

Bernd SCHNEIDER

Zur Analysis und Numerik von Variationsungleichungen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technomathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im März 2012

Vorwort

Bei dieser Arbeit handelt es sich um meine Masterarbeit, die im Zuge meines Studiums der Technischen Mathematik entstanden ist.

Ich möchte mich bei Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach bedanken, auf dessen Anregung ich mich mit diesem Thema beschäftigt habe.

Kurzfassung

Variationsungleichungen treten in vielen Anwendungen auf, wie zum Beispiel in einigen Bereichen der Physik und Mechanik. In dieser Arbeit wird das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung als Modellproblem betrachtet. Ziel ist es, ein Lösungsverfahren zu entwickeln, um Näherungslösungen des Problems zu bestimmen. Dazu wird gezeigt, dass das kontinuierliche Problem unter gewissen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung besitzt. Weiters wird eine diskrete Version des Problems hergeleitet. Auch für die diskrete Version wird die eindeutige Lösbarkeit unter gewissen Voraussetzungen gezeigt, sowie die Konvergenz der Näherungslösungen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems. Zur Lösung des diskreten Problems wird ein halbglattes Newton-Verfahren hergeleitet und gezeigt, dass dieses Verfahren einer Aktiven-Mengen-Strategie entspricht. Mit diesem Verfahren werden schließlich zwei numerische Beispiele gerechnet und die Ergebnisse präsentiert.

Abstract

Variational inequalities arise in many applications, such as in the fields of physics and mechanics. In this work the Signorini boundary value problem of the Poisson equation is considered as a model problem. The aim of the work is to develop an algorithm to calculate approximated solutions of the problem. For this purpose it is shown that the continuous problem has a unique solution under certain conditions. Then a discretized formulation of the problem is derived for which the unique solvability is shown too, as well as the convergence of the approximated solutions to the solution of the continuous problem. In order to solve the discrete problem, a semi-smooth Newton method is derived and it is shown, that this method can be interpreted as an active set strategy. Finally two numerical examples are solved with this method and the results are presented.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1 Problemstellung	11
1.1 Signorini-Randwertproblem	11
1.2 Äquivalente Variationsungleichung	12
1.3 Allgemeine Formulierung der Variationsungleichung	14
2 Eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen	15
2.1 Grundlagen	15
2.2 Eindeutige Lösbarkeit	17
3 Approximation der Räume	25
4 Eindeutige Lösbarkeit und Diskretisierung	29
4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des kontinuierlichen Problems .	29
4.2 Finite Elemente	31
4.3 Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung	33
4.4 Konvergenz der diskreten Lösung	34
4.5 Diskrete Variationsungleichung und äquivalente Formulierungen	37
5 Halbglattes Newton-Verfahren	41
5.1 Newton-Iteration	41
5.2 Newton-Verfahren für das diskretisierte Signorini-Randwertproblem . .	43
5.3 Aktive-Mengen-Strategie	47
5.4 Konvergenz für beliebige Anfangsvektoren	48
6 Numerische Beispiele	53
7 Zusammenfassung und Ausblick	59

Einleitung

Viele Probleme aus den Bereichen der Physik und Mechanik, aber auch aus der Optimierung und den Wirtschaftswissenschaften, führen auf Variationsungleichungen. Einige Beispiele sind in [11] zu finden. Für einige Jahre war das Signorini-Problem das wichtigste Beispiel für die Anwendung von Variationsungleichungen in der klassischen Physik. Ein kurzer Überblick über das Signorini-Problem und die Geschichte von Variationsungleichungen wird in [1] gegeben.

In dieser Masterarbeit wird ein Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung als Modellproblem betrachtet. Ziel der Masterarbeit ist es, die benötigte Analysis und Numerik zur Lösung des Modellproblems zu erarbeiten und schließlich ein spezielles Lösungsverfahren, ein halbglattes Newton-Verfahren, zu entwickeln, um Näherungslösungen des Signorini-Randwertproblems zu bestimmen.

Im ersten Kapitel wird das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung vorgestellt, welches in dieser Arbeit als Modellproblem verwendet wird. Anschließend wird eine dazu äquivalente Variationsungleichung hergeleitet. Für diese Variationsungleichung wird dann eine allgemeinere Formulierung angegeben. Die Inhalte dieses Kapitels sind [7] und [8] entnommen. Im zweiten Kapitel wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen diese allgemeine Formulierung eindeutig lösbar ist. Als Grundlage wurde hier [14], [15], und [16] verwendet. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Diskretisierung der allgemein formulierten Variationsungleichung. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Lösungen des diskretisierten Problems gegen die kontinuierliche Lösung konvergieren. Die Darstellung ist [7] entnommen. Im vierten Kapitel werden die allgemeinen Ergebnisse auf das Signorini-Randwertproblem angewandt. Zuerst wird gezeigt, dass das Modellproblem unter gewissen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung besitzt. Anschließend wird ein kurzer Überblick über finite Elemente gegeben, mit deren Hilfe dann eine diskrete Version des Problems angegeben wird. Die Darstellung über finite Elemente ist [2] und [13] entnommen. Für das diskrete Problem wird ebenfalls die eindeutige Lösbarkeit gezeigt, sowie die Konvergenz der Näherungslösungen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems. Als Grundlage für die Konvergenzanalyse wurde [3] verwendet. Abschließend wird eine zur diskreten Variationsungleichung äquivalente Formulierung angegeben, die im nächsten Kapitel verwendet wird. Im fünften Kapitel wird zunächst ein halbglattes Newton-Verfahren eingeführt, und dieses auf die letzte Formulierung aus dem vierten Kapitel angewandt. Anschließend wird gezeigt, dass das so erhaltene Verfahren einer Aktiven-Mengen-Strategie entspricht. Abschließend werden Bedingungen angeführt, für die das halbglatte Newton-Verfahren, angewandt auf das Modellproblem, für beliebige Anfangsvektoren gegen die eindeutige Lösung konvergiert. Basis für dieses Kapitel ist [9] und [10]. Im sechsten Kapitel werden zwei numerische Beispiele mit dem

Algorithmus aus dem fünften Kapitel gerechnet und die Ergebnisse präsentiert. Im abschließenden Kapitel werden noch einige offene Probleme und mögliche Erweiterungen angesprochen.

1 Problemstellung

Variationsungleichungen treten in vielen Anwendungen auf. Als ein Beispiel seien reibungsbehaftete Kontaktprobleme in der Mechanik genannt. In diesem Kapitel wird zuerst das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung vorgestellt, das in weiterer Folge als Modellproblem dient. Anhand eines kurzen Beispiels wird gezeigt, wie eine mathematische Modellierung zu den speziellen Randbedingungen am Signorini-Rand führen kann. Anschließend wird eine zum Signorini-Randwertproblem äquivalente Variationsungleichung hergeleitet. Zum Schluss wird eine allgemeinere Formulierung dieser Variationsungleichung angegeben. Die Grundlagen für dieses Kapitel sind [7] und [8] entnommen.

1.1 Signorini-Randwertproblem

Als Modellproblem betrachten wir das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial}{\partial n} u &= g_N && \text{auf } \Gamma_N, \\ u \leq g_S, \quad \frac{\partial}{\partial n} u &\leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) &= 0 && \text{auf } \Gamma_S. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) ein Lipschitz-Gebiet, $\Gamma := \partial\Omega$ der Rand des Gebietes Ω und es gelte, dass Γ die disjunkte Vereinigung von Γ_D , Γ_N und Γ_S ist. Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_S = \emptyset$ voraus. Andernfalls ist $g_S \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_S)$ geeignet zu wählen. Die dritte Bedingung $\frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) = 0$ am Signorini-Rand zeigt, dass sich der Rand Γ_S in zwei Teile aufspalten lässt, wobei auf einem Teil $u = g_S$ und auf dem anderen $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$ gilt. Findet man diese zunächst unbekannte Aufteilung, so ist auch das Problem gelöst. Man hat also ein freies Randwertproblem.

Beispiel

Das folgende Beispiel zeigt eine Möglichkeit, wie sich die Signorini-Randbedingungen durch die Modellierung einer Strömung ergeben können. Im Gebiet Ω befinde sich eine Flüssigkeit, deren Druck im stationären Zustand u sei. Die Flüssigkeit kann über den Rand Γ_S das Gebiet verlassen, allerdings kann von außen keine Flüssigkeit in das Gebiet eintreten. Am Signorini-Rand wird ein Druck g_S aufgebracht. Es können zwei

Fälle unterschieden werden. Gilt $u(x) < g_S(x)$, so würde Flüssigkeit von außen in das Gebiet Ω fließen. Dies wird jedoch vom Rand verhindert. Der Fluss ist also gleich Null und es gilt $\frac{\partial}{\partial n}u(x) = 0$. Die Annahme $u(x) \geq g_S(x)$ führt auf $\frac{\partial}{\partial n}u(x) \leq 0$, da der Rand ein Ausströmen der Flüssigkeit zulässt. Da u in einer Umgebung von x stetig ist, gilt für einen unendlich dünnen Rand $u(x) = g_S(x)$ [5]. Damit ergeben sich die drei Bedingungen am Signorini-Rand.

1.2 Äquivalente Variationsungleichung

Im Folgenden wird eine zum Signorini-Randwertproblem äquivalente Variationsungleichung hergeleitet. Sei die Menge K der zulässigen Funktionen als

$$K := \left\{ w \in H_{0,D}^1(\Omega), \quad w - g_S \leq 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_S \right\}$$

mit

$$H_{0,D}^1(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega), \quad w|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

definiert. u und v werden im Folgenden aus der Menge K gewählt. Multiplikation der Poisson-Gleichung mit $(v - u)$, Integration über das Gebiet Ω und Anwenden der Greenschen Formeln ergibt

$$\int_{\Omega} f(v - u) dx = \int_{\Omega} -\Delta u (v - u) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x.$$

Da u und v aus K sind, ist das Integral über den Dirichlet-Rand Null und man erhält

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx = \int_{\Omega} f(v - u) dx + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x + \int_{\Gamma_N} g_N (v - u) ds_x.$$

Für das Integral über den Signorini-Rand Γ_S gilt unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der Eigenschaften der Elemente aus der Menge K

$$\int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x = \int_{\Gamma_S} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} u}_{\leq 0} \underbrace{(v - g_S)}_{\leq 0} ds_x + \int_{\Gamma_S} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} u (g_S - u)}_{=0} ds_x \geq 0.$$

Dadurch ergibt sich die folgende Variationsungleichung: Suche u aus K , sodass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx + \int_{\Gamma_N} g_N (v - u) ds_x \quad \forall v \in K \quad (1.2)$$

gilt. Diese Variationsungleichung ist äquivalent zum Signorini-Randwertproblem (1.1). Eine Richtung der Äquivalenz wurde durch die Herleitung von (1.2) gezeigt. Um die andere Richtung zu zeigen, geht man von der Variationsungleichung aus und setzt $v = u + \phi$ mit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Das heißt, ϕ sei ein Element aus der Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Das ist möglich, da ϕ am

Rand Null ist und $C_0^\infty(\Omega)$ eine Teilmenge von $H^1(\Omega)$. $u + \phi$ ist also wieder ein Element aus K . Damit ergibt sich

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \geq \int_{\Omega} f \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Das Integral über den Neumannrand fällt weg, da ϕ am Rand Null ist. Setzt man $v = u - \phi$, so erhält man

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \leq \int_{\Omega} f \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und somit zusammen

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dies entspricht der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω im distributionellen Sinn. Da u aus K ist, gilt sowohl $u = 0$ auf Γ_D , als auch $u \leq g_S$ auf Γ_S . Multiplikation der Poisson-Gleichung mit $(v - u)$, Integration über das Gebiet Ω und Anwenden der Greenschen Formeln ergibt

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx - \int_{\Omega} f (v - u) dx \quad \forall v \in K.$$

Berücksichtigt man die Variationsungleichung (1.2) so ergibt sich

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x \geq \int_{\Gamma_N} g_N (v - u) ds_x \quad \forall v \in K. \quad (1.3)$$

Sei die Menge V definiert als

$$V := \{\phi \in C^\infty(\Omega), \quad \phi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \phi|_{\Gamma_S} = 0\}.$$

Sei weiters $\psi \in V$. Da u aus K ist, ist auch $u \pm \psi$ aus K . Setzt man einmal $v = u + \psi$ und einmal $v = u - \psi$, so erhält man

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial}{\partial n} u \psi ds_x = \int_{\Gamma_N} g_N \psi ds_x \quad \forall \psi \in V.$$

Damit gilt $\frac{\partial}{\partial n} u = g_N$ im Sinne von $H^{-1/2}(\Gamma_N)$. Zusammen mit Gleichung (1.3), sowie unter Berücksichtigung, dass $u = 0$ und $v = 0$ auf Γ_D gilt, erhält man

$$\int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (v - u) ds_x \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (1.4)$$

Sei jetzt $\psi \geq 0$ auf Γ_S . Setzt man $v|_{\Gamma_S} = u|_{\Gamma_S} - \psi$ so erhält man

$$\int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u \psi ds_x \leq 0 \quad \forall \psi \geq 0$$

und damit $\frac{\partial}{\partial n} u \leq 0$ fast überall auf Γ_S . Setzt man nun $v|_{\Gamma_S} = g_S$ beziehungsweise $v|_{\Gamma_S} = 2u|_{\Gamma_S} - g_S$ in Gleichung (1.4) ein, so ergibt sich

$$\int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) ds_x = 0$$

und damit $\frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) = 0$ fast überall auf Γ_S . Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

1.3 Allgemeine Formulierung der Variationsungleichung

Allgemeiner lässt sich die Variationsungleichung (1.2) wie folgt formulieren: Suche u aus K , so dass

$$a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in K \quad (1.5)$$

gilt. Dabei sei X ein reeller Hilbert-Raum und K eine nichtleere abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X . X^* bezeichne den Dualraum von X . Die Bilinearform

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig und X -elliptisch und das lineare Funktional

$$l : X \rightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig, das heißt l ist aus X^* . Im Folgenden wird zunächst die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.5) unter bestimmten Bedingungen gezeigt. Anschließend wird für eine Approximation des Raumes X und der Menge K ebenfalls die Existenz und Eindeutigkeit einer Näherungslösung gezeigt, sowie die Konvergenz der Näherungslösungen gegen die exakte Lösung. Ziel ist schließlich die Konstruktion eines Lösungsverfahrens, um Näherungslösungen des Signorini-Randwertproblems zu bestimmen.

2 Eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen

Ziel dieses Kapitels ist es, die eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen der Gestalt (1.5) unter möglichst schwachen Voraussetzungen zu zeigen. Dazu wird zuerst das Minimierungsproblem

$$\inf_{v \in K} [F(v) - \langle l, v \rangle] \quad (2.1)$$

betrachtet und gezeigt, unter welchen Bedingungen dieses Problem eine Lösung besitzt. F ist dabei eine Abbildung von einer Teilmenge K eines Banach-Raumes X in die reellen Zahlen. $\langle l, v \rangle$ bezeichnet den Wert des Funktionals $l \in X^*$ in v , das heißt $l(v)$. Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass dieses Minimierungsproblem unter gewissen Voraussetzungen der folgenden Variationsungleichung entspricht: Suche $u \in K$, so dass

$$\langle F'(u) - l, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (2.2)$$

gilt. Dabei ist $F'(u)$ die Gateaux-Ableitung von $F(u)$. Weiters wird gezeigt, dass die Lösung eindeutig ist, sofern sie existiert. Mithilfe dieser beiden Aussagen lässt sich dann die eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen der Gestalt (1.5) zeigen, sofern die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist. Da dies für das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung der Fall ist, wird dieses Ergebnis verwendet, um in Kapitel 4 die eindeutige Lösbarkeit des Modellproblems zu zeigen. Abschließend wird in diesem Kapitel noch ein allgemeineres Ergebnis vorgestellt, das die eindeutige Lösbarkeit der folgenden Variationsungleichung zeigt: Suche $u \in K$, so dass

$$\langle Au - l, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (2.3)$$

gilt. Dabei wird weder die Symmetrie noch die Linearität des Operators $A : X \rightarrow X^*$ vorausgesetzt. Die Grundlagen in diesem Kapitel wurden [14], [15] und [16] entnommen.

Bevor nun die angeführten Aussagen gezeigt werden, werden einige Begriffe definiert und ein Lemma gezeigt, das für die kommenden Beweise benötigt wird.

2.1 Grundlagen

Definition 2.1. [14, S. 213]

Sei X ein Banachraum und (u_n) eine Folge in X . Die Folge (u_n) konvergiert schwach gegen den Grenzwert $u \in X$, wenn

$$\langle f, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n \rangle \quad \forall f \in X^*$$

gilt. Im Folgenden wird der schwache Grenzwert als

$$u = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

bezeichnet.

Definition 2.2. [16, Definition 37.2]

Sei X ein Banachraum. Eine Abbildung $F : K \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt schwach folgenunterhalbstetig in $u \in K$, wenn für alle schwach konvergenten Folgen (u_n) aus K mit schwachem Grenzwert u

$$F(u) \leq \underline{\lim} F(u_n)$$

gilt.

Definition 2.3. [16, Theorem 39.1a]

Sei X ein Banachraum. Eine Menge $K \subset X$ heißt schwach folgenabgeschlossen, wenn für alle schwach konvergenten Folgen (u_n) aus K auch der Grenzwert in K liegt, also

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in K \quad (2.4)$$

gilt.

Definition 2.4. [14, Definition 4.1]

Sei $f : U \subseteq X \rightarrow Y$, wobei U offen ist und X beziehungsweise Y Banach-Räume sind. Die Gateaux-Ableitung $f'(x_0)$ von f an der Stelle $x_0 \in U$ in Richtung $h \in X$ ist dann als

$$f'(x_0)h := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + th) - f(x_0))$$

definiert, sofern der Limes existiert.

Definition 2.5. [14, Definition 24.1]

Sei $A : X \rightarrow X^*$ ein Operator, der von einem Banach-Raum X in den Dualraum X^* abbildet. A heißt streng monoton, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in X$$

gilt. Der Operator A heißt stark monoton, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X$$

mit einer Konstanten $c > 0$ gilt.

Lemma 2.6. [15, 16]

Sei X ein reeller reflexiver Banach-Raum, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $F' : X \rightarrow X^*$ und $F'(u)$ existiere als Gateaux-Ableitung. Sei $\varphi(t) := F(u + t(v - u))$ für alle t aus dem Intervall $[0, 1]$. Dann gilt:

(1) F ist (streng) konvex auf $X \iff \varphi$ ist (streng) konvex auf $[0, 1]$.

(2) φ' ist streng monoton auf $[0, 1] \iff F'$ ist streng monoton auf X .

(3) F ist streng konvex auf $X \iff F'$ ist streng monoton auf X .

Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(u + (t+h)(v-u)) - F(u + t(v-u))) \\ &= \langle F'(u + t(v-u)), v-u \rangle.\end{aligned}$$

zu (1) [16, Satz 40.1]: Sei F konvex auf X , dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= F(u + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)(v-u)) \\ &= F(\lambda(u + t_1(v-u)) + (1-\lambda)(u + t_2(v-u))) \\ &\leq \lambda F(u + t_1(v-u)) + (1-\lambda)F(u + t_2(v-u)) \\ &= \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)\end{aligned}$$

und damit ist φ konvex auf $[0, 1]$. Ganz analog folgt für F streng konvex, dass φ streng konvex auf $[0, 1]$ ist. Sei jetzt φ konvex auf $[0, 1]$, dann gilt

$$\begin{aligned}F(\lambda u + (1-\lambda)v) &= F(u + (1-\lambda)(v-u)) = \varphi(1-\lambda) = \varphi(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 1) \\ &\leq \lambda\varphi(0) + (1-\lambda)\varphi(1) = \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)\end{aligned}$$

und damit ist F konvex auf X . Wieder ganz analog folgt aus φ streng konvex auf $[0, 1]$, dass F streng konvex auf X ist.

zu (2) [15, Beispiel 24.4]: Sei φ' streng monoton auf $[0, 1]$, dann gilt

$$\langle F'(v) - F'(u), v-u \rangle = \varphi'(1) - \varphi'(0) > 0.$$

Sei umgekehrt F' streng monoton auf X , dann gilt für $0 \leq s < t$

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) = \frac{1}{t-s} \langle F'(u + t(v-u)) - F'(u + s(v-u)), (t-s)(v-u) \rangle > 0.$$

zu (3) [16, Satz 40.3]: Es gilt φ streng konvex auf $[0, 1] \iff \varphi'$ streng monoton auf $[0, 1]$. Zusammen mit (1) und (2) ergibt sich die Aussage. \square

2.2 Eindeutige Lösbarkeit

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich nun zeigen, dass das Minimierungsproblem (2.1)

$$\inf_{v \in K} [F(v) - \langle l, v \rangle]$$

unter gewissen Bedingungen eine Lösung besitzt.

Satz 2.7. [16, Theorem 39.1a]

Unter den Voraussetzungen:

- (a) $F : K \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, X sei ein reeller, reflexiver Banach-Raum, $K \neq \emptyset$.
- (b) F sei schwach folgenunterhalbstetig.
- (c) K sei schwach folgenabgeschlossen.
- (d) K sei beschränkt oder es gelte für alle Folgen (u_n) mit Elementen aus K

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \infty \implies \overline{\lim} [F(u_n) - \langle l, u_n \rangle] = +\infty.$$

gilt:

- (1) Das Minimierungsproblem (2.1) besitzt für festes $l \in X^*$ eine Lösung $u \in K$.
- (2) Es existiert stets eine Minimalfolge (u_n) , das heißt es gilt

$$u_n \in K \quad \forall n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [F(u_n) - \langle l, u_n \rangle] = F(u) - \langle l, u \rangle.$$

- (3) Jede Minimalfolge (u_n) besitzt eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n'})$ mit schwachem Grenzwert u , wobei u das Minimierungsproblem (2.1) löst.

Beweis. Sei $G(v) := F(v) - \langle l, v \rangle$ für alle v aus K . Da F laut Voraussetzung schwach folgenunterhalbstetig ist, gilt dies auch für G . Weiters sei

$$\alpha := \inf_{v \in K} G(v) \quad \text{mit} \quad -\infty \leq \alpha < \infty.$$

Dann existiert eine Folge (u_n) aus K , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n) = \alpha$$

gilt. Wegen der Voraussetzung (d) ist diese Folge beschränkt. Daher existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n'})$ mit schwachem Grenzwert u . Da K schwach folgenabgeschlossen ist, liegt u in K . Verwendet man die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von G , so erhält man

$$\alpha \leq G(u) \leq \underline{\lim} G(u_{n'}) = \alpha \implies G(u) = \alpha.$$

□

Beispiel 2.8. Sei X ein reeller Hilbertraum und K eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X . Sei weiters $F : K \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und unterhalbstetig. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 2.7 erfüllt. Das gilt, da ein Hilbert-Raum ein reflexiver Banach-Raum ist, abgeschlossene und konvexe Teilmengen von Banachräumen schwach folgenabgeschlossen sind, sowie konvexe und unterhalbstetige Funktionale schwach folgenunterhalbstetig sind.

Der nächste Satz zeigt, dass jede Lösung u des Minimierungsproblems (2.1)

$$\inf_{v \in K} [F(v) - \langle l, v \rangle]$$

auch der Variationsungleichung (2.2), suche $u \in K$, so dass

$$\langle F'(u) - l, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

gilt, genügt. Weiters wird die Äquivalenz von (2.1) und (2.2) gezeigt, sowie die Eindeutigkeit einer Lösung, sofern diese existiert.

Satz 2.9. [16, Theorem 44.1]

Sei $F : K \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, K konvex, $K \neq \emptyset$ und X ein Banach-Raum. Dann gilt:

(1) Ist u Lösung von (2.1) für $l \in X^*$, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (F(u + t(v - u)) - F(u)) - \langle l, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in K,$$

falls die linke Seite existiert. Existiert $F'(u)$ als Gateaux-Ableitung, dann ist diese Ungleichung identisch mit (2.2).

(2) Ist F streng konvex auf K , dann besitzt (2.1) für jedes l aus X^* höchstens eine Lösung u .

(3) Ist F konvex und existiert $F'(u)$ als Gateaux-Ableitung auf K , dann gilt
 u ist Lösung von (2.1) \iff u ist Lösung von (2.2).

Beweis. zu (1): Sei

$$\varphi(t) := F(u + t(v - u)) - \langle l, u + t(v - u) \rangle.$$

Es gilt $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ für alle t aus dem Intervall $[0, 1]$, da u Lösung von (2.1) ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\varphi(t) - \varphi(0)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (F(u + t(v - u)) - F(u) - (\langle l, u + t(v - u) \rangle - \langle l, u \rangle)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (F(u + t(v - u)) - F(u)) - \langle l, v - u \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

zu (2): Sei $G(v) := F(v) - \langle l, v \rangle$. Da F streng konvex ist, ist es auch G . Angenommen, es existieren zwei Lösungen u und \bar{u} für (2.1) mit $u \neq \bar{u}$, das heißt es gilt

$$G(u) = G(\bar{u}) = \inf_{v \in K} G(v) =: \alpha.$$

Aufgrund der strengen Konvexität von G ergibt sich jedoch wegen

$$\alpha \leq G\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right) < \frac{1}{2} (G(u) + G(\bar{u})) = \alpha$$

ein Widerspruch. Damit muss $u = \bar{u}$ sein.

zu (3): Sei zuerst u Lösung von (2.1). Wegen (1) ist u dann auch Lösung von (2.2). Sei jetzt u Lösung von (2.2). Damit ist $\varphi'(0) \geq 0$. Da F konvex ist, ist wegen Lemma 2.6 auch φ konvex auf $[0, 1]$ und damit ist φ' monoton. Es gilt also

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\nu) \geq \varphi'(0) \geq 0 \quad \text{für } 0 < \nu < 1.$$

Setzt man für $\varphi(1)$ und $\varphi(0)$ ein, so erhält man

$$F(v) - \langle l, v \rangle \geq F(u) - \langle l, u \rangle \quad \forall v \in K.$$

□

Satz 2.7 und Satz 2.9 ergeben also zusammen die Äquivalenz von (2.1) und (2.2), sowie die Existenz einer eindeutigen Lösung unter den entsprechenden Voraussetzungen. Damit lässt sich nun die eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen der Gestalt (1.5) zeigen, sofern die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, zusätzlich zur schon geforderten Stetigkeit und X -Elliptizität, auch symmetrisch ist. Dazu betrachten wir das Minimierungsproblem

$$\inf_{v \in K} \left[\frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \right] \quad (2.5)$$

und die Variationsungleichung (1.5), die hier noch einmal angeführt wird: Suche $u \in K$, so dass

$$a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in K \quad (2.6)$$

gilt. Der folgende Satz zeigt, unter gewissen Voraussetzungen, die Äquivalenz von (2.5) und (2.6) sowie deren eindeutige Lösbarkeit.

Satz 2.10. [16, Theorem 44.2]

Unter den Voraussetzungen:

- (a) Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein reeller Hilbert-Raum, K eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X .
- (b) $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sei bilinear, beschränkt, symmetrisch und X -elliptisch.
- (c) $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei linear und stetig.

gilt:

- (1) (2.5) und (2.6) sind äquivalent.
- (2) (2.5) und (2.6) besitzen genau eine Lösung $u \in K$.

Beweis. Jeder beschränkten Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich ein linearer und beschränkter Operator $A : X \rightarrow X^*$ zuordnen, so dass

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in X$$

gilt [15, Satz 20.6]. Sei $F(u) := \frac{1}{2}a(u, u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle$ für alle u aus X . Dabei ist $A : X \rightarrow X^*$ linear, stetig und wegen der X -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auch streng monoton. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle F'(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(u + tv) - F(u)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + t \langle Au, v \rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle Av, v \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle \right) \\ &= \langle Au, v \rangle = a(u, v). \end{aligned}$$

Also ist $F' = A$ und damit ist F' streng monoton. Wegen Lemma 2.6 ist F streng konvex auf X . Außerdem ist F stetig. Weiters gilt

$$F(u) - l(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - l(u) \geq c_1^A \|u\|^2 - c_2^l \|u\| \rightarrow +\infty \quad \text{für } \|u\| \rightarrow +\infty.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.7 und Satz 2.9 erfüllt. Aus diesen Sätzen folgen die Behauptungen. \square

Um die Einschränkung der Symmetrie der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ zu vermeiden, benötigt man Projektionen. Wir betrachten dazu für gegebenes $c \in X$ das Minimierungsproblem

$$\min_{v \in K} \|v - c\|_X^2. \quad (2.7)$$

Das heißt, es werden Elemente v aus K gesucht, die den kleinsten Abstand zu dem Element c aus X haben. Der nächste Satz zeigt, dass das Minimierungsproblem (2.7) unter gewissen Voraussetzungen stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 2.11. [16, Satz 44.2]

Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein reeller Hilbert-Raum und K eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X . Dann gilt:

- (1) $\forall c \in X$ besitzt das Minimierungsproblem (2.7) genau eine Lösung $u =: Pc$.
- (2) $P : X \rightarrow K$ ist monoton und nichtexpansiv, das heißt

$$(Pc - Pd, c - d) \geq 0 \quad \text{und} \quad \|Pc - Pd\| \leq \|c - d\| \quad \forall c, d \in X.$$

- (3) Es gilt

$$u = Pc \iff (u - c, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Beweis. Sei $a(v, v) := (v, v)$ und $l(v) := (c, v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v - c\|^2 &= (v - c, v - c) = (v, v) - 2(c, v) + (c, c) \\ &= a(v, v) - 2l(v) + (c, c). \end{aligned}$$

Damit ist das Minimierungsproblem (2.7) äquivalent zu

$$\min_{v \in K} \left[\frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \right],$$

was dem Minimierungsproblem (2.5) entspricht.

Damit folgt (1) aus Satz 2.10. (3) folgt ebenfalls aus Satz 2.10 und zwar mit

$$a(u, v - u) - l(v - u) = (u, v - u) - (c, v - u) = (u - c, v - u) \geq 0.$$

zu (2): Setzt man $u = Pc$ und $v = Pd$ in $(u - c, v - u)$ ein, so ergibt sich wegen der Aussage (3)

$$(Pc - c, Pd - Pc) \geq 0, \quad \text{also} \quad (Pc, Pc - Pd) \leq (c, Pc - Pd).$$

Ebenso ergibt sich mit $u = Pd$ und $v = Pc$

$$(Pd - d, Pc - Pd) \geq 0, \quad \text{also} \quad (Pd, Pc - Pd) \geq (d, Pc - Pd).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Pc - Pd\|^2 &= (Pc - Pd, Pc - Pd) = (Pc, Pc - Pd) - (Pd, Pc - Pd) \\ &\leq (c, Pc - Pd) - (d, Pc - Pd) = (c - d, Pc - Pd) \\ &\leq \|c - d\| \|Pc - Pd\|. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun die eindeutige Lösbarkeit der Variationsungleichung (2.3), suche $u \in K$, so dass

$$\langle Au - l, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

gilt, gezeigt werden, ohne die Symmetrie oder Linearität des Operators $A : X \rightarrow X^*$ vorauszusetzen. Wie der nächste Satz zeigt, entspricht diese Variationsungleichung der Fixpunktgleichung

$$u = P(u - tJ(Au - l)) =: L_t u \quad \text{für} \quad t > 0. \quad (2.8)$$

Dabei ist $J : X^* \rightarrow X$ die Dualitätsabbildung, die sich aus dem Darstellungssatz von Riesz ergibt [15, Satz 20.4]. Für diese Abbildung gilt

$$(Jf, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X \quad \text{und} \quad \|Jf\|_X = \|f\|_{X^*}.$$

Satz 2.12. [16, Theorem 44.4]

Unter den Voraussetzungen:

- (1) $A : X \rightarrow X^*$, X sei ein reeller, separabler Hilbert-Raum und K eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X .
- (2) A sei stark monoton, also

$$c_1^A \|u - v\|_X^2 \leq \langle Au - Av, u - v \rangle \quad \forall u, v \in X.$$

(3) A sei Lipschitz-stetig, also

$$\|Au - Av\|_{X^*} \leq c_2^A \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

gilt:

(1) (2.3) und (2.8) sind äquivalent.

(2) Die Abbildung $L_t : X \rightarrow X$ mit

$$L_t u = P(u - tJ(Au - l))$$

ist für festes t mit $0 < t < 2c_1^A/(c_2^A)^2$ kontraktiv, das heißt

$$\|L_t u - L_t v\|_X \leq k \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X \quad \text{mit} \quad 0 \leq k^2 = 1 - 2c_1^A t + t^2 (c_2^A)^2 < 1.$$

Beweis. Sei $c := u - tJ(Au - l)$.

zu (1): Gelte zuerst (2.3). Dadurch ist $\langle tJ(Au - l), v - u \rangle \geq 0$ und wegen der Definition von c auch $\langle u - c, v - u \rangle \geq 0$ für alle v aus K . Wegen Satz 2.11 gilt daher $u = Pc$ und damit (2.8).

Gelte nun (2.8) und damit $u = Pc$. Wegen Satz 2.11 gilt $\langle u - c, v - u \rangle \geq 0$ für alle v aus K und damit auch

$$0 \leq \langle J(Au - l), v - u \rangle = \langle Au - l, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

zu (2): Wegen Satz 2.11 gilt

$$\begin{aligned} \|L_t u - L_t v\|_X^2 &\leq \|u - tJ(Au - l) - (v - tJ(Av - l))\|_X^2 \\ &= \|u - v\|_X^2 - 2t \langle J(Au - l) - J(Av - l), u - v \rangle \\ &\quad + t^2 \|J(Au - l) - J(Av - l)\|_X^2 \\ &= \|u - v\|_X^2 - 2t \langle Au - Av, u - v \rangle + t^2 \|Au - Av\|_{X^*}^2 \\ &\leq (1 - 2c_1^A t + t^2 (c_2^A)^2) \|u - v\|_X^2 = k^2 \|u - v\|_X^2. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösbarkeit von (2.8) und damit auch von (2.3) folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz. \square

Dieser Satz lässt sich auch auf Variationsungleichungen der Gestalt (1.5) anwenden. Wie schon im Beweis zu Satz 2.10 angeführt, lässt sich jeder beschränkten Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein linearer und beschränkter Operator $A : X \rightarrow X^*$ zuordnen. Ist die Bilinearform X -elliptisch, so ist der Operator stark monoton. Die in Satz 2.12 geforderte Lipschitz-Stetigkeit des Operators A folgt aus der Linearität und Beschränktheit der Bilinearform, siehe [13, Lemma 3.1]. Damit ist also Satz 2.10 gültig, auch ohne die Symmetrie der Bilinearform zu fordern.

Bemerkung 2.1. Die eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen der Gestalt (2.3) lässt sich unter noch schwächeren Bedingungen zeigen. Siehe zum Beispiel [4, Theorem 1].

3 Approximation der Räume

Im vorangegangenen Kapitel wurden Bedingungen genannt, unter denen Variationsungleichungen der Gestalt (1.5) eindeutig lösbar sind. Um solche Variationsungleichungen numerisch zu lösen, müssen diese in endlichdimensionalen Räumen formuliert werden. Wesentlich dabei ist, dass die numerische Lösung ebenfalls eindeutig ist und, bei entsprechender Wahl der endlichdimensionalen Räume, beliebig nahe bei der kontinuierlichen Lösung liegt. Ziel dieses Kapitels ist es, allgemeine Bedingungen zu finden, unter denen das der Fall ist. Die Grundlagen in diesem Kapitel wurden [7] entnommen. Sei $(X_N)_N$ eine Familie von abgeschlossenen (in der Praxis endlichdimensionalen) Teilräumen von X . Weiters sei $(K_N)_N$ eine Familie von abgeschlossenen, konvexen und nichtleeren Teilmengen von X , für die $K_N \subset X_N$ für alle N gilt. Im Allgemeinen wird nicht $K_N \subset K$ angenommen. $(K_N)_N$ soll zwei Bedingungen erfüllen:

1. Sei (v_N) so, dass $v_N \in K_N$ für alle N und (v_N) beschränkt in X ist. Dann gehören die schwachen Häufungspunkte von (v_N) zu K .
2. Es gebe eine Teilmenge χ von X mit $\bar{\chi} = K$ und eine Abbildung $r_N : \chi \rightarrow K_N$, für die

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_N v = v \quad \forall v \in \chi$$

ist.

Bemerkung 3.1. Falls $K_N \subset K$ für alle N gilt, dann ist die erste Bedingung erfüllt, da K schwach abgeschlossen ist (K ist abgeschlossen und konvex).

Bemerkung 3.2. Aufgrund der ersten Bedingung gilt $\bigcap K_N \subset K$.

In diesen Räumen lässt sich die Diskretisierung der Variationsungleichung (1.5) wie folgt schreiben: Suche u_N aus K_N , so dass

$$a(u_N, v_N - u_N) \geq l(v_N - u_N) \quad \forall v_N \in K_N \tag{3.1}$$

gilt. Erfüllt die Variationsungleichung (1.5) die Voraussetzungen aus Satz 2.12, so erfüllt auch (3.1) diese Voraussetzungen und damit ist (3.1) eindeutig lösbar. Der nachfolgende Satz zeigt, dass die Lösungen (u_N) von (3.1) gegen die Lösung u von (1.5) konvergieren.

Satz 3.1. [7, Theorem 5.2, Seite 13]

Sei u_N Lösung von (3.1) und u Lösung von (1.5). Dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N - u\|_X = 0.$$

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile:

1. A priori Abschätzung für (u_N) .
2. Schwache Konvergenz von (u_N) .
3. Starke Konvergenz von (u_N) .

zu (1): Es wird gezeigt, dass es zwei Konstanten c_1 und c_2 unabhängig von N gibt, so dass

$$\|u_N\|^2 \leq c_1 \|u_N\| + c_2 \quad \forall N$$

gilt. Damit ist dann auch gezeigt, dass (u_N) beschränkt ist. Ausgehend von (3.1) gilt

$$a(u_N, u_N) \leq a(u_N, v_N) - l(v_N - u_N) \quad \forall v_N \in K_N.$$

Verwendet man die Elliptizität und die Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, sowie die Stetigkeit von l , so ergibt sich die Abschätzung

$$c_1^A \|u_N\|^2 \leq c_2^A \|u_N\| \|v_N\| + c_2^l (\|v_N\| + \|u_N\|) \quad \forall v_N \in K_N.$$

Sei $v_0 \in \chi$ beliebig aber fest und $v_N = r_N v_0 \in K_N$. Wegen der zweiten Bedingung an K_N konvergiert $r_N v_0$ gegen v_0 und daher gilt $\|v_N\| \leq m$ für eine Konstante m . Dadurch erhält man die Abschätzung

$$\|u_N\|^2 \leq \frac{1}{c_1^A} \{ (m c_2^A + c_2^l) \|u_N\| + c_2^l m \} = c_1 \|u_N\| + c_2.$$

zu (2): Da (u_N) beschränkt ist, existiert eine Teilfolge (u_{N_i}) , die gegen u^* schwach in X konvergiert. Aufgrund der ersten Eigenschaft für $(K_N)_N$ ist u^* aus K . Im Folgenden wird gezeigt, dass u^* (1.5) löst. Wieder ausgehend von (3.1) gilt

$$a(u_{N_i}, u_{N_i}) \leq a(u_{N_i}, v_{N_i}) - l(v_{N_i} - u_{N_i}) \quad \forall v_{N_i} \in K_{N_i}.$$

Sei $v \in \chi$ und $v_{N_i} = r_{N_i} v$. Eingesetzt in obige Ungleichung ergibt sich

$$a(u_{N_i}, u_{N_i}) \leq a(u_{N_i}, r_{N_i} v) - l(r_{N_i} v - u_{N_i}).$$

$r_{N_i} v$ konvergiert stark gegen v und u_{N_i} konvergiert schwach gegen u^* . Dabei gilt

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} a(u_{N_i}, r_{N_i} v) = a(u^*, v) \quad \text{und} \quad \lim_{N_i \rightarrow \infty} l(r_{N_i} v - u_{N_i}) = l(v - u^*).$$

Daraus folgt

$$\underline{\lim} a(u_{N_i}, u_{N_i}) \leq a(u^*, v) - l(v - u^*) \quad \forall v \in \chi.$$

Andererseits gilt

$$0 \leq a(u_{N_i} - u^*, u_{N_i} - u^*) = a(u_{N_i}, u_{N_i}) - a(u_{N_i}, u^*) - a(u^*, u_{N_i}) + a(u^*, u^*)$$

und damit

$$a(u_{N_i}, u^*) + a(u^*, u_{N_i}) - a(u^*, u^*) \leq a(u_{N_i}, u_{N_i}).$$

Wird der Grenzübergang durchgeführt, so erhält man

$$a(u^*, u^*) \leq \underline{\lim} a(u_{N_i}, u_{N_i}).$$

Zusammen ergibt sich also

$$a(u^*, u^*) \leq a(u^*, v) - l(v - u^*) \quad \forall v \in \chi.$$

Da χ dicht in K ist und sowohl $a(\cdot, \cdot)$ als auch l stetig sind, gilt dies auch für alle v aus K . Damit löst u^* (1.5). Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (1.5) muss $u^* = u$ gelten. u ist also der einzige Häufungspunkt von (u_N) in der schwachen Topologie von X . Daher konvergiert (u_N) schwach gegen u .

zu (3): Aus der Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_2^A \|u_N - u\|^2 \leq a(u_N - u, u_N - u) \\ &= a(u_N, u_N) - a(u_N, u) - a(u, u_N) + a(u, u). \end{aligned}$$

Aus (3.1) ergibt sich

$$a(u_N, u_N) \leq a(u_N, r_N v) - l(r_N v - u_N) \quad \forall v \in \chi.$$

Zusammen erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_2^A \underline{\lim} \|u_N - u\|^2 \leq c_2^A \overline{\lim} \|u_N - u\|^2 \\ &\leq \overline{\lim} \{a(u_N, r_N v) - l(r_N v - u_N) - a(u_N, u) - a(u, u_N) + a(u, u)\} \\ &= a(u, v) - l(v - u) - a(u, u) \\ &= a(u, v - u) - l(v - u) \quad \forall v \in \chi. \end{aligned}$$

Da χ dicht in K ist und sowohl $a(\cdot, \cdot)$ als auch l stetig sind, gilt

$$0 \leq c_2^A \underline{\lim} \|u_N - u\|^2 \leq c_2^A \overline{\lim} \|u_N - u\|^2 \leq a(u, v - u) - l(v - u) \quad \forall v \in K.$$

Setzt man in dieser Ungleichung $v = u$, so erhält man

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow 0} \|u_N - u\|^2 = 0.$$

□

4 Eindeutige Lösbarkeit und Diskretisierung

In diesem Kapitel wird das Signorini-Randwertproblem genauer untersucht. Zuerst wird gezeigt, dass das Modellproblem unter gewissen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung besitzt. Anschließend wird ein kurzer Überblick über finite Elemente gegeben, mit deren Hilfe dann eine diskrete Version des Problems angegeben wird. Für das diskrete Problem wird ebenfalls die eindeutige Lösbarkeit gezeigt, sowie die Konvergenz der Näherungslösungen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems. Abschließend wird eine zur diskreten Variationsungleichung äquivalente Formulierung angegeben, die im nächsten Kapitel verwendet wird.

Für eine bessere Übersicht wird hier die Variationsungleichung des Signorini-Randwertproblems (1.2) noch einmal angegeben. Sei $X = H_{0,D}^1(\Omega)$ und

$$K := \left\{ w \in H_{0,D}^1(\Omega), \quad w - g_S \leq 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_S \right\}.$$

Die Variationsungleichung lautet dann: Suche u aus K , sodass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx + \int_{\Gamma_N} g_N (v - u) ds_x \quad \forall v \in K \quad (4.1)$$

gilt. Damit ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ als

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

und die Linearform $l(\cdot)$ als

$$l(v) := \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g_N v ds_x$$

definiert.

4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des kontinuierlichen Problems

Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (4.1) zu zeigen, wird Satz 2.10 verwendet und es ist zu zeigen, dass alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Die Voraussetzung an X ist erfüllt, da $X = H_{0,D}^1(\Omega)$ ein reeller Hilbert-Raum ist. Sei $\tilde{g}_S \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit $\tilde{g}_S|_{\Gamma_S} = g_S$ und $\tilde{g}_S|_{\Gamma_D} = 0$. Gilt $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_S = \emptyset$, wie in Kapitel 1 vorausgesetzt, dann genügt es, wenn g_S aus $H^{1/2}(\Gamma_S)$ ist. Sind Γ_D und Γ_S aber benachbarte Randstücke, dass heißt es gilt $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_S \neq \emptyset$, dann muss g_S aus $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_S)$ geeignet gewählt werden. Aufgrund des inversen Spursatzes [13, Satz 2.10] existiert eine Funktion $u_g \in H^1(\Omega)$, welche die geforderten Bedingungen am Rand erfüllt. Damit ist K nicht leer. Sei (v_n) eine Folge von Funktionen aus K , die gegen eine Funktion v konvergieren. Der Spursatz [13, Satz 2.9] zeigt, dass der Spuroperator $\gamma_0^{\text{int}} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ stetig ist. Damit konvergiert $\gamma_0^{\text{int}} v_n$ gegen $\gamma_0^{\text{int}} v$. Da $\gamma_0^{\text{int}} v_n = 0$ auf Γ_D und $\gamma_0^{\text{int}} v_n \leq g_S$ auf Γ_S für alle n gilt, gilt dies auch für $\gamma_0^{\text{int}} v$. Damit ist K abgeschlossen. Seien v und w aus K . Aufgrund der Linearität des Spuroperators gilt

$$\gamma_0^{\text{int}}(tv + (1-t)w) = t\gamma_0^{\text{int}}v + (1-t)\gamma_0^{\text{int}}w = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D$$

und

$$\gamma_0^{\text{int}}(tv + (1-t)w) = t\gamma_0^{\text{int}}v + (1-t)\gamma_0^{\text{int}}w \leq g_S \quad \text{auf } \Gamma_S.$$

Also ist $tv + (1-t)w$ für $0 < t < 1$ ein Element aus K und K damit konvex. Damit ist gezeigt, dass die Voraussetzungen an K erfüllt sind. $a(\cdot, \cdot)$ ist offensichtlich bilinear und symmetrisch. Die Beschränktheit folgt aus

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Aufgrund des Normierungssatzes von Sobolev [13, Satz 2.2] ist

$$\|v\|_{H^1(\Omega), \Gamma_D}^2 := \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left[\int_{\Gamma_D} v(x) ds_x \right]^2$$

in $H^1(\Omega)$ eine zur $H^1(\Omega)$ -Norm äquivalente Norm. Damit folgt die X -Elliptizität der Bilinearform aus

$$a(u, u) = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left[\int_{\Gamma_D} u(x) ds_x \right]^2 = \|u\|_{H^1(\Omega), \Gamma_D}^2 \geq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Als letztes ist noch zu zeigen, dass die Voraussetzungen an $l(\cdot)$ erfüllt sind. $l(\cdot)$ ist offensichtlich linear. Sei f aus dem Dualraum von $H^1(\Omega)$ und g_N aus dem Dualraum von $H^{1/2}(\Gamma_N)$, dann folgt aus der Definition und der Stetigkeit des Spuroperators

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g_N v ds_x \right| \\ &\leq \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g_N\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} \|\gamma_0^{\text{int}} v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit.

Da alle Voraussetzungen des Satzes 2.10 erfüllt sind, folgt also die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung (4.1).

4.2 Finite Elemente

Eine Möglichkeit, Variationsprobleme zu lösen, ist, Finite-Element-Räume zu verwenden. Dabei wird das gegebene Gebiet Ω in endlich viele Teilgebiete zerlegt. Diese Teilgebiete können zum Beispiel für zweidimensionale Gebiete Dreiecke oder Vierecke sein, für dreidimensionale Gebiete sind unter anderem Tetraeder oder Würfel möglich. Es werden Funktionen verwendet, die auf jedem der Teilgebiete Polynome sind. Die folgende Darstellung über Finite Elemente ist [2] und [13] entnommen.

Für alle weiteren Betrachtungen wird Ω als zweidimensionales polygonales Gebiet angenommen, das in Dreiecke zerlegt wird.

Definition 4.1. *Zulässige Zerlegung*

Eine Zerlegung $\mathcal{T}_N = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ von Ω in finite Elemente T_i heißt zulässig, wenn folgende Punkte erfüllt sind:

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$.
- Besteht $T_i \cap T_j$ aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt von T_i und T_j .
- Besteht $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ aus mehr als einem Punkt, so ist $T_i \cap T_j$ eine Kante von T_i und T_j .

Für jedes Element T_ℓ einer Zerlegung \mathcal{T}_N ist das Volumen als

$$\Delta_\ell := \int_{T_\ell} dx,$$

die lokale Maschenweite als

$$h_\ell := \Delta_\ell^{1/2},$$

und der Durchmesser als

$$d_\ell := \sup_{x,y \in T_\ell} |x - y|$$

definiert. Sei r_ℓ der Radius des größten in T_ℓ enthaltenen Kreises. Eine Familie von Zerlegungen \mathcal{T}_N heißt formregulär, falls

$$d_\ell \leq c_F r_\ell \quad \forall \ell = 1, \dots, N$$

mit einer Konstanten c_F unabhängig von der Zerlegung gilt. Sei die globale Maschenweite als

$$h = h_{\max} := \max_{\ell=1, \dots, N} h_\ell$$

definiert und

$$h_{\min} := \min_{\ell=1, \dots, N} h_\ell.$$

Gilt für eine Familie von Zerlegungen \mathcal{T}_N

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq c_G$$

mit einer Konstanten c_G unabhängig von N , so heißt diese Familie global gleichmäßig. In dem Beispiel aus Kapitel 1 liegt die gesuchte Lösung in $H_{0,D}^1(\Omega)$. Der folgende Satz zeigt, dass Funktionen, die auf Ω stetig und auf den Elementen stetig differenzierbar sind, in $H^1(\Omega)$ liegen.

Satz 4.2. [2, Satz 5.2]

Sei $k \geq 1$, Ω beschränkt und $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise k -mal stetig differenzierbar. v gehört genau dann zu $H^k(\Omega)$, wenn $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$ ist.

Beweis. Siehe [2]. □

Die Formfunktionen der Finiten Elemente können also (bei einem konformen Ansatz) aus dem Raum

$$\mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N) := \mathcal{M}^1(\mathcal{T}_N) \cap C^0(\Omega)$$

gewählt werden, wobei

$$\mathcal{M}^1(\mathcal{T}_N) := \{v \in L_2(\Omega); v|_T \in \mathcal{P}_1 \text{ für jedes } T \in \mathcal{T}_N\}$$

ist.

Definition 4.3. *Nodale Basis*

Zu einem Finite-Element-Raum gebe es eine Menge von Punkten (Knoten), sodass die Funktionen durch die Werte in den Punkten bestimmt sind. Die Funktionen, die in einem Punkt ungleich Null und in den anderen Punkten gleich Null sind, bilden eine nodale Basis.

Eine mögliche Wahl der Punkte sind die Eckpunkte der Dreiecke, in die das Gebiet Ω zerlegt wurde. In jedem Dreieck gibt es dann genau ein Polynom vom Grad 1, das vorgegebene Werte in den Eckpunkten annimmt. Da die Grenzwerte der Polynome an Kanten übereinstimmen, sind die Funktionen auch global stetig. Eine mögliche nodale Basis sind die linearen Funktionen, die den Wert 1 in einem Knoten und 0 in den anderen annehmen. Sei $\{x_k\}_{k=1}^M$ die Menge der Eckpunkte, dann lässt sich diese nodale Basis des Ansatzraumes $\mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N)$ als

$$\varphi_k^1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_k, \\ 0 & \text{für } x = x_l, \quad l \neq k, \\ \text{linear} & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben. Jede Funktion aus dem Ansatzraum ist damit als Linearkombination

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^M v_k \varphi_k^1(x)$$

darstellbar. Im Folgenden sei \mathcal{T}_N eine zulässige Zerlegung von Ω in N Dreiecke mit M Knoten. Als Ansatzraum wird der Raum $\mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N)$ der stückweise linearen und global stetigen Funktionen mit der Basis $\{\varphi_k^1(x)\}_{k=1}^M$ verwendet.

4.3 Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung

In diesem Abschnitt wird nun mit Hilfe von finiten Elementen eine diskrete Version der Variationsungleichung (4.1) angegeben. Anschließend wird die Existenz einer eindeutigen Lösung gezeigt. Zuerst werden die Räume festgelegt, in denen die diskrete Lösung gesucht wird. X_M wird als

$$X_M := \{w \in \mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N), \quad w|_{\Gamma_D} = 0\}$$

festgelegt. Damit ist X_M eine Teilmenge von X für alle N . K_M wird als

$$K_M := \{w \in \mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N), \quad w|_{\Gamma_D} = 0, \quad w(x_k) - g_S(x_k) \leq 0 \quad \text{für } x_k \in \Gamma_S\}$$

definiert. $\{x_k\}_{k=1}^M$ ist dabei, wie im vorherigen Abschnitt angegeben, die Menge der Knoten. Im Allgemeinen ist K_M damit keine Teilmenge von K . Die diskrete Variationsungleichung lautet dann: Suche u_h aus K_M , sodass

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (v_h - u_h) dx \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx + \int_{\Gamma_N} g_N(v_h - u_h) ds_x \quad \forall v_h \in K_M \quad (4.2)$$

gilt. Um die Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung zu zeigen, wird wieder Satz 2.10 verwendet. Funktionen in $\mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N)$ sind durch ihre Werte in den M Knoten x_k eindeutig bestimmt. Deshalb lässt sich $\mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N)$ mit dem \mathbb{R}^M identifizieren.

$$\widetilde{X}_M = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^M, \quad w_k = 0 \quad \text{für } x_k \in \Gamma_D\}$$

ist ein Hilbertraum. Es existiert ein Isomorphismus zwischen den Elementen von X_M und \widetilde{X}_M , da jedem Element w_h von X_M mit

$$w_h(x) = \sum_{k=1}^M w_k \varphi_k^1(x)$$

eindeutig ein Element \underline{w} aus \widetilde{X}_M zugeordnet werden kann mit

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_M = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^M, \quad w_k = 0 \quad \text{für } x_k \in \Gamma_D, \quad w_k \leq g_S(x_k) \quad \text{für } x_k \in \Gamma_S\}$$

ist offensichtlich nichtleer, abgeschlossen und konvex. Seien u_h und v_h zwei Elemente aus X_M mit den Darstellungen

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k^1(x) \quad \text{und} \quad v_h(x) = \sum_{k=1}^M v_k \varphi_k^1(x),$$

die den Elementen \underline{u} und \underline{v} aus \widetilde{X}_M mit

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

entsprechen, dann lässt sich $a(u_h, v_h)$ als

$$a(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_i v_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^1(x) \cdot \nabla \varphi_j^1(x) dx = (A_M \underline{u}, \underline{v}) \quad (4.3)$$

schreiben, mit (\cdot, \cdot) als Skalarprodukt im \mathbb{R}^M und der Matrix $A_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$, die als

$$A_M[i, j] = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^1(x) \cdot \nabla \varphi_j^1(x) dx \quad \text{für} \quad i, j = 1, \dots, M \quad (4.4)$$

definiert ist. A_M ist offensichtlich symmetrisch und wegen

$$(A_M \underline{u}, \underline{u}) = a(u_h, u_h) \geq c_2 \|u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall \underline{u} \in \widetilde{X}_M$$

auch positiv definit. $(A_M \cdot, \cdot)$ ist damit offensichtlich bilinear, beschränkt, symmetrisch und wegen der positiven Definitheit von A_M auch \widetilde{X}_M -elliptisch. Sei v_h wie zuvor ein Element aus X_M mit dem entsprechenden Element \underline{v} aus \widetilde{X}_M . $l(v_h)$ lässt sich als

$$l(v_h) = \sum_{i=1}^M v_i \left[\int_{\Omega} f \varphi_i^1 dx + \int_{\Gamma_N} g_N \varphi_i^1 ds_x \right] = (\underline{f}, \underline{v}) \quad (4.5)$$

schreiben, wobei der Vektor \underline{f} als

$$\underline{f}[i] = \int_{\Omega} f \varphi_i^1 dx + \int_{\Gamma_N} g_N \varphi_i^1 ds_x \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, M$$

definiert ist. (\underline{f}, \cdot) ist offensichtlich linear und stetig.

Da alle Voraussetzungen des Satzes 2.10 erfüllt sind, folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u_h \in K_M$ der diskreten Variationsungleichung (4.2).

4.4 Konvergenz der diskreten Lösung

Es bleibt noch zu klären, ob die Folge der diskreten Lösungen u_h aus K_M gegen die kontinuierliche Lösung u aus K konvergiert. In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass dies der Fall ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

1. Sei (v_h) so, dass $v_h \in K_M$ für alle Paare (h, M) und (v_h) beschränkt in X ist. Dann gehören die schwachen Häufungspunkte von (v_h) zu K .

2. Es gebe eine Teilmenge χ von X mit $\bar{\chi} = K$ und eine Abbildung $r_h : \chi \rightarrow K_M$, für die

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \quad \forall v \in \chi$$

ist.

Da K_M im Allgemeinen keine Teilmenge von K ist, ist der erste Punkt nicht trivialerweise erfüllt. Anstatt zu zeigen, dass die obigen zwei Punkte erfüllt sind, wird ein direkterer Ansatz gewählt [3]. Sei u die eindeutige Lösung der Variationsungleichung (4.1) und u_h die eindeutige Lösung der diskreten Variationsungleichung (4.2). Sei λ als

$$\lambda := Au - l$$

definiert, wobei $A : X \rightarrow X^*$ wie im Beweis von Satz 2.10 der der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ zugeordnete Operator ist. Damit erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + (\lambda, v_h - u_h) \\ &\quad + (l, v_h - u_h) - a(u_h, v_h - u_h) \\ &\leq a(u - u_h, u - v_h) + (\lambda, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_M, \end{aligned}$$

da wegen (4.2) $(l, v_h - u_h) - a(u_h, v_h - u_h) \leq 0$ ist. Sei weiters $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow X_M$ der lineare Interpolationsoperator. Ersetzt man in der obigen Ungleichung v_h durch $I_h u$, so erhält man

$$a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - I_h u) + (\lambda, I_h u - u_h). \quad (4.6)$$

Aus der Definition von λ ergibt sich

$$(\lambda, v_h) = a(u, v_h) - (l, v_h) = \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u v_h ds_x \quad \forall v_h \in K_M$$

und damit

$$(\lambda, I_h u - u_h) = \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (I_h u - u_h) ds_x = \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (I_h u - I_h g_S) ds_x + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (I_h g_S - u_h) ds_x.$$

Da am Signorini-Rand $\frac{\partial}{\partial n} u \leq 0$ und $u_h \leq I_h g_S$ gilt, ist das letzte Integral kleiner oder gleich Null und somit

$$(\lambda, I_h u - u_h) \leq \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (I_h u - I_h g_S) ds_x.$$

Berücksichtigt man, dass am Signorini-Rand $\frac{\partial}{\partial n}u(u - g_S) = 0$ gilt, so lässt sich die obige Ungleichung als

$$\begin{aligned}
(\lambda, I_h u - u_h) &\leq \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (I_h u - I_h g_S) ds_x - \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) ds_x \\
&= \int_{\Gamma_S} \frac{\partial}{\partial n} u ((I_h u - I_h g_S) - (u - g_S)) ds_x \\
&\leq \left\| \frac{\partial}{\partial n} u \right\|_{L_2(\Gamma)} \|(u - g_S) - (I_h u - I_h g_S)\|_{L_2(\Gamma)} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

schreiben. In [13, Lemma 10.3] wird gezeigt, dass für Funktionen $v \in H^2(\Gamma)$ und eine hinreichend glatte Randkurve Γ die Fehlerabschätzung

$$\|v - I_h v\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2 |v|_{H^2(\Gamma)}$$

gilt. Damit lässt sich die Ungleichung (4.7) weiter mit

$$(\lambda, I_h u - u_h) \leq \left\| \frac{\partial}{\partial n} u \right\|_{L_2(\Gamma)} ch^2 |u - g_S|_{H^2(\Gamma)}$$

abschätzen, sofern $u \in H^{5/2}(\Omega)$ und damit $u|_{\Gamma} \in H^2(\Gamma)$ sowie $g_S \in H^2(\Gamma_S)$ ist. Zusammen mit Ungleichung (4.6) sowie der Elliptizität und der Beschränktheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_1^A \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - I_h u) + (\lambda, I_h u - u_h) \\
&\leq c_2^A \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \left\| \frac{\partial}{\partial n} u \right\|_{L_2(\Gamma)} ch^2 |u - g_S|_{H^2(\Gamma)}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Wie in [13, nach Lemma 9.7] beschrieben wird, gilt für eine formreguläre, zulässige und global gleichmäßige Unterteilung \mathcal{T}_N und Funktionen $v \in H^2(\Omega)$ die Fehlerabschätzung

$$\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{c}h |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Damit gilt für Ungleichung (4.8)

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \frac{c_2^A \tilde{c}}{c_1^A} h |u|_{H^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial}{\partial n} u \right\|_{L_2(\Gamma)} \frac{c}{c_1^A} h^2 |u - g_S|_{H^2(\Gamma)} \\
&= c_1 h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + c_2 h^2.
\end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man daraus

$$\left(\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} - \frac{c_1}{2} h \right)^2 \leq \left(\frac{c_1^2}{4} + c_2 \right) h^2.$$

Zieht man daraus die Wurzel, so ergibt sich

$$\left| \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} - \frac{c_1}{2}h \right| \leq h\sqrt{\frac{c_1^2}{4} + c_2},$$

woraus

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \widehat{c}h$$

folgt. Unter den Voraussetzungen, dass die Lösung u der Variationsungleichung (4.1) in $H^{5/2}(\Omega)$ und g_S in $H^2(\Gamma_S)$ liegt, erhält man also die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems.

4.5 Diskrete Variationsungleichung und äquivalente Formulierungen

In diesem Abschnitt werden äquivalente Formulierungen zur diskreten Variationsungleichung (4.2) hergeleitet. Die letzte Formulierung wird dann im folgenden Kapitel für das dort beschriebene Lösungsverfahren benötigt. Sei $\phi \in \mathcal{M}_0^1(\mathcal{T}_N)$ und $\phi = 0$ auf $\Gamma_D \cup \Gamma_S$ und u_h Lösung der Variationsungleichung (4.2). Dann ist sowohl $u_h + \phi$ als auch $u_h - \phi$ ein Element aus der Menge K_M . Setzt man diese Funktionen für v_h in die Variationsungleichung (4.1) ein, so ergibt sich

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx + \int_{\Gamma_N} g_N \phi ds_x.$$

Sei C die Menge der Indizes der Knoten am Signorini-Rand und I die Menge der Indizes der Knoten im Inneren des Gebiets und am Neumann-Rand. Die Basisfunktionen φ_k^1 erfüllen die Bedingungen an ϕ für k aus I , das heißt es gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_k^1 dx = \int_{\Omega} f \varphi_k^1 dx + \int_{\Gamma_N} g_N \varphi_k^1 ds_x \quad \forall k \in I. \quad (4.9)$$

Die diskrete Variationsungleichung (4.2) lässt sich mit Hilfe von (4.3) und (4.5) schreiben als: Suche \underline{u} aus \widetilde{K}_M , sodass

$$(A_M \underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq (\underline{f}, \underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} \in \widetilde{K}_M$$

gilt. Seien die Teilmatrizen A_{II} , A_{IC} , A_{CI} und A_{CC} von A_M definiert als

$$\begin{aligned} A_{II}[i, j] &= A_M[i, j], & i \in I, j \in I, \\ A_{IC}[i, j] &= A_M[i, j], & i \in I, j \in C, \\ A_{CI}[i, j] &= A_M[i, j], & i \in C, j \in I, \\ A_{CC}[i, j] &= A_M[i, j], & i \in C, j \in C. \end{aligned}$$

Bei entsprechender Nummerierung der Knoten lässt sich dann A_M als

$$A_M = \begin{pmatrix} A_{II} & A_{IC} \\ A_{CI} & A_{CC} \end{pmatrix}$$

schreiben. Teilt man auch die Vektoren entsprechend auf, so ergibt sich für die Variationsungleichung

$$\left(\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IC} \\ A_{CI} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{v}_I \\ \underline{v}_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix} \right) \geq \left(\begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{v}_I \\ \underline{v}_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix} \right). \quad (4.10)$$

Wegen Gleichung (4.9) gilt

$$A_{II}\underline{u}_I + A_{IC}\underline{u}_C = \underline{f}_I.$$

Da A_M positiv definit ist, ist auch A_{II} invertierbar und \underline{u}_I lässt sich als

$$\underline{u}_I = A_{II}^{-1}\underline{f}_I - A_{II}^{-1}A_{IC}\underline{u}_C$$

schreiben. Setzt man \underline{u}_I in $A_{CI}\underline{u}_I + A_{CC}\underline{u}_C$ ein, so erhält man

$$A_{CI}\underline{u}_I + A_{CC}\underline{u}_C = A_{CI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I - A_{CI}A_{II}^{-1}A_{IC}\underline{u}_C + A_{CC}\underline{u}_C$$

beziehungsweise

$$A_{CI}\underline{u}_I + A_{CC}\underline{u}_C = (A_{CC} - A_{CI}A_{II}^{-1}A_{IC})\underline{u}_C + A_{CI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I.$$

Dadurch lässt sich die Ungleichung (4.10) reduzieren auf

$$\left((A_{CC} - A_{CI}A_{II}^{-1}A_{IC})\underline{u}_C, \underline{v}_C - \underline{u}_C \right) \geq \left(\underline{f}_C - A_{CI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I, \underline{v}_C - \underline{u}_C \right).$$

Sei \tilde{M} die Anzahl an Knoten am Signorini-Rand und der Vektor \underline{g}_S definiert als $(\underline{g}_S)_k = g_S(x_k)$ für alle Knoten $x_k \in \Gamma_S$. Damit wird \widehat{K}_N als

$$\widehat{K}_N := \left\{ \underline{w} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}, \quad w_k \leq (\underline{g}_S)_k \right\}$$

festgelegt. Sei weiters das Schur-Komplement definiert als

$$S_N := A_{CC} - A_{CI}A_{II}^{-1}A_{IC} \in \mathbb{R}^{\tilde{M} \times \tilde{M}} \quad (4.11)$$

und die rechte Seite als

$$\hat{\underline{f}} := \underline{f}_C - A_{CI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}.$$

Damit lautet die reduzierte Variationsungleichung: Suche \underline{u} aus \widehat{K}_N , sodass

$$(S_N\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq (\hat{\underline{f}}, \underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} \in \widehat{K}_N \quad (4.12)$$

gilt. Dabei ist S_N positiv definit, da das Schurkomplement positiver definiten Matrizen wieder positiv definit ist.

Lemma 4.4. Eine zu Variationsungleichung (4.12) äquivalente Formulierung ist gegeben durch: Suche $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ und $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$, sodass

$$\begin{aligned} \hat{f} - S_N \underline{u} &= \underline{\lambda}, \\ \underline{\lambda} &\geq 0, \\ \underline{u} &\leq \underline{g}_S, \\ (\underline{\lambda}, \underline{g}_S - \underline{u}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

komponentenweise gilt.

Beweis. Geht man von der Variationsungleichung (4.12) aus, so erhält man

$$0 \geq (\hat{f} - S_N \underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = (\underline{\lambda}, \underline{v} - \underline{u}) = \sum_{i=1}^{\tilde{M}} \lambda_i (v_i - u_i).$$

Gelte $v_j < u_j \leq (g_S)_j$ für ein j und sonst $v_i = u_i$. Damit ist $\lambda_j (v_j - u_j) \leq 0$ und daher $\lambda_j \geq 0$. Setzt man $\underline{v} = \underline{g}_S$, so ergibt sich wegen $(g_S)_i - u_i \geq 0$

$$0 \geq \sum_{i=1}^{\tilde{M}} \lambda_i ((g_S)_i - u_i) \geq 0$$

und daher

$$(\underline{\lambda}, \underline{g}_S - \underline{u}) = 0.$$

Damit ist eine Richtung gezeigt. Um die andere Richtung zu zeigen, geht man von der Formulierung (4.13) aus. Man erhält für v aus \widehat{K}_N

$$(\hat{f} - S_N \underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = (\underline{\lambda}, \underline{v} - \underline{g}_S + \underline{g}_S - \underline{u}) = (\underline{\lambda}, \underline{v} - \underline{g}_S) + (\underline{\lambda}, \underline{g}_S - \underline{u}) = (\underline{\lambda}, \underline{v} - \underline{g}_S) \leq 0.$$

Die Ungleichung gilt, da $\lambda_i \geq 0$ und $v_i - (g_S)_i \leq 0$ für v aus \widehat{K}_N ist. Damit ist auch die zweite Richtung gezeigt und die Äquivalenz bewiesen. \square

Bemerkung 4.1. Die Formulierung (4.13) entspricht dem aus der Optimierung bekannten linearen Komplementaritätsproblem.

Lemma 4.5. Die komponentenweisen Bedingungen $\underline{\lambda} \geq 0$, $\underline{u} \leq \underline{g}_S$ und $(\underline{\lambda}, \underline{g}_S - \underline{u}) = 0$ aus der Formulierung (4.13) sind äquivalent zu

$$\underline{\lambda} - \max\{\underline{0}, \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)\} = \underline{0} \quad \forall c > 0. \tag{4.14}$$

Die Gleichung und der Maximum-Operator sind dabei komponentenweise zu verstehen.

Beweis. Geht man von den drei Bedingungen aus, so folgt aus $\lambda_i ((g_S)_i - u_i) = 0$, dass $\lambda_i = 0$ oder $(g_S)_i = u_i$ ist. Sei zuerst $\lambda_i = 0$. Aus $\underline{u} \leq \underline{g}_S$ und $c > 0$ folgt $c(u_i - (g_S)_i) \leq 0$ und die Gleichung (4.14) ist erfüllt. Sei jetzt $(g_S)_i = u_i$. Da $\lambda_i \geq 0$ gilt, ist die Gleichung (4.14) ebenfalls erfüllt. Gelte umgekehrt die Gleichung (4.14). Es ist offensichtlich, dass $\lambda \geq 0$ sein muss. Sei $\lambda_i > 0$. Dann muss $c(u_i - (g_S)_i) = 0$ und damit $u_i = (g_S)_i$ sein. Ist $\lambda_i = 0$, so muss $c(u_i - (g_S)_i) \leq 0$ sein und damit $u_i \leq (g_S)_i$. Somit sind die drei Bedingungen erfüllt. \square

Die Formulierung (4.13) lässt sich also auch schreiben als: Suche $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ und $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$, sodass

$$\begin{aligned} \underline{\hat{f}} - S_N \underline{u} &= \underline{\lambda}, \\ \underline{\lambda} - \max\{\underline{0}, \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)\} &= \underline{0} \quad \forall c > 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

gilt.

5 Halbglattes Newton-Verfahren

In diesem Kapitel wird zunächst ein halbglattes Newton-Verfahren eingeführt und gezeigt, unter welchen Bedingungen es konvergiert. Anschließend wird dieses Verfahren auf die Formulierung (4.15) angewandt und gezeigt, dass es einer Aktiven-Mengen-Strategie entspricht. Weiters wird die Konvergenz untersucht. Basis für dieses Kapitel ist [9] und [10].

5.1 Newton-Iteration

Definition 5.1. [9, Definition 1.]

Seien X und Z Banach-Räume und U eine offene Teilmenge von X . Die Abbildung $F : X \rightarrow Z$ heißt Newton-differenzierbar auf U , wenn eine Familie von Abbildungen $G : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ existiert mit $\{\|G(x)\|_{X \rightarrow Z} : x \in U\}$ beschränkt und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|F(x+h) - F(x) - G(x+h)h\|_Z = 0 \quad (5.1)$$

für alle $x \in U$, wobei $h \in X$ ist.

Definition 5.2. [9, Theorem 1.1]

Sei x^* Lösung von $F(x) = 0$, F sei Newton-differenzierbar in einer offenen Umgebung U von x^* und $\{\|G(x)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} : x \in U\}$ sei beschränkt. Das halbglatte Newton-Verfahren ist dann durch die Iteration

$$x^{k+1} = x^k - G(x^k)^{-1}F(x^k)$$

gegeben.

Satz 5.3. [9, Theorem 1.1]

Das in Definition 5.2 beschriebene halbglatte Newton-Verfahren konvergiert superlinear gegen die Lösung x^* der Gleichung $F(x) = 0$, vorausgesetzt der Startvektor x^0 liegt hinreichend nahe bei der Lösung x^* , das heißt $\|x^0 - x^*\|_X$ ist klein genug.

Beweis. Ausgehend von der Newton-Iteration gilt für $x^k \in U$

$$x^{k+1} - x^* = (x^k - x^*) - G(x^k)^{-1}F(x^k) = G(x^k)^{-1} \left(G(x^k)(x^k - x^*) - F(x^k) \right).$$

Berücksichtigt man, dass $F(x^*) = 0$ ist, so ergibt sich wiederum für $x^k \in U$

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|_X &\leq \|G(x^k)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \|G(x^k)(x^k - x^*) - F(x^k)\|_Z \\ &= \|G(x^k)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \|F(x^k) - F(x^*) - G(x^k)(x^k - x^*)\|_Z. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sei $B(x^*, r) \subset U$ eine Kugel mit Radius r und Zentrum x^* . Weiters sei M so gewählt, dass $\|G(x)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq M$ für alle $x \in B(x^*, r)$ gilt. Wegen (5.1) gibt es daher für jedes $\eta \in (0, 1)$ ein $\rho \in (0, r)$, so dass

$$\|F(x^* + h) - F(x^*) - G(x^* + h)h\|_Z < \frac{\eta}{M} \|h\|_X \quad \forall \|h\|_X < \rho.$$

Setzt man $h^k := x^k - x^*$, so erhält man zusammen mit (5.2)

$$\|x^{k+1} - x^*\|_X \leq \|G(x^k)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \|F(x^* + h^k) - F(x^*) - G(x^* + h^k)h^k\|_Z \leq \eta \|h^k\|_X \quad (5.3)$$

vorausgesetzt, dass $\|h^k\|_X < \rho$ hält. Sei nun $\|x^0 - x^*\|_X$ klein genug, dass heißt

$$\|x^0 - x^*\|_X = h^0 < \rho < r.$$

Dann ist $x^0 \in B(x^*, r)$ und somit auch $x^0 \in U$. Durch Induktion gilt das wegen (5.3) auch für alle weiteren x^k . Damit ist die Iteration wohldefiniert und da $\eta \in (0, 1)$ beliebig gewählt werden kann, ist die Konvergenz superlinear. \square

Das folgende Lemma zeigt, dass die Verknüpfung einer Newton-differenzierbaren Abbildung mit einer affinen Abbildung wieder Newton-differenzierbar ist und es wird ein verallgemeinerter Gradient angegeben.

Lemma 5.4. [10, Proposition 3.2.]

Seien X, Y und Z Banach-Räume und U eine offene Teilmenge von X . Die Abbildung $F_2 : Y \rightarrow X$ sei durch $F_2(y) = By + b$ gegeben mit $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ und $b \in X$. Sei weiters $F_1 : X \rightarrow Z$ Newton-differenzierbar mit verallgemeinertem Gradient G . Ist $F_2^{-1}(U)$ nichtleer, dann ist $F = F_1 \circ F_2$ Newton-differenzierbar auf $F_2^{-1}(U)$ und der verallgemeinerte Gradient ist durch $\tilde{G}(y) = G(By + b)B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ gegeben.

Beweis. Sowohl $G(x)$ für $x \in U$ als auch B sind linear, daher ist auch $\tilde{G}(y)$ linear für $y \in F_2^{-1}(U)$. Das selbe gilt für die Beschränktheit. Für $y \in F_2^{-1}(U)$ gilt $u := By + b \in U$ und für $h \in Y$ gilt $\tilde{h} := Bh \in X$. Da F_1 Newton-differenzierbar ist mit verallgemeinertem Gradienten G , gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_Y} \|F(y + h) - F(y) - \tilde{G}(y)h\|_Z &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_Y} \|F_1(u + \tilde{h}) - F_1(u) - G(u)\tilde{h}\|_Z \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|B\|}{\|\tilde{h}\|_X} \|F_1(u + \tilde{h}) - F_1(u) - G(u)\tilde{h}\|_Z \\ &= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{\|B\|}{\|\tilde{h}\|_X} \|F_1(u + \tilde{h}) - F_1(u) - G(u)\tilde{h}\|_Z = 0. \end{aligned}$$

\square

5.2 Newton-Verfahren für das diskretisierte Signorini-Randwertproblem

In diesem Abschnitt wird das halbglatte Newton-Verfahren aus Definition 5.2 auf die Formulierung (4.15) angewandt. Dazu wird zunächst ein verallgemeinerter Gradient hergeleitet. Anschließend wird gezeigt, dass die Newton-Iteration für diesen verallgemeinerten Gradienten konvergiert.

Um nun das halbglatte Newton-Verfahren auf die Formulierung (4.15) anwenden zu können, definiert man eine Abbildung $F : \mathbb{R}^{\tilde{M}} \times \mathbb{R}^{\tilde{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{M}} \times \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ als

$$F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} S_N \underline{u} + \underline{\lambda} - \hat{\underline{f}} \\ \underline{\lambda} - \max\{\underline{0}, \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)\} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Damit entspricht die Gleichung $F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$ der Formulierung (4.15). Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Formulierung (4.15) besitzt die Gleichung $F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$ eine eindeutige Lösung $(\underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$. Nun wird ein verallgemeinerter Gradient für die Abbildung (5.4) benötigt. Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass die Abbildung

$$(\underline{u}, \underline{\lambda}) \rightarrow \max\{\underline{0}, \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)\}$$

Newton-differenzierbar ist und ein verallgemeinerter Gradient angegeben werden kann.

Definition 5.5. Sei $\underline{\delta} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ ein beliebiger Vektor. Die Abbildung $G_{\underline{\delta}} : \mathbb{R}^{\tilde{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}$ wird definiert als

$$G_{\underline{\delta}}(\underline{y}) = \text{diag}(g_1(y_1), \dots, g_{\tilde{M}}(y_{\tilde{M}})),$$

wobei $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0, \\ 1 & \text{für } z > 0, \\ \delta_i & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

gegeben ist.

Lemma 5.6. [9, Lemma 3.1.]

Die Abbildung $\underline{y} \rightarrow \max\{0, \underline{y}\}$ ist Newton-differenzierbar und $G_{\underline{\delta}}$ ist ein verallgemeinerter Gradient.

Beweis. $G_{\underline{\delta}}(\underline{y})$ entspricht einer linearen Abbildung und $\{\|G_{\underline{\delta}}(\underline{y})\| : \underline{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}\}$ ist beschränkt. Gelte

$$\|\underline{h}\|_{\infty} = \max\{|h_1|, \dots, |h_{\tilde{M}}|\} < \min\{|y_i| : y_i \neq 0\} \quad (5.5)$$

und sei

$$D_i(\underline{y}, \underline{h}) := |\max\{0, y_i + h_i\} - \max\{0, y_i\} - g_i(y_i + h_i)h_i|.$$

Ist $y_i + h_i < 0$, so ist $g_i(y_i + h_i) = 0$. Wegen (5.5) gilt auch $y_i \leq 0$ und damit ist $D_i(\underline{y}, \underline{h}) = 0$. Für $y_i + h_i = 0$ ist $g_i(y_i + h_i) = \delta_i$. Wegen (5.5) gilt $y_i = 0$ und $h_i = 0$

und damit ist wieder $D_i(\underline{y}, \underline{h}) = 0$. Der letzte Fall ist, dass $y_i + h_i > 0$ gilt. Dann ist $g_i(y_i + h_i) = 1$ und wegen (5.5) ist $y_i \geq 0$. Damit ist auch in diesem Fall $D_i(\underline{y}, \underline{h}) = 0$. Gilt also (5.5), so ist

$$\|\max\{0, \underline{y} + \underline{h}\} - \max\{0, \underline{y}\} - G_{\underline{\delta}}(\underline{y} + \underline{h})\underline{h}\| = 0$$

und daher ist die Bedingung (5.1) erfüllt. \square

Verwendet man Lemma 5.4 und Lemma 5.6, so lässt sich nun ein verallgemeinerter Gradient für die Abbildung

$$(\underline{u}, \underline{\lambda}) \rightarrow \max\{0, \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)\}$$

finden. Sei $G' := G_{\underline{0}}$, also die Abbildung aus Definition 5.5, wobei der Vektor $\underline{\delta}$ der Null-Vektor ist. Dann ist G' wegen Lemma 5.6 ein verallgemeinerter Gradient der Abbildung $F_1(\underline{y}) = \max\{0, \underline{y}\}$. Sei $F_2(\underline{u}, \underline{\lambda}) = \underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)$, dann kann F_2 auch dargestellt werden als

$$F_2(\underline{u}, \underline{\lambda}) = B \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} cI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} - c\underline{g}_S.$$

Lemma 5.4 zeigt, dass $F_1 \circ F_2$ Newton-differenzierbar ist und einen verallgemeinerten Gradienten \tilde{G} mit

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\underline{u}, \underline{\lambda}) &= G'(F_2(\underline{u}, \underline{\lambda}))B = G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) \begin{pmatrix} cI & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) & G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt. Damit ist folgendes Lemma gezeigt.

Lemma 5.7. *Die Abbildung (5.4) ist Newton-differenzierbar und ein verallgemeinerter Gradient G kann als*

$$G(\underline{u}, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} S_N & I \\ -cG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) & I - G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

angegeben werden.

Für verschiedene Betrachtungen ist es praktisch, wenn die Vektoren \underline{u} und $\underline{\lambda}$ und damit auch die Matrix $G(\underline{u}, \underline{\lambda})$ speziell angeordnet sind.

Definition 5.8. *Die Menge \mathcal{I} der inaktiven Indizes sei definiert als*

$$\mathcal{I} := \{i : \lambda_i + c(\underline{u} - \underline{g}_S)_i \leq 0\}$$

und die Menge \mathcal{A} der aktiven Indizes sei definiert als

$$\mathcal{A} := \{i : \lambda_i + c(\underline{u} - \underline{g}_S)_i > 0\}.$$

Sei nun P eine Permutationsmatrix, die den Vektor \underline{u} (und damit auch den Vektor $\underline{\lambda}$) so umordnet, dass zuerst die inaktiven und dann die aktiven Indizes auftreten. Es gilt also

$$P\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_{\mathcal{I}} \\ \underline{u}_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda}_{\mathcal{I}} \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}.$$

Hat man ein Gleichungssystem $G(\underline{u}, \underline{\lambda})\underline{y} = \underline{z}$ mit beliebigen Vektoren $\underline{y} \in \mathbb{R}^{2\tilde{M}}$ und $\underline{z} \in \mathbb{R}^{2\tilde{M}}$, so lässt sich dieses auch als

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} G(\underline{u}, \underline{\lambda})\underline{y} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \underline{z} \quad (5.7)$$

schreiben. Da die Inverse einer Permutationsmatrix gleich der Transponierten ist, also $PP^\top = I$ gilt, lässt sich das Gleichungssystem auch als

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} G(\underline{u}, \underline{\lambda}) \begin{pmatrix} P^\top & 0 \\ 0 & P^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \underline{y} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \underline{z} \quad (5.8)$$

ausdrücken. Setzt man für $G(\underline{u}, \underline{\lambda})$ ein und setzt

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{y}^1, \underline{y}^2 \in \mathbb{R}^{\tilde{M}} \quad \text{und} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{z}^1 \\ \underline{z}^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{z}^1, \underline{z}^2 \in \mathbb{R}^{\tilde{M}},$$

so erhält man

$$\begin{pmatrix} PS_N P^\top & I \\ -cPG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S))P^\top & I - PG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S))P^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\underline{y}^1 \\ P\underline{y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\underline{z}^1 \\ P\underline{z}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Die Matrix $G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S))$ ist eine Diagonalmatrix und die Einträge auf der Diagonalen sind 0 für einen inaktiven Index und 1 für einen aktiven Index. Somit gilt

$$PG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S))P^\top = \begin{pmatrix} 0_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}.$$

Schreibt man $PS_N P^\top$ noch als

$$(PS_N P^\top) = \begin{pmatrix} (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{A}} \\ (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \end{pmatrix},$$

so erhält man aus dem Gleichungssystem (5.9)

$$\begin{pmatrix} (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{A}} & I_{\mathcal{I}} & 0 \\ (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & 0 & I_{\mathcal{A}} \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & -cI_{\mathcal{A}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{y}_{\mathcal{I}}^1 \\ \underline{y}_{\mathcal{A}}^1 \\ \underline{y}_{\mathcal{I}}^2 \\ \underline{y}_{\mathcal{A}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_{\mathcal{I}}^1 \\ \underline{z}_{\mathcal{A}}^1 \\ \underline{z}_{\mathcal{I}}^2 \\ \underline{z}_{\mathcal{A}}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Dies ist also nur eine Umordnung des Gleichungssystems $G(\underline{u}, \underline{\lambda})\underline{y} = \underline{z}$. Aus Lemma 5.7 und Satz 5.3 lässt sich nun die Konvergenz des halbglaten Newton-Verfahrens für die Gleichung (5.4) zeigen.

Satz 5.9. [9, Theorem 3.1]

Die Newton-Iteration

$$\begin{pmatrix} \underline{u}^{k+1} \\ \underline{\lambda}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}^k \\ \underline{\lambda}^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_N & I \\ -cG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) & I - G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) \end{pmatrix}^{-1} F(\underline{u}^k, \underline{\lambda}^k) \quad (5.11)$$

konvergiert superlinear gegen die eindeutige Lösung $(\underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$ der Gleichung $F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$, sofern die Anfangsvektoren $(\underline{u}^0, \underline{\lambda}^0)$ nahe genug bei der Lösung liegen.

Beweis. Um Satz 5.3 anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass $G(\underline{u}, \underline{\lambda})^{-1}$ existiert und $\|G(\underline{u}, \underline{\lambda})^{-1}\|_2$ unabhängig von \underline{u} und $\underline{\lambda}$ beschränkt ist. Seien $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ und $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{\tilde{M}}$ beliebig aber fix, sowie \mathcal{I} und \mathcal{A} die Indexmengen aus Definition 5.8. Diese sind von den Vektoren \underline{u} und $\underline{\lambda}$ abhängig. Es gibt allerdings nur endlich viele unterschiedliche Kombinationen der Indexmengen. Für den Spezialfall $\mathcal{A} = \emptyset$ erhält man

$$G(\underline{u}, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} S_N & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G(\underline{u}, \underline{\lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} S_N^{-1} & -S_N^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

wie sich durch Nachrechnen sehen lässt. Für den Spezialfall $\mathcal{I} = \emptyset$ ergibt sich

$$G(\underline{u}, \underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} S_N & I \\ -cI & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G(\underline{u}, \underline{\lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}I \\ I & \frac{1}{c}S_N \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Sei weiters $\underline{z} \in \mathbb{R}^{2\tilde{M}}$ beliebig aber fix. Um die Existenz der Inversen zu beweisen, wird gezeigt, dass es einen eindeutigen Vektor $\underline{y} \in \mathbb{R}^{2\tilde{M}}$ gibt, der $G(\underline{u}, \underline{\lambda})\underline{y} = \underline{z}$ erfüllt. Wie vor dem Satz gezeigt wurde, lässt sich dieses Gleichungssystem auch als

$$\begin{pmatrix} (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{A}} & I_{\mathcal{I}} & 0 \\ (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & 0 & I_{\mathcal{A}} \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & -cI_{\mathcal{A}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{y}_{\mathcal{I}}^1 \\ \underline{y}_{\mathcal{A}}^1 \\ \underline{y}_{\mathcal{I}}^2 \\ \underline{y}_{\mathcal{A}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_{\mathcal{I}}^1 \\ \underline{z}_{\mathcal{A}}^1 \\ \underline{z}_{\mathcal{I}}^2 \\ \underline{z}_{\mathcal{A}}^2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

schreiben. Die dritte Zeile von (5.12) ergibt $\underline{y}_{\mathcal{I}}^2 = \underline{z}_{\mathcal{I}}^2$. Aus der vierten Zeile von (5.12) erhält man $-c\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 = \underline{z}_{\mathcal{A}}^2$ und damit $\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 = -\frac{1}{c}\underline{z}_{\mathcal{A}}^2$. Die erste Zeile von (5.12) ergibt

$$(S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}}\underline{y}_{\mathcal{I}}^1 + (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{A}}\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 + \underline{y}_{\mathcal{I}}^2 = \underline{z}_{\mathcal{I}}^1.$$

Da S_N positiv definit ist und PS_NP^\top die selben Eigenwerte hat wie S_N , ist auch PS_NP^\top positiv definit. Daher ist $(S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ invertierbar und man erhält

$$\underline{y}_{\mathcal{I}}^1 = (S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{I}}^{-1} \left[-(S_N)_{\mathcal{I}\mathcal{A}}\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 - \underline{y}_{\mathcal{I}}^2 + \underline{z}_{\mathcal{I}}^1 \right],$$

wobei $\underline{y}_{\mathcal{I}}^2$ und $\underline{y}_{\mathcal{A}}^1$ schon bestimmt sind. Aus der zweiten Zeile von (5.12) erhält man schließlich

$$(S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{I}}\underline{y}_{\mathcal{I}}^1 + (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 + \underline{y}_{\mathcal{A}}^2 = \underline{z}_{\mathcal{A}}^1$$

und somit

$$\underline{y}_{\mathcal{A}}^2 = -(S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{I}}\underline{y}_{\mathcal{I}}^1 - (S_N)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}\underline{y}_{\mathcal{A}}^1 + \underline{z}_{\mathcal{A}}^1.$$

Auch hier sind alle Vektoren auf der rechten Seite bekannt. Damit ist der Vektor \underline{y} eindeutig bestimmt und die Invertierbarkeit von $G(\underline{u}, \underline{\lambda})$ ist gezeigt. Es bleibt noch die Beschränktheit der Inversen zu beweisen. Da für alle \underline{u} und $\underline{\lambda}$ und damit auch für alle möglichen Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{A} die Inverse von $G(\underline{u}, \underline{\lambda})$ existiert, gilt

$$\|\underline{y}\|_2 \leq \|G(\underline{u}, \underline{\lambda})^{-1}\|_2 \|\underline{z}\|_2 = c(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \|\underline{z}\|_2.$$

Die Konstante $c(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ist allerdings von den Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{A} und damit von \underline{u} und $\underline{\lambda}$ abhängig. Da es aber nur endlich viele Kombinationen der Indexmengen gibt, lässt sich eine Konstante \tilde{c} finden, für die

$$\|\underline{y}\|_2 \leq \tilde{c} \|\underline{z}\|_2$$

gilt. Die Konstante \tilde{c} ist aber von der Diskretisierung des Gebietes abhängig. \square

5.3 Aktive-Mengen-Strategie

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das halbglatte Newton-Verfahren (5.11) einer Aktiven-Mengen-Strategie entspricht.

Die Newton-Iteration (5.11) lässt sich auch als

$$\begin{pmatrix} S_N & I \\ -cG'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) & I - G'(\underline{\lambda} + c(\underline{u} - \underline{g}_S)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}^k - \underline{u}^{k+1} \\ \underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1} \end{pmatrix} = F(\underline{u}^k, \underline{\lambda}^k) \quad (5.13)$$

schreiben. Seien nun die Indexmengen aus Definition 5.8 für die k -te Iteration als

$$\mathcal{I}_k = \{i : \lambda_i^k + c(\underline{u}^k - \underline{g}_S)_i \leq 0\}$$

und

$$\mathcal{A}_k = \{i : \lambda_i^k + c(\underline{u}^k - \underline{g}_S)_i > 0\}$$

gegeben. Ordnet man die Matrizen und Vektoren so an, dass zuerst die inaktiven und danach die aktiven Indizes auftreten, so lässt sich Gleichung (5.13) als

$$\begin{pmatrix} (S_N)_{\mathcal{I}_k\mathcal{I}_k} & (S_N)_{\mathcal{I}_k\mathcal{A}_k} & I_{\mathcal{I}_k} & 0 \\ (S_N)_{\mathcal{A}_k\mathcal{I}_k} & (S_N)_{\mathcal{A}_k\mathcal{A}_k} & 0 & I_{\mathcal{A}_k} \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{I}_k} & 0 \\ 0 & -cI_{\mathcal{A}_k} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} \\ (\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{A}_k} \\ (\underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} \\ (\underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1})_{\mathcal{A}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S_N \underline{u}^k + \underline{\lambda}^k - \underline{\hat{f}})_{\mathcal{I}_k} \\ (S_N \underline{u}^k + \underline{\lambda}^k - \underline{\hat{f}})_{\mathcal{A}_k} \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{I}_k}^k \\ -c(\underline{u}^k - \underline{g}_S)_{\mathcal{A}_k} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

schreiben. Betrachtet man die erste Zeile in Gleichung (5.13), so ergibt sich

$$S_N(\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1}) + \underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1} = S_N \underline{u}^k + \underline{\lambda}^k - \underline{\hat{f}}$$

und damit

$$S_N \underline{u}^{k+1} + \underline{\lambda}^{k+1} = \underline{\hat{f}}.$$

Die dritte Zeile in Gleichung (5.14) ergibt

$$(\underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} = \underline{\lambda}_{\mathcal{I}_k}^k$$

und daher

$$\lambda_i^{k+1} = 0 \quad \text{für } i \in \mathcal{I}_k.$$

Aus der vierten Zeile von Gleichung (5.14) erhält man

$$-c(\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{A}_k} = -c(\underline{u}^k - \underline{g}_S)_{\mathcal{A}_k}$$

und daher

$$u_i^{k+1} = (g_S)_i \quad \text{für } i \in \mathcal{A}_k.$$

Damit entspricht das halbglatte Newton-Verfahren aus Satz 5.9 der folgenden Aktiven-Mengen-Strategie:

Algorithmus 5.10. *Aktive-Mengen-Strategie*

- (1) Initialisiere \underline{u}^0 und $\underline{\lambda}^0$. Setze $k = 0$.
- (2) Setze $\mathcal{I}_k = \{i : \lambda_i^k + c(\underline{u} - \underline{g}_S)_i \leq 0\}$ und $\mathcal{A}_k = \{i : \lambda_i^k + c(\underline{u} - \underline{g}_S)_i > 0\}$.
- (3) Löse

$$\begin{aligned} S_N \underline{u}^{k+1} + \underline{\lambda}^{k+1} &= \hat{\underline{f}}, \\ u_i^{k+1} &= (g_S)_i \quad \text{für } i \in \mathcal{A}_k, \\ \lambda_i^{k+1} &= 0 \quad \text{für } i \in \mathcal{I}_k. \end{aligned}$$

- (4) Stopp oder setze $k = k + 1$ und gehe zu (2).

5.4 Konvergenz für beliebige Anfangsvektoren

In Satz 5.9 wurde gezeigt, dass das halbglatte Newton-Verfahren (5.11) superlinear gegen die eindeutige Lösung konvergiert, sofern die gewählten Startvektoren nahe genug bei der Lösung liegen. Unter gewissen Voraussetzungen an die Matrix S_N lässt sich die Konvergenz auch für beliebige Anfangsvektoren \underline{u}^0 und $\underline{\lambda}^0$ zeigen.

Definition 5.11. *Eine Hauptuntermatrix einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Matrix, die aus A hervorgeht, indem man sich eine Indexmenge $J \subset \{1, \dots, n\}$ vorgibt, und für alle $i \in J$ die i -te Zeile und i -te Spalte von A streicht.*

Definition 5.12. *Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Z_n -Matrix, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonale liegen, nichtpositiv sind. Das heißt es gilt $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$.*

Satz 5.13. [6, Theorem 5.1]

Sei A eine Z_n -Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist regulär und $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).
2. Alle Determinanten der Hauptuntermatrizen von A sind positiv.
3. Es existiert ein Vektor $x > 0$, so dass $Ax > 0$ gilt.

Beweis. Siehe [6]. □

Definition 5.14. Eine Z_n -Matrix A , die eine der Bedingungen aus Satz 5.13 erfüllt heißt M -Matrix.

Lemma 5.15. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M -Matrix und $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Permutationsmatrix. Dann ist PAP^\top wieder eine M -Matrix.

Beweis. A ist eine Z_n -Matrix und bei der Transformation PAP^\top bleiben die Elemente der Hauptdiagonalen von A auf der Hauptdiagonalen. Damit ist auch PAP^\top eine Z_n -Matrix. Da A eine M -Matrix ist, gilt die dritte Bedingung von Satz 5.13. Es gibt also eine Vektor $x > 0$, so dass $Ax > 0$ ist. Daher gilt auch

$$PAx = PAP^\top Px > 0.$$

Da auch $Px > 0$ ist, ist PAP^\top eine M -Matrix. □

Satz 5.16. [6, Theorem 5.13]

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M -Matrix. Dann ist jede Hauptuntermatrix von A eine M -Matrix. Sei A_{11} eine Hauptuntermatrix von A . Dann ist das Schurkomplement

$$[A/A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

ebenfalls eine M -Matrix.

Beweis. Siehe [6] □

Satz 5.17. [9, Theorem 3.2]

Sei S_N eine M -Matrix. Dann konvergiert die Newton-Iteration (5.11) für beliebige Anfangsvektoren $(\underline{u}^0, \underline{\lambda}^0)$ gegen die eindeutige Lösung $(\underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$ der Gleichung $F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$. Weiters gilt $\underline{u}^* \leq \underline{u}^{k+1} \leq \underline{u}^k$ für $k \geq 1$ und $\underline{u}^k \leq \underline{g}_S$ für $k \geq 2$.

Beweis. Da S_N eine M -Matrix ist, ist wegen Lemma 5.15 auch PS_NP^\top für jede Permutationsmatrix P eine M -Matrix. $(S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k}$ ist eine Hauptuntermatrix von PS_NP^\top und wegen Satz 5.16 eine M -Matrix. Da PS_NP^\top eine M -Matrix ist, sind alle Einträge von $(S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{A}_k}$ nichtpositiv. Unter Berücksichtigung der ersten Bedingung von Satz 5.13 erhält man damit

$$(S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k}^{-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad (S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k}^{-1} (S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{A}_k} \leq 0 \quad (5.15)$$

für jede Aufteilung \mathcal{I}_k und \mathcal{A}_k .

Zuerst wird die Monotonie von \underline{u}^k gezeigt. Für $k \geq 1$ und alle $i \in \{1, \dots, \widetilde{M}\}$ gilt

$$\lambda_i^k = 0 \quad \text{oder} \quad u_i^k = (g_S)_i, \quad (5.16)$$

was man in Algorithmus 5.10 sehen kann. Sei nun $i \in \mathcal{A}_k$. Damit ist

$$\lambda_i^k + c(u_i^k - (g_S)_i) > 0 \quad \text{und} \quad u_i^{k+1} = (g_S)_i.$$

Gilt die zweite Bedingung von (5.16), so ist $u_i^k = (g_S)_i = u_i^{k+1}$. Gilt die erste Bedingung von (5.16), so folgt $u_i^k > (g_S)_i = u_i^{k+1}$. Zusammen ergibt sich also $u_i^k \geq u_i^{k+1}$ für $i \in \mathcal{A}_k$ und $k \geq 1$. Sei nun $i \in \mathcal{I}_k$, das heißt

$$\lambda_i^k + c(u_i^k - (g_S)_i) \leq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i^{k+1} = 0.$$

Gilt die erste Bedingung von (5.16), so folgt $\lambda_i^k - \lambda_i^{k+1} = 0$. Gilt die zweite Bedingung von (5.16), so folgt $\lambda_i^k \leq 0$ und damit $\lambda_i^k - \lambda_i^{k+1} \leq 0$. Zusammen erhält man also $\lambda_i^k - \lambda_i^{k+1} \leq 0$ für $i \in \mathcal{I}_k$ und $k \geq 1$. Die erste Zeile von Gleichung (5.14) ergibt für $k \geq 1$

$$(S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k} (\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} + (S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{A}_k} (\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{A}_k} + (\underline{\lambda}^k - \underline{\lambda}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} = 0,$$

da die rechte Seite für $k \geq 1$ Null ist, wie man an Algorithmus 5.10 sehen kann. Daraus erhält man unter Berücksichtigung von (5.15)

$$(\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{I}_k} = -(S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k}^{-1} (S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{A}_k} (\underline{u}^k - \underline{u}^{k+1})_{\mathcal{A}_k} - (S_N)_{\mathcal{I}_k \mathcal{I}_k}^{-1} (\lambda_i^k - \lambda_i^{k+1})_{\mathcal{I}_k} \geq 0.$$

Damit ist $u_i^k \geq u_i^{k+1}$ also auch für $i \in \mathcal{I}_k$ und die Monotonie von \underline{u}^k gezeigt.

Als nächstes wird gezeigt, dass die Ungleichung $\underline{u}^k \leq \underline{g}_S$ für $k \geq 2$ gilt. Aufgrund der Monotonie von \underline{u}^k genügt es, die Ungleichung für $k = 2$ zu zeigen. Sei die Indexmenge V definiert als

$$V := \{i : u_i^1 > (g_S)_i\}.$$

Für $i \in V$ gilt wegen (5.16) $\lambda_i^k + c(u_i^k - (g_S)_i) > 0$ und damit $i \in \mathcal{A}_k$. Daher ist $u_i^2 = (g_S)_i$. Ist $i \notin V$, also $u_i^1 \leq (g_S)_i$, so ist wegen der Monotonie auch $u_i^2 \leq (g_S)_i$.

Als nächstes wird die Ungleichung $\underline{u}^* \leq \underline{u}^k$ für $k \geq 1$ gezeigt. Die Gleichung

$$S_N \underline{u} + \underline{\lambda} = \widehat{\underline{f}}$$

gilt sowohl für die eindeutige Lösung $(\underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$ als auch für $(\underline{u}^k, \underline{\lambda}^k)$ mit $k \geq 1$. Berücksichtigt man noch Algorithmus 5.10, so erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{f}}_{\mathcal{I}_{k-1}} &= (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{I}_{k-1}} \underline{u}_{\mathcal{I}_{k-1}}^* + (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{A}_{k-1}} \underline{u}_{\mathcal{A}_{k-1}}^* + \lambda_{\mathcal{I}_{k-1}}^* \\ &= (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{I}_{k-1}} \underline{u}_{\mathcal{I}_{k-1}}^k + (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{A}_{k-1}} \underline{u}_{\mathcal{A}_{k-1}}^k + \lambda_{\mathcal{I}_{k-1}}^k \\ &= (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{I}_{k-1}} \underline{u}_{\mathcal{I}_{k-1}}^k + (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1} \mathcal{A}_{k-1}} (g_S)_{\mathcal{A}_{k-1}} \end{aligned}$$

und damit

$$(S_N)_{\mathcal{I}_{k-1}\mathcal{I}_{k-1}}(\underline{u}^k - \underline{u}^*)_{\mathcal{I}_{k-1}} = (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1}\mathcal{A}_{k-1}}(\underline{u}^* - \underline{g}_S)_{\mathcal{A}_{k-1}} + \lambda_{\mathcal{I}_{k-1}}^*.$$

Aus dieser Gleichung erhält man zusammen mit (5.15)

$$(\underline{u}^k - \underline{u}^*)_{\mathcal{I}_{k-1}} = (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1}\mathcal{I}_{k-1}}^{-1}(S_N)_{\mathcal{I}_{k-1}\mathcal{A}_{k-1}}(\underline{u}^* - \underline{g}_S)_{\mathcal{A}_{k-1}} + (S_N)_{\mathcal{I}_{k-1}\mathcal{I}_{k-1}}^{-1}\lambda_{\mathcal{I}_{k-1}}^* \geq 0,$$

da für die Lösung $\lambda^* \geq 0$ und $\underline{u}^* \leq \underline{g}_S$ gilt. Damit ist $\underline{u}_{\mathcal{I}_{k-1}}^k \geq \underline{u}_{\mathcal{I}_{k-1}}^*$ für $k \geq 1$ gezeigt. Weiters gilt $\underline{u}_{\mathcal{A}_{k-1}}^k = (\underline{g}_S)_{\mathcal{A}_{k-1}}$ und wegen $\underline{u}^* \leq \underline{g}_S$ also $\underline{u}_{\mathcal{A}_{k-1}}^k \geq \underline{u}_{\mathcal{A}_{k-1}}^*$. Zusammen ist damit $\underline{u}^k \geq \underline{u}^*$ für $k \geq 1$ gezeigt.

Als nächstes wird gezeigt, dass es einen Index k_0 gibt, so dass $\lambda^k \geq 0$ für $k \geq k_0$ ist. Angenommen, es gibt für einen Index i einen Schritt $\widehat{k} \geq 1$, so dass $\lambda_i^{\widehat{k}} < 0$ ist. Dann folgt daraus, dass $i \in \mathcal{A}_{\widehat{k}-1}$ ist und somit $u_i^{\widehat{k}} = (g_S)_i$ gilt. Damit ist $\lambda_i^{\widehat{k}} + c(u_i^{\widehat{k}} - (g_S)_i) < 0$, also $i \in \mathcal{I}_{\widehat{k}}$. Daraus folgt wiederum, dass $\lambda_i^{\widehat{k}+1} = 0$ ist, und wegen $u_i^{\widehat{k}+1} \leq (g_S)_i$ für $k \geq 1$ ist $\lambda_i^{\widehat{k}+1} + c(u_i^{\widehat{k}+1} - (g_S)_i) \leq 0$. Somit ist auch $i \in \mathcal{I}_{\widehat{k}+1}$. Durch Induktion folgt, dass $i \in \mathcal{I}_k$ für $k \geq \widehat{k} + 1$ ist und damit auch $\lambda_i^k = 0$ für $k > \widehat{k}$. Das gilt für alle Indizes $i \in \{1, \dots, \widehat{M}\}$, woraus die Existenz von k_0 folgt.

Nun lässt sich die Konvergenz der Newton-Iteration (5.11) gegen die eindeutige Lösung zeigen. Wegen der Monotonie von \underline{u}^k und der Ungleichung $\underline{u}^* \leq \underline{u}^k \leq \underline{g}_S$ für $k \geq 2$ gibt es ein \widehat{u} mit $\lim \underline{u}^k = \widehat{u} \leq \underline{g}_S$. Weiters gibt es wegen $\widehat{f} - S_N \underline{u}^k = \lambda^k \geq 0$ für $k \geq k_0$ ein $\widehat{\lambda}$ mit $\lim \lambda^k = \widehat{\lambda} \geq 0$. Zusammenfassend löst $(\widehat{u}, \widehat{\lambda})$ also die Gleichung $S_N \underline{u} + \lambda = \widehat{f}$ und es gilt $\widehat{u} \leq \underline{g}_S$ sowie $\widehat{\lambda} \geq 0$. Weiters gilt wegen (5.16) auch $(\widehat{\lambda}, \widehat{u} - \underline{g}_S) = 0$ für das Skalarprodukt $(\widehat{\lambda}, \widehat{u} - \underline{g}_S)$. Damit ist $(\widehat{u}, \widehat{\lambda})$ eine Lösung für die Formulierung (4.13). Da diese Formulierung äquivalent ist zur Gleichung $F(\underline{u}, \lambda) = 0$ und die Lösung eindeutig ist, gilt $(\widehat{u}, \widehat{\lambda}) = (\underline{u}^*, \lambda^*)$. \square

Die Matrix A_M aus (4.4) ist unter gewissen Voraussetzungen an die Diskretisierung eine M -Matrix.

Definition 5.18. Sei \mathcal{T} eine Triangulierung einer Punktmenge P im \mathbb{R}^2 . Wenn für jedes Dreieck T der Triangulierung \mathcal{T} gilt, dass sich kein Punkt der Punktmenge P im Inneren des Umkreises von T befindet, so heißt die Triangulierung *Delaunay-Triangulierung*.

Satz 5.19. [12, Theorem 2.4] Sei A_M die Matrix aus (4.4). Sei die Triangulierung \mathcal{T}_N des konvexen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Delaunay-Triangulierung. Weiters liege der Umkreismittelpunkt keines Randdreiecks außerhalb des Gebietes Ω . Dann ist A_M eine M -Matrix.

Beweis. Siehe [12] \square

Die Matrix S_N ist das Schurkomplement von A_M (siehe (4.11)). Wegen Satz 5.16 ist das Schurkomplement einer M -Matrix wieder eine M -Matrix. Daher ist S_N also eine M -Matrix, falls A_M eine M -Matrix ist. Damit ist folgender Satz gezeigt.

Satz 5.20. *Gelten für die Diskretisierung die Bedingungen aus Satz 5.19, so konvergiert die Newton-Iteration (5.11) für beliebige Anfangsvektoren $(\underline{u}^0, \underline{\lambda}^0)$ gegen die eindeutige Lösung $(\underline{u}^*, \underline{\lambda}^*)$ der Gleichung $F(\underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$.*

6 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden zwei Beispiele vorgestellt, die mit dem in Kapitel 5 gezeigten Verfahren gelöst wurden. Als Algorithmus für die Berechnungen wurde die Newton-Iteration (5.11) verwendet. Die Konstante c des Algorithmus wurde auf 1 gesetzt. Es kam ein Finite-Elemente-Code mit linearen Ansatz- und Testfunktionen zum Einsatz. Als Gebiet Ω wurde das Einheitsquadrat gewählt. Dieses wurde mit Dreiecken diskretisiert. Auf der linken Seite des Quadrats, also für $x = 0$, wurden homogene Dirichlet-Randbedingungen aufgebracht. Der restliche Rand ist der Signorini-Rand Γ_S , das heißt die gesuchte Funktion u muss

$$u \leq g_S, \quad \frac{\partial}{\partial n} u \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial n} u (u - g_S) = 0$$

auf Γ_S für eine gegebene Funktion g_S erfüllen. Aufgrund der homogenen Dirichlet-Randbedingungen muss für die Funktion g_S noch $g_S(0, 0) = 0$ und $g_S(0, 1) = 0$ gelten.

Beispiel 1

Für die Funktion

$$u(x, y) = -x^2$$

gilt

$$-\Delta u = f = 2.$$

Die Normalenableitung ergibt sich als

$$\frac{\partial}{\partial n} u = \nabla u \cdot n = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = -2xn_1 = \begin{cases} 0 & \text{auf } y = 1, \\ -2 & \text{auf } x = 1, \\ 0 & \text{auf } y = 0. \end{cases}$$

Damit ist die Bedingung $\frac{\partial}{\partial n} u \leq 0$ erfüllt. Wählt man $g_S = -x^3$, so sind sowohl die beiden anderen Bedingungen am Signorini-Rand, als auch $g_S(0, 0) = 0$ und $g_S(0, 1) = 0$ erfüllt. Für das erste Beispiel wurden also

$$f(x, y) = 2 \quad \text{und} \quad g_S(x, y) = -x^3$$

gesetzt. In Tabelle 6.1 wurden die Ergebnisse für diese Berechnung zusammengefasst. N ist dabei die Anzahl der finiten Elemente, M ist die Knotenzahl und \tilde{M} ist die Anzahl der Knoten am Signorini-Rand. "It" steht für die benötigte Anzahl an Iterationen für das halbglatte Newton-Verfahren. "Error" ist der Fehler in der L_2 -Norm,

N	M	\widetilde{M}	It	Error
8	9	5	2	4.56e-2
32	25	11	3	1.14e-2
128	81	23	4	2.85e-3
512	289	47	4	7.13e-4
2048	1089	95	5	1.78e-4
8196	4225	191	6	4.47e-5
32768	16641	383	8	1.12e-5

Tabelle 6.1: Ergebnisse für Beispiel 1.

das heißt $\|u - u_N\|_{L_2(\Omega)}$, wobei u die Lösung des kontinuierlichen Problems ist und u_N die berechnete Näherungslösung. Bei jeder Verfeinerungsstufe wird ein Dreieck in vier Dreiecke zerlegt. Damit vervierfacht sich die Anzahl der Elemente von einer Verfeinerungsstufe zur nächsten und die globale Maschenweite h halbiert sich in jedem Schritt. Der L_2 -Fehler verhält sich proportional zum Quadrat der Maschenweite, das heißt der Fehler nimmt in jedem Schritt in etwa um den Faktor vier ab. Die Anzahl an Iterationen für das halbglatte Newton-Verfahren nimmt in etwa linear mit den Verfeinerungsstufen zu. Nur beim Schritt von 128 auf 512 Elemente bleibt sie gleich und beim Schritt von 8196 auf 32768 Elemente steigt sie von 6 auf 8. Die Abbildung 6.1 zeigt die Näherungslösung u_N für die Diskretisierung mit 2048 Elementen. Die Abbildung 6.2 zeigt die Werte für die aus dieser Näherungslösung berechneten Normalenableitung in den Segmenten am Rand. Auf der x -Achse ist der Rand des Einheitsquadrats aufgetragen, ausgehend vom Punkt $(0, 0)$. Der Rand wird im Urzeigersinn durchlaufen. Da lineare Ansatzfunktionen verwendet wurden, ist die Normalenableitung in jedem Element konstant.

Beispiel 2

Für die Funktion

$$u(x, y) = x(\cos(\pi y) - 1)$$

gilt

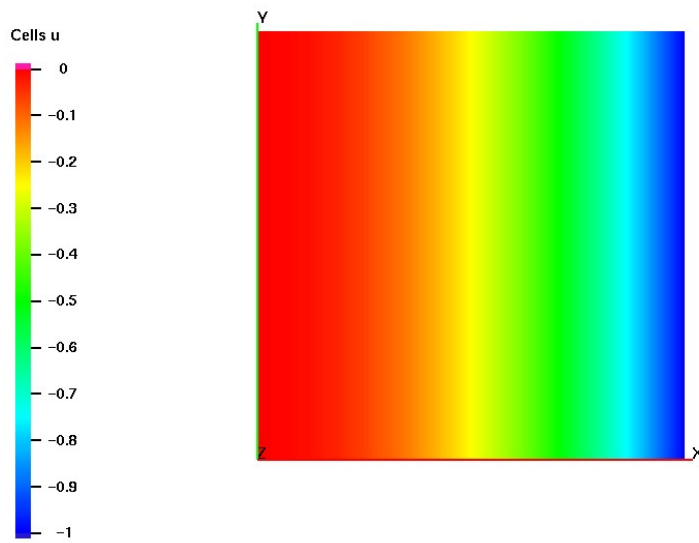
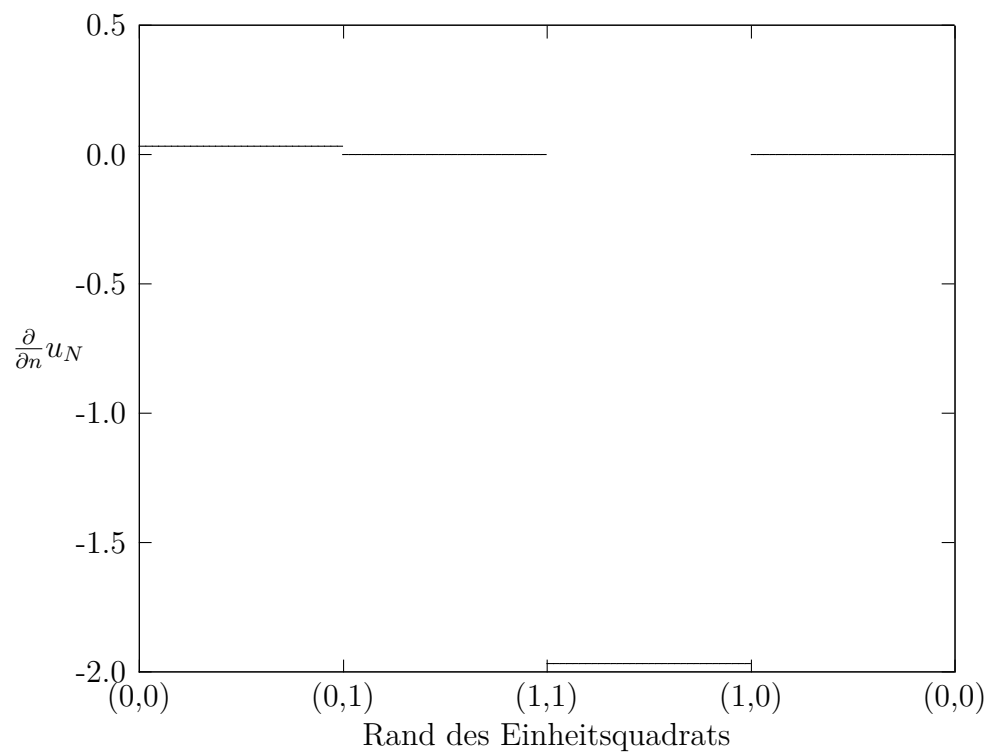
$$-\Delta u = f = \pi^2 x \cos(\pi y).$$

Die Normalenableitung ergibt sich als

$$\frac{\partial}{\partial n} u = \nabla u \cdot n = \begin{pmatrix} \cos(\pi y) - 1 \\ -\pi x \sin(\pi y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = (\cos(\pi y) - 1)n_1 - \pi x \sin(\pi y)n_2$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial n} u = \begin{cases} 0 & \text{auf } y = 1, \\ \cos(\pi y) - 1 & \text{auf } x = 1, \\ 0 & \text{auf } y = 0. \end{cases}$$

Abbildung 6.1: Näherungslösung u_N .Abbildung 6.2: Normalenableitung der Näherungslösung $\frac{\partial}{\partial n} u_N$.

Damit ist die Bedingung $\frac{\partial}{\partial n} u \leq 0$ wiederum erfüllt. Für dieses Beispiel wurden

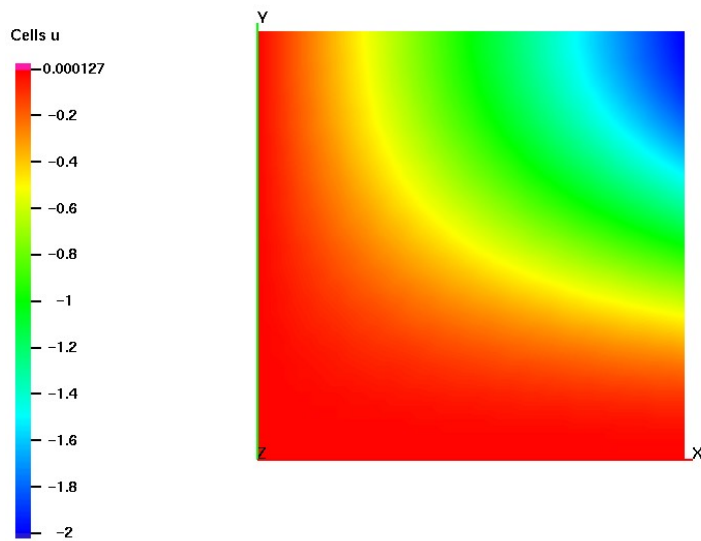
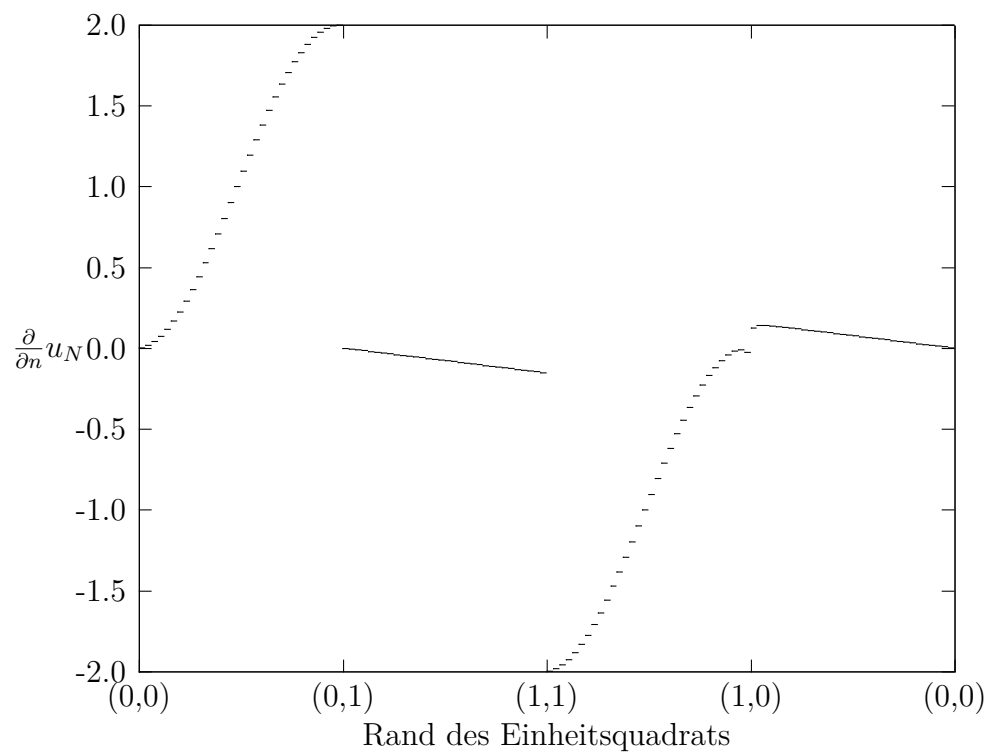
$$f(x, y) = \pi^2 x \cos(\pi y) \quad \text{und} \quad g_S(x, y) = \begin{cases} -2x^2 & \text{auf } y = 1, \\ \cos(\pi y) - 1 & \text{auf } x = 1, \\ 1 - x & \text{auf } y = 0 \end{cases}$$

gesetzt. Für diese Wahl von g_S ist auch die zweite und dritte Bedingung am Signorini-Rand erfüllt, sowie $g_S(0, 0) = 0$ und $g_S(0, 1) = 0$. In Tabelle 6.2 wurden die Ergebnisse für diese Berechnung zusammengefasst. Die Berechnungen wurden für die gleichen

N	M	\widetilde{M}	It	Error
8	9	5	3	1.26e-1
32	25	11	3	3.11e-2
128	81	23	4	7.55e-3
512	289	47	4	1.88e-3
2048	1089	95	4	4.58e-4
8196	4225	191	5	1.13e-4
32768	16641	383	5	2.80e-5

Tabelle 6.2: Ergebnisse für Beispiel 2.

Diskretisierungen durchgeführt wie im ersten Beispiel. Wie auch im ersten Beispiel nimmt der L_2 -Fehler bei jeder Verfeinerungsstufe in etwa um den Faktor vier ab. Die Anzahl an Iterationen des halbglatten Newton-Verfahrens nimmt noch schwächer zu als im ersten Beispiel. Die Abbildung 6.3 zeigt wieder die Näherungslösung u_N für die Diskretisierung mit 2048 Elementen und die Abbildung 6.2 zeigt die aus dieser Näherungslösung berechneten Normalenableitung in den Segmenten am Rand.

Abbildung 6.3: Näherungslösung u_N .Abbildung 6.4: Normalenableitung der Näherungslösung $\frac{\partial}{\partial n} u_N$.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung behandelt. Das Hauptaugenmerk lag auf der Entwicklung eines halbglatten Newton-Verfahrens zur Berechnung von Näherungslösungen für das Signorini-Randwertproblem. Es wurde auch gezeigt, dass dieses halbglatte Newton-Verfahren einer Aktiven-Mengen-Strategie entspricht. Schließlich wurden mit Hilfe dieses Verfahrens zwei numerische Beispiele in 2D gerechnet. Die Ergebnisse der Berechnungen zeigen eine mit den Verfeinerungsstufen in etwa linear ansteigende Anzahl an Iterationen des halbglatten Newton-Verfahrens.

Im Folgenden sollen noch einige offene Probleme und mögliche Erweiterungen angesprochen werden. Für die Berechnung der numerischen Beispiele wurden in dieser Arbeit lineare Ansatz- und Testfunktionen verwendet. Eine mögliche Erweiterung wäre, Ansatz- und Testfunktionen höherer Ordnung zu verwenden. Weiters könnten Berechnungen in 3D durchgeführt werden. Um das lineare Gleichungssystem der Newton-Iteration (5.11) zu lösen, könnte ein vorkonditioniertes Verfahren verwendet werden. In dieser Arbeit wurde das halbglatte Newton-Verfahren auf das diskretisierte Problem angewandt. Es ist aber auch möglich, das halbglatte Newton-Verfahren auf das kontinuierliche Problem anzuwenden, wie in [10] gezeigt wird. Allerdings wird dort die Analysis für den verallgemeinerten Gradienten zumindest zum Teil in $L_2(\Gamma)$ durchgeführt. Vielleicht ist es möglich, diese auch in $H^{1/2}(\Gamma)$ durchzuführen. Aus dem Signorini-Randwertproblem der Poisson-Gleichung lässt sich auch eine Variationsungleichung mit Randintegraloperatoren herleiten. Dementsprechend kann die weitere Analysis und Numerik auch mit den Mitteln der Randelementmethoden durchgeführt werden. Das in dieser Arbeit gezeigte halbglatte Newton-Verfahren könnte auch auf andere Probleme angewandt werden, zum Beispiel auf Variationsungleichungen, die sich aus der Modellierung von Kontaktproblem mit und ohne Reibung oder von nichtlinearen Transmissionsproblemen ergeben.

Literaturverzeichnis

- [1] S. S. Antman. The influence of elasticity on analysis: modern developments. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 9(3):267–291, 1983.
- [2] D. Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics.
- [3] F. Brezzi, W. W. Hager, and P.-A. Raviart. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. *Numer. Math.*, 28(4):431–443, 1977.
- [4] F. E. Browder. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:780–785, 1965.
- [5] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
- [6] M. Fiedler. *Special matrices and their applications in numerical mathematics*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2008.
- [7] R. Glowinski. *Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems*, volume 65 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.
- [8] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities*, volume 8 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.
- [9] M. Hintermüller, K. Ito, and K. Kunisch. The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM J. Optim.*, 13(3):865–888, 2002.
- [10] K. Ito and K. Kunisch. Semi-smooth Newton methods for the Signorini problem. *Appl. Math.*, 53(5):455–468, 2008.
- [11] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*, volume 31 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000. Reprint of the 1980 original.
- [12] M. Putti and C. Cordes. Finite element approximation of the diffusion operator on tetrahedra. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(4):1154–1168, 1998.
- [13] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [14] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. I*, volume 2 of *Teubner-Texte zur Mathematik*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, third edition, 1980. Fixpunktsätze.

- [15] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. II*, volume 9 of *Teubner-Texte zur Mathematik*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, third edition, 1981. Monotone Operatoren.
- [16] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. III*, volume 16 of *Teubner-Texte zur Mathematik*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, second edition, 1982. Variationsmethoden und Optimierung.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)