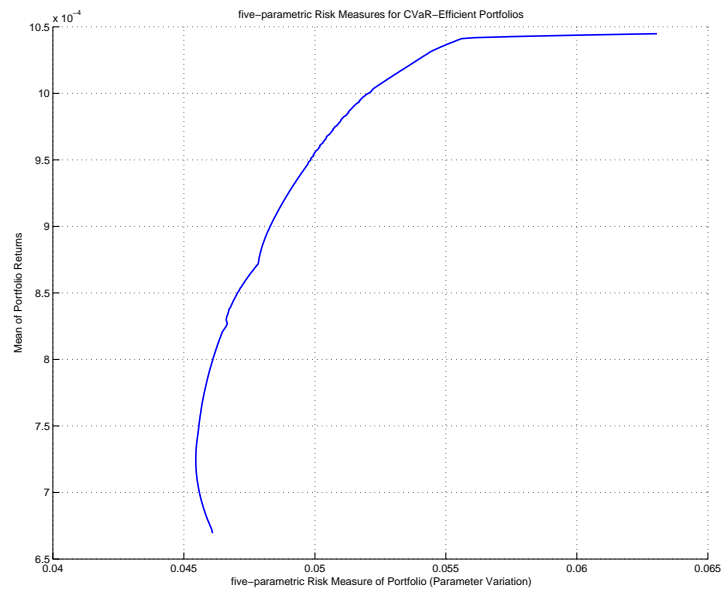


Abbildung 23: 5-parametriges Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für alle CVaR-optimalen Portfolios ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$)

7 MAD-optimiertes Aktienportfolio für unterschiedlich verteilte Renditen

In diesem Teil der Arbeit soll nun eine Portfolio-Optimierung auf Basis der mittleren absoluten Abweichung durchgeführt werden. Der hierfür notwendige Optimierungsschritt wurde mittels MATLAB durchgeführt, ganz ähnlich der Portfolio-Optimierung mittels CVaR.

In weiterer Folge sollen dann die Risikomaße aus den beiden vorangegangenen Kapiteln auf das MAD-optimierte Portfolio angewendet werden und die Ergebnisse mit jenen der CVaR-Portfolio-Optimierung verglichen werden. Weiters sollen noch die beiden Optimierungsverfahren direkt verglichen werden.

Die Daten für die MAD-Portfolio-Optimierung sind jene, die schon für die CVaR-Optimierung herangezogen wurden (vgl. Kapitel 5.1 und 6.2).

7.1 Ansätze zur MAD-Portfoliooptimierung

Dieser Teil der Arbeit basiert auf den Originalwerken von Konno und Yamazaki [1991] und Konno und Yamazaki [1990]. In den Arbeiten von Konno und Yamazaki [1991] und Konno und Yamazaki [1990] wird als Alternative zum Markowitz-Modell das Mittelwert-MAD-Portfoliomodell eingeführt.

Bemerkung 7.1. *(Wiederholung der Bezeichnungen)*

- d ... Anlagen $i = 1, \dots, d$
- $w = (w_1, \dots, w_d)$... Anteile/Gewichtung der Anlagen
- $X_i = (X_1, \dots, X_d)^T$... sei der Zufallsvektor der Renditen der d Aktien
- $X_p(w) = \sum_{i=1}^d X_i w_i$... (zukünftige) Portfoliorendite (Zufallsvariable)
- μ ... Mindestrendite
- $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$... erwartete Rendite von Anlage i
- $\mu_p = \sum_{i=1}^d w_i \mu_i$ erwartete Portfoliorendite
- $\Sigma = \sigma_{ij}$... Kovarianz von Anlage i mit Anlage j

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

- $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$... Varianz von Anlage i
- σ_p^2 ... Portfoliovarianz, d.h. die Varianz des Portfolios

Die Gewichte der minimalen MAD

$$MAD(X_p) = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^d X_i w_i - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d X_i w_i\right]\right|\right]$$

sind als Lösung des folgenden Optimierungsproblems gegeben:

$$\begin{aligned} \min_w MAD(X_p(w)), \\ \text{sodass} \\ w^T \mu \geq \mu \\ \sum_{i=1}^d w_i = 1 \end{aligned} \tag{20}$$

$w = (w_1, \dots, w_d)$ beschreibt hierbei den Vektor aus Portfoliogewichten.

Das Modell in Gleichung (20) kann auch als lineares Modell dargestellt werden, für nähere Ausführungen siehe Konno und Yamazaki [1990]. Dies führt dann zu folgenden Vorteilen:

Bemerkung 7.2. (*Vorteile*)

- Lineares anstelle eines quadratischen Optimierungsproblems
- Kovarianzmatrix/Kovarianzen werden nicht benötigt

Satz 7.1. Sind die Renditen X_1, \dots, X_d multivariat normalverteilt, dann gilt:

$$MAD(X_p) = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma(X_p).$$

Beweis. Sei (μ_1, \dots, μ_d) der Mittelwert der Renditen (X_1, \dots, X_d) . Des Weiteren sei $\Sigma = (\sigma_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Kovarianzmatrix von (X_1, \dots, X_d) . Dann ist $\sum_{i=1}^d X_i w_i$ normalverteilt (Rao [1965]) mit Mittelwert $\sum_{i=1}^d \mu_i w_i$ und Standardabweichung

$$\sigma(X_p) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j}} = \sqrt{w^T \Sigma w}.$$

Daraus folgt,

$$MAD(X_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(X_p)} \int_{-\infty}^{\infty} |u| \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2(x)}\right\} du = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma(X_p).$$

□

7.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der MAD-Portfolio-Optimierung mittels MATLAB vorgestellt. Die Optimierung wurde wieder jeweils für (annähernd) normalverteilte und (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen durchgeführt. In Abbildung 24 betrachtet man die MAD-Effizienzkurve für normalverteilte, in Abbildung 25 jene für die nichtnormalverteilten Renditen. Die rot eingezeichneten Punkte stellen wieder ausgewählte Portfolio-Zusammenstellungen dar, für die in Tabelle 6 und 7 die Gewichte, die MAD sowie die berechneten Renditen angegeben sind.

In weiterer Folge ergeben sich auch wieder zwei Area-Plots für die Gewichtungen, wie in Abbildung 26 (normalverteilte Renditen) und Abbildung 27 (nicht-normalverteilte Renditen) zu sehen. Man kann erkennen, dass für die beiden vorliegenden Renditen-Verläufe (normal- bzw. nicht-normalverteilt) insgesamt dreizehn bzw. sechs Aktien an effizienten Portfolios beteiligt sind.

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR
UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

Nr	1	102	136	220	280	300	333	371	412	467	488	499
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
w_1	7.82	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_3	2.89	10.30	14.13	28.96	42.14	46.47	53.65	61.73	72.29	90.35	96.83	99.74
w_4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_7	2.67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{10}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{11}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{13}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{14}	5.63	2.44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{15}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{16}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{17}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{18}	-	2.49	0.72	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{19}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{20}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{21}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{22}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{23}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{24}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{25}	-	7.46	9.33	16.47	17.25	16.87	18.04	17.86	13.52	2.56	-	-
w_{26}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{27}	4.83	3.08	1.46	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{28}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{29}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{30}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{31}	2.78	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{32}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{33}	6.50	1.14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{34}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{35}	24.99	23.97	23.21	20.03	15.65	13.18	12.88	7.27	1.43	-	-	-
w_{36}	29.90	34.74	35.03	22.55	13.79	10.77	2.27	-	-	-	-	-
w_{37}	-	1.00	2.98	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_{38}	12.00	13.83	13.14	11.99	11.17	12.61	13.15	13.15	12.76	7.09	3.17	0.26
<i>MAD</i>	0.55	0.57	0.59	0.67	0.76	0.80	0.86	0.94	1.05	1.21	1.28	1.32
<i>Rendite</i>	0.040	0.056	0.062	0.075	0.085	0.088	0.093	0.099	0.106	0.114	0.118	0.119

Tabelle 6: Beispiele von MAD-effizienten Portfolios

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

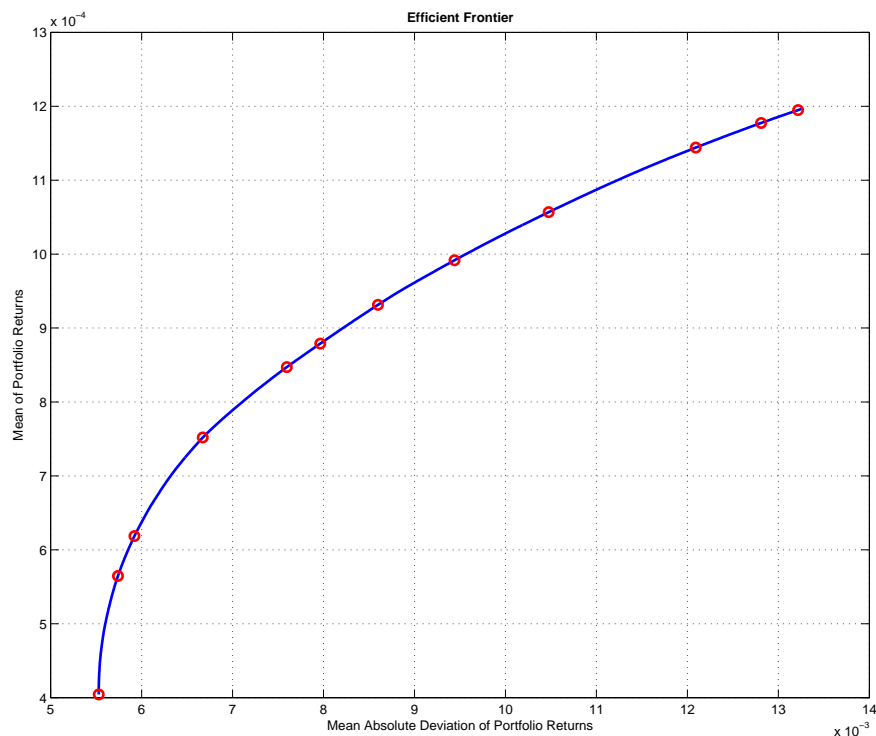


Abbildung 24: Effizienzkurve der MAD-optimalen Portfolios für annähernd normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet

Nr	1	102	136	220	280	300	333	371	412	467	488	499
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
w_1	25.80	27.38	27.37	24.79	24.79	24.84	24.56	25.01	18.48	5.49	0.54	-
w_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_3	11.26	19.14	21.45	28.59	33.91	36.03	39.99	42.27	45.57	51.16	53.07	5.48
w_4	26.53	20.84	18.92	13.15	8.17	7.93	6.48	1.97	-	-	-	-
w_5	7.46	13.00	15.37	21.79	25.48	26.39	27.54	30.75	35.95	43.35	46.39	94.52
w_6	10.05	2.60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
w_8	18.90	17.04	16.89	11.68	7.66	4.81	1.42	-	-	-	-	-
<i>MAD</i>	0.75	0.76	0.77	0.79	0.82	0.83	0.85	0.87	0.90	0.96	0.98	1.14
<i>Rendite</i>	0.075	0.081	0.083	0.088	0.092	0.093	0.095	0.097	0.099	0.103	0.104	0.104

Tabelle 7: Beispiele von MAD-effizienten Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

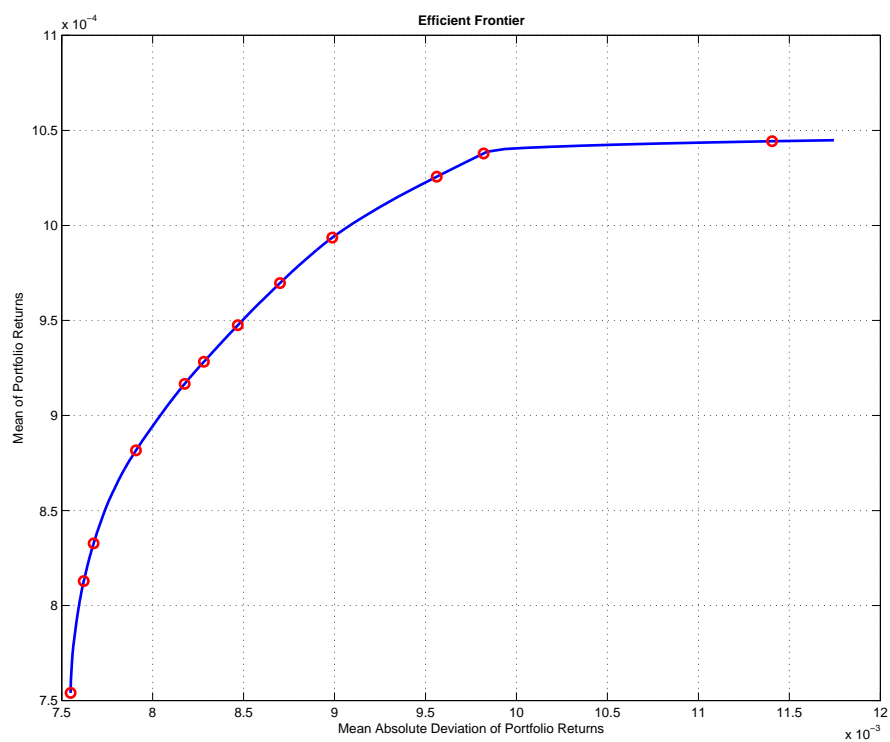


Abbildung 25: Effizienzkurve der MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen; exemplarisch wurden 12 Punkte zur Veranschaulichung eingezeichnet

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

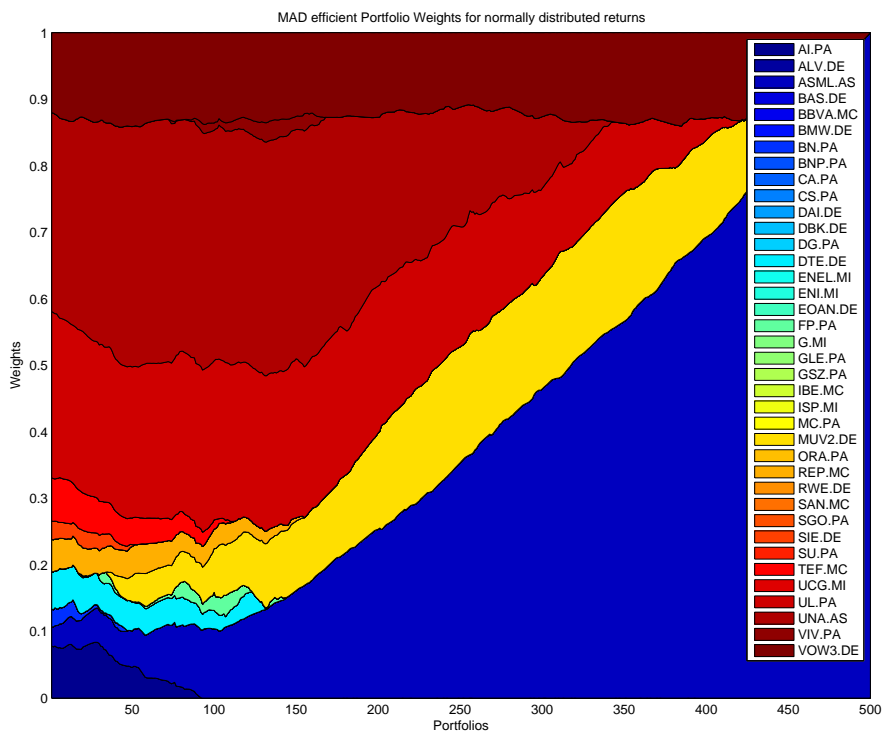


Abbildung 26: Gewichte aller MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) normalverteilte Aktienrenditen

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

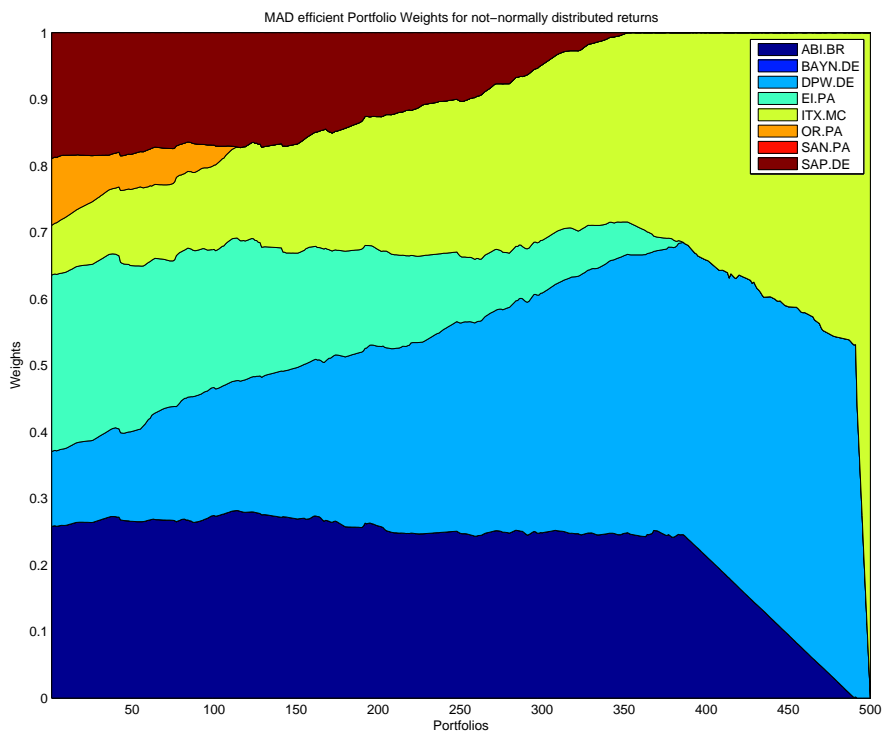


Abbildung 27: Gewichte aller MAD-optimalen Portfolios für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen

7.2.1 Anwendung der Risikomaße auf die MAD-optimalen Portfolios für unterschiedlich verteilte Aktienrenditen

Nach der Betrachtung der Ergebnisse für die MAD-Portfolio-Optimierung sollen nun wieder die bereits nach der CVaR-Optimierung angewandten Risikomaße zum Einsatz kommen. Die Risikomaße werden jeweils auf die beiden (normal und nicht-normalverteilten) Portfoliozusammensetzungen angewendet und die Ergebnisse diskutiert. Als Vergleich sind in sämtlichen folgenden Grafiken für Risikomaße von MAD-effizienten Portfolios auch die entsprechenden Risikomaße für die jeweiligen CVaR-effizienten Portfolios eingezeichnet, um die beiden Portfolio-Optimierungen über die Risikomaße miteinander zu vergleichen.

In Abbildung 28 sieht man zwei Kurvenverläufe für das Denneberg-Risikomaß angewandt auf die CVaR-optimalen (links) und die MAD-optimalen Portfolios (rechts) für normalverteilte Renditen. Die Kurvenverläufe sind nahezu identisch, lediglich das Risikomaß für die CVaR-effizienten Portfolios scheint leichten Schwankungen zu unterliegen, der Kurvenverlauf ist aber prinzipiell gleich. Dies scheint sich mit der Annahme zu decken, dass CVaR- und MAD-Portfolio-Optimierung für normalverteilte Renditen sehr ähnliche Ergebnisse liefern.

Für den Fall von nicht-normalverteilten Renditen (Abbildung 29) schneidet das Denneberg-Risikomaß angewandt auf die MAD-effizienten Portfolios besser (im Sinne von weniger Risiko) ab, als es für die CVaR-optimierten Portfolios der Fall ist. Auch dies scheint sich mit der Lehrmeinung zu decken, da bei nicht-normalverteilten Renditen die MAD-Optimierung die Enden der Verteilung nicht mit einkalkuliert und somit das Risiko als zu gering einschätzt. Sieht man sich die Verläufe der weiteren Risikomaße im Vergleich an, erkennt man, dass sich dieser Effekt durch alle berechneten Risikomaße zieht. Im normalverteilten Fall sind die Kurven sehr ähnlich, im nicht-normalverteilten Fall scheinen die MAD-optimierten Portfolios effizienter zu sein, lassen jedoch wie bereits erwähnt die Tails der Renditenverteilungen außer Acht.

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

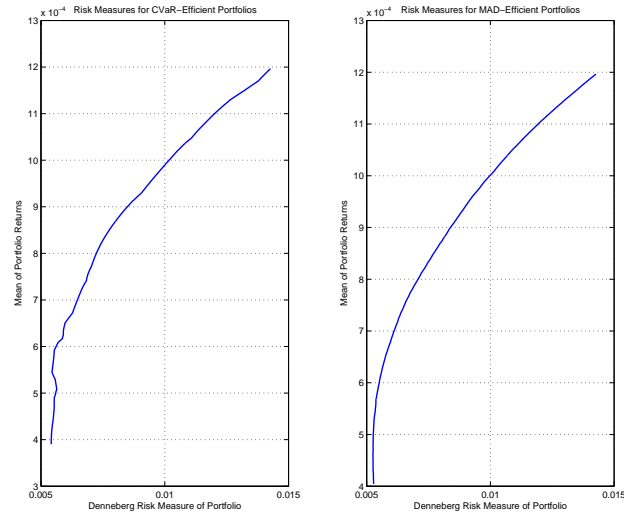


Abbildung 28: Denneberg-Maß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)

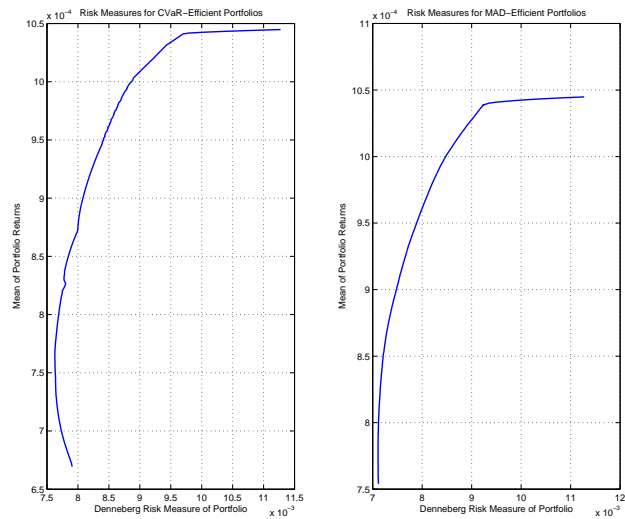


Abbildung 29: Denneberg-Maß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

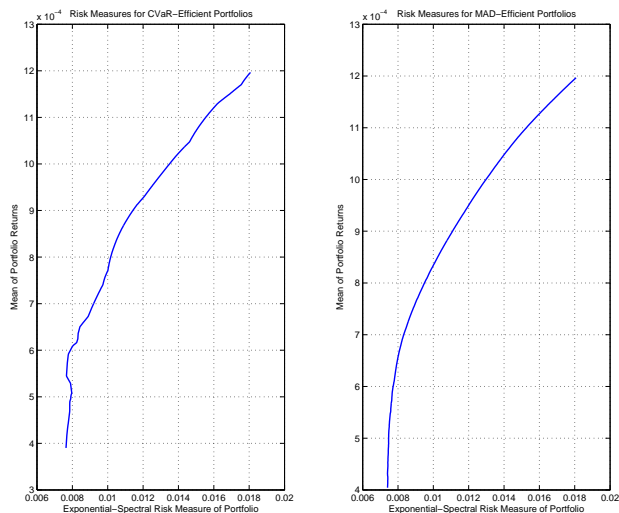


Abbildung 30: Exponentiell-spektrales Risikomaß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)

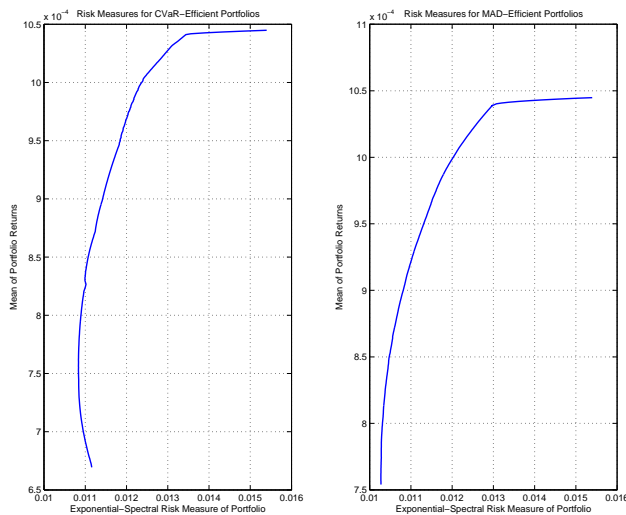


Abbildung 31: Exponentiell-spektrales Risikomaß für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

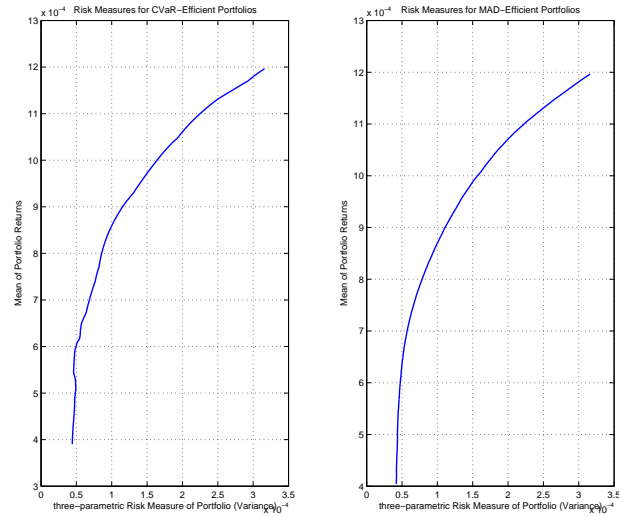


Abbildung 32: Varianz für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)

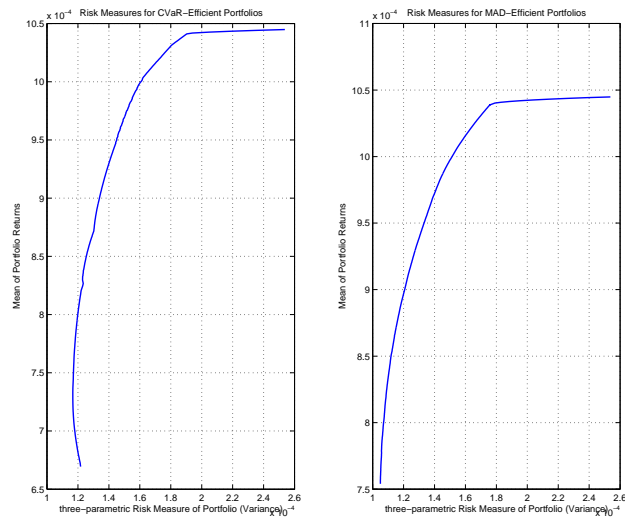


Abbildung 33: Varianz für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

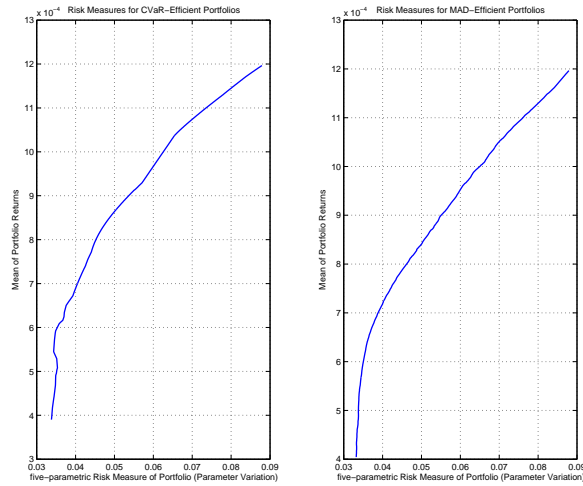


Abbildung 34: 5-parametrisches Risikomaß mit selbst gewählten Parametern ($\theta = 0.25$, $\alpha = 3$ und $y = 2$) für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)

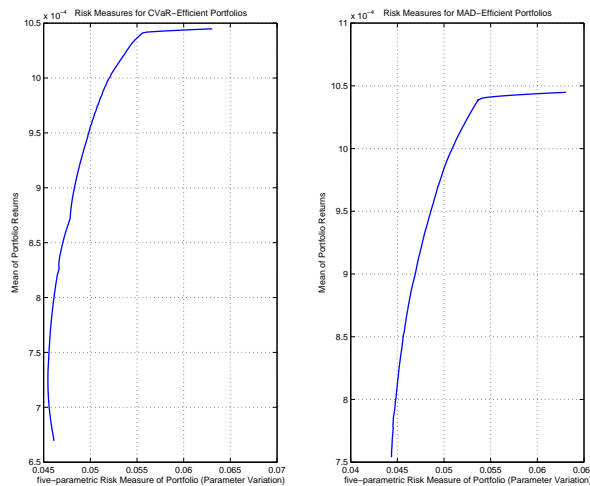


Abbildung 35: 5-parametrisches Risikomaß mit selbst gewählten Parametern für für die CVaR-optimalen und die MAD-optimalen Portfolios ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)

7.2.2 Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung

Abschließend sollen noch die beiden Portfolio-Optimierungsmethoden direkt miteinander verglichen werden. Hierfür wird jeweils für (annähernd) normal- und (annähernd) nicht-normalverteilte Renditen die mittlere absolute Abweichung der CVaR-optimalen Portfolios berechnet und mit der Kurve des MAD-effizienten Portfolios hinterlegt. Selbiges wird für den CVaR durchgeführt: Der CVaR wird für die MAD-optimalen Portfolios berechnet und mit den tatsächlichen CVaR-effizienten Portfolios hinterlegt.

Die sich so ergebenden Kurvenverläufe sind in den Abbildungen 36 und 37 dargestellt. Man erkennt auch hier, dass sich die Optimierungsverfahren besonders stark für den nicht-normalverteilten Fall unterscheiden, die Kurven weichen hier wirklich stark voneinander ab, wohingegen sich beim annähernd normalverteilten lediglich geringe Unterschiede ausmachen lassen. Diese Unterschiede beruhen, wie bereits mehrfach erwähnt, auf der Tatsache, dass es sich bei den vorliegenden Renditen nicht um völlig normalverteilte Daten handelt. Wäre dies der Fall, würden sich zwischen CVaR und MAD keine Unterschiede ergeben (Vgl. Satz 6.1 und Satz 7.1).

Dies wird noch einmal deutlich, wenn man die Gewichte der beiden Optimierungsverfahren betrachtet. In den Abbildungen 38 (normalverteilte) und 39 (nicht-normalverteilte Renditen) sind jeweils die Gewichtungen für beide Optimierungsverfahren gegeben. In der ersten Abbildung scheinen sich die Gewichte bzw. die am Portfolio beteiligten Aktien nur leicht von einander zu unterscheiden, wobei der Unterschied wie erwähnt durch die nicht völlig normalverteilte Rendite entsteht. In der zweiten Grafik erkennt man schon deutliche Unterschiede in Bezug auf Aktienausswahl und Gewichte.

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

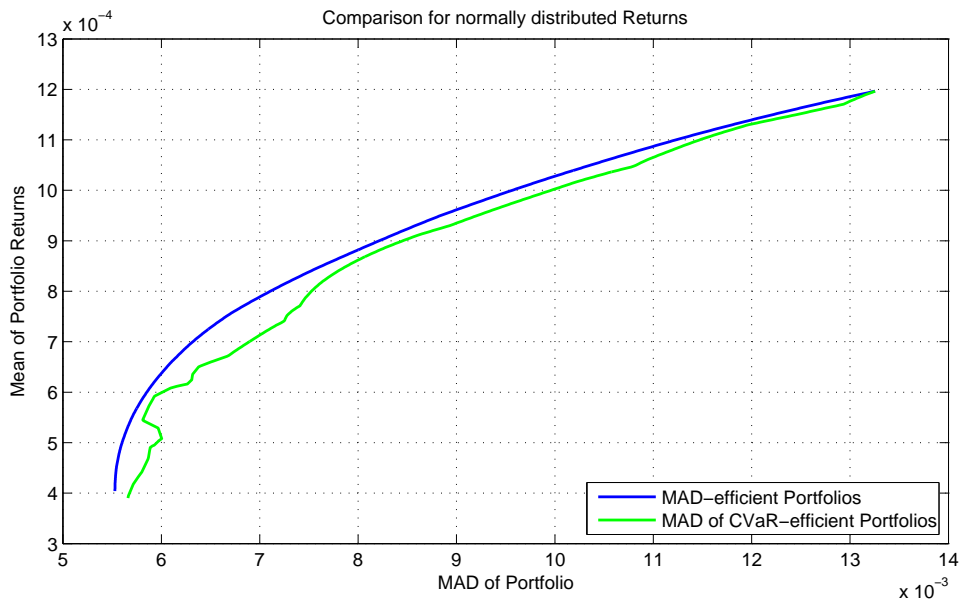
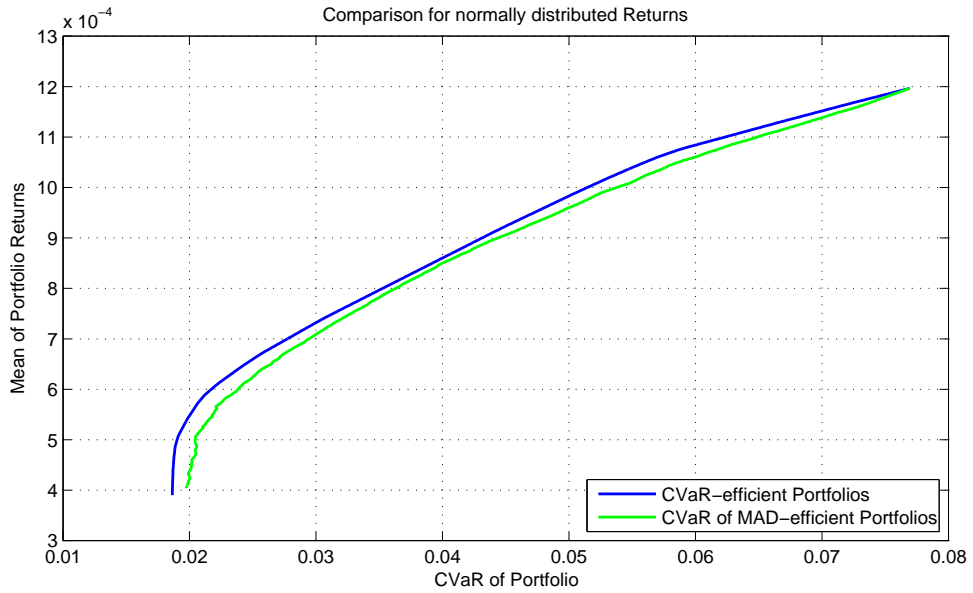


Abbildung 36: Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung für (annähernd) normalverteilte Aktienrenditen

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

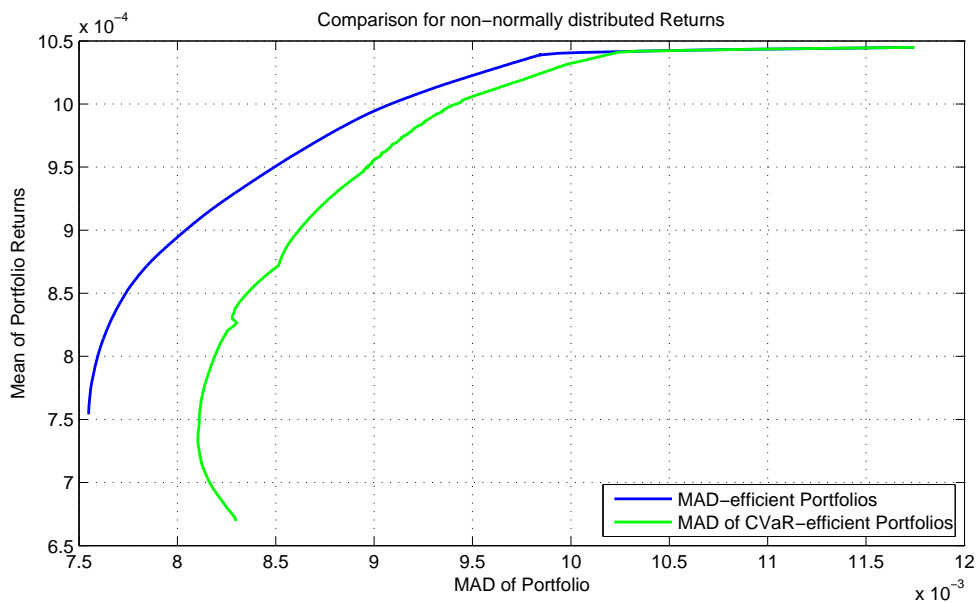
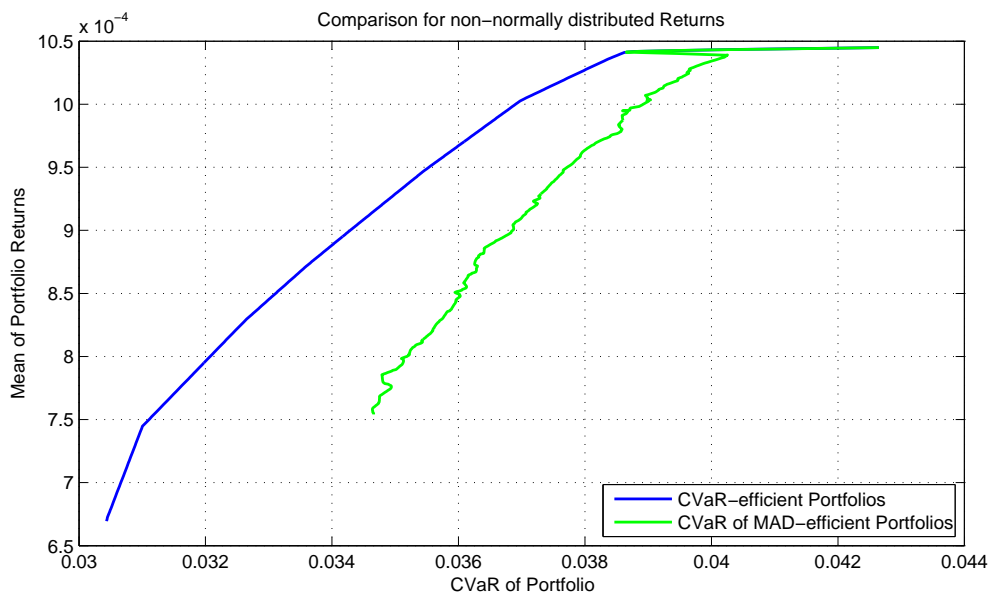


Abbildung 37: Vergleich der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung für (annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

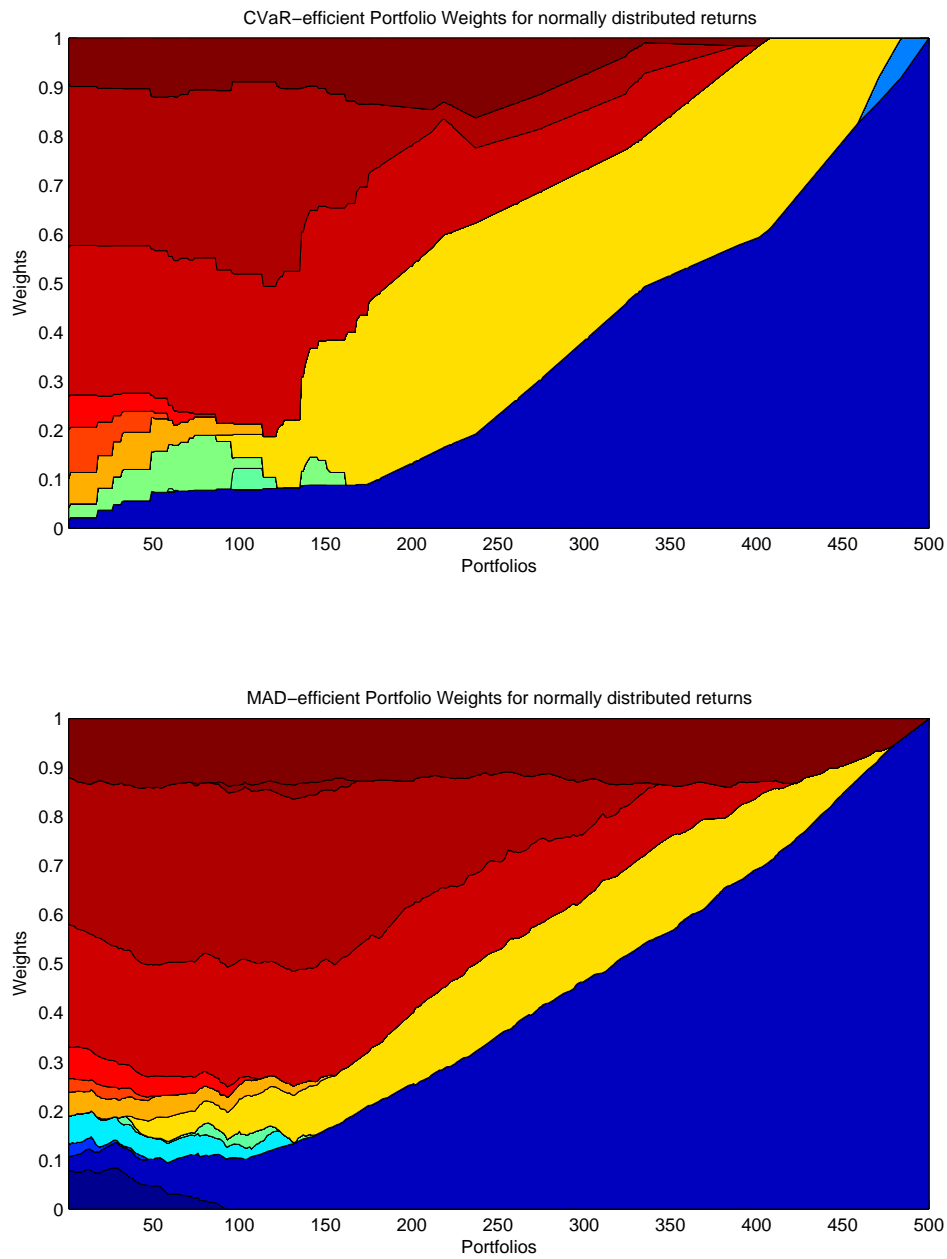


Abbildung 38: Gewichte der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung im Vergleich ((annähernd) normalverteilte Aktienrenditen)

7 MAD-OPTIMIERTES AKTIENPORTFOLIO FÜR UNTERSCHIEDLICH VERTEILTE RENDITEN

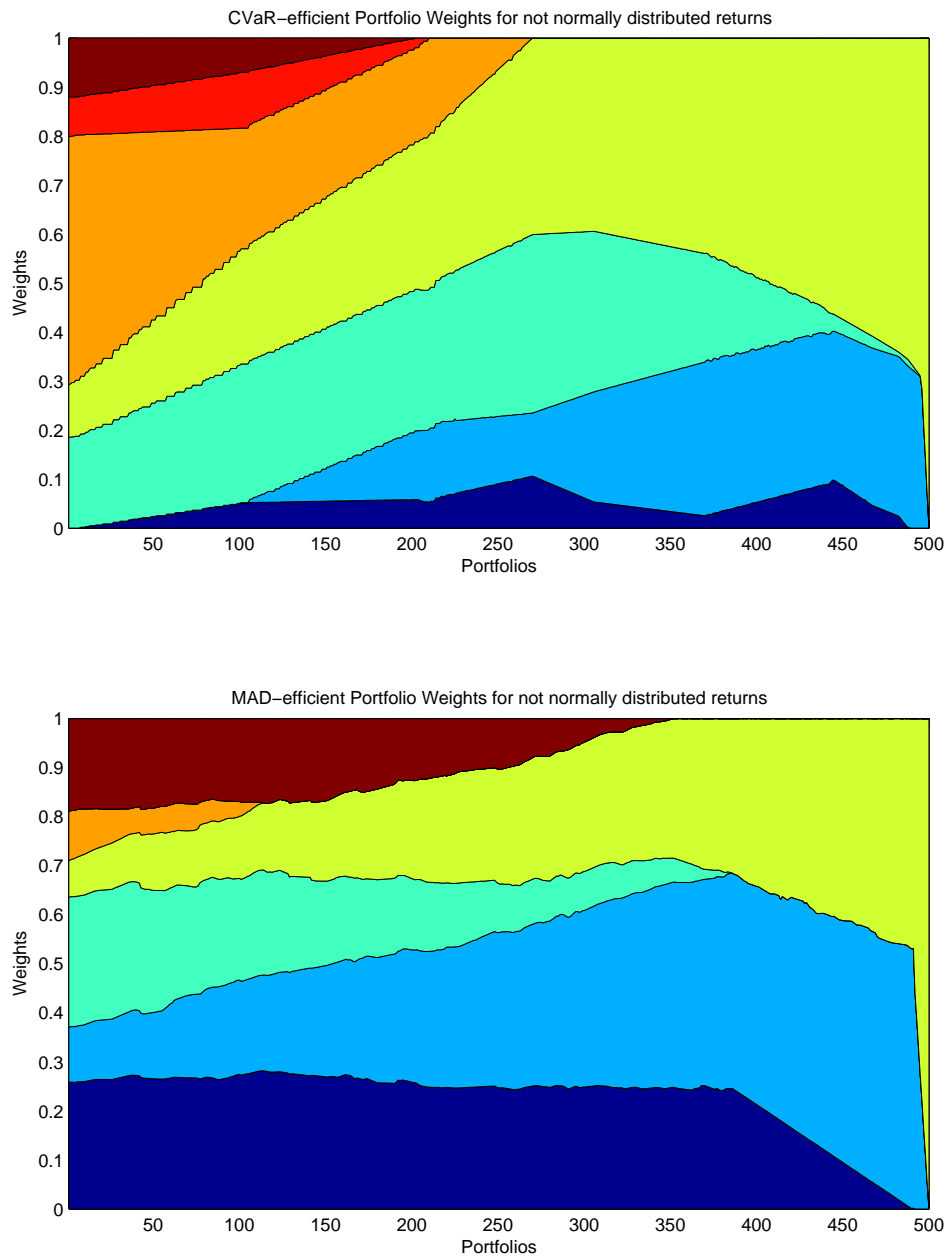


Abbildung 39: Gewichte der CVaR und MAD-Portfoliooptimierung im Vergleich ((annähernd) nicht-normalverteilte Aktienrenditen)

8 Fazit und Ausblick

Im ersten Teil der Arbeit wurden die verschiedenen Klassen der Risikomaße eingeführt und diskutiert. Das Augenmerk wurde vor allem auf ihre axiomatische Charakterisierung gelegt. Die Vorteile und Nachteile ergeben sich demnach aus diesen unterschiedlichen Eigenschaften. Die Klasse der spektralen Risikomaße weist alle Eigenschaften der kohärenten Risikomaße auf, jedoch auch noch zwei weitere: Die komonotone Additivität und die Verteilungsinvarianz. Ebenso kann die Klasse der spektralen Risikomaße als Verallgemeinerung des Expected Shortfalls (CVaR) verstanden werden. Aus diesem Grund eignen sich die Risikomaße aus dieser Klasse für eine weitere Analyse sehr gut. Auch die Klasse der 3/5-parametrischen Risikomaße bringt aufgrund der Einstellbarkeit ihrer Parameter Vorteile mit sich. Diese Klasse wurde nun gemeinsam mit jener der spektralen Risikomaße im praktischen Teil der Arbeit getestet und mit dem bekannten CVaR verglichen.

In den Untersuchungen wurde festgestellt, dass sich die ausgewählten Risikomaße in Grundzügen ähnlich sind, jedoch schon voneinander unterscheiden. Durch die Berechnung der Risikomaße (auf normal- und nicht-normalverteilte Renditen) sollte im Speziellen der Unterschied der Risikomaße zum CVaR veranschaulicht werden. In Kapitel 6 konnte man sehen, dass sich im Falle von (annähernd) normalverteilten Renditen keine großen Unterschiede ergeben. Im (annähernd) nicht-normalverteilten Fall allerdings wurde deutlich, dass sich zum Beispiel die Varianz vom CVaR unterscheidet. Da die Varianz kein Downside-Risikomaß ist, welches nur Verluste betrachtet, sondern negative und positive Abweichungen vom Erwartungswert gleichermaßen erfasst, ergeben sich so sichtbare Unterschiede.

Es ist also bei der Wahl eines Risikomaßes mit einzubeziehen, welche Verteilung der Renditen vorliegt. In Kapitel 7 wurde dies noch einmal deutlich. Beim Vergleich der berechneten Risikomaße auf zwei unterschiedlich optimierte Portfolios (CVaR und MAD) konnte man erkennen, dass sich die ergebenden Kurven für die Risikomaße im (annähernd) normalverteilten Fall wenig bis gar nicht voneinander unterscheiden. Im (annähernd) nicht-normalverteilten Fall wurde das Risiko für die MAD-optimalen Portfolios geringer eingeschätzt als für die CVaR-optimalen Portfolios. Die MAD lässt nämlich die großen Verluste am Rande der Verteilung außer Acht, wodurch sich ein (scheinbar) geringeres Risiko, bzw. andere Portfoliozusammensetzungen ergeben. Das Ergebnis ist also mit Vorsicht zu betrachten. Man sieht auch hier, wie wichtig es offenbar ist, die zugrunde liegende Verteilung der Renditen zu berücksichtigen. Im direkten Vergleich der beiden Optimierungsver-

fahren wurde zur CVaR-Effizienzkurve noch die Kurve für den CVaR, angewendet auf das MAD-optimale Portfolio, eingezeichnet, selbiges wurde auch für die MAD-Effizienzkurve durchgeführt. Beim Vergleich mit normalverteilten Renditen war der Unterschied von geringem Ausmaß, beim Vergleich der Optimierungen der nicht-normalverteilten Renditen wurden jedoch wieder markante Unterschiede der Kurvenverläufe festgestellt.

Das Forschungsgebiet der Risikomaße ist ein relativ junges. Es gibt zahlreiche verschiedene Risikomaße mit unterschiedlichsten Eigenschaften. Ziel dieser Arbeit war es, den momentanen 'status quo' an Risikomaßen zu erfassen und zu beschreiben. Potenzial für weiterführende Untersuchungen hätten nach Auswertung der Ergebnisse die spektralen Risikomaße, da sie alle dem CVaR ähnlich sind und dessen positive Eigenschaften teilen. Hier sei speziell das exponentielle spektrale Risikomaß erwähnt, welches durch seinen Parameter, der die Risikoaversion eines Investors steuert, flexibler einsetzbar und für weiterführende Untersuchungen zu empfehlen ist. Interessant wäre beispielsweise eine Portfolio-Optimierung mittels exponentiell spektralem Risikomaß. Auch die Klasse der $3/5$ -parametrischen Risikomaße bietet noch reichlich Raum für weiterführende Forschung.

Literaturverzeichnis

- Acerbi, C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, 26:1505–1518, 2002.
- Acerbi, C. und Tasche, D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26:1487–1503, 2004.
- Adelmeyer, M. und Warmuth, E. *Finanzmathematik für Einsteiger*. Vieweg + Teubner, 2005.
- Albrecht, P. Risk measures. *Encyclopedia of Actuarial Science*, 1, 2004.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., und Heath, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.
- Brandtner, A. *Risikomessung mit spektralen und konvexen Risikomaßen: Eine entscheidungstheoretische Analyse*. PhD thesis, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2012a.
- Brandtner, M. *Risikomessung mit kohärenten, spektralen und konvexen Risikomaßen*. Springer-Gabler, 2012b.
- Cotter, J. und Dowd, K. Extreme spectral risk measures: An application to futures clearinghouse margin requirements. *Journal of Banking and Finance*, 30(12):3469–3485, 2006.
- De Giorgi, E. Reward-risk portfolio selection and srtochastic dominance. *Journal of Banking & Finance*, 29(4):895–926, 2005.
- Dowd, K. und Blake, D. After var: The theory, estimation, and insurance applications of quantile-based risk measures. *Journal of Risk and Insurance*, 73(2):193–229, 2006.
- Dowd, K. und Cotter, J. Spectral risk measures and the choice of risk aversion function, 2007. paper work in progress.
- Dowd, K., Cotter, J., und Sorwar, G. Spectral risk measures: Properties and limitations. *Journal of Financial Services Research*, 34(1):61–75, 2008.
- Dragoti-Çela, E. *Risikothorie und -management*. Vorlesungsskript, Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik, TU Graz, 2009.
- Eddari, A. *Risikomaße in der Finanzmathematik*. PhD thesis, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, 2007.

LITERATURVERZEICHNIS

- Föllmer, H. und Schied, A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6(4):429–447, 2002a.
- Föllmer, H. und Schied, A. Robust preferences and convex measures of risk. *Advances in Finance and Stochastics*, pages 39–56, 2002b.
- Föllmer, H. und Schied, A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6:429–447, 2002c.
- Föllmer, H. und Schied, A. Robust preferences and convex measures of risk. *Advances in Finance and Stochastics*, pages 39–56, 2002d.
- Frittelli, M. und Gianin, E. R. Law invariant convex risk measures. *Advances in Finance and Stochastics*, 7:33–46, 2005.
- Hader, J. und Russell, W. Rules for ordering uncertain prospects. *American Economic Review*, 59:25–34, 1969.
- Kischka, P. Stochastische Risikoanalyse. Kompaktskript zur Vorlesung, 2013.
- Konno, H. und Yamazaki, H. Piecewise linear risk functions and portfolio optimization. *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 33:139–156, 1990.
- Konno, H. und Yamazaki, H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management Science*, 37(5):519–531, 1991.
- Kriele, M. und Wolf, J. *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. Springer, 2012.
- Markowitz, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- Ortobelli, S., Rachev, S., Shalit, H., und Fabozzi, F. Risk probability functionals and probability metrics applied to portfolio theory. 2006. URL http://www.statistik.unikarlsruhe.de/download/Risk_Probability_Functionals_and_Probability_Metrics.pdf.
- Pedersen, C. S. und Satchell, S. E. An extended family of financial-risk measures. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 23(2):89–117, 1998.
- Rao, C. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1965.
- Riedel, F. Dynamic coherent risk measures. *Stochastic Processes and their Applications*, 112:185–200, 2004.

LITERATURVERZEICHNIS

- Rockafellar, R. T., Uryasev, S. P., und Zabarankin, M. Deviation measures in generalized linear regression. *Risk Management and Financial Lab*, 2002.
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S. P., und Zabarankin, M. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*, 10(1):51–74, 2006.
- Rothschild, M. und Stiglitz, J. Increasing risk. I.A Definition. *Journal of Economic Theory*, 2:225–243, 1970.
- Schmeidler, D. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57(3):571–587, 1986.
- Scholz, H. und Wilkens, M. Die Marktphasenabhängigkeit der Sharpe Ratio. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 76(12):1275–1302, 2006.
- Sereda, E. N., Bronshtein, E. M., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Sun, W., und Stoyanov, S. V. Distortion risk measures in portfolio optimization. *Handbook of Portfolio Construction*, pages 649–673, 2010.
- Sharpe, W. F. The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21(1):49–58, 1994.
- Stone, B. K. A general class of three-parameter risk measures. *Journal of Banking & Finance*, 28(3):675–685, 1973.
- Tonelli, L. und Fubini, G. Sulla derivata seconda mista di un integrale doppio. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 40(1):295–298, 1915.
- Wang, S., V., Y., und H., P. Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21:173–183, 1997.
- Yaari, M. The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55:95–116, 1987.
- Yu, P.-L. *Multiple-Criteria Decision Making*. Plenum Press, 1985.