

Michael Koplenig, BSc

Modellierung von Werkstoffversagen in nichtlinearen Umformvorgängen dünner Bleche

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technische Physik



Technische Universität Graz

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heinrich Sormann
Institut für Theoretische Physik - Computational Physics

in Kooperation mit dem
Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug (ViF)

Graz, Mai 2011

Deutsche Fassung:
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

EIDESSTÄTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....
(Unterschrift)

Englische Fassung:

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date

.....
(signature)

Kurzfassung

Die Blechumformung stellt einen wichtigen Prozess zur Erzeugung von Karosserieteilen in der Automobilindustrie dar. Das Auftreten lokalen Materialversagens während des Umformprozesses hängt dabei von der Vorgeschichte (i.e. die auf das Material bereits aufgetragenen Umformungen) des Blechwerkstoffes ab. Konventionelle Material-Versagenskriterien, welche zur Beurteilung von numerischen Simulationsergebnissen von Blechumformprozessen herangezogen werden, berücksichtigen diese Umformhistorie jedoch nur eingeschränkt.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte phänomenologische Versagenskriterium ermöglicht eine verbesserte Beurteilung des zu erwartenden Umformvermögens eines Werkstoffes basierend auf der Kombination ausgewählter experimenteller Versuchsdaten. Der entwickelte Ansatz ermöglicht effiziente Strategien zur Bewertung von Werkstoffversagen und kann in der Analyse von Finite-Elemente Simulationen von Umformprozessen angewendet werden.

Abstract

Sheet metal forming is one of the most crucial processes in the automotive industry. During the forming operation the occurrence of material failure in sheet metals depends strongly on the previous load history (i.e. the applied plastic deformation on the material). In conventional failure-criteria which are used to assess material formability in numerical simulations this history is considered only in a limited fashion.

This work presents the development of a new phenomenological failure criterion which is based on a combination of selected experimental results. With this approach, an efficient strategy for the estimation of formability of thin sheet metals is available. The new phenomenological failure criterion can be used to analyse finite-element simulations of forming operations.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer am Institut für Theoretische Physik - Computational Physics der Technischen Universität Graz, Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heinrich Sormann, sowie bei meinem Betreuer am Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug (ViF), Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Aldo Ofenheimer, für die Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit bedanken.

Ebenfalls danken möchte ich Frau Dipl.-Ing. Daniela Kitting für die unermüdlich geführten Diskussionen und zahlreichen Anregungen, die wesentlich zum Abschluss der Arbeit beigetragen haben, sowie Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Heubrandtner, Herrn Dipl.-Ing. Georg Scharrer und Herrn Dipl.-Ing. Dr.mont. Gernot Trattng für die Unterstützung in fachlichen und organisatorischen Belangen.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern, die mir diese Ausbildung ermöglicht haben und mich auf jede nur erdenkliche Weise unterstützt haben.

Der Autor bedankt sich beim “Kplus Kompetenzzentrum-Programm” des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (BMVIT), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), des Landes Steiermark und der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG) für ihre finanzielle Unterstützung.

Abschließend danke ich dem Projektpartner BMW AG sowie der Technischen Universität Graz.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen aus der Literatur	3
2.1. Materialbeschreibung	3
2.1.1. Kontinuumsmechanische Grundlagen	3
2.1.1.1. Konfigurationen	3
2.1.1.2. Verschiebungen	5
2.1.1.3. Dehnungen	6
2.1.1.4. Spannungen	7
2.1.2. Grundlagen der Plastizitätstheorie	9
2.1.2.1. Physikalische Ursachen der plastischen Verformung	10
2.1.2.2. Fließkriterium	11
2.1.2.3. Berücksichtigung der Anisotropie von Werkstoffen	13
2.1.2.4. Verfestigung	15
2.1.2.5. Fließregel	18
2.2. Grundbegriffe der Blechumformung	21
2.2.1. Umformvorgang	21
2.2.2. Verwendete Größen	23
2.2.2.1. Dehnungsmaß	23
2.2.2.2. Spannungen	25
2.2.3. Werkstoffversagen	26
2.2.3.1. Einschnürung	26
2.2.3.2. Bruch	27
2.2.4. Konzept des Grenzformänderungsdiagramms	27
2.2.4.1. Experimentelle Ermittlung der Grenzformänderungskurve	28
2.2.4.2. Theoretische Beschreibung der Grenzformänderungskurve	29
2.2.4.3. Gültigkeit der Grenzformänderungskurve	30
2.2.4.4. Experimentelle Realisierung nichtlinearer Umformwege	31
3. Literaturüberblick Versagenskriterien	33
3.1. Klassische Versagenskriterien	33
3.1.1. Physikalisch motivierte Versagenskriterien	33
3.1.1.1. Kriterium nach Swift für diffuse Einschnürung	34
3.1.1.2. Kriterium nach Hill für lokale Einschnürung	37
3.1.2. Phänomenologische Versagenskriterien	40

3.1.2.1.	Müschenborn-Sonne	40
3.1.2.2.	Keeler und Brazier	42
3.2.	Numerische Ansätze zur Versagensermittlung	43
3.2.1.	MMFC - Modified Maximum Force Criterion	43
3.2.2.	CRACH	45
4.	Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells	47
4.1.	Motivation	47
4.2.	Modellparameter	48
4.2.1.	Effektive Umformrichtung	49
4.2.2.	Effektives Umformvermögen	50
4.3.	Modellansatz	51
4.4.	Kalibrierung des Modells	54
4.5.	Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems	58
5.	Validierung des neuen phänomenologischen Modells	61
5.1.	Versuchsbasis - Experimentelle Daten	61
5.1.1.	Standard Materialcharakterisierung	61
5.1.2.	Daten aus zweistufigen Umformprozessen	63
5.2.	Kalibrierung des neuen phänomenologischen Modells für Aluminium AA6016	65
5.3.	Ergebnisse	67
5.3.1.	Beurteilung von experimentellen Umformpfaden	68
5.3.2.	Beurteilung von Umformpfaden aus FE-Simulationen	73
6.	Zusammenfassung	75
A.	Implementierung des phänomenologischen Modells	77
A.1.	Überblick	77
A.2.	Kalibrierung des phänomenologischen Modells in der Umgebung MatLab®	78
A.2.1.	Erstellen der Eingabedateien	79
A.2.2.	Aufbau der Kalibrierungsroutine	83
A.2.3.	Ergebnisdatei	84
A.2.4.	graphische Benutzeroberfläche	86
A.3.	Postprocessing-Programm	88
A.3.1.	Anforderungen	89
A.3.1.1.	LS-DYNA® Simulationsdaten	89
A.3.1.2.	Adaptive Netzverfeinerung	91
A.3.2.	Umsetzung	93
A.3.3.	Aufbau des Postprocessing-Programms	94
A.3.3.1.	Initialisierungsphase	95
A.3.3.2.	Versagensvorhersage	96
A.3.3.3.	Export der Ergebnisdaten	98
A.4.	Integration in die Altair HyperWorks® Postprocessing Umgebung	98

Abbildungsverzeichnis

2.1. Ausgangs- und Momentankonfiguration eines Körpers	4
2.2. Spannungs-Dehnungs Diagramm im einachsigen Zugversuch	10
2.3. Plastische Verformung durch Versetzungsbewegung	11
2.4. Fließzylinder und Fließort nach von Mises	13
2.5. Fließortbeschreibungen nach von Mises, Hill und Hosford	15
2.6. Stabilitätspostulat nach Drucker	16
2.7. Fließkurvenextrapolationen nach Hollomon, Hockett-Sherby und Swift	18
2.8. Fließort und plastisches Dehnungsinkrement	19
2.9. Verfahren zur Umformung von Werkstoffen nach DIN8582	21
2.10. Belastungszustände bei Tief- und Streckziehen	22
2.11. Darstellung eines typischen Umformprozesses	22
2.12. Linearer und nichtlinearer Umformpfad	23
2.13. Charakterisierung von Belastungszuständen	25
2.14. Das Grenzformänderungsdiagramm	28
2.15. Probengeometrien nach Nakazima	29
2.16. Das Grenzformänderungsdiagramm mit Probengeometrien nach Nakazima	29
2.17. Versagen der konventionellen Grenzformänderungsanalyse	31
2.18. Ein zweistufiger Ersatzversuch zur Materialcharakterisierung	32
3.1. Blechstreifen unter zweiachsigem Belastungszustand	34
3.2. Einschnürbereich eines schmalen Blechstreifens	37
3.3. Theoretische Grenzformänderungskurve nach Hill und Swift	40
3.4. Modell nach Müschenborn und Sonne	41
3.5. Grenzkurve nach Müschenborn und Sonne	42
3.6. Verfestigungszunahme durch Belastungsänderung	43
3.7. Theoretische Grenzformänderungskurve nach MMFC	44
3.8. Theoretische Grenzformänderungskurve mit Vorumformung nach MMFC	45
4.1. Nichtlinearer Umformpfad aus einer FE-Simulation	48
4.2. Unterschied zwischen Umformrichtung und effektiver Umformrichtung	49
4.3. Berechnung des effektiven Umformvermögens	51
4.4. Effektive Umformrichtung und effektives Umformvermögen	52
4.5. Wahl der Stützpunktpositionen	53
4.6. Datenpunkt und umgebende Stützpunkte	55
4.7. Aufbau einer Regelfläche durch Interpolation	55
4.8. Modellansatz zur Interpolation bzgl. $\bar{\lambda}_{pre}$	57

Abbildungsverzeichnis

4.9. Grenzfläche und ausgewählte Schnitte	60
5.1. Fließkurve von Aluminium AA6016	62
5.2. Grenzformänderungskurve von Aluminium AA6016	62
5.3. Durchgeführte Experimente für Aluminium AA6016	64
5.4. Grenzformänderungskurven für vorumgeformte Bleche.	66
5.5. Experimente zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells	68
5.6. Ergebnisse des phänomenologischen Modells	70
5.7. Ergebnisse des phänomenologischen Modells (Fortsetzung)	71
5.8. Darstellung prozentueller Abweichungen des phänomenologischen Modells	72
5.9. Versagensbewertung eines Umformpfades einer FE-Simulation	73
A.1. Darstellung des mehrstufigen Beurteilungsprozesses	78
A.2. Aufbau der Eingabedatei	79
A.3. Konfigurationsdatei zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells . .	82
A.4. Aufbau der Routine zur Modellkalibrierung	83
A.5. Struktur der Ergebnisdatei	85
A.6. Dialog zur Auswahl der benötigten Dateien.	86
A.7. Verwendete Messdaten und ermittelte Stützstellenpositionen	87
A.8. Darstellung der Ergebnisse der Kalibrierung	88
A.9. Darstellungen der ermittelten Abweichungen	88
A.10. Ergebnisdateien des kommerziellen FE-Solvers LS-DYNA [®]	90
A.11. Struktur unterschiedlicher LS-DYNA [®] Ergebnisdateien	91
A.12. Netzverfeinerung durch Teilung eines vierknotigen Elements	92
A.13. Rekonstruktion der Zugehörigkeit der Elemente zum Ausgangselement . .	93
A.14. Schematische Darstellung des Ablaufs des Postprozessing-Programms. . .	95
A.15. Integration in die Altair HyperWorks [®] Postprozessing-Umgebung	99
A.16. Graphische Benutzeroberfläche zur Postprozessing Routine	99
A.17. Berechnete Ergebnisse für eine Nakazima-Probe	100

Verwendete Symbole und Abkürzungen

Symbole

$(\bullet)_{ij}$	Komponente des Tensors (\bullet)
$(\bullet)_i$	Eigenwert des Tensors (\bullet)
$(\bullet) : (\bullet)$	Zweifache Überschiebung der Tensoren
$(\bullet)^{el}$	elastischer Anteil der Dehnung
$(\bullet)^{pl}$	plastischer Anteil der Dehnung
$(\bullet)^t$	totale Dehnung, Summe aus elastischem und plastischem Anteil
$\dot{(\bullet)}$	Rate von (\bullet)
$(\bullet)_{pre}$	Wert (\bullet) in der Vorumformstufe
$(\bullet)_{post}$	Wert (\bullet) in der Nachformoperation
$(\bullet)_{ar}$	Wert (\bullet) des Ausgangsblechs (von <i>as-received</i>)
$(\bullet)^*$	kritischer Wert bei Versagenseintritt
$(\bullet)^{(i,j)}$	Wert (\bullet) an der Gitterposition (i, j)
$(\bullet)^{(i)}$	Wert (\bullet) an der i -ten Gitterlinie
a, A	Fläche in der Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration
c	Parameter des phänomenologischen Modells
\mathbf{E}	Green-Saint-Venant Dehnungstensor
\mathbf{f}, \mathbf{F}	Kraftvektor in der Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration
f	Fließort
H	Verfestigungsansatz
J_i	i -te Invariante des Tensors
k	Parameter des phänomenologischen Modells
l, L	Länge in der Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration
\mathbf{n}, \mathbf{N}	Normalenvektor in der Momentan- bzw. Ausgangskonfiguration
n	Verfestigungsexponent
\mathbf{P}	erster Piola Kirchhoff Spannungstensor
\mathbf{t}	Cauchyscher Kraftflußvektor
t	Blechdicke
\mathbf{T}	Piola-Kirchhoff Kraftflußvektor
W	verrichtete Arbeit

Symbole - Fortsetzung

α	Verhältnis der Hauptspannungen für den ebenen Spannungszustand
β	Umformrichtung, Verhältnis der Inkremente der Hauptformänderungen
$\bar{\beta}$	effektive Umformrichtung im phänomenologischen Modell
δ	Imperfektionsfaktor im MK-Modell
ε	Dehnungstensor
ε_I	Ingenieursdehnung
ε	logarithmische Dehnung
$\bar{\varepsilon}$	Vergleichsdehnung
$\bar{\lambda}$	effektives Umformvermögen im phänomenologischen Modell
λ	Streckung
$d\lambda$	plastischer Multiplikator
φ	Umformgrad
$\bar{\varphi}$	Vergleichsumformgrad
σ	Cauchyscher Spannungstensor
σ'	deviatorische Spannungen des Cauchyschen Spannungstensors
σ_Y	Fließspannung (von <i>Yieldstress</i>)
$\bar{\sigma}$	Vergleichsspannung

Abkürzungen

ar	as-received, Ausgangsblech <i>ohne</i> Vorverformung
$\det(\bullet)$	Determinante des Tensors (\bullet)
$\text{tr}(\bullet)$	Spur des Tensors (\bullet)
FEM	Finite Elemente Methode
FLC	Forming Limit Curve, Grenzformänderungskurve
FLD	Forming Limit Diagram, Grenzformänderungsschaubild
MSFLC	Grenzformänderungskurve nach Müschenborn&Sonne

1. Einleitung

Die Blechumformung stellt in der Automobilindustrie einen wichtigen Prozess dar, um aus ebenen Zuschnitten Hohlteile, wie zum Beispiel die Motorhaube oder andere Karosserieteile, kostengünstig und in hoher Stückzahl herstellen zu können. Als problematisch bei diesem Vorgang erweist sich auf Grund der geringen Ausgangsdicke des verwendeten Werkstoffs das *Auftreten lokalen Materialversagens* in Form von Einschnürung oder Bruch.

Um eine bessere Ausnutzung des Umformpotentials der verwendeten Werkstoffe und damit einen effizienteren Herstellungsprozess zu ermöglichen, werden im zunehmenden Maße die Möglichkeiten der virtuellen Produktentwicklung genutzt. Mit der immer realitätsnäheren Abbildung dieser Umformprozesse durch die Simulation steigen aber auch die Anforderungen an jene Modelle, welche zur Bewertung der Herstellbarkeit der virtuell entwickelten Bauteile herangezogen werden können.

Bestehende Versagenskriterien werden diesen Anforderungen nur unter der sehr speziellen Bedingung gerecht, dass die am Bauteil vorherrschenden Belastungszustände in einem bestimmten Verhältnis zueinander verbleiben. Bei komplexeren Bauteilen in der Automobilindustrie ist dies jedoch im allgemeinen nicht mehr der Fall. Die nichtlineare Änderung der Belastungsverhältnisse während des Umformvorgangs hat *nicht zu vernachlässigenden Einfluss* auf das Umformvermögen des Werkstoffs.

Neben einer verbesserten Beurteilung des Umformpotentials ist auch die Kosteneffektivität eines eingesetzten Modells, das heisst die Möglichkeit einer variablen Anpassung des Kalibrierungsaufwandes an die gewünschte Vorhersagegenauigkeit, von Interesse. Durch die Entwicklung eines *neuen phänomenologischen Modells* kann diesem Umstand in einfacher Weise Rechnung getragen werden.

Nach einer *Einführung* in bereits *bekannte physikalisch-technische Grundlagen aus der Literatur* in Kapitel 2 werden im daran anschließenden Kapitel ausgewählte *Versagenskriterien aus der Literatur* dargestellt. Mit Hilfe der zur Verfügung stehenden experimentellen Daten von Aluminium AA6016 erfolgt eine Bewertung der vorgestellten Modelle hinsichtlich der Anwendbarkeit zur Beurteilung von nichtlinearen Umformvorgängen.

Basierend auf dieser Charakterisierung wird in Kapitel 4 die *Entwicklung eines neuen*

1. Einleitung

phänomenologischen Kriteriums dargestellt, welches eine verbesserte Beurteilung des Umformvermögens des verwendeten Werkstoffs unter den vorherrschenden Bedingungen ermöglicht.

Eine abschließende *Validierung des entwickelten phänomenologischen Versagensmodells* bildet den Inhalt von Kapitel 5. Die dafür benötigte Umsetzung des neu entwickelten Ansatzes in Form eines Softwareprototypen ist im Anhang dargelegt.

2. Grundlagen aus der Literatur

Im folgenden Kapitel sollen die wichtigsten Grundlagen aus der Literatur (siehe Referenzen [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) zusammengefasst werden, die für das Verständnis der entwickelten Modellidee notwendig sind. Neben den wichtigsten Konzepten der Werkstoffkunde bzw. der Plastizitätstheorie soll auch eine kurze Einführung in die Umformtechnik gegeben werden.

2.1. Materialbeschreibung

Der Aufbau der uns umgebenden Materie aus Molekülen, Atomen und noch kleineren Teilchen auf subatomarem Niveau ist bestens bekannt. Eine Beschreibung auf atomistischer Ebene, wie sie in der Festkörperphysik versucht wird, ist auf Grund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden jedoch nicht ohne Näherungen möglich.

2.1.1. Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik bedient sich der Idealisierung, dass sich ein Werkstoff als homogenes System beschreiben lässt. Inhomogenitäten, die auf mikroskopischer Ebene im realen Material vorliegen, werden nicht explizit berücksichtigt.

Dieser Ansatz bildet auch die ideale Grundlage, um strukturmechanischen Problemstellungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente zu lösen.

2.1.1.1. Konfigurationen

In der Kontinuumsmechanik wird zur Beschreibung der Bewegung und der Gestaltänderung eines Körpers der Begriff der *Konfiguration* verwendet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper im undeformierten Zustand in der sogenannten Ausgangs- oder Referenzkonfiguration.

2. Grundlagen aus der Literatur

Während einer Bewegung durchläuft der Körper nacheinander unterschiedliche Konfigurationen, die durch die Zeit t als Parameter gekennzeichnet werden können. Die aktuelle Konfiguration des Körpers wird dabei als Momentankonfiguration bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen beiden Konfigurationen für alle Zeitpunkte wird durch eine bijektive Abbildung [3, S.59]

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t) \quad (2.1)$$

hergestellt.

Durch diese kann zu jedem Zeitpunkt t die momentane Position \boldsymbol{x} jenes Materialpunktes ermittelt werden, der in der Ausgangskonfiguration, also zum Zeitpunkt $t = 0$, den Ort \boldsymbol{X} eingenommen hat. Diese Art der Beschreibung der Kinematik wird *Lagrangesche Beschreibung* genannt, ein zugehöriges Tensorfeld \boldsymbol{T} weist die Form $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, t)$ auf.

Mit der zur Gl. (2.1) inversen Abbildung

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) \quad (2.2)$$

lässt sich die sogenannte *Eulersche Beschreibung* einer Bewegung gewinnen, die jedem Raumpunkt \boldsymbol{x} zu einer vorgegebenen Zeit t den Materialpunkt \boldsymbol{X} in der Ausgangskonfiguration zuweist. Diese Darstellung ist vor allem in der Fluidmechanik von großer Bedeutung. Tensorfelder haben hier die Form $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)$.

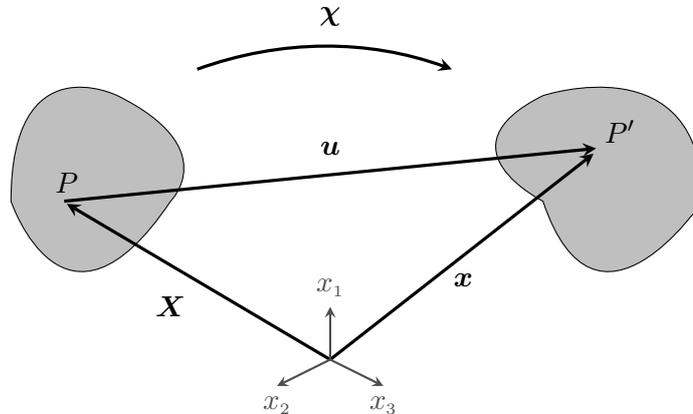


Abbildung 2.1.: Darstellung der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration eines Körpers.

Beobachtet man die Bewegung eines Körpers, wie dies in Abbildung 2.1 angedeutet ist, ist man in der Regel an der Veränderung der Lage eines oder mehrerer Punkte interessiert. Die räumliche Veränderung, die ein Punkt zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration erfahren hat lässt sich mit Hilfe eines Vektors, des sogenannten Verschiebungsvektors, beschreiben.

2.1.1.2. Verschiebungen

Um die Bewegung eines Körpers zu charakterisieren wird in der Kontinuumsmechanik der Vergleich von Momentan- und Ausgangskonfiguration herangezogen.

Durch einfache geometrische Überlegungen ergibt sich für den Verschiebungsvektor aus Abbildung 2.1

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Die oben beschriebenen Verschiebungen führen, wenn man vom Spezialfall der reinen Starrkörperbewegung absieht, immer zu Deformationen, welche durch einen Tensor zweiter Stufe, den sogenannten Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.4)$$

dargestellt werden können.

Es kann gezeigt werden [2, S.66], dass sich die Gesamtdeformation, beschrieben durch den Deformationstensor \mathbf{F} , in einen Streck- und einen Rotationsanteil

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.5)$$

aufteilen läßt.

Gl. (2.5) wird als *polare Zerlegung* des Deformationsgradienten in den positiv definiten und symmetrischen Strecktensor \mathbf{U} sowie den orthonormalen Rotationstensor \mathbf{R} bezeichnet.

Mit den zugehörigen Eigenvektoren in der Ausgangs- und Momentankonfiguration $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ und $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ sowie den Streckungen $\lambda^{(\alpha)} = \left(\frac{l}{L}\right)^{(\alpha)}$ ergeben sich der Rotations- und der Strecktensor mit Hilfe der Spektraldarstellung zu [2, S.73]

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda^{(\alpha)} \mathbf{N}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{N}^{(\alpha)}. \quad (2.7)$$

Verschiebungen bilden die Grundlage für den Ansatz zur Lösung von strukturmechanischen Problemstellungen. Dennoch werden Dehnungen den Verschiebungen vorgezogen, um Deformationen gegenüber der Ausgangskonfiguration anschaulich darzustellen.

2. Grundlagen aus der Literatur

2.1.1.3. Dehnungen

Im Bezug auf das Dehnungsmaß existieren zwei mögliche Darstellungen. Einerseits das weit verbreitete Ingenieursdehnungsmaß [1, S.9]

$$\varepsilon_I = \frac{l - L}{L} = \lambda - 1, \quad (2.8)$$

welches die Längenänderung auf die Ausgangslänge L bezieht, andererseits das logarithmische, das auch als natürliches Dehnungsmaß bezeichnet wird und entsteht, wenn man die Dehnungsincremente auf die Momentankonfiguration bezieht [1, S.9]:

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{l}{L} \right) = \ln(\lambda). \quad (2.9)$$

Sind die Längenänderungen gering, ist das logarithmische Dehnungsmaß ε und die Ingenieursdehnung ε_I nahezu identisch [1, S.9] denn dann können quadratische Anteile vernachlässigt werden und es gilt [2, S.84]:

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{l}{L} \right) = \ln(1 + \varepsilon_I) \approx \varepsilon_I - \frac{1}{2}\varepsilon_I^2 + O(\varepsilon_I^3). \quad (2.10)$$

Um die zugehörigen Dehnungstensoren zu erhalten, wie sie zum Beispiel bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente benötigt werden, geht man vom zugrundeliegenden Verschiebungsfeld aus.

Man erhält dann den sogenannte *Green-Saint-Venant* Dehnungstensor \mathbf{E} , wenn man die Änderungen der quadrierten Längen $l^2 - L^2$ betrachtet [3, S.79]. Die Definitionsgleichung¹ lautet [2, S.79]

$$d\mathbf{x}d\mathbf{x} - d\mathbf{X}d\mathbf{X} = l^2 - L^2 = 2 d\mathbf{X} \mathbf{E} d\mathbf{X}, \quad (2.11)$$

wobei der rechte Teil von Gl.(2.11) darauf hinweist, dass sich der Green-Saint-Venant Dehnungstensor auf die Ausgangskonfiguration bezieht.

Mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} ergibt sich der Green-Saint-Venant Dehnungstensor in kartesischen Koordinaten² aus Gleichung (2.11) zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (2.12)$$

¹Der willkürlich anmutende Faktor 2 auf der rechten Seite der Gleichung wird benötigt, um in weiterer Folge Übereinstimmung mit der Definition des Ingenieursdehnungsmaß zu erhalten.

²In einer allgemeineren Formulierung von Gl.(2.12) tritt an Stelle des Einheitstensors \mathbf{I} der Metriktensor \mathbf{G} (siehe [2]).

oder in Indexschreibweise³

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \quad (2.13)$$

wenn mit X_i wieder die Koordinaten in der Ausgangskonfiguration bezeichnet werden.

Für kleine Verschiebungsgradienten kann der quadratische Anteil des Green-Saint-Venant Dehnungstensors gegenüber den linearen Anteilen vernachlässigt werden und es ergibt sich der Dehnungstensor der linearen Elastizitätstheorie[8, S.3].

Nach Arbeiten von Seth und Hill [9, S.458] lassen sich allgemeine Definitionen zur Berechnung von Dehnungstensen angeben[3, S.88]

$$\mathbf{E}^n = \begin{cases} \frac{1}{n} (\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) & n \neq 0, \\ \ln(\mathbf{U}) & n = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Für den Fall $n = 0$ in Gleichung (2.14) ergibt sich der nach Hencky benannte Verzerungstensor für das logarithmische Dehnungsmaß[2, S.84]:

$$\mathbf{E}^0 = \ln(\mathbf{U}). \quad (2.15)$$

Dieser ist deshalb interessant, weil in der Hauptachsendarstellung die Diagonalelemente des Tensors die natürlichen Dehnungen ε_i aus Gleichung (2.9) darstellen[2, S.84]. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des rechten Strecktensors \mathbf{U} , dessen Eigenwerte die Streckungen λ_i sind.

Ein Feld von Dehnungstensen kann aus einem Verschiebungsfeld berechnet werden. Die Ursache für Verzerrungen sind Kräfte, die auf einen Körper einwirken. Im Gegensatz zu den anschaulichen Dehnungen stellen Kräfte, bzw. Spannungen als flächenbezogene Kräfte eine abstraktere Größe dar.

2.1.1.4. Spannungen

Man stellt sich einen, im Gleichgewicht befindlichen, ausgedehnten Körper, auf den sowohl äußere als auch innere Kräfte wirken, vor. Zerteilt man diesen in zwei beliebige Hälften, können die, jeweils an den Schnittflächen auftretenden Schnittkräfte betrachtet werden. In der Momentankonfiguration lässt sich dann jedem, als klein angenommenen, Flächenelement Δa der Schnittfläche ein resultierender Kraftvektor \mathbf{f} zuordnen.

Im Grenzübergang erhält man dann für den *Cauchyschen Kraftflussvektor*[2, S.109]

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da}. \quad (2.16)$$

³Es gilt die Summenkonvention, dass über mehrfach auftretende Indizes summiert wird.

2. Grundlagen aus der Literatur

In der Referenzkonfiguration gilt $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{f}}{dA}$, wobei \mathbf{T} den *ersten Piola-Kirchhoff Kraftflussvektor* bezeichnet [3, S.111].

Durch die Wahl von drei aufeinander senkrecht stehenden Schnittflächen lässt sich der Spannungstensor aus den Komponenten der zu den Schnittflächen gehörenden Kraftflussvektoren in eindeutiger Weise darstellen.

Es lässt sich also ein Feld von Tensoren zweiter Stufe angeben für das in der jeweiligen Konfiguration gilt [3, 111]:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad \text{Momentankonfiguration} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} \quad \text{Ausgangskonfiguration} \quad (2.18)$$

In Gl.(2.17) bezeichnet \mathbf{P} den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

Zusammen mit Gl. (2.16) lässt sich anschaulich zeigen, dass der Cauchysche Spannungstensor die Kraft f angibt, die auf die aktuelle Querschnittsfläche da wirkt und dass der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor die wirkende Kraft auf die Ausgangsfläche dA bezieht.

$$\frac{d\mathbf{f}}{da} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad \text{Momentankonfiguration} \quad (2.19)$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} \quad \text{Ausgangskonfiguration} \quad (2.20)$$

Aus diesem Grund spricht man bei den Cauchyspannungen von *wahren* Spannungen, weil sie die Spannungen darstellen, die im Werkstoff auftreten. Die Spannungen des ersten Piola-Kirchhoff Tensors werden hingegen als sogenannten *nominelle* Spannungen bezeichnet.

Durch die Darstellung der Spannungstensoren im Eigensystem erhält man in gewohnter Weise die Hauptnormalspannungen. Zusätzlich ist die Darstellung des Tensors durch seine Invarianten von Bedeutung. Sie sind für Tensoren zweiter Stufe allgemein definiert und lauten hier am Beispiel des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ [3, S.120]

$$J_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2.21)$$

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} [\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)] = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (2.22)$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (2.23)$$

Oft ist an Stelle des tensoriellen Zusammenhangs die Darstellung in Form von Vektoren hilfreich. Da die hier betrachteten Tensoren symmetrisch sind, müssen die äquivalenten

Vektoren statt neun jeweils nur sechs Komponenten aufnehmen und es ergibt sich [10]

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Mit der Definition der in einem Körper auftretenden Dehnungen und Spannungen liegen die grundlegenden Größen vor, um das Materialverhalten geeignet beschreiben zu können. Diese Beschreibung erfolgt je nach Größe der Auslenkung der atomaren Bausteine zuerst durch die lineare *Elastizitätstheorie*, danach durch die sogenannte *Plastizitätstheorie*, die im Vordergrund dieser Arbeit steht.

2.1.2. Grundlagen der Plastizitätstheorie

An den elastischen Bereich, der dadurch gekennzeichnet ist, dass die auftretenden Verzerungen allein durch die Angabe von Spannung und Temperatur gekennzeichnet werden können, schließt ein Bereich an, in dem das Materialverhalten durch eine *phänomenologische Theorie*, die sogenannte Plastizitätstheorie beschrieben wird.

Anschaulich lässt sich das prinzipielle Materialverhalten an Hand des einachsigen Zugversuches und dem daraus resultierenden Spannungs-Dehnungsdiagramms darstellen, welches schematisch in Abbildung 2.2 dargestellt ist.

Wird der Werkstoff belastet, verformt sich ein Element unter der wirkenden Spannung zuerst rein elastisch. Nimmt die Spannung weiter zu und wird die Elastizitätsgrenze mit Erreichen der Fließspannung σ_Y überschritten, kommt es zur *plastischen Verformung* des Elements.

Eine fundamentale Annahme der Plastizitätstheorie ist dabei die additive Aufteilung der als klein angenommenen, totalen Dehnung ε^t in einen elastischen und einen plastischen Anteil der Form [2, S.179]

$$\varepsilon^t = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}. \quad (2.25)$$

Wie in Abbildung 2.2 dargestellt, hat eine Rücknahme der Spannung entsprechend dem Hookschen Gesetz einen Abbau des elastischen Anteils der Verformung zur Folge. Der plastische Anteil ist im Gegensatz dazu dadurch charakterisiert, dass selbst durch eine totale Entlastung des Elements die plastische Verformung nicht zurückgenommen werden kann.

2. Grundlagen aus der Literatur

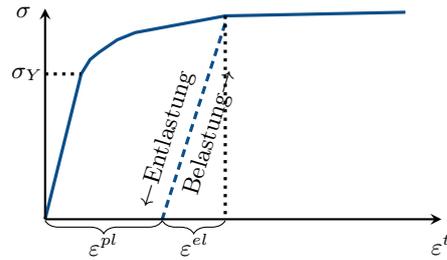


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des Spannungs-Dehnungs Diagramm im einachsigen Zugversuch. Bei Entlastung des Werkstoffs bleibt der plastische Anteil der Dehnung erhalten.

Eine erneute Verformung des Elements ist aus den oben genannten Gründen abhängig von der durchlaufenen Belastungshistorie. Der Dehnungszustand lässt sich in diesem Bereich also nur unter Hinzunahme von zusätzlichen Zustandsvariablen ζ_i , wie zum Beispiel der Verformungsgeschichte, beschreiben: $\epsilon = f(\sigma, \zeta_i, \dots)$.

Diese Wegabhängigkeit des Dehnungszustandes im plastischen Bereich bedeutet, dass es sich hier um einen inelastischen Prozess, eine irreversible Zustandsänderung handelt. Messungen haben ergeben, dass ca. 90% der aufgewendeten plastischen Verformungsarbeit in Wärme umgewandelt wird und nur der vergleichsweise geringe Anteil von 10% in die Gestaltänderung geht [2, S.175].

2.1.2.1. Physikalische Ursachen der plastischen Verformung

Wird ein Werkstoff durch eine äußere Kraft belastet, kommt es auf atomarer Ebene zuerst zu einer Verzerrung der Gitterstruktur, da die Gitterbausteine aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt werden [4, S.246]. Diese Auslenkung verschwindet vollständig, wenn die äußere Kraft weggenommen wird - man spricht von elastischer Verformung.

Die Gestalt eines Werkstoffes kann auch dauerhaft (=plastisch) verändert werden, sofern die angewendete Kraft eine kritische Größe übersteigt. Durch Röntgenbeugung kann gezeigt werden, dass sich durch diesen Verformungsprozess die Kristallstruktur, im Gegensatz zur elastischen Verformung jedoch nicht ändert [5]. Auf mikroskopischer Ebene lässt sich dieses Verhalten nur durch eine Gleitung entlang kristallographischer Ebenen erklären. Bei dieser Art der Verformung werden Bindungen zwischen benachbarten Atomen teilweise aufgebrochen und danach mit neuen Nachbarn wiederhergestellt, was zu einer inelastischen Verformung führt [4, S.247]. Der Vorgang kann jedoch nicht in einem einzigen Schritt erfolgen, da die für diesen Prozess in einem idealen Kristallgitter die benötigten Schubspannung die Bruchspannung um Größenordnungen übersteigen müssten. Vor einer plastischen Verformung würde also der Bruch des Materials eintreten.

Der Grund, warum die beobachteten Schubspannungen um bis zu vier Größenordnungen kleiner als die theoretischen Schubspannungen sind, ist in der Abweichung vom idealen Gitter zu finden. Das Abgleiten einer Gitterebene erfolgt zeitlich nacheinander über den energetisch weit günstigeren Mechanismus der Bewegung einer vorliegenden Versetzung.

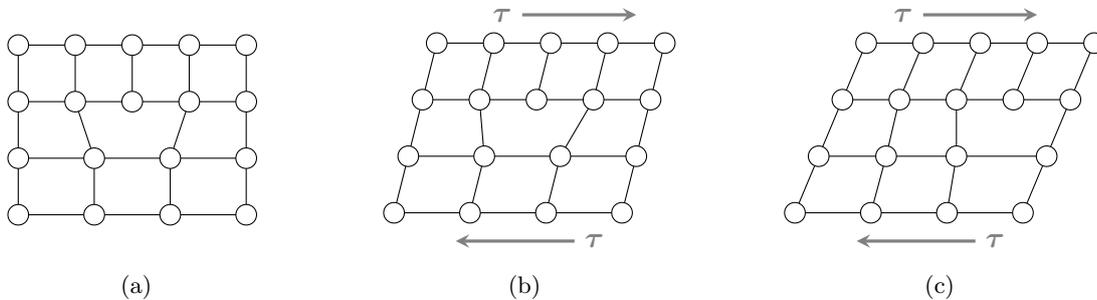


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung des Vorgangs der plastischen Verformung durch Bewegung einer Versetzung (siehe z.B. [11, S.16] oder [5, S.210]).

Die Versetzung bewegt sich auf diese Weise im Laufe der äußeren Belastung durch das Metall bis es eine Oberfläche erreicht und dort eine Stufe bildet oder auf ein Hindernis, wie zum Beispiel eine Korngrenze stößt [11, S.18].

Dieses Aufstauen von Versetzungen erhöht die notwendige Kraft, um eine Verformung des Werkstoffes zu erreichen. Dieses Verhalten wird als *Materialverfestigung* bezeichnet.

Für die plastische Verformung von Metallen sind neben der Bewegung von Versetzungen noch andere Mechanismen verantwortlich: bei hohen Temperaturen spielen Diffusionsvorgänge eine wichtige Rolle, im Bereich tiefer Temperaturen die Bildung von Zwillingen [5].

2.1.2.2. Fließkriterium

Der Beginn des plastischen Bereichs, und somit die Elastizitätsgrenze lässt sich im eindimensionalen Fall anschaulich mit Hilfe des Spannungs-Dehnungsdiagramms (siehe Abbildung 2.2) darstellen.

Mathematisch wird das Erreichen des plastischen Bereichs für einen beliebigen, mehrachsigen Spannungszustand durch das sogenannte *Fließkriterium* festgelegt. Geht man der Einfachheit halber von einem isotropen Werkstoff aus, nimmt dieses die allgemeine Form

$$f(J_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.26)$$

2. Grundlagen aus der Literatur

an, wobei die J_i in Gl.(2.26) wiederum die ersten drei Invarianten des Cauchyschen Spannungstensors (siehe Abschnitt 2.1.1.4) darstellen.

Mit Hilfe dieser, im Folgenden noch genauer zu definierenden, Funktion f ist es nun möglich, den elastischen und plastischen Bereich voneinander mit der Definition

$$f(J_1, J_2, J_3) \begin{cases} < 0 & \text{elastisch,} \\ = 0 & \text{plastisch,} \\ > 0 & \text{nicht zulässig,} \end{cases} \quad (2.27)$$

abzugrenzen.

Das Fließkriterium für ideal plastische Werkstoffe lässt sich noch vereinfachen. Verwendet man an Stelle der Invarianten des Cauchyschen Spannungstensors die Invarianten des zugehörigen *Spannungsdeviators*, der durch

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ii}\sigma \quad (2.28)$$

definiert ist, kann Gl. (2.26) geschrieben werden als

$$f(J'_2, J'_3) = 0 \quad \text{mit} \quad J'_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}, \quad J'_3 = \frac{1}{3}\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{kl}, \quad (2.29)$$

da für die erste Invariante des Spannungsdeviators $J'_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$ gilt.

In dieser Formulierung kommt die Beobachtung zum Ausdruck, dass nur der deviatorische Anteil der Spannung σ'_{ij} einen Einfluss auf den Beginn des Fließens hat [6, S.112].

Das wohl bekannteste aller Kriterien, das Fließkriterium nach *von Mises*, nimmt eine noch einfachere Gestalt an. In der Arbeit aus dem Jahr 1913 schlägt von Mises vor [12], dass der Beginn des Fließens eines Werkstoffes dann eintritt, wenn J'_2 einen kritischen Wert⁴ annimmt.

Das Kriterium nach von Mises ist unabhängig von J'_3 und lautet daher in allgemeiner Form

$$f(J'_2) = 0. \quad (2.30)$$

Eine alternative Form des Fließkriteriums lautet [1]

$$2J'_2 = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = 2k^2 \quad (2.31)$$

Der Parameter k ist abhängig von etwaigen Vorverformungen des Werkstoffes und kann z.B. durch einen einfach Zugversuch bestimmt werden. Mit $\sigma_1 = \sigma_Y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ergibt

⁴Daher stammt auch die Bezeichnung der klassischen "J2-Fließtheorie", in der das plastische Werkstoffverhalten mit dem Fließkriterium nach von Mises beschrieben wird.

sich $k = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_Y$ bzw. eingesetzt in Gl. (2.30) die bekannte Form

$$\sigma_Y = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'} \quad (2.32)$$

Sehr häufig findet man in der Literatur eine geometrische Darstellung des Fließkriteriums in einem dreidimensionalen Raum, der durch die drei Hauptnormalspannungen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ aufgespannt wird. Gl. (2.30) wird in dieser Darstellung repräsentiert durch einen Zylinder, der entlang der hydrostatischen Achse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ verläuft.

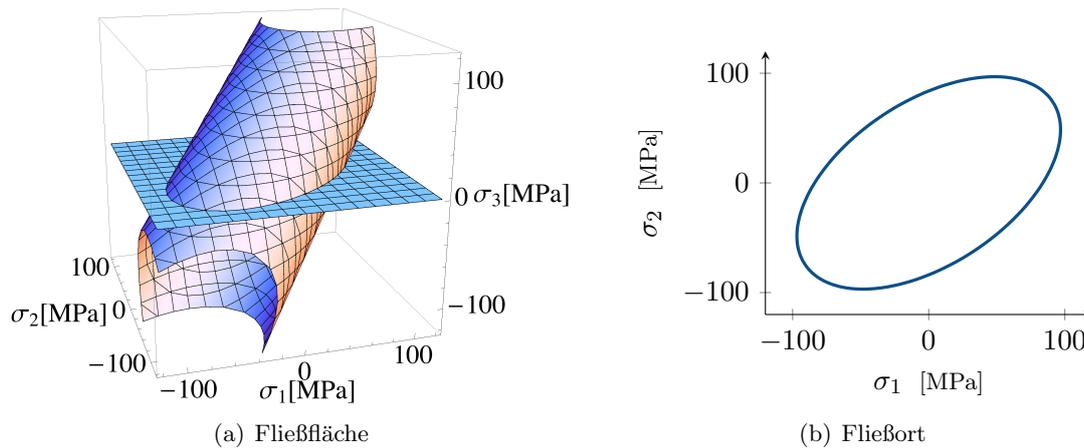


Abbildung 2.4.: Geometrische Darstellung der Funktion Gl.(2.32) nach von Mises (a) und (b) Fließort durch Schnitt des Zylinders mit der Ebene $\sigma_3 = 0$ für Aluminium AA6016.

Dieser Zylinder wird als *Fließfläche*, die durch den Schnitt dieses Zylinders mit einer Ebene entstehende Kurve als *Fließort* bezeichnet.

2.1.2.3. Berücksichtigung der Anisotropie von Werkstoffen

Das Fließkriterium nach von Mises (Gl. (2.32)) beschreibt einen isotropen Werkstoff, das heisst die Materialeigenschaften sind richtungsunabhängig. Reale Werkstoffe können jedoch eine zum Teil recht stark ausgeprägte Anisotropie aufweisen. Daher ist es notwendig, diese auch im Fließkriterium zu berücksichtigen.

Die Anzahl der im Laufe der Zeit entwickelten Fließkriterien ist beachtlich, daher wird im Folgenden nur eine Auflistung der bekanntesten Fließkriterien⁵ gegeben:

⁵Eine ausführlichere Behandlung der wichtigsten Fließkriterien ist in [7] zu finden.

2. Grundlagen aus der Literatur

Das Kriterium nach Hill 1948 stellt eine Verallgemeinerung zum Kriterium nach von-Mises dar. Das ebenfalls quadratische Kriterium wird vorwiegend zur Beschreibung von Stahlwerkstoffen herangezogen und lautet [7, S.130]

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1. \quad (2.33)$$

Die Parameter F, G, H, L, M und N im Fließkriterium müssen durch Versuche geeignet ermittelt werden um die Anisotropie des Werkstoffes zu charakterisieren.

Es hat sich gezeigt, dass das quadratische Kriterium von Hill 1948 nicht gut geeignet ist, um das plastische Fließen bestimmter Materialien, darunter zum Beispiel die Gruppe der Aluminiumlegierungen zu beschreiben [7, S.135]. Sogenannte *nichtquadratische Fließkriterien* sind dafür besser geeignet.

Das Kriterium nach Hosford ist ein Beispiel für ein solches nichtquadratisches Fließkriterium und hat die Form [7, S.139]

$$F |\sigma_y - \sigma_z|^a + G |\sigma_z - \sigma_x|^a + H |\sigma_x - \sigma_y|^a = \sigma^a. \quad (2.34)$$

Die Parameter F, G, H und a im Exponenten sollen eine optimale Anpassbarkeit des Fließkriteriums gewährleisten. Der Autor gibt an, dass sich die Wahl des Exponenten $a = 6$ für fcc-Materialien am besten eignet. Das Verhalten von bcc-Materialien kann nach seinen Angaben mit dem Exponenten $a = 8$ beschrieben werden.

Ein in der Praxis wichtiger Fall ist die Beschreibung der Anisotropie von dünnen Blechen, welche durch den Herstellungsprozess bedingt ist.

In diesen Blechen lässt sich das Anisotropieverhalten der Werkstoffe in den oben genannten Fließkriterien durch die sogenannten *Lankford-Koeffizienten* r_0, r_{45} und r_{90} ausdrücken. Diese Koeffizienten, die vielfach auch als *r-Werte* bezeichnet werden, können aus uniaxialen Zugversuchen bestimmt werden. Hierbei wird eine Probe in Längsrichtung gezogen und das Verhältnis der dabei auftretenden Dehnungen in Breiten- und Dickenrichtung gebildet. Für den r-Wert ergibt sich damit

$$r_x = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}. \quad (2.35)$$

Der Subskript x bestimmt dabei den Winkel zwischen der Längsachse des untersuchten Probenstücks und der Walzrichtung des ursprünglichen Bleches [7, S.123].

Für das Fließkriterium nach Hill 1948 ergibt sich aus Gl.(2.33) unter der Annahme des ebenen Spannungszustandes im Hauptspannungsraum [7, S.132]

$$\sigma_1^2 - \frac{2r_0}{1+r_0}\sigma_1\sigma_2 + \frac{r_0(1+r_{90})}{r_{90}(1+r_0)}\sigma_2^2 = \sigma_Y^2. \quad (2.36)$$

Das Kriterium nach Hosford aus Gl.(2.34) vereinfacht sich für den Fall des dünnen Bleches zu [7, S.141]

$$\frac{1}{r_0 + 1} |\sigma_1|^a + \frac{r_0}{r_{90}(r_0 + 1)} |\sigma_2|^a + \frac{r_0}{r_0 + 1} |\sigma_1 - \sigma_2|^a = \sigma_Y^a. \quad (2.37)$$

Die Spannung σ_Y bezeichnet dabei in beiden Fällen die Fließspannung unter uniaxialer Belastung.

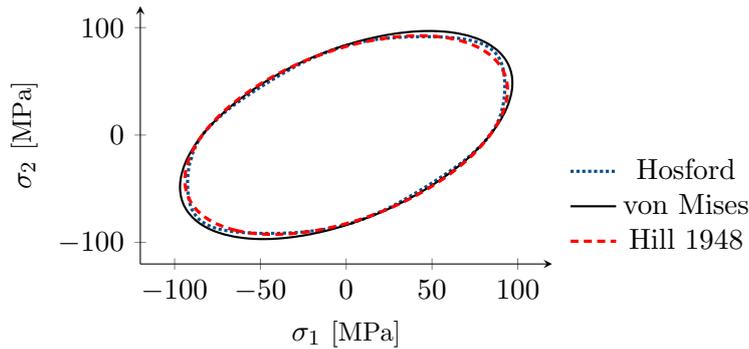


Abbildung 2.5.: Vergleich der isotropen Fließortbeschreibung nach von Mises mit den anisotropen Formulierungen nach Hill1948 und Hosford für Aluminium AA6016. Für die Darstellung wurden die Lankford-Koeffizienten $r_0 = 0.85$, $r_{90} = 0.8$ sowie eine Fließspannung von $\sigma_Y = 84\text{MPa}$ verwendet [13].

2.1.2.4. Verfestigung

Reale Werkstoffe zeigen eine Abhängigkeit zwischen Spannung und Dehnung, wie sie bereits in Abbildung 2.2 durch den Verlauf der Spannungs-Dehnungskurve dargestellt wurde. Allgemein lässt sich das Materialverhalten nach dem *Druckerschen Postulat* in drei Bereiche unterteilen [10, S.125]:

$$d\sigma d\varepsilon^{pl} \begin{cases} \geq 0 & \text{Materialverfestigung} \\ = 0 & \text{ideal-plastisches Materialverhalten} \\ \leq 0 & \text{Materialentfestigung} \end{cases} \quad (2.38)$$

Ein ideal-plastisches Verhalten bedeutet, dass ab dem Eintritt des Fließens ein Zunehmen der Dehnung auch ohne Vergrößerung der Spannung möglich ist (siehe Bereich (2) in Abbildung 2.6). Das Produkt aus Spannungs- und Dehnungsinkrement ist im ideal-plastischen Fall $d\sigma d\varepsilon = 0$.

2. Grundlagen aus der Literatur

Eine Abweichung vom ideal-plastischen Verhalten wird mit dem Begriff der *Materialverfestigung* bezeichnet, wenn im plastischen Bereich nur durch eine monotone Erhöhung der äußeren Spannung eine weitere Verformung des Materials möglich ist (Bereich (1) in Abbildung 2.6). Es gilt das Stabilitätskriterium $d\sigma d\varepsilon > 0$.

Auf mikroskopischer Ebene ist für die Verfestigung des Werkstoffs bei zunehmender Belastung das Aufstauen von Versetzungen an Hindernissen, wie zum Beispiel Einschlüssen und Versetzungslinien[11, S.18] verantwortlich zu machen.

Neben dem stabilen Verfestigungsverhalten kann auch sogenannte *Materialentfestigung* auftreten, welches ein instabiles Verhalten darstellt (Bereich (3) in Abbildung 2.6). Nach Erreichen eines Maximums der Spannung nimmt die Verformung mit abnehmender Spannung weiter zu. In diesem Bereich gilt $d\sigma d\varepsilon < 0$. Die Angabe eines eindeutigen Spannungszustandes lässt sich, wie beim ideal-plastischen Materialverhalten, nur durch Vorgabe der Dehnung erreichen[2, S.177].

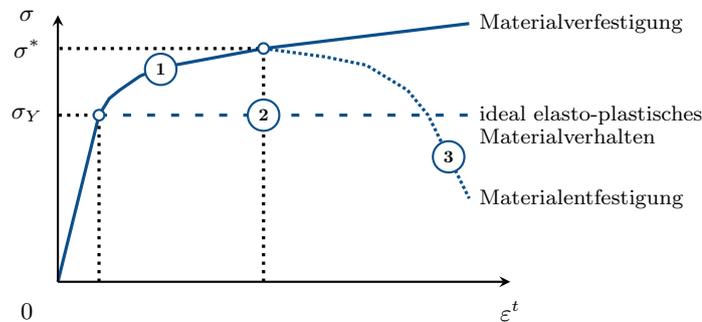


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung des Materialverhaltens nach dem Drucker'schen Postulat Gl. (2.38).

Für das Fließkriterium aus dem vorigen Abschnitt bedeutet dies, dass die Abhängigkeit von der Vorgeschichte berücksichtigt werden muss. Anschaulich gesprochen muss erreicht werden, dass der Durchmesser des Fließzylinders in Abbildung 2.4 in Abhängigkeit eines oder mehrerer Parameter anwachsen kann. Die geometrische Form der Fließfläche bleibt während des Vorgangs jedoch unverändert⁶.

Eine Möglichkeit besteht darin, das Maß der Verfestigung durch die am Material verrichtete plastische Arbeit

$$W^{pl} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.39)$$

⁶Ist zusätzlich noch eine Verschiebung des Ursprungs notwendig spricht man von kinematischer Verfestigung.

zu charakterisieren indem man im Fließkriterium nach von Mises (Gl. (2.32)) die konstante Fließspannung σ_Y durch

$$\sigma_Y = \bar{\sigma} = F(W^{pl}) \quad (2.40)$$

ersetzt und damit wegabhängig macht.

Das Inkrement der geleisteten plastischen Arbeit dW^{pl} ist gegeben durch

$$dW^{pl} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} := \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^{pl} \quad (2.41)$$

und stellt eine mögliche Definition des *arbeitsäquivalenten Vergleichsdehnungsinkrements* $d\bar{\varepsilon}^{pl}$ dar [14, S.236].

Forderung nach Volumenkonstanz Da der Beginn des Fließens und somit das vorgestellte Fließkriterium nach von Mises nur vom deviatorischen Anteil der Spannung σ'_{ij} abhängt, darf eine rein hydrostatische Spannungsänderung aus Konsistenzgründen auch keinen Beitrag zur plastischen Arbeit dW^{pl} liefern [1, S.26]. Dies ist erfüllt sofern *Volumenkonstanz* bzgl. der plastischen Anteile der Dehnung vorliegt:

$$d\varepsilon_{ii}^{pl} = 0 \quad (2.42)$$

Diese Forderung scheint nicht im Widerspruch mit Experimenten zu stehen [1, S.27].

Definition von Vergleichsgrößen Eine Alternative zur Beschreibung der Verfestigung mittels der plastischen Arbeit kann über die direkte Definition von *Vergleichsgrößen* erfolgen. In diesem Fall wird eine skalare Größe, die sogenannte *äquivalente plastische Dehnung*, durch die Beziehung

$$\bar{d\varepsilon}^{pl} := \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{pl} d\varepsilon_{ij}^{pl}} \quad (2.43)$$

definiert. Vielfach wird auch die Bezeichnung *Vergleichsdehnung* verwendet.

Werden die plastischen Vergleichsinkremente $\bar{d\varepsilon}^{pl}$ entlang des Weges aufintegriert, erhält man ein Maß für die gesamte am Werkstoff entstandene plastische Verformung. Die Verfestigung lässt sich dann damit in ähnlicher Weise wie in Gl. (2.40) beschreiben durch

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}^{pl}) \quad \text{mit} \quad \bar{\varepsilon}^{pl} = \int \bar{d\varepsilon}^{pl}. \quad (2.44)$$

Durch die Festlegung der äquivalenten plastischen Dehnung in Gl. (2.43) mit dem willkürlich anmutenden Koeffizienten $\sqrt{\frac{2}{3}}$ stellt Gl. (2.44) eine Verallgemeinerung des im eindimensionalen Zugversuch beobachteten Zusammenhangs zwischen wahrer Spannung σ und logarithmischer Dehnung ε auf einen mehrachsigen Spannungszustand dar.

2. Grundlagen aus der Literatur

Für die Funktion $H(\bar{\varepsilon}^{pl})$ existieren in der Literatur zahlreiche Ansätze, um das Materialverhalten der unterschiedlichen Werkstoffe zu beschreiben:

$$\text{Hollomon [15, S.268]:} \quad \bar{\sigma}_h = K_h \bar{\varepsilon}^{n_h}, \quad (2.45)$$

$$\text{Hockett-Sherby [16, S.94]:} \quad \bar{\sigma}_{hs} = a_{hs} - (a_{hs} - s_{0,hs}) \exp(-c_{hs} \bar{\varepsilon}^{n_{hs}}), \quad (2.46)$$

$$\text{Swift [17, S.]} \quad \bar{\sigma}_{sw} = K_{sw} (\bar{\varepsilon}_{0,sw} + \bar{\varepsilon})^{n_{sw}}. \quad (2.47)$$

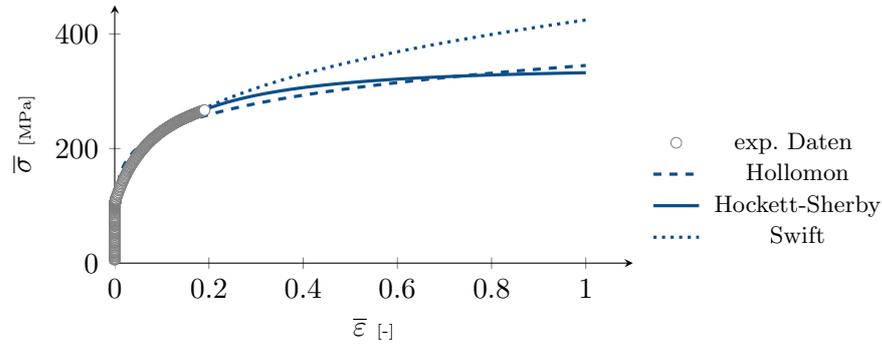


Abbildung 2.7.: Experimentell aufgezeichnete Fließkurve von Aluminium AA6016 [13] und Extrapolationen nach Hollomon ($K_h = 345.0$, $n_h = 0.178$), Hockett-Sherby ($a_{hs} = 338.288$, $s_{0,hs} = 83.884$, $c_{hs} = 3.763$, $n_{hs} = 0.648$), und Swift ($K_{sw} = 423.752$, $\bar{\varepsilon}_{0,sw} = 0.004845$, $n_{sw} = 0.276$).

Die in den Verfestigungsgesetzen auftretenden Parameter werden durch Anpassung an experimentelle Daten⁷ (vorwiegend aus einachsigen Zugversuchen) bestimmt, wie dies in Abbildung 2.7 dargestellt ist. Aus dieser Darstellung ist auch abzulesen, dass nicht jedes Verfestigungsgesetz für jedes Material geeignet ist. Für den vorliegenden Aluminiumwerkstoff scheint der Ansatz nach Hockett-Sherby mit der Beschreibung der Sättigung durch eine Exponentialfunktion die beste Wahl zu sein.

2.1.2.5. Fließregel

In den vorangegangenen Abschnitten wurde geklärt, welche Hypothese dem Beginn der plastischen Verformung eines Werkstoffes zugrunde gelegt werden kann und mit welchen Ansätzen die experimentell beobachtete Verfestigung beschrieben werden kann.

Die wichtige Fragestellung nach dem Zusammenhang der einzelnen Komponenten des jeweiligen Spannungs- und Dehnungstensors wurde noch nicht adressiert.

⁷An dieser Stelle sei angemerkt, dass für den Prozess der Parameterbestimmung im Allgemeinen nur experimentelle Daten bei geringen Dehnungen (im vorliegenden Fall bis ca. $\varepsilon \approx 0.2$) zur Verfügung stehen und eine Extrapolation weit über diesen Bereich hinaus mit sehr hohen Unsicherheiten behaftet ist.

Mit dem Druckerschen Postulat⁸ $d\sigma : d\varepsilon^{pl} \geq 0$ (siehe Gl.(2.38)) kann gezeigt werden, dass für einen zyklischen Prozess, ausgehend von einem Spannungszustand σ^* , die verrichtete plastische Arbeit positiv sein muss [2, S.184]:

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^{pl} \geq 0 \quad (2.48)$$

Der Spannungszustand σ^* kann dabei im Gegensatz zum Zustand σ auch im elastischen Bereich, also innerhalb der Fließfläche liegen. Aus der Ungleichung (2.48) ergeben sich in weiterer Folge zwei sehr wichtige Grundsätze der Plastizitätstheorie. Verwendet man dort an Stelle der Tensoren die Darstellung in Form von Vektoren mit jeweils sechs Komponenten, wie in Abschnitt 2.1.1.4 gezeigt, degeneriert die zweifache Überschiebung zum Skalarprodukt und es gilt

$$(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^*) \vec{d\varepsilon}^{pl} \geq 0. \quad (2.49)$$

Diese Beziehung lässt sich in reduzierter Dimensionalität geometrisch veranschaulichen:

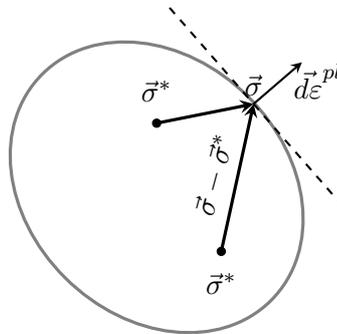


Abbildung 2.8.: Konvexe Fließfläche und plastisches Dehnungszinkrement in Richtung des Gradienten.

Soll Gl. (2.49) für beliebige σ^* gelten, muss das vektorielle Dehnungszinkrement $d\varepsilon^{pl}$ normal auf der – an der Stelle σ errichteten – Tangente an die Fließfläche stehen. Diese Eigenschaft wird als *Normalenregel* bezeichnet und ist in Abbildung 2.8 schematisch dargestellt. Weiters ergibt sich, dass alle Zustände σ^* auf der inneren Seite bzgl. der Tangente liegen müssen, damit (2.49) nicht verletzt wird. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Fließfläche an allen Punkten konvex ist [10, S.128].

Aufgrund der beiden Bedingungen - Normalität und Konvexität - kann die Existenz eines plastischen Potentials postuliert werden [2, S.184], das im Rahmen der assoziierten Plastizität mit der Fließfunktion $f(\sigma_{ij})$ gleichgesetzt wird. Mit diesen Überlegungen

⁸Das Symbol $:$ bezeichnet die zweifache Überschiebung der beiden Tensoren zweiter Stufe $d\sigma$ und $d\varepsilon^{pl}$.

2. Grundlagen aus der Literatur

ergibt sich für die plastischen Dehnungsincremente⁹

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2.50)$$

Dabei wird mit $d\lambda$ ein noch unbestimmter Proportionalitätsfaktor eingeführt, der die Größe der plastischen Dehnung festlegt. In der Literatur wird dieser Parameter vielfach als *plastischer Multiplikator* [2, S.185] bezeichnet.

Dieser Parameter kann durch Einsetzen von Gl.(2.50) in die Definition der äquivalenten plastischen Arbeit, gegeben durch Gl. (2.41), bestimmt werden:

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}^{pl}}{\sigma_{ij} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (2.51)$$

Für den speziellen Fall des Fließkriteriums nach von Mises ergibt sich der Konsistenzparameter zu $d\lambda = d\bar{\varepsilon}^{pl}$ und der Zusammenhang zwischen plastischen Dehnungsincrement und dem Deviator des Spannungstensors lautet dann

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}. \quad (2.52)$$

Der Tensor der plastischen Dehnungsincremente ist also koaxial zum *Spannungsdeviator* σ'_{ij} .

Das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsleistung stellt einen modernen Zugang der mathematischen Beschreibung der Plastizität dar [18, S.103]. Aus diesem, Mises zugeschriebenen Prinzip[1, S.51], lassen sich die oben dargestellten Zusammenhänge der Fließregel und der Konvexität des Fließortes direkt ableiten. In diesem Formalismus stellt $d\lambda$ einen *Lagrange Parameter* dar.

⁹Dieser Zusammenhang wird vielfach mit dem Namen Lévy-Mises-Saint-Venant Gleichung bezeichnet. Die Verallgemeinerung, die auch die elastischen Anteile der Dehnung berücksichtigt stammt von Prandtl und Reuss [1, S.39].

2.2. Grundbegriffe der Blechumformung

Das Gebiet der Blechumformung befasst sich mit der Formgebung von dünnen Blechen bis zu einer Dicke von ca. 10mm [6, S.6] und stellt eine spezielle Art der Umformtechnik¹⁰ dar, die unter anderem in der Automobilindustrie von großer Bedeutung ist. Charakteristisch für die Blechumformung ist die Verarbeitung von ebenen Rohteilen in Hohlteile wie z.B. Dosen oder Wannen.

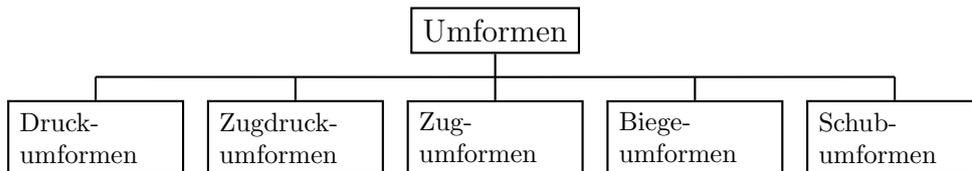


Abbildung 2.9.: Einteilung der Verfahren zur Umformung von Werkstoffen nach DIN 8582 [19].

Je nach verwendetem Verfahren und den dabei hauptsächlich im Blechwerkstoff auftretenden Spannungszuständen lässt sich das Gebiet der Umformtechnik in einzelne Untergruppen einteilen. In Abbildung 2.9 ist die Einteilung nach DIN 8582 dargestellt.

Thematisch ist diese Arbeit in zwei der bedeutendsten Teilbereiche der Umformtechnik angesiedelt, dem *Tief-* und *Streckziehen*. In der Einteilung nach DIN 8582 in Abbildung 2.9 ist das Tiefziehen unter dem Punkt Zugdruckumformen einzuordnen, es treten also hauptsächlich Kombinationen aus Zug- und Druckbelastung auf (siehe Abbildung 2.10). Ist hingegen eine reine, aber mehrachsige Zugbelastung vorherrschend, spricht man vom *Streckziehen*, das wiederum nach DIN 8582 dem Zugumformen zuzuordnen ist.

2.2.1. Umformvorgang

Ein typischer Umformvorgang ist in Abbildung 2.11 dargestellt. Der schematische Aufbau besteht einerseits aus dem Werkzeug mit Ziehmatrize, Niederhalter und Stempel, andererseits aus dem umzuformenden Rohkörper, der Blechplatte.

Bedingt durch den Ablauf des Vorganges treten in der Regel sowohl Streck- als auch Tiefziehbelastungen am Bauteil *nebeneinander* auf. Dies trifft im Besonderen bei der

¹⁰Unter dem Fertigungsverfahren des Umformens wird das *“Fertigen durch bildsames (plastisches) Ändern der Form eines festen Körpers”* verstanden. Masse und Materialzusammenhalt bleiben bei diesem Prozess unverändert[6, S.8]

2. Grundlagen aus der Literatur

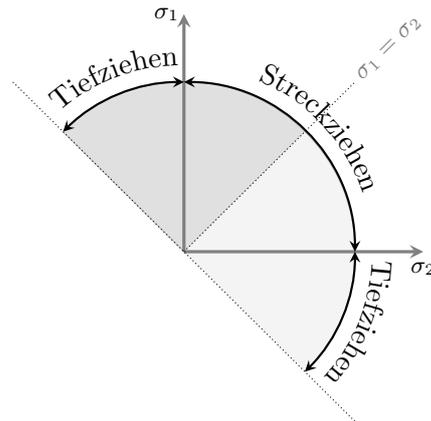


Abbildung 2.10.: Unterscheidung der Begriffe Tiefziehen und Streckziehen anhand der vorherrschenden Belastungszustände für einen ebenen Spannungszustand $\sigma_3 = 0$.

Herstellung von sogenannten “unregelmäßigen Ziehteilen” [20, S.385], zum Beispiel Karosserieteilen im Automobilbau, zu [21, S.132].

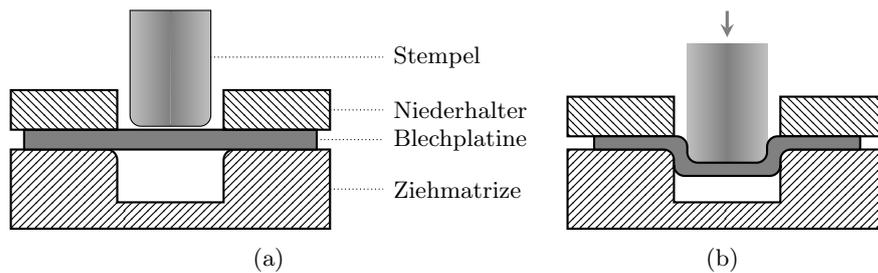


Abbildung 2.11.: Schematische Darstellung eines typischen Umformprozesses. (siehe z.B. [6, S.260])

Umformhistorie Beobachtet man während des Umformprozesses die Dehnungen an der Blechplatte, zum Beispiel durch Online-Messsysteme bei realen Umformungen¹¹ oder Auswertung von Finite-Elemente Simulationen, lässt sich für jeden Materialpunkt der zeitliche Ablauf der Verformungen darstellen. Die Darstellung im Dehnungsraum (Abbildung 2.12) soll als Umformhistorie bezeichnet werden. Häufig werden dafür auch die Begriffe *Umformpfad* oder *Dehnweg* verwendet.

Bleibt die Belastung über den gesamten Verlauf unverändert, spricht man von einem *linearen* oder *proportionalen* Umformpfad. Die Annahme von linearen Dehnwegen wird

¹¹In der Praxis ist die Messung von Dehnungen in der Regel nur an der Oberfläche möglich.

vor allem in der theoretischen Behandlung von Umformprozessen vereinfachend getroffen. In der Praxis ist diese Annahme, wenn überhaupt, nur näherungsweise erfüllt.

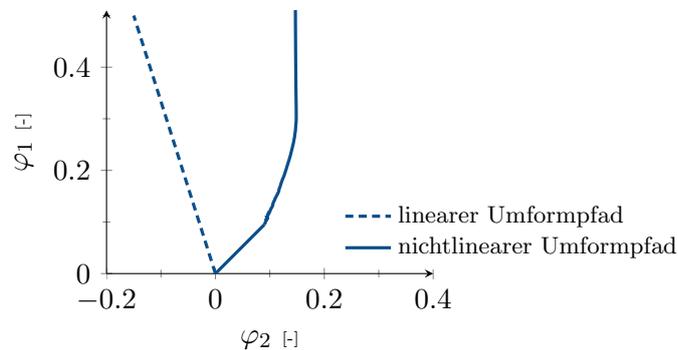


Abbildung 2.12.: Schematische Darstellung zur Unterscheidung eines linearen von einem nichtlinearen Umformpfad.

Im Speziellen gilt dies für Umformpfade aus mehrstufigen Umformprozessen, bei denen die Blechplatte in mehreren Schritten, teilweise durch unterschiedliche Maschinen umgeformt wird. Hier können mitunter abrupte Belastungswechsel auftreten, sodass sich ein komplexer, *nichtlinearer* Umformpfad ergibt.

Diese Abweichung von einer proportionalen Belastung des Werkstoffes bringt zusätzliche Probleme in der Beschreibung des Materialverhaltens mit sich. Abschnitt 2.2.4.3 beschäftigt sich näher mit dieser Thematik.

2.2.2. Verwendete Größen

Wie bereits eingangs erwähnt stellt eine Blechumformung eine besondere Art der Umformung dar. Diese Spezialisierung ermöglicht das Treffen von Annahmen, die wiederum eine Vereinfachung der beschreibenden Zusammenhänge und deren Größen zur Folge hat. Diese Vereinfachungen betreffen sowohl das Dehnungsmaß als auch den verwendeten Begriff der Spannung.

2.2.2.1. Dehnungsmaß

In der Umformtechnik werden auf Grund der auftretenden großen Verformungen an Stelle der Ingenieursdehnungen die logarithmischen Dehnungen verwendet. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Formänderungen* bzw. *Umformgraden* und wählt als Symbol

2. Grundlagen aus der Literatur

φ [2, S.84]:

$$\varphi \equiv \varepsilon = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (2.53)$$

Vielfach wird dieser Zusammenhang einer weiteren Vereinfachung unterzogen, indem man von einem *starr-plastischen* Materialverhalten ausgeht. Diese Annahme ist zulässig, da die elastischen Anteile gegenüber den sehr viel größeren plastischen vernachlässigt werden können¹². Es soll also

$$\varphi = \varepsilon^{pl} \quad (2.54)$$

gelten.

Entsprechend der Größe der Hauptdehnungen in der Blechebene wird φ_1 als Hauptformänderung, φ_2 als Nebenformänderung bezeichnet. Da auch weiterhin die Gültigkeit der Volumskonstanz vorausgesetzt wird, lässt sich die Formänderung in Dickenrichtung, φ_3 , aus Haupt- und Nebenformrichtung berechnen:

$$\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (2.55)$$

In der Blechumformung wird auch das Verhältnis der Inkremente der Neben- und Hauptformänderung angegeben, um eine Belastung im Dehnungsraum zu charakterisieren. Als Symbol für das *Formänderungsverhältnis* wird häufig β verwendet¹³:

$$\beta = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}. \quad (2.56)$$

Für ausgewählte Formänderungsverhältnisse werden in der Umformtechnik spezielle Bezeichnungen verwendet:

$$\beta = \begin{cases} -0.5 & \text{uniaxiale Belastung,} \\ 0 & \text{plane-strain Belastung,} \\ 1 & \text{äquibiaxiale Belastung.} \end{cases}$$

Eine graphische Darstellung dieser Einteilung ist in Abbildung 2.13(a) zu finden.

¹²Die elastischen Dehnungen für den Stahlwerkstoff DC04 erreichen $\varepsilon \approx 0.002$. Der plastische Bereich ist mit Dehnung bis $\varepsilon \approx 0.24$ ungefähr um den Faktor 120 größer [6, S.14].

¹³In der englischsprachigen Fachliteratur ist auch das Symbol α gebräuchlich [1, S.31].

2.2.2.2. Spannungen

Eine wichtige Annahme, die bei der Beschreibung von Blechumformungen getroffen wird, ist das Vorliegen eines ebenen Spannungszustandes, dass also die Hauptnormalspannungen in Dickenrichtung des Blechs verschwinden.

Das Verhältnis der, im Allgemeinen nicht verschwindenden Hauptnormalspannungen in der Blechebene, wird dann analog zu Gl.(2.56) dazu verwendet, um den Belastungszustand des Materials zu charakterisieren.

Als Parameter wird oftmals α verwendet, der dann eine Richtung im Hauptspannungsraum darstellt:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (2.57)$$

Unter Verwendung der Fließregel Gl.(2.50) und einer geeigneten Beschreibung des Fließorts¹⁴ kann das Verhältnis der Spannungen α auf eindeutige Weise in ein Verhältnis der Dehnungsinkremente β umgerechnet werden. Für einen isotropen Werkstoff ergibt sich mit dem Fließkriterium nach *von Mises* durch Anwenden von Gl.(2.52) der einfache Zusammenhang

$$\beta(\alpha) = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \quad \text{mit } \sigma_3 = 0. \quad (2.58)$$

Der Zusammenhang zwischen β und α nach Gl.(2.58) ist in Abbildung 2.13 graphisch veranschaulicht.

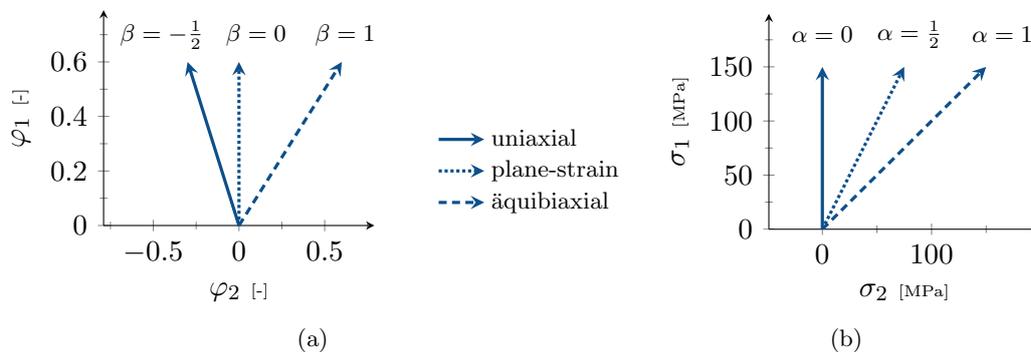


Abbildung 2.13.: Charakterisierung der Belastungszustände a) im Dehnungsraum durch β und b) im Spannungsraum durch α für isotropen Werkstoff nach Gl.(2.58).

Die zum logarithmischen Dehnungsmaß passende Spannung, welche die wirkende Kraft auf die aktuelle Querschnittsfläche bezieht, ist die sogenannte *wahre Spannung* [2, S.110]. Der zugehörige Cauchysche Spannungstensor wurde bereits in Abschnitt 2.1.1.4 eingeführt.

¹⁴Eine vorliegende Anisotropie des Werkstoffs kann auf diese Weise berücksichtigt werden.

2. Grundlagen aus der Literatur

2.2.3. Werkstoffversagen

Bei der einachsigen plastischen Verformung eines Werkstoffes durch eine äußere Last wird beobachtet, dass die zur Verformung notwendige Kraft bei einer bestimmten plastischen Dehnung ein Maximum erreicht.

Dieser Punkt ist nach Überlegungen, die auf Considère im Jahr 1885 [22, S.23] zurückgehen, dadurch charakterisiert, dass der Zuwachs an Fließspannung durch Materialverfestigung durch die gleichzeitige Abnahme der tragenden Querschnittsfläche des Werkstoffes kompensiert wird.

Das Erreichen des Kraftmaximums stellt zugleich den *Beginn der Einschnürung*¹⁵ dar [23, S.43], die bei weiterer Verformung zum Werkstoffversagen durch Bruch führt [24, S.61].

2.2.3.1. Einschnürung

Beim Phänomen der Einschnürung unterscheidet man zwei grundsätzliche Erscheinungsarten, die *verteilte* und die *örtliche* Einschnürung [20, S.71]. Angelehnt an die Bezeichnungen in der englischsprachigen Literatur¹⁶ wird auch oft von *diffuser* beziehungsweise *lokaler* Einschnürung gesprochen.

Nach Hosford und Caddell [23, S.237] ist die verteilte Einschnürung durch eine Reduktion in Quer- und Dickenrichtung gekennzeichnet, wohingegen bei einer örtlichen Einschnürung einzig ein Abnehmen der Dicke des Werkstoffes beobachtet wird.

Eine verteilte Einschnürung kann nach Hill [25, S.304] nach dem Erreichen eines Lastmaximums, ähnlich dem oben dargestellten, für beliebige Belastungszustände auftreten und stellt die Vorstufe einer örtlichen Einschnürung dar. Bei einer zweiachsigen Belastung, wie sie bei der Blechumformung meist vorherrscht wird im Gegensatz zum Kriterium nach Considère jedoch das Erreichen des Kraftmaximums für *beide* anliegenden Lasten gefordert.

Das mathematische Kriterium der verteilten Einschnürung wird Swift [17] zugeschrieben¹⁷ und lässt sich über den gesamten Bereich berechnen, der in der Blechumformung

¹⁵In der englischsprachigen Literatur wird die beginnende Einschnürung oft als “onset of necking” bezeichnet. Es ist anzumerken, dass in der Fachwelt rund um das Thema Einschnürung große Begriffsvielfalt herrscht.

¹⁶Hier werden die Begriffe des *diffuse necking* beziehungsweise *localized necking* verwendet.

¹⁷In der originalen Form wurde eine etwas andere Formulierung verwendet, die von Hill in einer späteren Publikation [25] erneut aufgegriffen und kritisch beleuchtet wurde [26, S.812]

von Interesse ist. Experimentell ist allerdings das Auftreten einer verteilten Einschnürung unter biaxialer Belastung sehr viel schwerer nachweisbar als im uniaxialen Fall [27, S.2].

Örtliche Einschnürung wird, im Gegensatz zur verteilten Einschnürung nur im Bereich zwischen $\beta = -1$ und $\beta = 0$ beobachtet und ist makroskopisch gekennzeichnet durch die Ausbildung einer "Furche". Die Dehnungen in diesem Bereich verhalten sich grundsätzlich anders als die im umgebende Material. Betrachtet man die Gesamtverlängerung einer Probe so wird diese nach Auftreten der örtlichen Einschnürung vollkommen durch das lokale Ausdünnen des Werkstoffes getragen, ohne dass die Regionen außerhalb der Einschnürung dazu beitragen. Bleibt die Belastung aufrecht, führt diese sehr schnell zum Bruch [28, S.180].

Das theoretische Konzept zur Beschreibung der örtlichen Einschnürung stammt von Hill [29]. Darin wird eine auftretende Unstetigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung als mathematische Idealisierung des Vorganges identifiziert.

2.2.3.2. Bruch

Wird der Werkstoff nach auftretender Einschnürung weiter belastet, kommt es zu einer immer stärkeren Verringerung des Querschnitts, welche letztendlich zum sogenannten *duktilen Bruch* [30, S.300] führt. Das in diesem Zusammenhang auch als *Einschnürbruch* [30, S.307] bezeichnete Werkstoffversagen wird durch die Bildung von Freiräumen an Einschlüssen im Material verursacht, welche sich dann unter der vorherrschenden Belastung ausdehnen und zusammenwachsen. Auf diese Weise bilden sich Mikrorisse, die dann in weiterer Folge den Bruch einleiten [23, S.186].

Bei dünnen Blechen ist nach Überschreiten der maximalen Schubspannung vielfach der sogenannte *Scherbruch* zu beobachten, Werkstoffe mit wenig ausgeprägtem duktilen Verhalten zeigen *Sprödbbruch* [30, S.299].

2.2.4. Konzept des Grenzformänderungsdiagramms

Bei komplexeren Umformvorgängen treten in der Regel die unterschiedlichsten Belastungszustände nebeneinander auf. In solchen Fällen besteht vor allem in der Praxis der Wunsch nach einer möglichst einfachen und effizienten Beurteilung, ob die maximale Umformbarkeit eines Werkstoffes in bestimmten Bereichen des Bauteils bereits überschritten wurde und Werkstoffversagen zu erwarten ist, oder ob das Material noch Umformungspotential aufweist.

2. Grundlagen aus der Literatur

Eine Möglichkeit zur Beantwortung dieser Fragestellung, die sowohl im industriellen als auch im akademischen Umfeld [31, S.151] große Bedeutung erlangt hat, ist die Anwendung des Konzepts der Grenzformänderungsanalyse.

Bei einem Grenzformänderungsdiagramm wird aus einer Reihe von Ersatzversuchen eine Kurve im Raum der Formänderungen (φ_2, φ_1) aufgenommen, die die größtmöglichen Umformgrade des Werkstoffes unter dem jeweiligen Belastungszustand repräsentieren sollen. Diese Kurve unterteilt den Raum in zwei Bereiche, in jenen unterhalb der Kurve der dadurch gekennzeichnet ist, dass der Werkstoff die aufgebrauchten Verformungen ohne Versagen erträgt, und jenen oberhalb, in dem mit "Werkstoffversagen" zu rechnen ist. Der Term "Werkstoffversagen" bezieht sich dabei auf das gewählte Kriterium, also z.B. auf die beginnende Einschnürung 2.2.3, wie es bei Blechumformungen in der Automobilindustrie häufig der Fall ist.

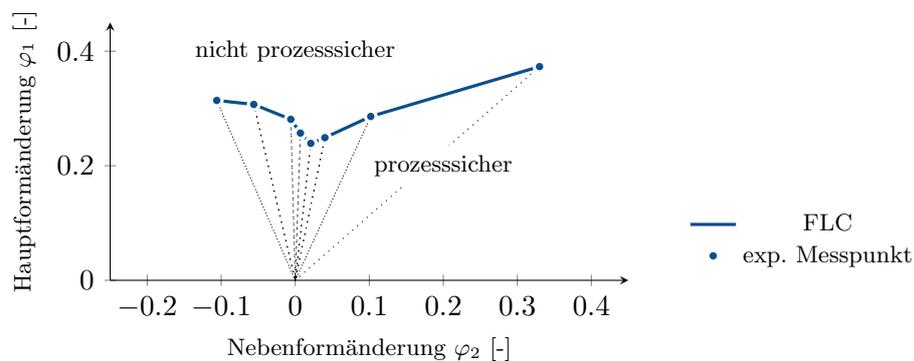


Abbildung 2.14.: Darstellung des Grenzformänderungsdiagramms und zugrundeliegender experimenteller Daten für Aluminium AA6016 [13].

2.2.4.1. Experimentelle Ermittlung der Grenzformänderungskurve

Experimentell wurden diese Grenzformänderungskurven bereits in den 60er Jahren von Keeler und Goodwin aufgenommen. Um die unterschiedlichen Belastungsarten zu realisieren, verwendeten sie runde Platinen in Kombination mit verschiedenen Stempelgeometrien.

Eine andere Möglichkeit der Versuchsdurchführung, die besonders im Bereich der Automobilindustrie bis heute Anwendung findet, wurde 1968 von *Nakazima et. al.* vorgeschlagen [32, S.149]. Hier wird eine feste Form des Stempels verwendet und die Geometrie der Proben, genauer gesagt die Taillierung des Blechstreifens, variiert, um ein bestimmtes Verhältnis aus Haupt- zu Nebenformänderung zu erreichen. Einige ausgewählte Probegeometrien sind in Abbildung 2.15 zu finden. Der Zusammenhang der Geometrie mit den realisierbaren Formänderungsverhältnissen ist in Abbildung 2.16 schematisch

dargestellt.

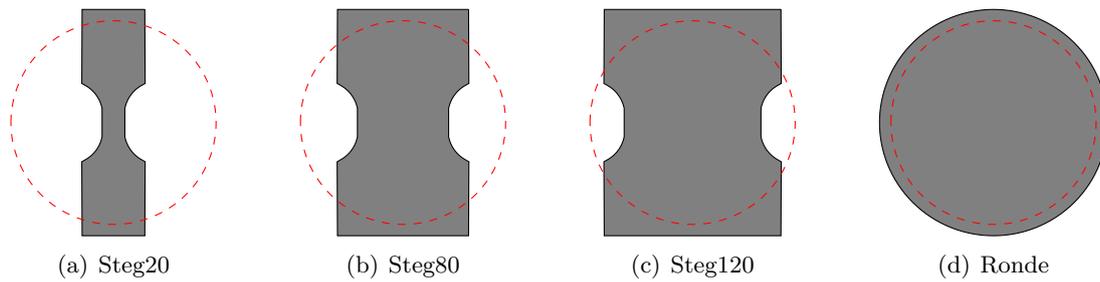


Abbildung 2.15.: Schematische Darstellung unterschiedlicher Probengeometrien nach Nakazima jeweils mit Ziehring.

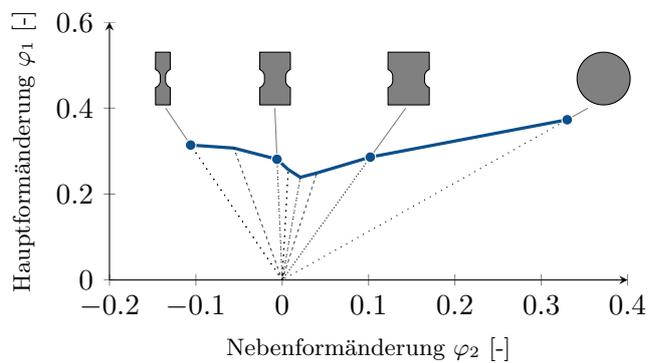


Abbildung 2.16.: Grenzformänderungsdiagramm von Aluminium AA6016 [13] mit Probengeometrien nach Nakazima für ausgewählte Richtungen.

Die Menge aller, je nach Art der Belastung experimentell ermittelten Grenzzustände ergeben durch geeignete Auswerteverfahren, die nach ISO 12004 [33, S.1] festgelegt sind, eine Grenzformänderungskurve für das betreffende Material im Raum der Formänderungen.

Der Zustand der, zur Ermittlung der Grenzformänderungen herangezogene dünnen Bleche wird in der Umformtechnik häufig mit *as-received* bezeichnet und bedeutet, dass es sich dabei um unverändertes Ausgangsmaterial aus der Produktion handelt.

2.2.4.2. Theoretische Beschreibung der Grenzformänderungskurve

Neben der experimentellen Bestimmung der Grenzformänderungskurve gibt es parallel dazu auch Bestrebungen von theoretischer Seite, mit Hilfe der Grundbeziehungen der Plastizitätstheorie diese Grenzkurve abzuleiten. Im wesentlichen haben sich über die Zeit drei unterschiedliche Theorien herausgebildet [20, S.71].

2. Grundlagen aus der Literatur

In Arbeiten aus dem Jahr 1952 beschrieben Hill [29, S.19] und Swift [17, S.1] eine mögliche theoretische Vorgehensweise, um Teile der bzw. die gesamte Grenzkurve analytisch zu ermitteln. Beide Modelle werden in Abschnitt 3.1.1 genauer vorgestellt. Ausserdem soll in Abschnitt 3.2 ein kurzer Überblick über Modelle gegeben werden, die auf den oben genannten Arbeiten basieren und gewissermaßen eine Weiterentwicklung darstellen.

Ein anderer Ansatz zur Berechnung der Grenzformänderungskurve wurde 1967 von Marciniak und Kuczynski [34, S.606] präsentiert. In dem, nach den Autoren benannten “M-K Modell” wird von einer bereits zu Beginn des Umformvorganges vorhandenen lokalen Schwächung des ansonst als Kontinuum betrachteten Werkstoffes ausgegangen. Als problematisch erweist sich im Rahmen dieser Theorie die anfängliche Festsetzung der Größe der Störung für die weitere Rechnung [20, S.S.73].

Als dritte Möglichkeit können sogenannte Schädigungsmodelle verwendet werden. Diese gehen im Gegensatz zu den beiden oben genannten kontinuumsmechanischen Ansätzen auf die mikroskopische Struktur des Werkstoffes ein und versuchen letztendlich durch Beschreibung der Bewegung und des Wachstums von Leerstellen im Werkstoff das Materialversagen zu beschreiben. Eine Schwierigkeit stellt die Vorgabe der Verteilung der Leerstellen im Werkstoff dar.

Den oben genannten theoretischen Ansätzen ist gemein, dass die damit berechneten Grenzformänderungskurven im Vergleich zu den vorliegenden experimentell ermittelten Kurven ein konservativeres¹⁸ Abbruchkriterium darstellen [20, S.75].

Aus Sicht der Industrie ist hinsichtlich der Optimierung der industriellen Prozesse eine Verkleinerung der Abweichungen der, durch theoretischen Modelle vorhergesagten, Umformbarkeit von den tatsächlich erreichbaren Umformgraden gewünscht. Modifikationen von bestehenden, in der Praxis als zu konservativ geltenden Modellen sind Gegenstand der aktuellen Forschung.

Demgegenüber steht der Ansatz eines neu entwickelten phänomenologischen Modells zur verbesserten Beschreibung der Umformbarkeit von Blechwerkstoffen, der im Kapitel 4 dieser Arbeit vorgestellt wird.

2.2.4.3. Gültigkeit der Grenzformänderungskurve

Die Aufnahme von Grenzformänderungskurven wurde von Goodwin und Keeler mit dem Ziel vorgeschlagen, ein möglichst einfaches und allgemein gültiges Kriterium für Materialversagen zu erhalten. Die zugrundeliegende Idee war, dass die Einschnürung nur vom aktuellen Spannungszustand abhängig ist [20, S.60].

¹⁸Experimentell können Grenzdehnungen beobachtet werden, die größer als die theoretisch erwarteten sind.

Allerdings zeigten Forschungsarbeiten unterschiedlichster Autoren [32, 35, 36], dass sowohl die Lage als auch die Form der Kurve zum Teil stark von der Umformgeschichte abhängig ist. Die Grenzformänderungskurve stellt also nur für Umformungen mit annähernd proportionaler Belastung ein zuverlässiges Kriterium dar. Wie Abbildung 2.17 an Hand von experimentellen Ergebnissen des Materials Aluminium AA6016 eindrucksvoll zeigt, wird das Umformpotential nichtlinearer Umformpfade durch die konventionelle Grenzformänderungsanalyse, je nach Belastungskombination, unter- (1) bzw. überschätzt (2).

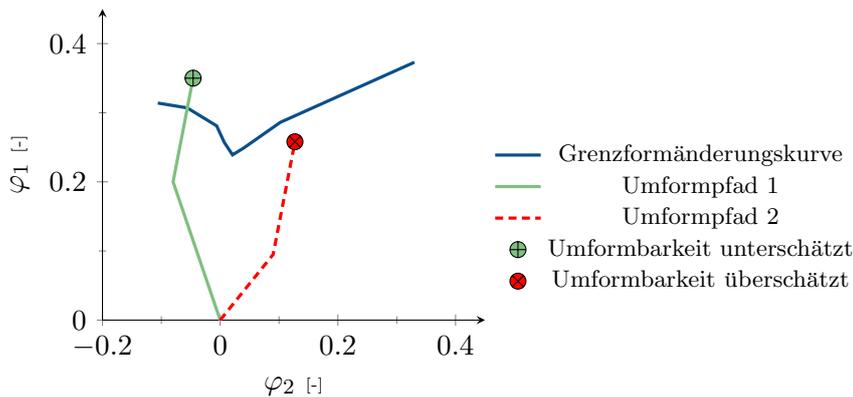


Abbildung 2.17.: Darstellung des Versagens der konventionellen Grenzformänderungsanalyse bei nichtlinearen Umformpfaden am Beispiel von experimentellen Ergebnissen von Aluminium AA6016 [13].

In der Literatur (z.B. [32, S.152]) ist dieses Materialverhalten bekannt. Ein abrupter Wechsel von einer uniaxialen auf eine äquibiaxiale Belastung hat eine Erhöhung der Umformbarkeit zur Folge, umgekehrt führt die vertauschte Reihenfolge von einer anfänglich biaxialen Verformung hin zu einer uniaxialen zu einer starken Einbuße an Umformbarkeit. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente zeigten Übereinstimmung mit den in der Literatur publizierten Aussagen. Eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse erfolgt in Abschnitt 5.3.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich eine Abweichung von der konstanten Belastung während eines Umformprozesses positiv auf die erzielbaren Formänderungen auswirkt, wenn im Laufe der Umformung das Spannungsverhältnis α und damit auch das Verhältnis der Formänderungen β *zunimmt* [36, S.597].

2.2.4.4. Experimentelle Realisierung nichtlinearer Umformwege

Um das Werkstoffverhalten unter solchen nichtproportionalen Belastungen gezielt untersuchen zu können, standen für die Durchführung dieser Arbeit spezielle *zweistufige*

2. Grundlagen aus der Literatur

Ersatzversuche zur Verfügung [13],[37]. Der Vorteil dieser Versuche liegen in der einfachen Festlegung bzw. Variation charakteristischer Prozessparameter. Ergebnisse dieser Ersatzversuche sind unter anderem bilineare Pfadverläufe, wie sie in Abbildung 2.17 dargestellt sind.

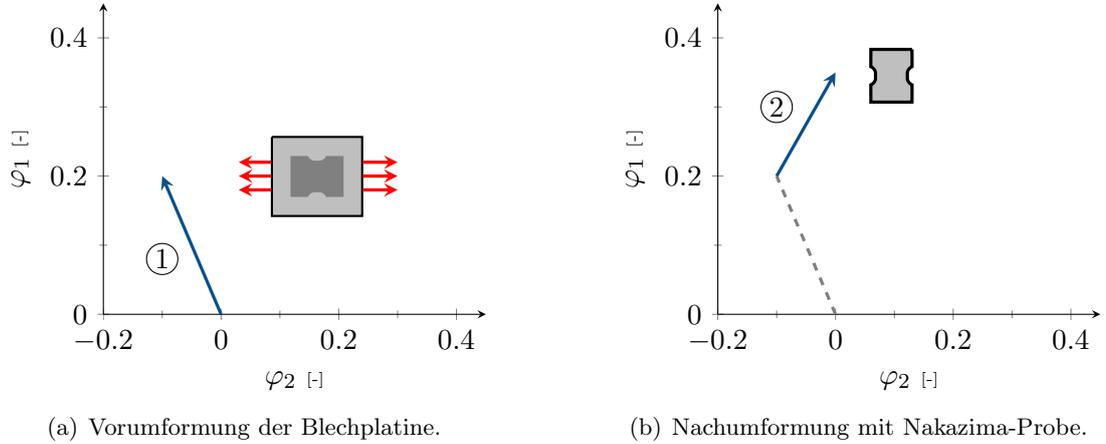


Abbildung 2.18.: Schematische Darstellung eines zweistufigen Ersatzversuchs zur Charakterisierung des Materialverhaltens bei nichtproportionalen Belastungszuständen (siehe z.B. [37]).

Die Ersatzversuche bestehen aus zwei nacheinander, auf unterschiedlichen Maschinen durchgeführten Umformprozessen (siehe [37, S.18]). Schematisch ist dieser Vorgang in Abbildung 2.18 dargestellt.

Im ersten Schritt wird eine Blechplatte bis zu einer vorgegebenen Formänderung verformt (Abbildung 2.18a)). Auf diesen Schritt folgen dann, analog zur Ermittlung der Grenzformänderungskurve, eine Reihe von Nakazima-Versuchen mit Proben, die aus den vorumgeformten Blechplatten geschnitten wurden. In Abbildung 2.18 b) ist repräsentativ für diesen Vorgang der zweiten Stufe nur eine spezielle Nachumformung dargestellt.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

Eine der wichtigsten Fragen in der Blechumformung ist die Vorhersage des Werkstoffversagens infolge der Belastung des Materials während des Umformprozesses.

3.1. Klassische Versagenskriterien

Die hier vorgestellten klassischen Versagenskriterien nach Considère, Swift, Hill und Müschenborn legen einen idealen Werkstoff im Sinne der Kontinuumsmechanik zu Grunde. Imperfektionen, die in realen Materialien immer vorhanden sind werden durch die hier vorgestellten Versagenskriterien nicht modelliert.

3.1.1. Physikalisch motivierte Versagenskriterien

Grundlage für die hier dargestellten physikalisch motivierten Versagenskriterien sind Überlegungen über den sogenannten *Grenzlastzustand*¹, die von Considère bereits im Jahr 1885 angestellt wurden [22, S.23]. Er beobachtete, dass in Zugversuchen eine beginnende Einschnürung auftritt, wenn das Lastmaximum in der Rundprobe erreicht wird.

Dieser Sachverhalt lässt sich beschreiben, indem man die in der Probe wirkende Last

$$L = \sigma_1 A \quad (3.1)$$

betrachtet, wobei σ_1 die wahre Spannung und A die aktuelle Querschnittsfläche bedeuten. Das Lastmaximum ist dabei durch

$$dL = d\sigma_1 A + \sigma_1 dA = 0 \quad (3.2)$$

gekennzeichnet.

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{dA}{A} \quad (3.3)$$

¹In der englischsprachigen Literatur wird dieser Zustand "maximum load condition" bezeichnet.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

Aus der Forderung nach Volumskonstanz

$$dV = d(lA) = dlA + ldA = 0 \quad (3.4)$$

läßt sich weiters

$$d\varepsilon_1 = \frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A} \quad (3.5)$$

ableiten.

Mit der Beziehung aus Gl.(3.5) ergibt sich schlussendlich

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1 \quad (3.6)$$

für das Eintreten des Grenzlastzustandes. Dieser Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass hier der Spannungszuwachs infolge der Verfestigung des Werkstoffs durch die auftretende Querschnittsverminderung exakt kompensiert wird [22, S.22].

In der Literatur wird das Erreichen des Grenzlastzustandes nach Gl.(3.6) vielfach als Kriterium für des Eintreten einer diffusen Einschnürung bei vorliegendem einachsigen Spannungszustand definiert [24, S.63].

Die Idee des Grenzlastzustandes nach Considère ist zunächst auf den einachsigen Spannungszustand beschränkt. Die Verallgemeinerung [38, S.992] auf einen zweiachsigen Spannungszustand, wie er in einem Blech näherungsweise vorherrscht, wurde von Swift in einer Arbeit aus dem Jahr 1952 vorgestellt [17, S.3].

3.1.1.1. Kriterium nach Swift für diffuse Einschnürung

Nach Swift ergibt sich für einen beliebigen zweiachsigen Belastungszustand die zentrale Bedingung für das Eintreten einer diffusen Einschnürung analog zum oben betrachteten einachsigen Fall.

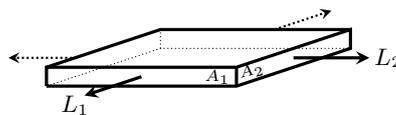


Abbildung 3.1.: Blechstreifen unter zweiachsigem Belastungszustand durch die Lasten L_1 und L_2 .

Zusätzlich zur Last L in Gl.(3.1) tritt bedingt durch den zweiachsigen Spannungszustand eine weitere, auf die Probe einwirkende Kraft auf:

$$L_1 = \sigma_1 A_1, \quad L_2 = \sigma_2 A_2. \quad (3.7)$$

3.1. Klassische Versagenskriterien

Swift fordert, dass für das Eintreten einer diffusen Einschnürung sowohl L_1 als auch L_2 ein Maximum erreichen müssen. In analoger Weise zu den Gln.(3.1-3.6) ergibt sich [17, S.3]

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1, \quad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} = \sigma_2. \quad (3.8)$$

Stabiles Werkstoffverhalten ist gewährleistet, wenn eine Erhöhung der von außen auferlegten Lasten durch den Zugewinn an Materialverfestigung kompensiert werden kann.

Um dies zu zeigen, wählt Swift in seiner Arbeit das Fließkriterium nach von Mises. Für eine bessere Vergleichbarkeit mit dem nachfolgend beschriebenen Kriterium nach Hill wird hier allerdings der allgemeinere Zugang aus [29, S.23] gewählt.

Die Fließspannung im Fließkriterium f lässt sich nach Gl.(2.40) an die Verfestigung des Werkstoffes koppeln. Damit bildet

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = F(W) \quad (3.9)$$

den Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen.

Diffuse Einschnürung tritt auf, wenn die Lastzunahme df durch die Spannungen σ_1 bzw. σ_2 größer ist als der Gewinn an Verfestigung dF durch die verrichtete plastische Arbeit:

$$df(\sigma_1, \sigma_2) \geq dF(W), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 \geq \frac{\partial F}{\partial W} (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2). \quad (3.11)$$

Setzt man die Bedingungen aus Gl.(3.8) und die Fließregel Gl.(2.50) in Gl.(3.11) ein ergibt sich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \geq \frac{\partial F}{\partial W} \left(\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right), \quad (3.12)$$

denn

$$d\sigma_i \stackrel{3.8}{=} \sigma_i d\varepsilon_i \stackrel{2.50}{=} d\lambda \sigma_i \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}. \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

Nach Umstellen der Ausdrücke erhält man:

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2}{\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}} \geq \frac{\partial F}{\partial W}. \quad (3.14)$$

Die rechte Seite von Gl.(3.14) entspricht der Verfestigung des Werkstoffes und lässt sich mit Hilfe der zu den Gleichungen (2.40) bzw. (2.41) analogen Beziehungen

$$f(\bar{\sigma}, 0) = F(W), \quad W = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} \quad (3.15)$$

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

schreiben als

$$\frac{\partial F}{\partial W} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} f(\bar{\sigma}, 0). \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich der allgemeine Ausdruck für das Auftreten einer Instabilität in Form von diffuser Einschnürung, wie er z.B. auch in der Arbeit von Hill [29, S.24] zitiert wird:

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \leq \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)^{-1}. \quad (3.17)$$

Um die entsprechenden kritischen Dehnungen $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)$ aus Gl.(3.17) zu bestimmen, muss zunächst ein funktionaler Zusammenhang für die Materialverfestigung gewählt werden. Um einen analytischen Ausdruck für die erreichbaren Grenzdehnungen zu erhalten wird der Potenzansatz nach Hollomon Gl.(2.45) verwendet.

Zusammen mit dem Ausdruck

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}} = \frac{d\varepsilon_2}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}} = \frac{d\bar{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}}, \quad (3.18)$$

den man durch Anwendung der Fließregel Gl.(2.50) erhält ergibt sich unter der Annahme linearer Dehnwege aus dem Kriterium Gl.(3.17) die kritische Dehnungen bei diffuser Einschnürung zu [7, S.318]

$$\varepsilon_1^* = n \frac{\sigma_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)}{\sigma_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)^2}, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_2^* = n \frac{\sigma_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2}{\sigma_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)^2}. \quad (3.20)$$

Wie aus Gl.(3.19) und (3.20) zu sehen ist, wird der Kurvenverlauf durch den Verfestigungsexponenten skaliert. Das bedeutet, dass die Fließkurvenextrapolation hier einen sehr großen Einfluss auf die berechneten Grenzdehnungen hat. Für Materialien wie z.B. Aluminium stellt der Verfestigungsansatz nach Hollomon kein gutes Modell zur Beschreibung der Verfestigung dar. Mit Hilfe numerischer Methoden können auch andere, für Aluminium besser geeignete Verfestigungsansätze verwendet werden. Das Ergebnis des theoretischen Ansatzes nach Swift unter Verwendung der Fließortbeschreibung nach von Mises und einem Verfestigungsgesetz ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Das Kriterium nach Swift ist, wie auch aus dieser Darstellung für Aluminium AA6016 hervorgeht, meist

zu konservativ [39, S.683] und wurde daher von Hora et al. [40, S.252] durch Hinzunahme zusätzlicher Annahmen verbessert.

3.1.1.2. Kriterium nach Hill für lokale Einschnürung

Speziell im Bereich uniaxialer Belastung eines Werkstoffes ist diffuse Einschnürung, wie sie durch das Kriterium von Swift beschrieben wird nicht der limitierende Faktor. Vielmehr wird bei verformungsgesteuerten Versuchen vor Eintritt des Bruchs des Werkstoffes das Phänomen der lokalen Einschnürung in Form sogenannter *Scherbänder* beobachtet. Diese treten zum Teil erst weit nach Durchlaufen des Lastmaximums, welches wie oben gezeigt den Beginn der diffusen Einschnürung darstellt, auf.

Ein Kriterium, welches das Auftreten einer lokalen Einschnürung in einem homogenen Material auf mathematische Weise beschreibt, wurde im Jahr 1952 von Hill vorgestellt [29, S.19]. Hill identifiziert eine auftretende Unstetigkeit im Geschwindigkeitsfeld als *mathematische Idealisierung* des Phänomens der lokalen Einschnürung.

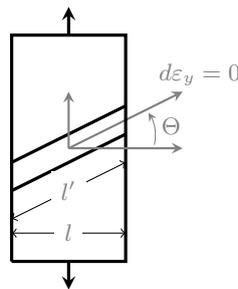


Abbildung 3.2.: Schmalen Blechstreifen mit angedeutetem lokalen Einschnürungsbereich.

Für bestimmte Spannungszustände lassen sich aus den Gleichungen des Geschwindigkeitsfelds sogenannte *charakteristische Richtungen*² ableiten [1, S.305], entlang jener die Rate der Verformung verschwindet. Charakteristische Richtungen sind an die Bedingungen [28, S.177]

$$(i) \quad d\varepsilon_1 > 0 > d\varepsilon_2 \quad \text{oder} \quad (3.21)$$

$$(ii) \quad d\varepsilon_1 = 0 \quad (3.22)$$

gebunden und schränken somit das Auftreten lokaler Einschnürung aus mathematischer Sicht auf den Bereich des zweiten Quadranten des Dehnungsraums ein.

²Charakteristische Richtungen treten auch in der Slip-Line-Theorie auf. Eine Einführung in diese Theorie wird z.B. in [1, S.128] gegeben.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

Hill verwendet die Beobachtung von Bijlaard [29, S.20], dass sich die Einschnürung unter dem Winkel Θ ausbildet. Da wie oben beschrieben die Einschnürung entlang einer charakteristischen Richtung auftritt, verschwindet das Dehnungsinkrement und die Länge l' in Abbildung 3.2 bleibt unverändert. Da sich auch der Winkel Θ nicht ändert [23, S.238], gilt dies auch für die Projektion l .

Für die Änderung der Querschnittsfläche folgt daraus

$$dA = d(lt) = ldt. \quad (3.23)$$

Betrachtet man mit dieser Beziehung den Grenzlastzustand $dL = 0$, ergibt sich als Bedingung für das Auftreten lokaler Einschnürung [29, S.23]

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -d\varepsilon_3 = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 \quad (3.24)$$

im Gegensatz zu Gl.(3.8), die eine Bedingung für die diffuse Einschnürung darstellte.

Analog zur Vorgehensweise bei diffuser Einschnürung wird der Verfestigungsanstieg des Werkstoffes der Änderung der äußeren Last gegenübergestellt. Instabilität des Materials in Form lokaler Einschnürung tritt auf, wenn

$$df(\sigma_1, \sigma_2) \geq dF(W). \quad (3.25)$$

Unter der Annahme, dass sich der Belastungszustand im Bereich der Einschnürung nicht ändert, dass also für das Verhältnis der Spannungen

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = \text{const.} \quad (3.26)$$

gilt, erhält man aus Gl.(3.25) bzw. Gl.(3.11)

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \left(\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right) \geq \frac{\partial F}{\partial W} (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2). \quad (3.27)$$

Setzt man in Gl.(3.27) die Fließregel Gl.(2.50) ein lässt sich der plastische Multiplikator zu $d\lambda = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \left(\frac{\partial F}{\partial W} \right)^{-1}$ ermitteln und es folgt durch Einsetzen

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right) \geq \frac{\partial F}{\partial W} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2). \quad (3.28)$$

In Gl.(3.29) tritt der Ausdruck aus Gl.(3.24) auf, der für die Ausbildung einer lokalen Einschnürung erfüllt sein muss. Damit ergibt sich die Bedingung für instabiles Materialverhalten zu [29, S.23]:

$$\frac{\partial F}{\partial W} \leq \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}. \quad (3.29)$$

Mit den Überlegungen, die im vorangegangenen Abschnitt angestellt wurden, lässt sich die Rate der Verfestigung in Gl.(3.29) durch die Gleichungen (3.15) und (3.16) darstellen und es folgt

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \leq \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} \quad (3.30)$$

als Kriterium für Instabilität infolge lokaler Einschnürung.

Die kritischen Grenzdehnungen $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*)$ können wiederum unter Annahme linearer Umformpfade und des Verfestigungsansatzes nach Hollomon bestimmt werden [7, S.319] (siehe auch Gleichungen (2.45) und (3.18)):

$$\epsilon_1^* = n \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}, \quad (3.31)$$

$$\epsilon_2^* = n \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}. \quad (3.32)$$

Bei der Ermittlung der theoretischen Grenzdehnungen spielt auch in der Theorie nach Hill der Verfestigungsansatz eine entscheidende Rolle. Ein ausgeprägtes Verfestigungsverhalten führt zu einer Erhöhung der berechneten Werte [41, S.307],[42, S.1].

Für den vorliegenden Aluminiumwerkstoff AA6016 erweist sich die Fließkurvenextrapolation nach Hockett-Sherby Gl.(2.46) als zu konservativ, der Ansatz nach Swift Gl.(2.47) überschätzt die Verfestigung des Werkstoffes. Ein realistisches Verfestigungsverhalten kann durch einen kombinierten Ansatz

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \left[a_{hs} - (a_{hs} - s_{0,hs}) \exp(-c_{hs} \bar{\epsilon}^{n_{hs}}) \right] + \frac{1}{2} \left[K_{sw} (\bar{\epsilon}_{0,sw} - \bar{\epsilon})^{n_{sw}} \right] \quad (3.33)$$

erreicht werden³. Eine ähnliche Vorgehensweise für Aluminium ist in [42, S.1] und [43, S.6] zu finden.

Das theoretische Grenzformänderungsdiagramm nach Hill bzw. Swift mit dem Verfestigungsansatz Gl.(3.33) ist in Abbildung 3.3 dem experimentell ermittelten gegenübergestellt. In dieser Abbildung wird ein, in der Literatur oft erwähnter, kritischer Punkt sichtbar: das Versagenskriterium nach Swift ist in vielen Fällen zu konservativ [39, S.683].

Obwohl die Theorien nach Hill und Swift prinzipiell auch die Berücksichtigung nichtlinearer Dehnwege ermöglichen [41, S.308], kommen diese auf Grund des oben dargestellten konservativen Verhaltens auch unter nichtproportionalen Belastungen nur selten zur Anwendung⁴.

³Materialparameter sind in Abbildung 2.7 zu finden.

⁴Ausserdem geht im nichtlinearen Fall die einfache Form der Beziehungen für die Grenzdehnungen verloren und es werden numerische Auswertung notwendig.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

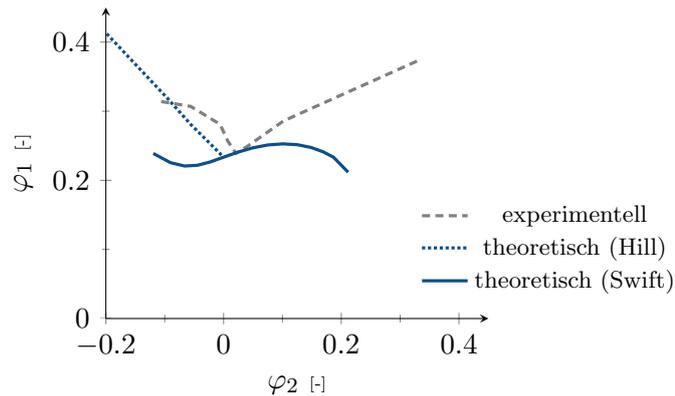


Abbildung 3.3.: Vergleich zwischen experimenteller und theoretischer Grenzformänderungskurve nach Hill und Swift für Aluminium AA6016 [13].

3.1.2. Phänomenologische Versagenskriterien

Im Gegensatz zu den theoretischen Versagenskriterien, die zur Versagensermittlung nur grundlegende Materialkennwerte benötigen, setzen phänomenologische Versagenskriterien die Kenntnis einer größeren Anzahl an experimentellen Daten voraus. In vielen Fällen wird die im Versuch bestimmte Grenzformänderungskurve als Grundlage einer Beurteilung der Umformbarkeit eines Bauteils verwendet. Phänomenologische Kriterien, wie jenes nach Müschenborn und Sonne [36, S.597] vermögen darüber hinaus Auskunft über die Pfadabhängigkeit des Werkstoffversagens zu geben.

3.1.2.1. Müschenborn-Sonne

In der Arbeit [36, S.597] von Müschenborn und Sonne aus dem Jahr 1975 beschäftigen sich die Autoren eingehend mit der, bereits damals bekannten Wegabhängigkeit des Grenzformänderungsdiagramms [35, 32, 44].

Zentraler Punkt dieser Arbeit ist die Beobachtung, dass die in zweistufigen Umformvorgängen erreichten Grenzdehnungen durch die zuletzt auftretende Belastungsrichtung charakterisiert werden können, und dass die konventionelle Grenzformänderungskurve die maximal erreichbaren *Vergleichsdehnungen* vorgibt [36, S.602].

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.4 zunächst im Dehnungsraum dargestellt. Der erste Umformschritt erfolgt in uniaxialer Richtung und entspricht in diesem Beispiel einer Vergleichsdehnung $\bar{\varphi}_{(1)} = 0.2$. Die Ellipse in der Darstellung, beschrieben durch Gl.(2.43), kennzeichnet dabei die Orte konstanter Vergleichsdehnung. Nach der Modellvorstellung von Müschenborn und Sonne ist nun die im zweiten Umformschritt zur Verfügung stehen-

de Umformbarkeit des Werkstoffs durch die Vergleichsdehnung der Grenzformänderungskurve unter der jeweiligen neuen Belastungsrichtung bestimmt. Diese ist in Abbildung 3.4 mit $\bar{\varphi}_{(2)}$ gekennzeichnet.

Einfacher lässt sich die Vorgehensweise im Raum darstellen, der durch die Belastungsrichtung β sowie die Vergleichsdehnung $\bar{\varphi}$ aufgespannt ist. Den idealen zweistufigen Umformvorgängen entspricht in dieser Darstellung vertikale Linien, da die Umformrichtung der einzelnen Schritte unverändert sind. Der Belastungswechsel, der einem Knick im Dehnungsraum gleichkommt, wird in dieser Darstellung als Sprung abgebildet. Eine einfache Transformation der konventionellen Grenzformänderungskurve in den Raum $(\beta, \bar{\varphi})$ beschreibt die maximal erreichbaren Vergleichsdehnungen für die betrachteten Umformprozesse.

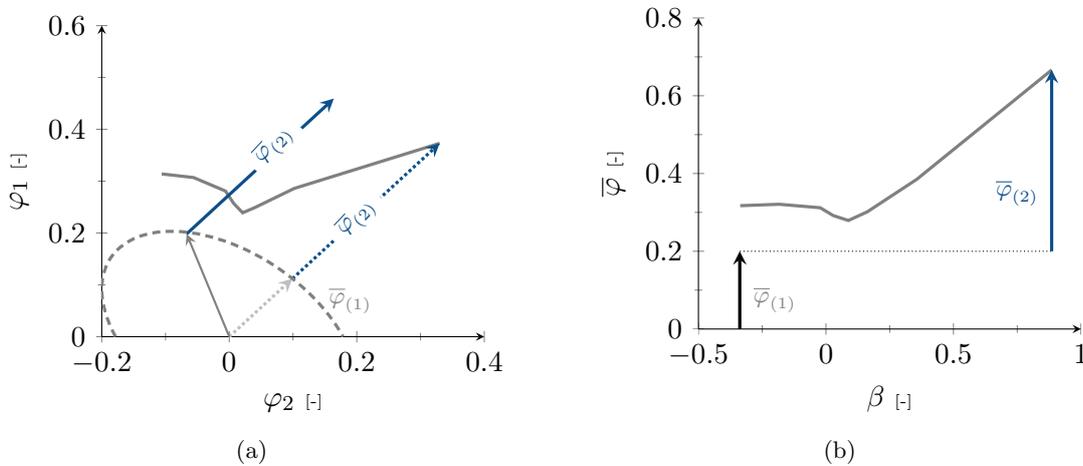


Abbildung 3.4.: Modellvorstellung nach Müschenborn und Sonne für erreichbare Grenzdehnungen a) im Dehnungsraum (φ_2, φ_1) und b) im Raum aufgespannt durch $(\beta, \bar{\varphi})$.

Das Modell nach Müschenborn und Sonne beschreibt die experimentelle Beobachtung, dass die erreichten Grenzdehnungen in zweistufigen Umformvorgängen die Grenzformänderungskurve überschreiten, wenn das Verhältnis der Formänderungen im Laufe des Prozesses zunimmt.

Abbildung 3.5 zeigt, dass die Grenzkurve nach Müschenborn und Sonne die vorliegenden Grenzformänderungen aus zweistufigen Umformprozessen besser beschreibt als dies im Dehnungsraum mit Hilfe der konventionellen Grenzformänderungskurve möglich ist.

Trotz des grundsätzlich guten qualitativen Verhaltens des Ansatzes nach Müschenborn und Sonne sind aus Abbildung 3.5 relative Abweichungen in den effektiven Grenzdehnungswerten $\bar{\varphi}$ von bis zu 40% ablesbar. Die erreichte Genauigkeit des Kriteriums erweist sich in der Beurteilung eines simulierten Umformprozesses als zu gering.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

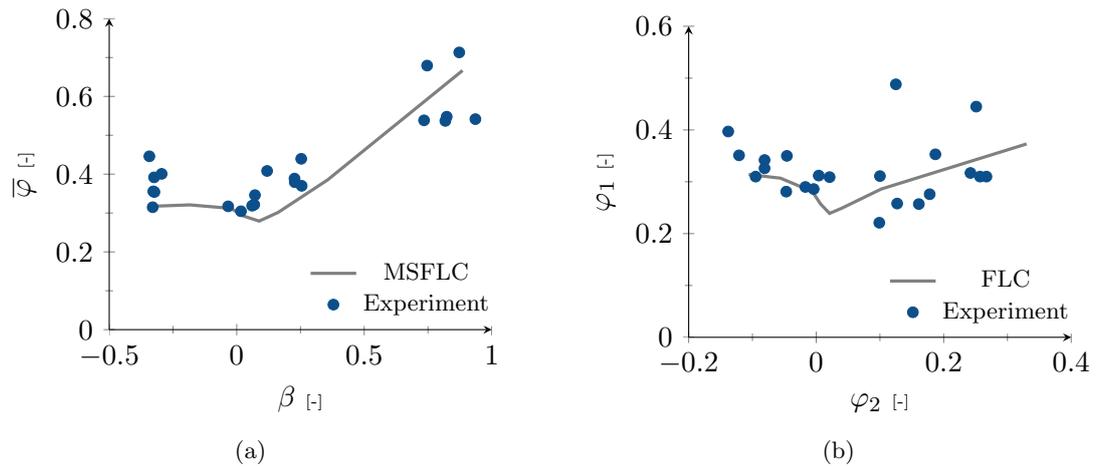


Abbildung 3.5.: Darstellung der experimentell ermittelten Grenzdehnungen aus zweistufigen Umformprozessen für Aluminium AA6016 [13] zusammen mit a) der Grenzkurve nach Müschenborn-Sonne (MSFLC) und b) der konventionellen Grenzformänderungskurve (FLC).

Das Kriterium nach Müschenborn und Sonne wird auf Grund seiner Einfachheit und der Berücksichtigung des Umformpfades auf das Materialversagen oft zitiert und hat auch Eingang in kommerzielle Finite-Elemente Solver gefunden [45, S.494], um eine beginnende Einschnürung besser abschätzen zu können.

3.1.2.2. Keeler und Brazier

Die Dehnung unter plane-strain Belastung, also $\beta = 0$ lässt sich durch die Faustformel [7, S.325]

$$\epsilon_0(\text{in}\%) = (23.3 + 14.13t) \frac{n}{0.21} \quad (3.34)$$

abschätzen, wobei t die Blechdicke in Millimeter und n den Verfestigungsexponenten bedeutet.

Die Formel Gl.(3.34) ermöglicht eine Berechnung des tiefsten Punktes der Grenzformänderungskurve und stellt somit eine sehr konservative Abschätzung der Umformbarkeit dar.

Bei bekannter Grenzformänderungskurve für ein Material lässt sich mit Hilfe von Gl.(3.34) die Verschiebung der Kurve durch eine veränderte Blechdicke t berechnen.

3.2. Numerische Ansätze zur Versagensermittlung

Mittlerweile existieren zahlreiche Ansätze zur theoretischen Versagensbestimmung, welche zum Teil auf den klassischen Versagenskriterien von Hill und Swift basieren. Ziel dieser Ansätze ist es, das Materialversagen auf nichtlinearen Umformpfaden mit einer hohen Prognosesicherheit zu berechnen. Die hier vorgestellten Modelle lassen sich alle samt direkt in FE-Codes implementieren.

3.2.1. MMFC - Modified Maximum Force Criterion

Das von Hora et al. [40, S.252] vorgestellte Kriterium stellt eine Erweiterung des als zu konservativ geltenden [39, S.683] Kriteriums nach Swift dar.

Gegenüber dem klassischen Ansatz von Swift wurde von den Autoren die zusätzliche Annahme getroffen, dass sich bei Eintritt einer lokalisierten Einschnürung, wie bereits im Kriterium von Hill beschrieben, ein *plane strain* Deformationszustand ($\beta = 0$) einstellt. Wie aus Abbildung 3.6 hervorgeht hat diese Änderung des Belastungszustandes einen Verfestigungszuwachs zur Folge, welche das Materialversagen zu höheren Verformungen verschiebt [40, S.252].

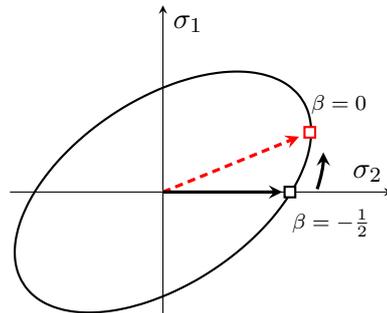


Abbildung 3.6.: Schematische Darstellung der Verfestigungszunahme durch Änderung des Belastungszustandes als Folge einer auftretenden lokalen Einschnürung.

Der von den Autoren gewählte Ansatz lautet [40, S.252]

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_1} \geq \sigma_1, \quad (3.35)$$

wobei gegenüber der Beziehung nach Swift Gl.(3.8) ein zweiter Term auf der linken Seite ergänzt wurde.

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

Mit den Abkürzungen

$$\beta = \beta(\alpha), \quad (3.36)$$

$$\sigma_1 = f(\alpha)\bar{\sigma} \text{ und} \quad (3.37)$$

$$\epsilon_1 = g(\beta)\bar{\epsilon} \quad (3.38)$$

ergibt sich die allgemeine Form des Kriteriums zu [40, S.253]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \geq \frac{f(\alpha) + \frac{f(\alpha)g(\beta)}{\beta'(\alpha)\bar{\epsilon}}\beta}{f(\alpha)g(\beta)}\bar{\sigma} \text{ mit } \beta'(\alpha) = \frac{\partial\beta(\alpha)}{\partial\alpha}. \quad (3.39)$$

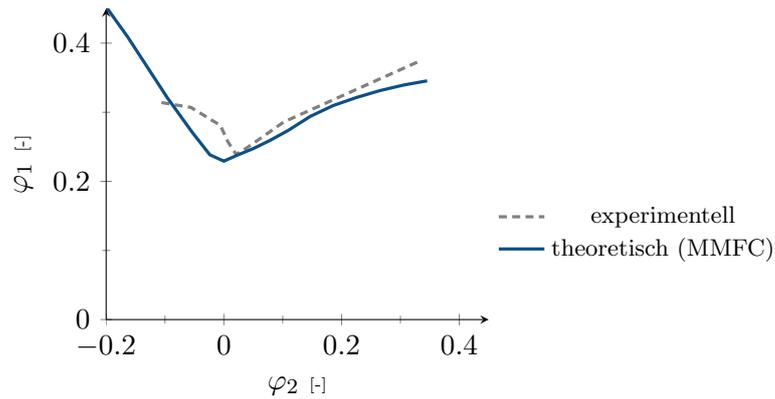


Abbildung 3.7.: Vergleich zwischen experimenteller und mit Hilfe des MMFC berechneten Grenzformänderungskurve für Aluminium AA6016 [13].

Die konventionelle Grenzformänderungskurve, die mit dem MMFC berechnet wurde ist in Abbildung 3.7 der experimentellen gegenübergestellt. In Anbetracht der geringen Anzahl an Versuchsdaten zeigt die berechnete Kurve eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Messdaten.

Grenzformänderungskurven für vorumgeformte Bleche können ebenfalls mit dem MMFC berechnet werden. Im vorliegenden Fall kann z.B. die Abhängigkeit der Grenzkurve vom Umformpfad nach einer uniaxialen Vorumformung sehr gut beschrieben werden (Abbildung 3.8 a)).

Die Berechnung der Grenzformänderungskurven gelingt allerdings nicht für alle Belastungszustände mit dieser hohen Qualität. Abbildung 3.8 b) zeigt dies exemplarisch für die Grenzkurven einer plane strain Vorumformung.

Quantitativ ergibt sich für den Fall eines Nachumformschritts in plane-strain Richtung eine relative Abweichung in der effektiven Grenzdehnung zwischen theoretischem und experimentell ermittelten Wert von ca. 18%. In Anbetracht der einfachen Kalibrierung des Modells stellt dies trotz allem ein sehr gutes Ergebnis dar.

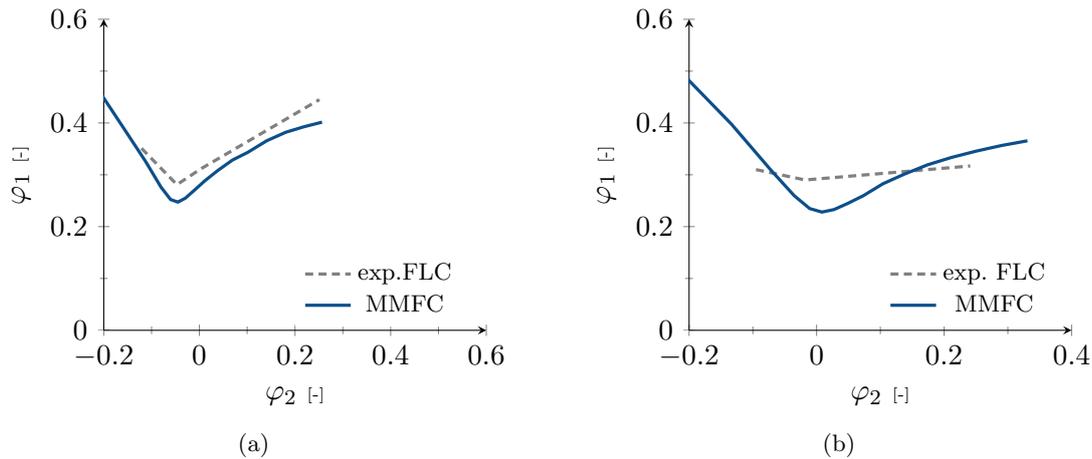


Abbildung 3.8.: Vergleich der experimentell bestimmten und mit Hilfe des MMFC berechneten Grenzformänderungskurve für a) uniaxiale und b) plane strain Vorumformung für Aluminium AA6016 [13].

Auch in der Literatur wird auf die hohe Ergebnisqualität des MMFC hingewiesen [39, S.683],[46, S.225]. Das MMFC bildet daher auch in einer modifizierten Variante die Basis des von den Autoren entwickelten kommerziellen Produkts mit dem Namen *MATFORM* [47, S.197], welches in Kombination mit einigen FE-Solvern verfügbar ist.

3.2.2. CRACH

Ein weiteres, kommerziell vertriebenes Softwareprodukt zur Versagensbestimmung von dünnen Blechen in FE-Simulationen ist *CrachFEMTM* der Firma *MATFEM*, welches von Gese und Dell [48, S.1] entwickelt wird.

Mit dem CRACH-Algorithmus können mehrere unterschiedliche Versagensarten betrachtet werden. Neben einem Kriterium für Instabilität in Folge von Einschnürung sind sowohl Modelle für duktilen als auch für Scherbruch im Produkt enthalten [49, S.450].

Zur Bestimmung der Instabilität durch lokale Einschnürung findet das modifizierte Modell nach Marciniak und Kuczynski [34, S.] Verwendung [49, S.452], welches von einer bereits am Anfang vorliegenden Imperfektion der Dickenverteilung der Probe ausgeht

$$\tilde{t}_0 = t_0(1 - \delta) \text{ mit } \delta \ll 1, \quad (3.40)$$

wobei \tilde{t}_0 die Dicke im geschwächten Bereich darstellt.

Die Dehnungen können so lange erhöht werden, bis die Gleichgewichtsbedingungen zwi-

3. Literaturüberblick Versagenskriterien

schen den Bereichen mit und ohne Imperfektion nicht mehr erfüllt sind [49, S.453]. Dieser Vorgang ist dadurch gekennzeichnet, dass die Dehnungen im Einschnürbereich sehr schnell anwachsen, während im Rest der Probe nur kleine Dehnungszuwächse auftreten.

Ausschlaggebender Punkt für die Ergebnisqualität des CRACH-Algorithmus ist die aufwändig gestaltete Materialmodellierung mit Berücksichtigung von Anisotropie- und Dehnrateneffekten sowie kinematischem Verfestigungsverhalten [48, S.4].

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

In Kapitel 3 dieser Arbeit wurde ein kurzer Überblick über bestehende Methoden gegeben, die zur theoretischen Bestimmung von Materialversagen herangezogen werden können. Trotz der teilweise guten Vorhersagequalität bestehender Kriterien ist die zu erwartende Genauigkeit für den Einsatz in der Praxis zum Teil nicht ausreichend.

Es besteht darüber hinaus vielfach der Wunsch, die Genauigkeit der Vorhersage variabel an die vorliegenden Bedürfnisse anpassen zu können, d.h. mit einer hohen Anzahl an experimentellen Daten soll ein Maximum an Genauigkeit erreicht werden können. Wird hingegen nur eine grobe Abschätzung mit reduzierter Genauigkeit zur Beurteilung eines Umformprozesses gewünscht, verkleinert sich automatisch die benötigte Versuchsdatenbasis und somit der Aufwand der Modellkalibrierung. Diese Flexibilität in der Anwendung ist mit den bestehenden Modellen nicht erreichbar.

Ein Ansatz, der dieses Vorgehen ermöglicht ist die Entwicklung eines phänomenologischen Versagensmodells, dessen Grad an Komplexität mit der Anzahl der zur Kalibrierung verfügbaren experimentellen Daten zu- oder abnehmen kann.

4.1. Motivation

Das vorliegende Modell wurde – wie bereits Eingangs erwähnt – aus der Überlegung heraus entwickelt, die Anzahl zur Kalibrierung benötigten Experimente optimal an die gewünschte Vorhersagequalität anpassen zu können.

Ausserdem soll das Versagenskriterium speziell in der Bewertung von einzelnen Elementen einer FE-Simulationen einsetzbar sein. Ein typischer Umformungspfad eines Elements im Dehnungsraum, auf den das Modell angewendet werden soll ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Der Umstand auf nur einige wenige Experimente zurückgreifen zu wollen legt nahe, möglichst einfache Funktionen in der Beschreibung des Problems zu verwenden. Dies ist notwendig, da keine einfachen physikalischen Gesetzmäßigkeiten bekannt sind, die

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

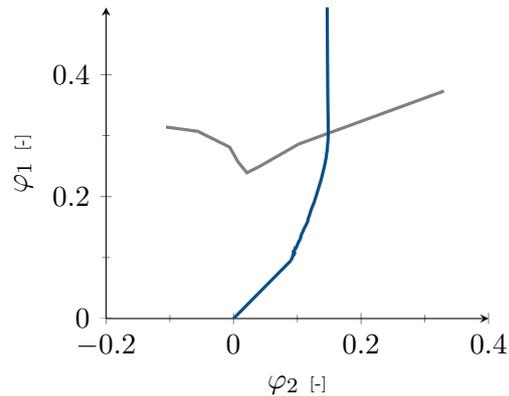


Abbildung 4.1.: Darstellung eines zweistufigen Umformpfades aus einer FE-Simulation zusammen mit der konventionellen Grenzformänderungskurve.

einen bestimmten Ansatz in der Problembeschreibung rechtfertigen würden. Als sinnvolle Lösung erweist sich dabei die Methode der *linearen Interpolation* als zweckmäßig, um aus vorliegenden Daten eines Gebietes auf unbekannte Werte in der unmittelbaren Nachbarschaft zu schließen. Dies setzt die Annahme eines stetigen Werkstoffverhaltens voraus.

Um den Fehler durch den angewendeten Interpolationsansatz gering zu halten wird der gesamte betrachtete Prozessbereich in hinreichend kleine Gebiete unterteilt, in denen dann die vorliegenden Experimente angenähert werden. Diese Vorgehensweise entspricht dem Aufbau eines geometrischen Gebildes, welches in der mathematischen Literatur unter dem Namen *Regelfläche* [50, S.52] bekannt ist.

4.2. Modellparameter

Zur Versagensermittlung verlässt man den Dehnungsraum und führt stattdessen einen Raum ein, der durch abgewandelte Vergleichsgrößen – im Modell als *effektive Umformrichtung* und *effektives Umformvermögen*¹ bezeichnet – aufgespannt wird. Die Wahl der Modellparameter ist stark angelehnt an das, in Abschnitt 3.1.2.1 vorgestellte, phänomenologische Versagenskriterium nach Müschenborn und Sonne.

¹Die Bezeichnungen effektive Umformrichtung und effektives Umformvermögen wurden in Anlehnung an die üblichen verwendeten Vergleichsgrößen (Effektivgrößen) gewählt. Auch diese Größe hängen von einer inneren Variable, nämlich der Belastungsgeschichte ab.

4.2.1. Effektive Umformrichtung

Der Verlauf der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Dehnpfade aus zweistufigen Umformprozessen wird im allgemeinen Knicke aufweisen. Auch Umformhistorien aus FE-Simulationen stellen keine glatten Kurven dar, sodass sich das Formänderungsverhältnis entlang Dehnungspfades sprunghaft ändern wird (siehe Abbildungen 4.2 bzw. 4.3).

Zum einen sind diese Sprungstellen des, aus zwei Punkten im Dehnungsraum festgelegten, idealisierten Dehnweges unphysikalisch, zum anderen bereiten diese Veränderungen in den Pfadverläufen Probleme in der numerischen Behandlung. Man geht aus diesen Gründen von der üblichen Definition des Parameters β , der Information über die Richtung der Umformung wiedergibt, ab und führt eine neue Größe $\bar{\beta}$ ein, die folgendermaßen definiert wird:

$$\bar{\beta}(s) = Z \int_{s'=0}^{s'=s} \beta(s') e^{cs'} ds', \quad Z = \frac{c}{e^{cs} - 1}, \quad \beta(s) = \left. \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right|_s. \quad (4.1)$$

Der wesentliche Unterschied von Parameter $\bar{\beta}$ nach Gleichung (4.1) zum einfachen Verhältnis der Dehnungsinkremente β nach Gleichung (2.56) ist die Berücksichtigung der Historie entlang des bereits durchlaufenen Weges s . Der Parameter Z in Gleichung (4.1) ist eine Normierungskonstante die sicherstellt, dass auf linearen Dehnwegen die neu definierte Richtungsinformation mit der konventionellen aus Gleichung (2.56) übereinstimmt.

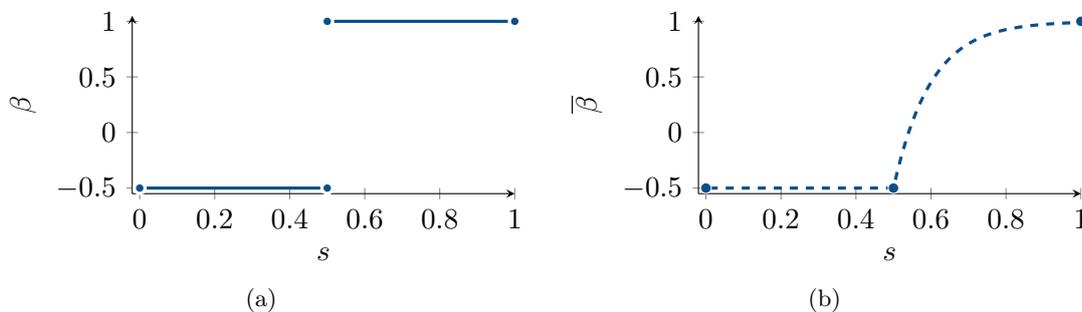


Abbildung 4.2.: Gegenüberstellung a) der sprunghaften Änderung des Dehnungsverhältnisses β und b) des stetigen Verlaufs der effektiven Umformrichtung nach (4.1) nach durchlaufener Pfadlänge s .

Diese neue Definition der Richtungsinformation lässt sich folgendermaßen motivieren: Im Versuch wird zwar eine abrupte Belastungsänderung von außen auf den Werkstoff aufgebracht – β ändert sich mehr oder weniger *schlagartig* – jedoch wird davon ausgegangen, dass sich das Fließverhalten des Materials nicht unstetig verändert. Das Ausrichten der Versetzungsstruktur als *Reaktion des Werkstoffes* auf die geänderte Belastungssituation

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

findet erst im Laufe der Umformung statt, sodass sich erst nach einem hinreichend langen Wegstück unter der neuen Umformrichtung ein wesentlicher Einfluss auf das Verhalten des Materials zeigt.

Vom Standpunkt der Numerik ist ein weiterer positiver Effekt der Definition der effektiven Umformrichtung eine erhöhte Stabilität des Ansatzes, welche sich durch die automatische Glättung der Dehnpfade ergibt. Die Definition der effektiven Umformrichtung aus Gleichung (4.1) ist für die numerische Umsetzung in dieser Form nicht geeignet und wird in die folgende, inkrementelle Schreibweise übergeführt:

$$\bar{\beta}_m = \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{e^{c \frac{\bar{\varphi}_i}{\bar{\varphi}_m}} - e^{c \frac{\bar{\varphi}_{i-1}}{\bar{\varphi}_m}}}{e^c - 1}. \quad (4.2)$$

Diese Formulierung ermöglicht die effiziente Berechnung der effektiven Umformrichtung eines Dehnpfades aus einer FE-Simulation.

Die Einführung des Parameters $\bar{\beta}$ stellt im Modellansatz eine wesentliche Abgrenzung zu bestehenden phänomenologischen Versagenskriterien, wie zum Beispiel dem Ansatz nach Müschenborn und Sonne, dar.

4.2.2. Effektives Umformvermögen

Die zweite zentrale Variable des Modells, im Nachfolgenden mit $\bar{\lambda}$ bezeichnet, wird als relative Größe eingeführt und beschreibt das Umformvermögen eines Werkstoffes unter einem bestimmten Belastungsverlauf.

Die auftretenden Vergleichsdehnungszinkremente $\Delta\bar{\varphi}_i$ werden immer auf den jeweiligen *as-received* Wert $\bar{\varphi}^*$ unter der aktuellen, effektiven Umformrichtung $\bar{\beta}$ bezogen (siehe Abbildung 4.3) und entlang des durchlaufenen Umformweges aufsummiert:

$$\Delta\lambda_i(\bar{\beta}) = \frac{\Delta\bar{\varphi}_i(\bar{\beta})}{\bar{\varphi}_{ar}^*(\bar{\beta})} \quad (4.3)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \Delta\lambda_i \quad (4.4)$$

Für lineare Dehnwege ergibt sich mit diesem Ansatz immer ein Umformvermögen von $\lambda = 1$. Mit einer beliebigen Diskretisierung des gesamten Dehnweges $\Delta\bar{\varphi}_i = \frac{1}{n} \bar{\varphi}^*$ folgt

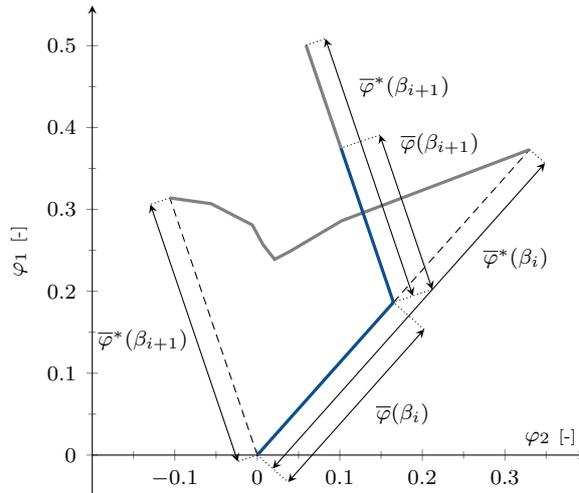


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung zur Berechnung des effektiven Umformvermögens nach Gleichung (4.3).

aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) ein Umformvermögen von 100% bzw. $\lambda = 1$ für *lineare* Dehnwege.

Das Umformvermögen von linearen Dehnwegen bildet in weiterer Folge die Bezugsgröße für die spätere Bewertung von nichtlinearen Dehnwegen, denn für diese gilt im allgemeinen $\lambda \neq 1$. Die auftretenden Differenzen zwischen dem Umformvermögen linearer und nichtlinearer Umformpfade

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{nichtlinear}} - \lambda_{\text{linear}} = \lambda_{\text{nichtlinear}} - 1 \quad (4.5)$$

werden als Gewinne bzw. Verluste an Umformpotential interpretiert, welche durch die Abweichung vom linearen Pfadverlauf verursacht werden.

Abbildung 4.4 zeigt den Verlauf eines Umformpfades im Dehnungsraum sowie den transformierten Umformpfad, wie er im phänomenologischen Modell durch die eingeführten Größen $(\bar{\beta}, \bar{\lambda})$ dargestellt werden kann.

4.3. Modellansatz

Mit den eingeführten Größen der effektive Umformrichtung und des Umformvermögens lässt sich ein Umformpfad aus einem zweistufigen Umformprozess in eindeutiger Weise durch vier Koordinaten charakterisieren:

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

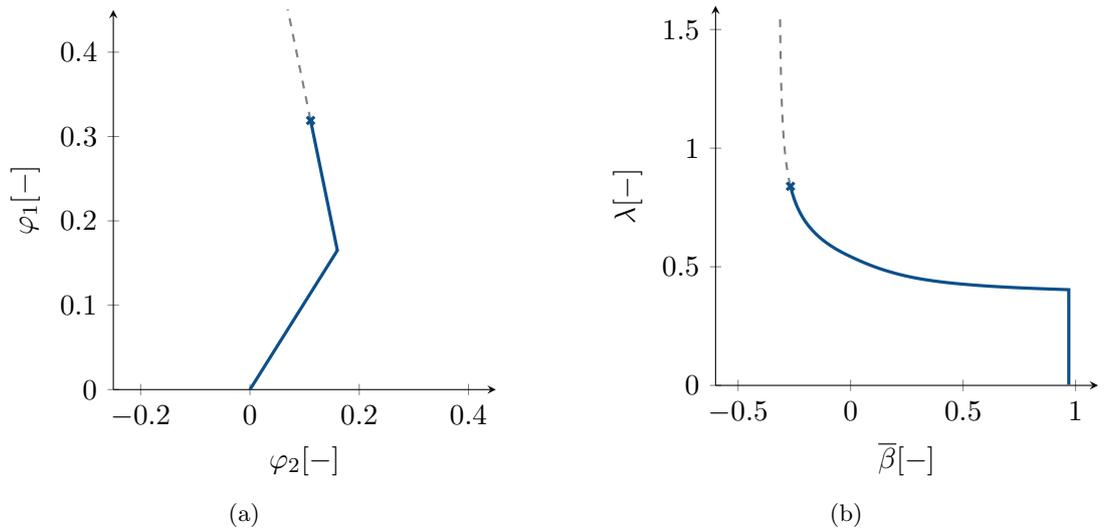


Abbildung 4.4.: (a) Sprunghafte Änderung des Dehnungsverhältnisses im Dehnungsraum und (b) Darstellung der Transformaten Daten durch effektive Umformrichtung nach (4.1) und effektivem Umformvermögen nach (4.3).

- $(\lambda_{pre}, \bar{\beta}_{pre})$ effektives Umformvermögen und effektive Umformrichtung am Ende des ersten Umformschritts und
- $(\lambda, \bar{\beta}_{post})$ effektives Umformvermögen und effektive Umformrichtung bei Versagen durch Einschnürung im zweiten Umformschritt.

In Anlehnung an das Konzept der Grenzformänderungskurve für lineare Dehnwege wird mit dem hier entwickelten Modell ein Abbruchkriterium in ähnlicher Weise formuliert. In Anbetracht der komplizierteren Sachlage ist evident, dass es sich hier nicht um eine einfache Grenzkurve im \mathbb{R}^2 , sondern um eine Hyperebene im \mathbb{R}^4 handelt:

$$\bar{\lambda} = f(\bar{\lambda}_{pre}, \bar{\beta}_{pre}, \bar{\beta}_{post}).$$

Die konventionelle Grenzformänderungskurve ist im Sinne eines Spezialfalls als Schnitt durch die Hyperebene bei $\bar{\lambda}_{pre} = 0$ und $\bar{\beta}_{pre} = \bar{\beta}_{post}$ enthalten.

Wie bereits Eingang erwähnt ist es Ziel der Modellentwicklung, mit möglichst geringem experimentellen Aufwand eine hohe Vorhersagequalität zu erreichen. Mit einer großen Anzahl an verfügbaren experimentellen Messpunkten wäre es naheliegend, eine analytische Funktion an die ermittelten Daten anzupassen und daraus ein Abbruchkriterium abzuleiten.

Allerdings lässt bereits die komplizierte Form der Grenzformänderungskurve für lineare Dehnwege vermuten, dass die hier benötigte analytische Funktion von hoher Ordnung

sein muss, um das Materialverhalten hinreichend gut beschreiben zu können. Eine numerisch stabile und vor allem sinnvolle Vorgehensweise für eine geringe Anzahl an Daten lässt sich auf diesem Wege nicht erreichen, da diese Ansatzfunktionen zu starken Oszillationen neigen [51, S.60].

Aus diesem Grund wird im entwickelten Modell der Ansatz verfolgt, mit Hilfe der linearen Interpolation aus experimentell ermittelten Daten auf unbekannte Bereiche zu schließen, um dort Vorhersagen zu ermöglichen. Um die Grenzfläche aufbauen zu können werden zunächst Stützstellen an *geeigneten Positionen* in der Ebene, aufgespannt durch die effektive Umformrichtung *vor* und *nach* Änderung der Beanspruchung gewählt. Die Stützstellenpositionen können dabei frei gewählt werden. In der Regel werden diese sinnvollerweise dort gesetzt, wo eine optimale Bestimmung durch mehrere experimentell vorliegende Datenpunkte möglich ist. Schematisch ist diese Vorgehensweise in Abbildung 4.5 dargestellt.

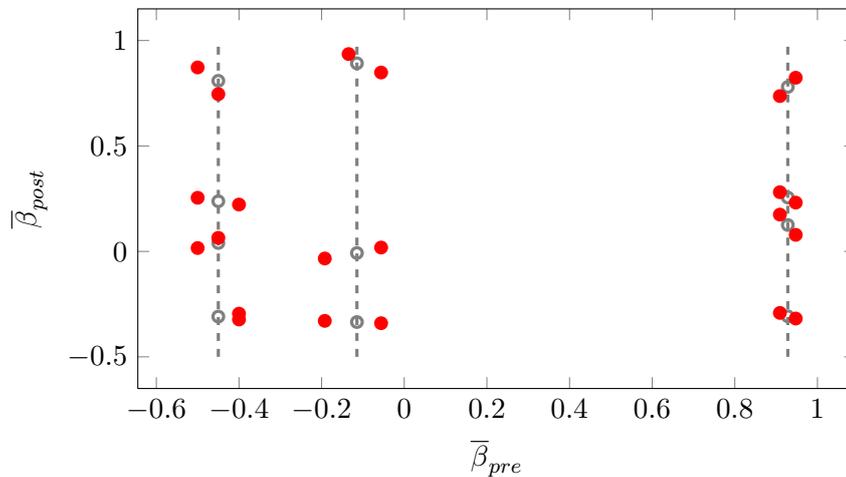


Abbildung 4.5.: Schematische Darstellung der Wahl der Stützpunktpositionen (○) durch Vorgabe von experimentellen Datenpunkten (●).

Der Einfachheit halber sind die Stützstellen auf Geraden mit $\bar{\beta}_{pre} = const$ im Wertebereich $[-0.5, 1]$ angeordnet. Die genaue Position bezüglich der effektiven Umformrichtung im ersten Umformschritt wird im vorliegenden Fall durch Mittelung aller Experimente bestimmt, die einer bestimmten Vorumformrichtung zugeordnet werden können. Dieses *Zusammenfassen* von Experimenten in *Gruppen* bezüglich $\bar{\beta}_{pre}$ kommt der Vorgangsweise bei der Durchführung der notwendigen Versuche zur Modellkalibrierung (siehe z.B. Abschnitt 5.1.2) entgegen.

Um die Position der Stützstellen bezüglich $\bar{\beta}_{post}$ festzulegen, werden aus den oben bestimmten Gruppen mit $\bar{\beta}_{pre} \approx const.$ in analoger Weise Experimente mit vergleichbarer Nachumformrichtung zusammengefasst und gemittelt.

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

Über dem so festgelegten Grundgerüst aus Stützstellen wird in einem weiteren Schritt ein flächenhaftes Gebilde, aufgebaut aus mehreren sogenannten Regelflächen, errichtet. Der Übergang zwischen zwei benachbarten Regelflächen verläuft stetig, ist aber in der Regel nicht differenzierbar².

Eine einzelne dieser Regelflächen wird dabei durch vier Stützstellen begrenzt, jeweils zwei davon liegen auf benachbarten Geraden mit $\bar{\beta}_{pre}^i = const.$ bzw. $\bar{\beta}_{pre}^{(i+1)} = const.$ Graphisch ist der Aufbau in Abbildung (4.6) dargestellt.

Die *Funktionswerte* an den einzelnen Stützpunktstellen, und damit die Form der Regelfläche, wird durch jene Experimente bestimmt, die entsprechende effektive Umformrichtungen $\bar{\beta}_{pre}$ und $\bar{\beta}_{post}$ aufweisen. Die genaue Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt erläutert.

4.4. Kalibrierung des Modells

Zur Kalibrierung des Modells werden Daten aus Versuchen herangezogen, welche die gesuchte Grenzfläche stützen sollen. Der Einfachheit halber stellen wir das Formelwerk zunächst nur für einen isolierten Datenpunkt aus einem einzelnen Experiment zusammen, welches sich dann mühelos auf eine beliebig große Anzahl an Messpunkten erweitern lässt.

Einfluss eines experimentellen Datenpunktes auf umgebende Stützpunkte Entsprechend den Gleichungen (4.3-4.5) wird der experimentelle Dehnweg aus dem Dehnungsraum in den neu eingeführten Raum abgebildet. Der i -te Datenpunkt weist dort die Koordinaten (4-Tupel) $X_{(i)} = (\Delta\lambda, \lambda_{pre}, \bar{\beta}_{pre}, \bar{\beta}_{post})$ auf. Um die weiteren Betrachtungen anschaulich darstellen zu können wird vorerst die Abhängigkeit von $\Delta\lambda = f(\lambda_{pre})$ nicht explizit berücksichtigt, also $\tilde{X}_{(i)} = (\Delta\lambda(\lambda_{pre}), \bar{\beta}_{pre}, \bar{\beta}_{post})$. Dies wird dann im letzten Schritt mit Gleichung (4.13) nachgeholt.

Zu berechnen ist der Einfluss des Datenpunktes \tilde{X}_i auf die vier umliegenden Stützpunktstellen der zu errichtenden Regelfläche, wie in Abbildung 4.6 bzw. 4.4 dargestellt.

Dazu wird zunächst zwischen den beiden benachbarten Gitternetzlinien mit den Indices i bzw. $i + 1$ linear interpoliert

$$\Delta\lambda = a^{(i)}\Delta\lambda^{(i)} + (1 - a^{(i)})\Delta\lambda^{(i+1)} \quad \text{für} \quad \bar{\beta}_{pre}^{(i)} \leq \bar{\beta}_{pre} \leq \bar{\beta}_{pre}^{(i+1)} \quad (4.6)$$

²Ein Umstand, der bereits in der Grenzformänderungskurve auftritt und daher auch hier hingenommen wird, zumal im Modell die Grenzfläche die Eigenschaft der Differenzierbarkeit nicht aufweisen muss.

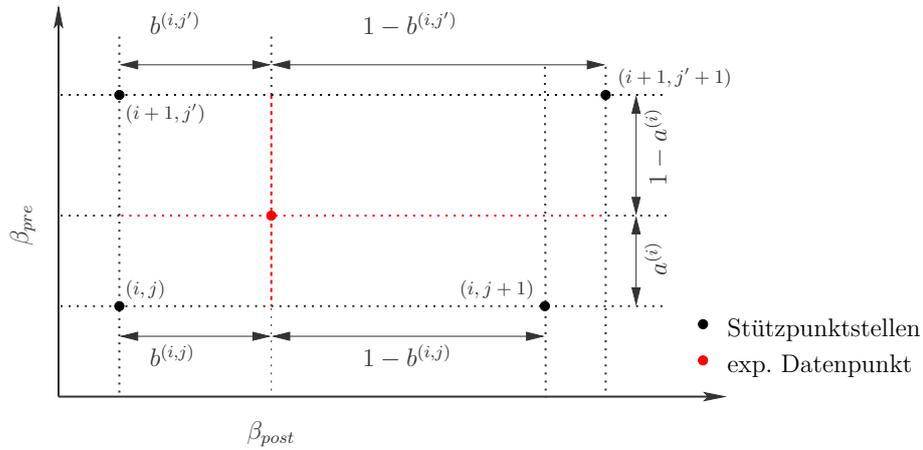


Abbildung 4.6.: Lage des experimentellen Datenpunktes \tilde{X}_i und Positionen der vier umgebenden Stützpunkte zum Aufbau einer Regelfläche

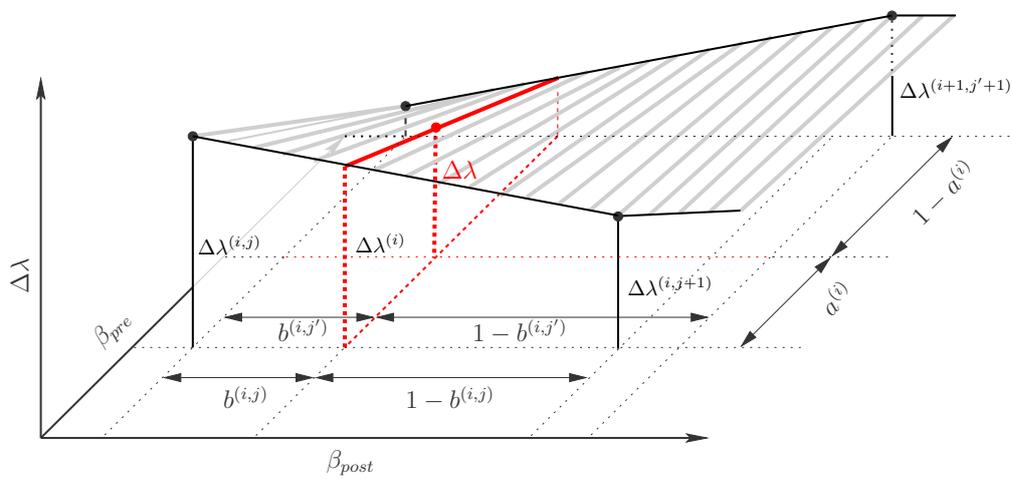


Abbildung 4.7.: Darstellung des Aufbaus eines Teils der Regelfläche durch Interpolation nach den Richtungen β_{pre} und β_{post} .

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

mit dem Faktor

$$a^{(i)} = \frac{\beta_{pre}^{(i+1)} - \beta_{pre}}{\beta_{pre}^{(i+1)} - \beta_{pre}^{(i)}}. \quad (4.7)$$

$\Delta\lambda^{(i)}$ in Gleichung (4.6) bezeichnet hier den interpolierten Wert an der Gitterlinie mit dem Index i , für die gilt $\bar{\beta}_{pre}^{(i)} = const.$.

Wenn ein experimenteller Punkt jenseits der Gitterlinie mit kleinstem bzw. größtem $\bar{\beta}_{pre}$ liegt wird über die beiden nächstgelegenen Gitterlinien extrapoliert. Die Gleichungen (4.6) und (4.7) behalten selbstverständlich auch für diese Fälle ihre Gültigkeit.

Um nun die Werte für $\Delta\lambda^{(i,j)}$ an den betreffenden Stützstellen berechnen zu können, muss auch nach der zweiten Richtung $\bar{\beta}_{post}$ interpoliert werden. Für zwei, auf der Gitternetzlinie $L^{(i)}$ liegende Stützpunkte mit den Indizes (i, j) bzw. $(i, j+1)$ ergibt sich

$$\Delta\lambda^{(i)} = b^{(i,j)} \Delta\lambda^{(i,j)} + (1 - b^{(i,j)}) \Delta\lambda^{(i,j+1)}, \quad (4.8)$$

bzw. für die benachbarte Gitternetzlinie $L^{(i+1)}$

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = b^{(i+1,j')} \Delta\lambda^{(i+1,j')} + (1 - b^{(i+1,j')}) \Delta\lambda^{(i+1,j'+1)}. \quad (4.9)$$

Der Index j' an Stelle von j in Gl.(4.8) berücksichtigt, dass die Positionen der Stützstellen in Richtung β_{post} für jede Gitternetzlinie variabel gewählt werden können.

Die Faktoren b ergeben sich analog zum Faktor a aus Gleichung (4.7) zu

$$b^{(i,j)} = \frac{\beta_{post}^{(i,j+1)} - \beta_{post}}{\beta_{post}^{(i,j+1)} - \beta_{post}^{(i,j)}}, \quad b^{(i+1,j')} = \frac{\beta_{post}^{(i+1,j'+1)} - \beta_{post}}{\beta_{post}^{(i+1,j'+1)} - \beta_{post}^{(i+1,j')}}. \quad (4.10)$$

Setzt man nun die Gleichungen (4.8) und (4.9) in Gl.(4.6) ergibt sich

$$\Delta\lambda = a^{(i)} \left[b^{(i,j)} \Delta\lambda^{(i,j)} + (1 - b^{(i,j)}) \Delta\lambda^{(i,j+1)} \right] + (1 - a^{(i)}) \left[b^{(i+1,j')} \Delta\lambda^{(i+1,j')} + (1 - b^{(i+1,j')}) \Delta\lambda^{(i+1,j'+1)} \right]. \quad (4.11)$$

In Gleichung (4.11) besteht natürlich noch die Abhängigkeit vom Wert der Vorumformung

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda(\lambda_{pre}), \quad (4.12)$$

die aus Gründen der Übersichtlichkeit vorerst nicht notiert wurde.

Um die gesuchten Werte $\Delta\lambda$ an den, als gegeben vorausgesetzten Positionen der Stützpunkte zu berechnen, werden mindestens vier experimentelle Punkte benötigt, um das

lineare Gleichungssystem eindeutig lösen zu können. Allerdings müssen nach Gleichung (4.11) alle zur Kalibrierung verwendeten Punkte den selben Wert von λ_{pre} aufweisen, was *experimentell nicht realisierbar* ist.

Um diese Einschränkung aufzuheben, muss die Abhängigkeit vom Parameter λ_{pre} in Gl. (4.11) explizit berücksichtigt werden. Konsequenter Weise wird dazu wieder die Methode der linearen Interpolation, diesmal im Bereich $0 \leq \lambda_{pre} \leq 1$, verwendet.

Man geht von einem idealen³ Wert der Vorumformung mit $\lambda_{pre} = 0.5$ (im Folgenden kurz als λ_{05} bezeichnet) als Bezugsgröße aus.

Alle übrigen auftretenden Werte von λ_{pre} werden dann, ausgehend davon, durch einen noch näher zu bestimmenden funktionalen Zusammenhang $f(\lambda_{pre}, \beta_{post})$ berechnet:

$$\Delta\lambda(\lambda_{pre}) = \Delta\lambda_{05} + f(\lambda_{pre}, \beta_{post}). \quad (4.13)$$

Um die Anpassungsfähigkeit des entwickelten Modells auch an komplexes Materialverhalten zu ermöglichen werden vorerst zwei einfache Funktionalitäten vorgeschlagen:

$$f^{(i)}(\bar{\lambda}_{pre}, \beta_{post}) = \begin{cases} k_0^{(i)}(0.5 - \bar{\lambda}_{pre}), \\ k_0^{(i)}(0.5 - \bar{\lambda}_{pre}) + k_1^{(i)}(0.5 - \bar{\lambda}_{pre})\bar{\beta}_{post}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Diese wirken nur entlang von Gitternetzlinien $L^{(i)}$ mit $\bar{\beta}_{pre} = const.$ und lassen sich

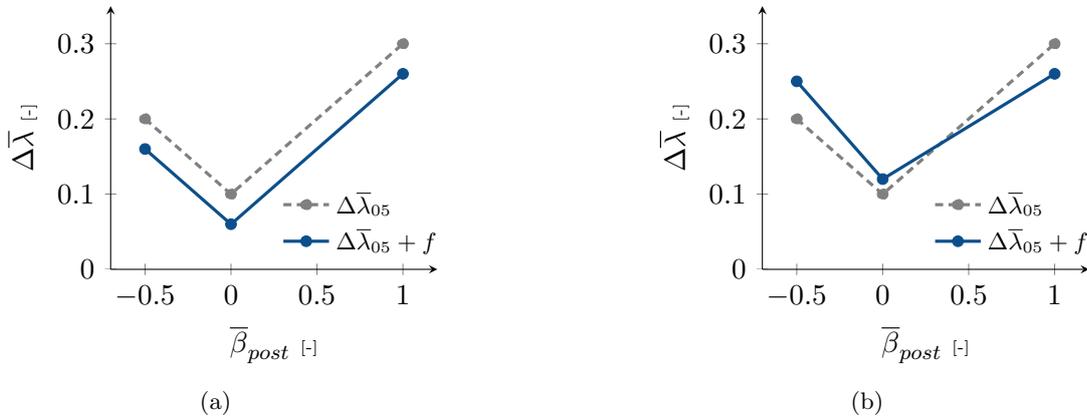


Abbildung 4.8.: Graphische Darstellung des Ansatzes Gl. (4.13) mit Gl. (4.14) für a) $\bar{\lambda}_{pre} = 0.3, k_0 = -0.2, k_1 = 0$ und b) $\bar{\lambda}_{pre} = 0.7, k_0 = -0.1, k_1 = 0.3$.

als heben ($k_0 \neq 0, k_1 = 0$, Abbildung 4.8(a)), bzw. als heben und drehen ($k_0, k_1 \neq 0$, Abbildung 4.8(b)) der Seitenkanten der Regelflächen interpretieren.

³Der zu interpolierende Bereich ist auf diese Weise in zwei gleich große Unterbereiche aufgeteilt, d.h es muss nicht zu weit in "unbekanntes Gebiet" extrapoliert werden.

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

Aus Gleichung (4.11) folgt dann durch Einsetzen von Gleichung (4.14)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\lambda} (\bar{\lambda}_{pre}) = & a^{(i)} \left[b^{(i,j)} \Delta \lambda_{05}^{(i,j)} + (1 - b^{(i,j)}) \Delta \lambda_{05}^{(i,j+1)} + f^{(i)} \right] + \\ & + (1 - a^{(i)}) \left[b^{(i+1,j')} \Delta \lambda_{05}^{(i+1,j')} + (1 - b^{(i+1,j')}) \Delta \lambda_{05}^{(i+1,j'+1)} + f^{(i+1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.15) ist es nun möglich, die gesuchte Grenzfläche aus einer vorgegebenen Menge an Punkten $X_{(i)}$ aufzustellen, bzw. umgekehrt bei vorliegender Grenzfläche eine Versagensbeurteilung des Messwertes $X_{(i)}$ durchzuführen.

4.5. Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems

Der durch Gleichung (4.15) gegebene Grundtyp zur Kalibrierung einer Regelfläche enthält vier Unbekannte, nämlich die Werte $\Delta \lambda_{05}^{(i,j)}$ an den vier Stützstellenpositionen.

Zusätzlich erhöht sich die Anzahl der Unbekannten je nach gewählter Funktionalität des Modells noch um weitere zwei wenn

$$\left\{ k_0^{(i)}, k_0^{(i+1)} \right\} \neq 0$$

bzw. um weitere vier falls

$$\left\{ k_0^{(i)}, k_1^{(i)}, k_0^{(i+1)}, k_1^{(i+1)} \right\} \neq 0.$$

Gewöhnlich wird der gesamte Bereich durch mehrere zusammenhängende Regelflächen approximiert. Letztendlich ergibt sich ein System aus n Unbekannten, die sich wie folgt zusammensetzen:

$$n_s = \sum_{i,j} 1, \quad (4.16)$$

$$n_k = \sum_{i, k_0^{(i)} \neq 0} 1 + \sum_{i, k_1^{(i)} \neq 0} 1, \quad (4.17)$$

$$n = n_s + n_k, \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

Dabei bezeichnet n_s die Anzahl der Stützstellen und n_k die Gesamtzahl der verwendeten Parameter k_i aus Gleichung (4.14) für alle verwendeten Gitterlinien.

4. Beschreibung eines neuen phänomenologischen Modells

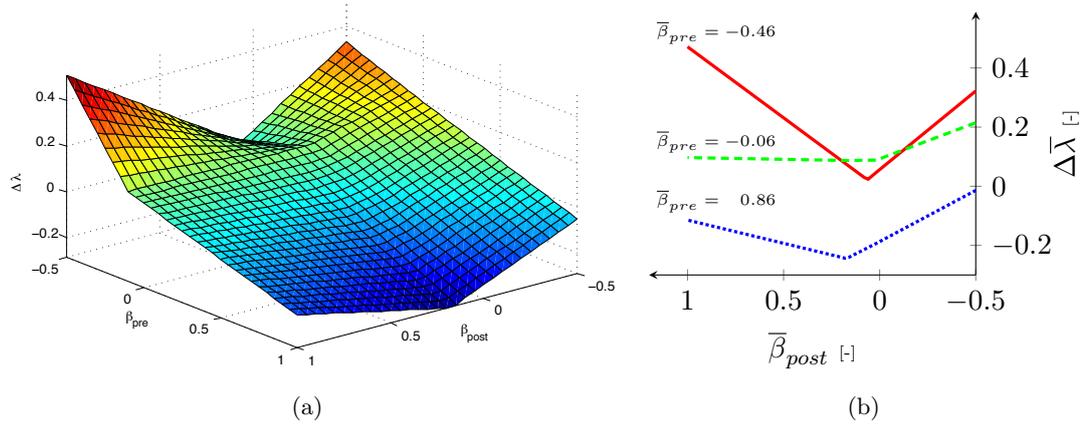


Abbildung 4.9.: Darstellung a) der gesamten Grenzfläche für eine Vorumformung von $\bar{\lambda}_{pre} = 0.5$ und b) Schnitte durch diese Grenzfläche bei $\bar{\beta}_{pre} = -0.46$, $\bar{\beta}_{pre} = -0.06$ und $\bar{\beta}_{pre} = 0.86$ am Beispiel von Aluminium AA6016 [13].

Abbildung 4.9 zeigt abschließend die berechnete Grenzfläche für den speziellen Fall einer Kalibrierung mit 22 Experimenten bei einer Vorumformung von $\bar{\lambda}_{pre} = 0.5$. Die dazu verwendeten experimentellen Daten sind in Abschnitt 5.2 zu finden, wo die Kalibrierung des phänomenologischen Modells für eine Validierung durchgeführt wird.

Sowohl aus der Grenzkurve als auch aus den Schnitten bei unterschiedlichen Vorumformungen $\bar{\beta}_{pre}$ geht klar hervor, dass die effektive Umformbarkeit des Werkstoffes, wie bereits von Müschenborn und Sonne in [36, S.597] dokumentiert, mit *steigendem Formänderungsverhältnis abnimmt*.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

Um die Vorhersagequalität des in Kapitel 4 aufgestellten Modells zu überprüfen, wurden experimentelle Daten verwendet. Einerseits werden Messdaten zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells benötigt, andererseits sollen weitere Daten vorliegen, an denen die Qualität der Vorhersage überprüft werden kann.

Für die Validierung des entwickelten Modells konnte im Rahmen dieses Projekts auf eine relativ große Anzahl an experimentellen Daten mit hoher Qualität zurückgegriffen werden. Untersucht wurden drei unterschiedliche Stähle sowie eine Aluminiumlegierung, die alle in der Automobilindustrie Verwendung finden.

In dieser Arbeit werden die, mit dem entwickelten Modell erzielten Ergebnisse an Hand der, für die Aluminiumlegierung bereitgestellten experimentellen Daten dargestellt.

5.1. Versuchsbasis - Experimentelle Daten

Die gesamte, zur Verfügung stehende Datenbasis setzt sich einerseits aus der standardmäßig für jeden Werkstoff durchgeführten Materialcharakterisierung und einer, speziell auf die Kalibrierung des entwickelten Modells zugeschnittenen Werkstoffprüfung zusammen.

5.1.1. Standard Materialcharakterisierung

Jeder Werkstoff, der später in der Produktion eingesetzt werden soll, wird einer Grundsatzuntersuchung unterzogen. Dazu gehören die Aufnahme von Fließkurven sowie die daraus bestimmbaren Anisotropie- oder Lankfordparameter für unterschiedliche Richtungen bezogen auf die Walzrichtung des untersuchten Bleches.

Die Lankfordparameter sind in Tabelle 5.1, die Fließkurve für 0° zur Walzrichtung in Abbildung 5.1 dargestellt.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.85 \\ r_{90} &= 0.80 \end{aligned}$$

Tabelle 5.1.: Lankfordparameter zur Beschreibung der Anisotropie des Aluminiumblechs [13].

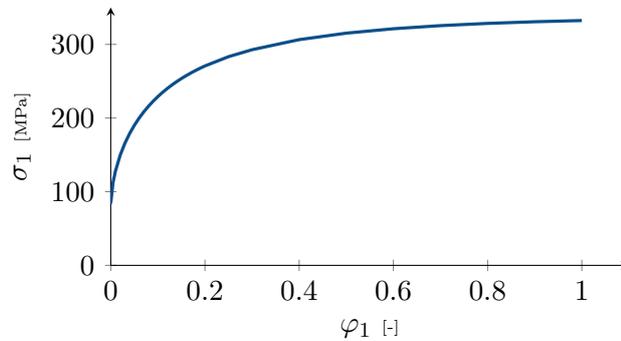


Abbildung 5.1.: Fließkurve von Aluminium AA6016 [13].

Neben der Ermittlung dieser Werkstoffgrößen wird zur einfachen Charakterisierung des Umformvermögens eine Grenzformänderungskurve aufgenommen. Diese Vorgehensweise ermöglicht es, wie bereits in Abschnitt 2.2.4 dargelegt wurde, eine einfache Abschätzung der maximal erreichbaren Umformbarkeit des Materials unter der Annahme proportionaler Belastungszustände zu treffen.

Die Grenzformänderungskurve für das Aluminiumblech mit der Dicke von 1.10mm ist in Abbildung 5.2 zusammen mit den als linear angenommenen Dehnpfaden dargestellt.

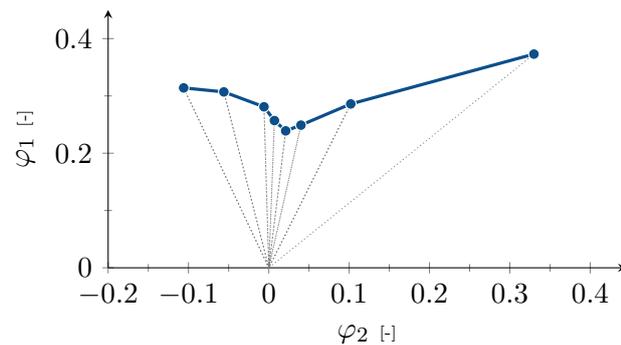


Abbildung 5.2.: Grenzformänderungskurve von Aluminium AA6016 entsprechend der durchgeführten Grundsatzuntersuchung [13].

5.1.2. Daten aus zweistufigen Umformprozessen

Neben den Daten aus der standardmäßig durchgeführten Grundsatzuntersuchung wurden zur Kalibrierung und Validierung des entwickelten phänomenologischen Modells eine Reihe spezieller Versuche durchgeführt.

Um definierte, nichtproportionale Dehnwege zu erreichen wurden die Ausgangsbleche einem Vorverformungsschritt unterzogen, bevor die Probengeometrien für die zweite Stufe der Verformung, der sogenannten Nachformoperation, entnommen wurden.

Die Versuche wurden so aufgesetzt, dass die Messdaten aus der ersten und der zweiten Umformstufe einen möglichst breiten Bereich des Dehnungsraum abdecken und damit in weiter Folge eine gleichmäßige Wahl der Stützstellen des phänomenologischen Modells ermöglicht werden kann. Die Wahl der durchgeführten Experimente beeinflusst in weiterer Folge die Ermittlung der Modellparametern $\bar{\beta}_{pre}$ bzw. $\bar{\beta}_{post}$ (siehe z.B. Abbildung 4.5).

Die drei gewählten Vorumformrichtungen entsprechen den, aus der Grenzformänderungsdiagramm ablesbaren charakteristischen Belastungssituationen einer näherungsweise uniaxialen ($\beta \approx -0.5$), plane-strain ($\beta \approx 0$) bzw. biaxialen ($\beta \approx 1$) Umformung. Experimentell werden diese Vorumformungen des Ausgangsblechs mit Hilfe der sogenannten Marciniak-Versuchseinrichtung [37, S.18] realisiert.

Aus den vorumgeformten Ausgangsblechen können in weiterer Folge Nakazima-Proben (siehe Abbildung 2.15) entnommen werden, die in einer zweiten Stufe bis zur beginnenden Einschnürung umgeformt werden. Die auf diese Weise erhaltenen Messwerte können im Hauptdehnungsraum in Form von Grenzformänderungskurven (siehe Abbildungen 5.6 bzw. 5.7) dargestellt werden. Im Gegensatz zu den auf konventionelle Art ermittelten Grenzformänderungskurven des *as-received* Blechs berücksichtigen diese die jeweiligen Vorumformungen des Blechs und geben somit bereits Aufschluß auf die Wegabhängigkeit der Umformbarkeit des Werkstoffs.

Um neben der Richtung der Umformung auch den Einfluß der Weglänge des ersten Umformschritts auf die Umformbarkeit des Werkstoffes im Modell möglichst gut abbilden zu können, werden zwei unterschiedliche Größen von Vorumformungen untersucht. Um die Experimente besser bezüglich der verwendeten Vorumformstufen voneinander trennen zu können, wird diese in *Klassen* unterteilt. Klasse 1 (abgekürzt mit K11) enthält dabei diejenigen Experimente, die mit Ausgangsblechen der größeren Vorumformung erhalten wurden. Dementsprechend sind in Klasse 2 (abgekürzt mit K12) die Experimente mit der kleineren Vorumformstufe zusammengefaßt.

Schematisch sind die durchgeführten Experimente und deren Einteilung in die zwei Klassen größerer und kleinerer Vorumformung in Abbildung 5.3 dargestellt.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

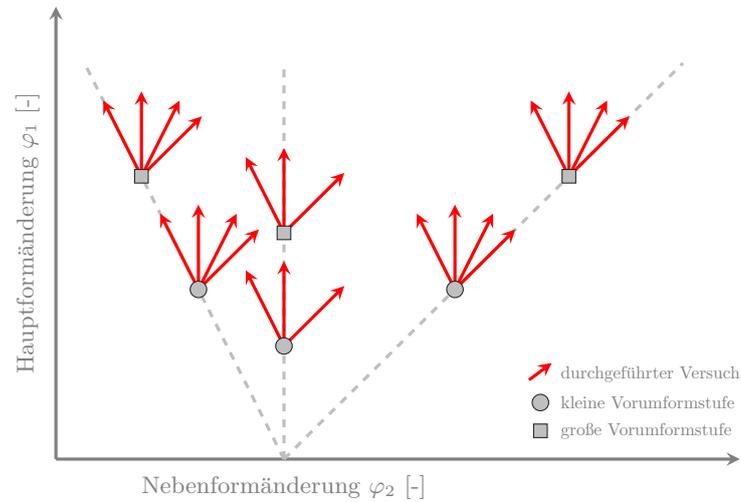


Abbildung 5.3.: Schematische Darstellung der durchgeführten Experimente für Aluminium AA6016 [13].

Die ermittelten Messwerte aus den beiden Klassen sind in den Tabellen 5.3 bzw. 5.2 dargestellt. Die graphische Darstellung der zugehörigen Grenzformänderungskurven der vorverformten Bleche sind in Abbildung 5.4 zu finden.

Richtung der Vorumformung	Ende erste Stufe (φ_2, φ_1)	Ende zweite Stufe (φ_2, φ_1)
uniaxial	(-0.080, 0.200)	(-0.14, 0.40)
	(-0.090, 0.200)	(-0.08, 0.33)
	(-0.080, 0.200)	(-0.05, 0.35)
	(-0.090, 0.200)	(0.13, 0.49)
plane-strain	(-0.007, 0.125)	(-0.08, 0.34)
	(-0.007, 0.125)	(0.00, 0.29)
	(-0.007, 0.125)	(0.19, 0.35)
biaxial	(0.150, 0.165)	(0.01, 0.31)
	(0.150, 0.165)	(0.16, 0.26)
	(0.150, 0.165)	(0.18, 0.28)
	(0.150, 0.165)	(0.26, 0.31)

Tabelle 5.2.: Experimentelle Versuchsbasis von AA6016 [13] aus der Klasse der größeren Vorumformungen. Absoluter Fehler durch das Messsystem: $|\varphi_i| = 0.005$ in der ersten und $|\varphi_i| = 0.01$ in der zweiten Stufe [37, S.19].

Richtung der Vorumformung	Ende erste Stufe (φ_2, φ_1)	Ende zweite Stufe (φ_2, φ_1)
uniaxial	(-0.040, 0.100)	(-0.12, 0.35)
	(-0.050, 0.100)	(-0.05, 0.28)
	(-0.050, 0.100)	(0.00, 0.31)
	(-0.050, 0.100)	(0.25, 0.45)
plane-strain	(-0.010, 0.052)	(-0.10, 0.31)
	(-0.010, 0.052)	(-0.02, 0.29)
	(-0.007, 0.052)	(0.24, 0.32)
biaxial	(0.090, 0.095)	(0.02, 0.31)
	(0.090, 0.095)	(0.10, 0.22)
	(0.090, 0.095)	(0.13, 0.26)
	(0.090, 0.095)	(0.27, 0.31)

Tabelle 5.3.: Experimentelle Versuchsbasis von AA6016 aus der Klasse der kleineren Vorumformungen. Absoluter Fehler durch das Messsystem: $|\varphi_i| = 0.005$ in der ersten und $|\varphi_i| = 0.01$ in der zweiten Stufe [37, S.19].

5.2. Kalibrierung des neuen phänomenologischen Modells für Aluminium AA6016

Um das phänomenologische Modell für eine Versagensbeurteilung verwenden zu können, wird in einem ersten Schritt eine Kalibrierung mit Hilfe von experimentellen Daten aus zweistufigen Umformprozessen benötigt.

Im gegenständlichen Fall kann auf die im vorigen Abschnitt dargestellten Versuchsergebnisse zurückgegriffen werden. Es handelt sich dabei um 22 experimentell ermittelte Versagenspunkte, die in den Tabellen 5.3 und 5.2 zusammengefasst sind.

Wie bereits in Abschnitt 4.5 des Kapitels über Modellentwicklung dargelegt wurde, ist die Anzahl der zur Kalibrierung benötigten experimentellen Datenpunkte durch die Dichte der gewählte Stützpunkte und die gewünschte Modellfunktionalität bestimmt.

Bei der Wahl der Stützpunkte ist es sinnvoll, sich an der Form der Grenzformänderungskurve zu orientieren, die einen besonders kritischen Bereich um den tiefsten Punkt der Kurve (d.h. in Richtung plane strain) aufweist. Diese Charakteristik bleibt auch bei den Grenzformänderungskurven der vorverformten Aluminiumbleche (siehe Abbildung 5.4) erhalten.

Als Minimalkonfiguration für die Kalibrierung des Modells wird für diesen Werkstoff

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

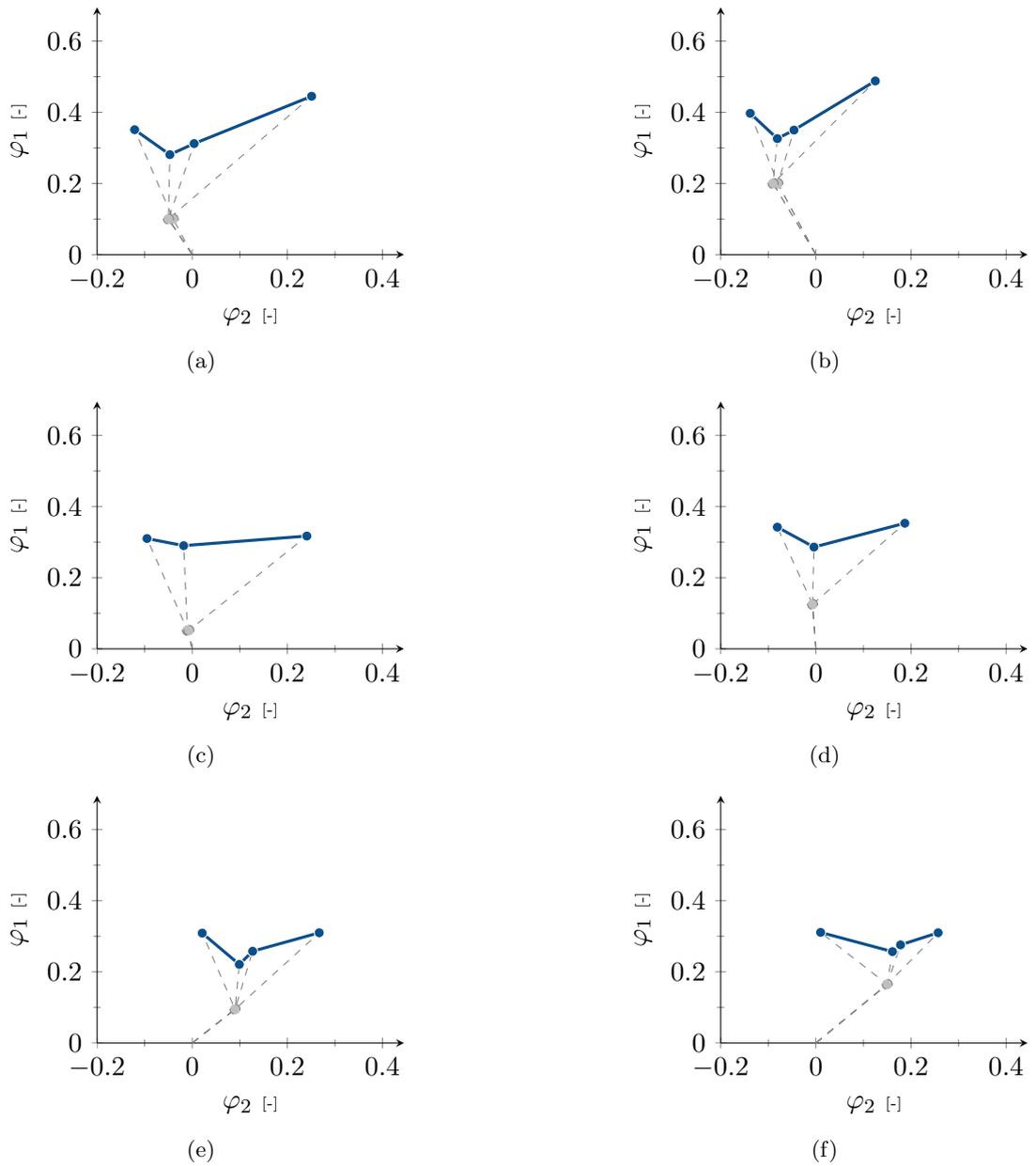


Abbildung 5.4.: Grenzformänderungskurven von Aluminium AA6016 [13] für uniaxial, plane-strain bzw. biaxial vorumgeformtes Blech. Dehnungen der ersten Stufe \bullet sind in grau, Grenzdehnungen der zweiten Stufe \circ in blau dargestellt.

daher eine Wahl von je drei Stützpunkten pro Vorumformrichtung empfohlen.

Hinsichtlich der Konfiguration des Modells existieren keinerlei Grenzen für die Anzahl der maximal wählbaren Stützpunkte und Vorumformrichtungen. Die Maximalkonfiguration des Modells ist daher nur durch die Anzahl der verfügbaren experimentellen Datenpunkte und somit durch den Umfang des durchgeführten Versuchsprogrammes bestimmt.

Ein großer Vorteil des entwickelten phänomenologischen Modells gegenüber physikalisch motivierten Modellen besteht darin, dass zusätzliche experimentelle Daten, die über den Umfang des minimal geforderten Versuchsprogramms hinausgehen jederzeit ohne Probleme in die Kalibrierung miteinbezogen werden können. Diese Vorgehensweise entspricht einer gezielten Überbestimmung des zugrundeliegenden Gleichungssystems (siehe Gl. (4.20)), wodurch die zu ermittelnden Modellparameter durch eine einfache Ausgleichsrechnung berechnet werden (Abschnitt 4.5).

Kalibrierung mit 15 Experimenten Im gegenständlichen Fall wird die Kalibrierung am Beispiel von 15 der 22 verfügbaren experimentellen Pfade durchgeführt. Die Stützpunkte wurden mit 3 pro Vorumformrichtung festgelegt, die Modellfunktionalität soll einem Heben und Verdrehen der einzelnen Polygonzüge entsprechen. In Summe ergeben sich dadurch 15 unbekannte Parameter, welche durch die Kalibrierung des Modells mit 15 experimentellen Datenpunkten eindeutig bestimmt werden können. Eine schematische Übersicht über die verwendeten Versuche ist in Abbildung 5.5 gegeben.

Die verbleibenden 7 Umformpfade werden zur Bestimmung der Vorhersagegenauigkeit des Modells herangezogen und sind ebenfalls in Abbildung 5.5, farblich gekennzeichnet und mit Nummern versehen, dargestellt.

5.3. Ergebnisse

Mit der im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten Kalibrierung des Modells konnten Vorhersagen über die maximal erreichbare Umformbarkeit der 7 übrigen Verformungswege ermittelt werden.

Einerseits können mit dem erstellten phänomenologischen Modell idealisierte Umformpfade, die im vorliegenden Fall aus zwei linearen Teilstücken bestehen beurteilt werden, andererseits wurde in der Modellentwicklung auch eine Anwendbarkeit auf Umformpfade aus FE-Simulationen vorgesehen.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

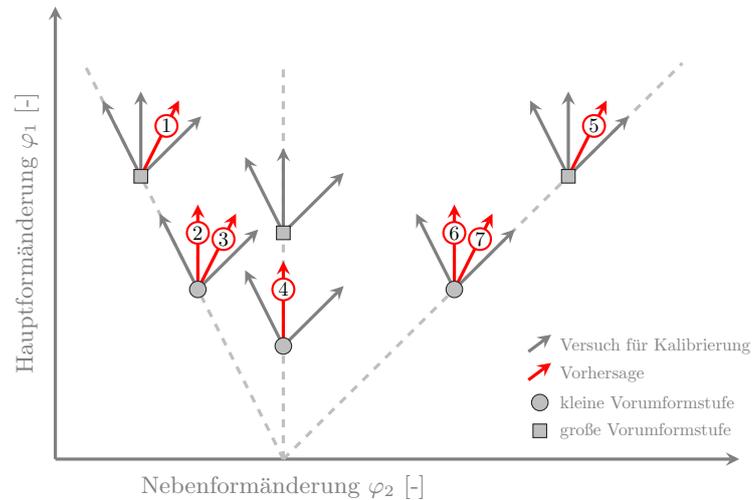


Abbildung 5.5.: Schematische Darstellung der zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells verwendeten Experimente (graue Pfeile). Pfeile mit Nummerierung entsprechen experimentellen Pfaden zur Überprüfung der Vorhersagequalität des Modells.

5.3.1. Beurteilung von experimentellen Umformpfaden

Um Aussagen über die Qualität der erzielten Ergebnisse zu ermöglichen, werden die berechneten maximalen Dehnungen aus dem phänomenologischen Modell in Tabelle 5.4 mit den vorliegenden experimentellen Grenzdehnungen und den Dehnungen aus der konventionellen Grenzformänderungsanalyse verglichen.

Graphische Darstellungen der in Tabelle 5.4 dargestellten Grenzdehnungswerte für die beurteilten Verformungspfade (1) bis (7) sind in den Abbildungen 5.6 und 5.7 zu finden.

Um eine bessere quantitative Abschätzung der Modellqualität zu erhalten wird an Stelle der Grenzdehnungswerte (φ_2, φ_1) der skalare Wert der erreichten Vergleichsdehnung $\bar{\varphi}$ entlang des Verformungsweges herangezogen. Dieser Wert läßt sich nach Gl. (2.44) berechnen, wobei die Anisotropie des Werkstoffs durch die Verwendung des quadratischen Fließkriteriums nach Hill (Gl. 2.33) berücksichtigt wurde. Die Vergleichsdehnungsinkremente $\overline{d\varphi}$ ergeben sich dabei zu [14, S.250]

$$\overline{d\varphi} = \sqrt{\frac{(1+r_0)}{1+r_0+r_{90}}} \sqrt{d\varphi_1^2 + \frac{r_{90}}{r_0} d\varphi_2^2 + r_{90}(d\varphi_1 + d\varphi_2)^2}. \quad (5.1)$$

Die ermittelten Vergleichsdehnungsgrenzwerte für das phänomenologische Modell bzw.

Pfad Nr.	ermittelte Dehnungsgrenzwerte		
	Experiment (φ_2, φ_1)	entwickeltes Modell (φ_2, φ_1)	Grenzformänderungs- analyse (φ_2, φ_1)
1	(-0.05, 0.35)	(-0.05, 0.34)	(-0.06, 0.31)
2	(-0.05, 0.28)	(-0.05, 0.27)	(-0.05, 0.30)
3	(0.00, 0.31)	(0.00, 0.28)	(-0.01, 0.31)
4	(-0.02, 0.29)	(-0.02, 0.26)	(-0.02, 0.28)
5	(0.18, 0.28)	(0.18, 0.27)	(0.19, 0.32)
6	(0.10, 0.22)	(0.10, 0.23)	(0.10, 0.28)
7	(0.13, 0.26)	(0.12, 0.24)	(0.14, 0.30)

Tabelle 5.4.: Gegenüberstellung des experimentell beobachteten Dehnungen bei beginnender Einschnürung mit den berechneten Werten aus dem neu entwickelten phänomenologischen Modell und der konventionellen Grenzformänderungsanalyse für beurteilte Dehnungspfade.

nach der Methode der konventionellen Grenzformänderungsanalyse sind in Tabelle 5.5 den entsprechenden Werten aus den Versuchen gegenübergestellt. Zusätzlich zu den Absolutwerten wurden die prozentuellen Abweichungen vom experimentellen Wert nach

$$\Delta_i = \frac{\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{exp}}{\bar{\varphi}_{exp}} \quad (5.2)$$

für beide Modelle berechnet und eingetragen. Das Vorzeichen berücksichtigt, ob das Modell die Umformbarkeit des Werkstoffes über (positives Vorzeichen) oder unterschätzt (negatives Vorzeichen). Im Sinne der Prozesssicherheit ist eine Unterschätzung des Umformpotentials zu favorisieren.

Die auf diese Weise ermittelten prozentuellen Abweichungen bilden die Grundlage für Abbildung 5.8, in der zusammenfassend die erreichte Modellqualität für die gewählte Kalibrierung mit 15 Versuchen dargestellt ist.

Aus Abbildung 5.8 kann entnommen werden, dass die prozentuellen Abweichungen des phänomenologischen Modells im Vergleich zu den, mit Hilfe der Grenzformänderungsanalyse ermittelten, für fünf der betrachteten sieben Pfade geringer ausfallen.

Tendenziell wird das Umformpotential für die unterschiedlichen Vorumformstufen und Richtungen dabei eher unter- als überschätzt, was besonders für äquibiaxiale Vorverformungen (Pfade 5-7) im Unterschied zu den Ergebnissen aus der konventionellen Grenzformänderungsanalyse gut sichtbar ist.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

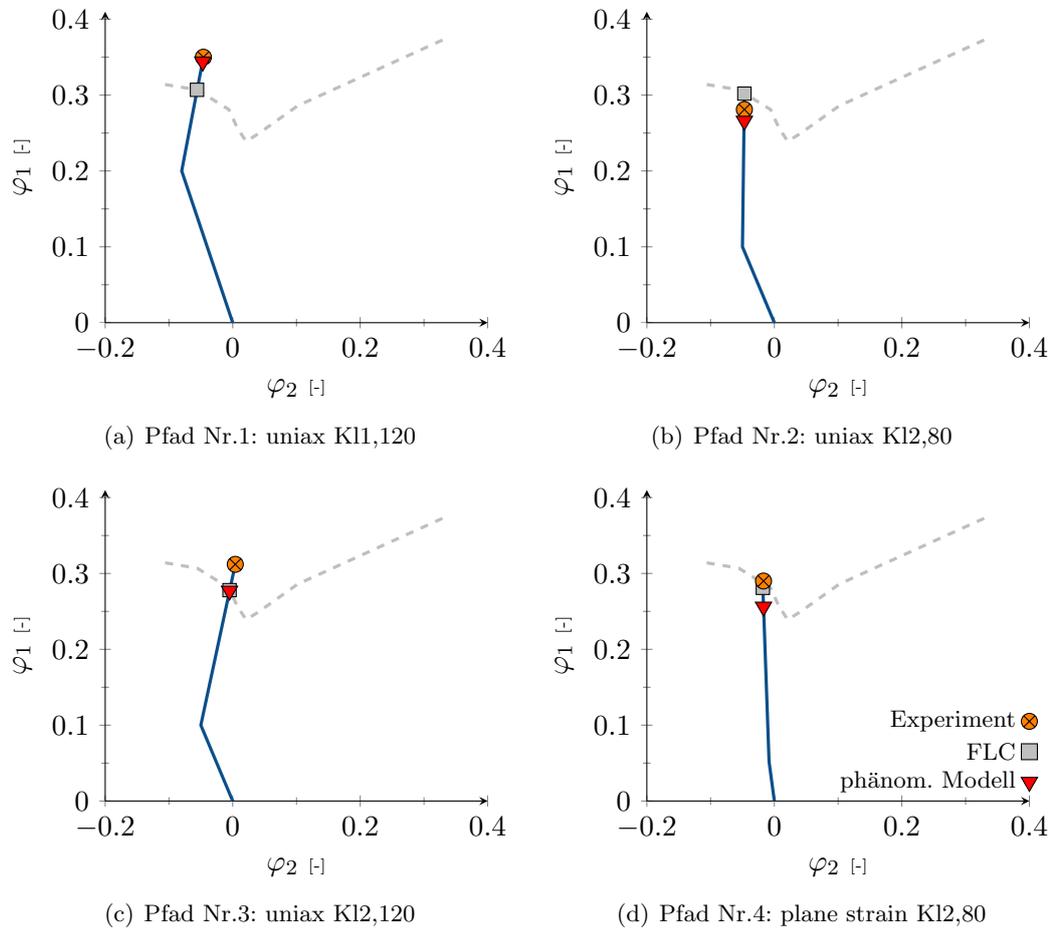


Abbildung 5.6.: Graphische Darstellung der Ergebnisse des neu entwickelten phänomenologischen Modells ∇ im Vergleich mit den jeweiligen experimentellen Daten \diamond und dem Resultat der konventionellen Grenzformänderungsanalyse \square .

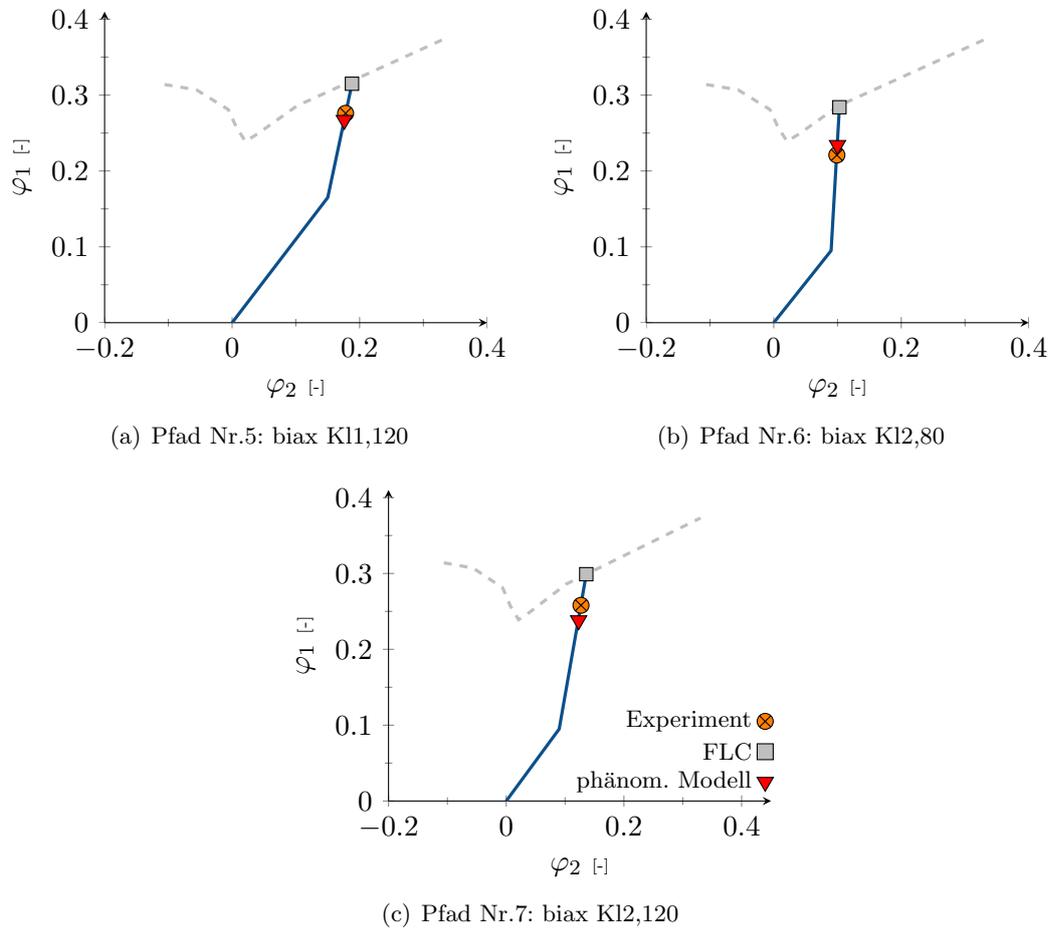


Abbildung 5.7.: Graphische Darstellung der Ergebnisse des neu entwickelten phänomenologischen Modells ∇ im Vergleich mit den jeweiligen experimentellen Daten \otimes und dem Resultat der konventionellen Grenzformänderungsanalyse \square .

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

Pfad Nr.	ermittelte Vergleichsdehnungsgrenzwerte				
	Experiment	entwickeltes Modell		konventionell FLC	
	$\bar{\varphi}_{exp}$	$\bar{\varphi}_{Modell}$	Abweichung in %	$\bar{\varphi}_{FLC}$	Abweichung in %
1	0.39	0.38	-3	0.33	-15
2	0.30	0.29	-3	0.33	10
3	0.37	0.33	-11	0.33	-11
4	0.32	0.28	-13	0.31	-3
5	0.44	0.43	-2	0.49	11
6	0.32	0.34	6	0.39	22
7	0.38	0.35	-8	0.43	13

Tabelle 5.5.: Zusammenfassung der berechneten Vergleichsdehnungsgrenzwerte basierend auf den Grenzdehnungen aus Tabelle 5.4 und ermittelte prozentuelle Abweichungen vom Experiment für das neu entwickelte phänomenologische Modell und die konventionelle Grenzformänderungsanalyse.

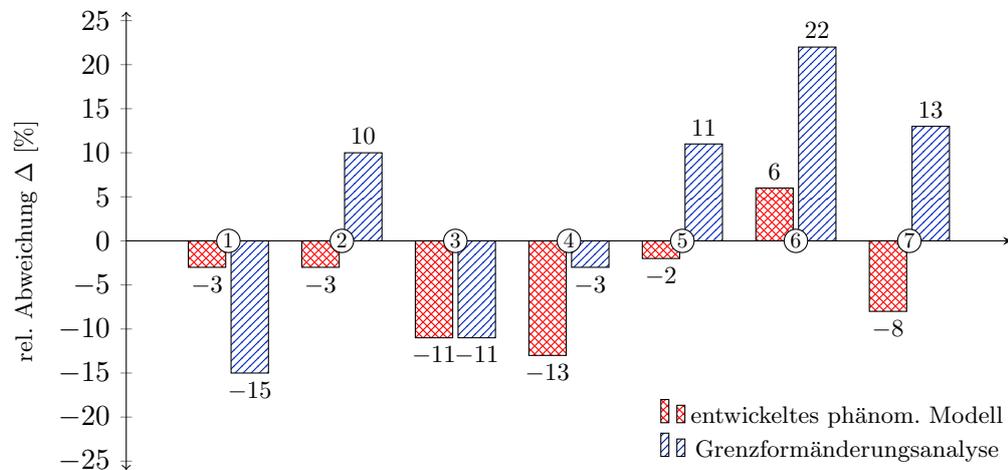
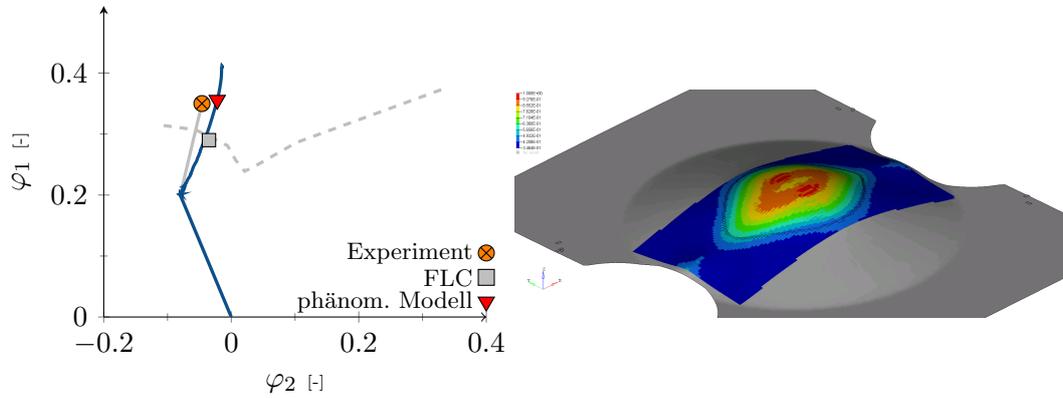


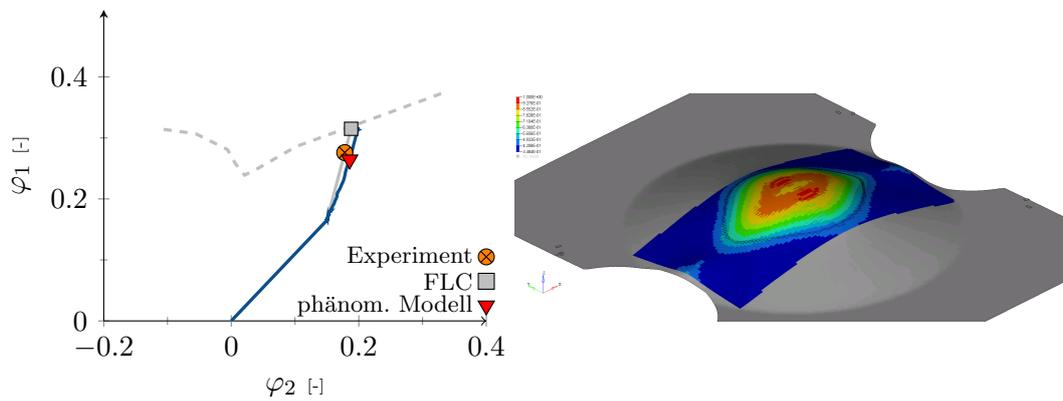
Abbildung 5.8.: Darstellung der prozentuellen Abweichungen der vorhergesagten Vergleichsdehnungsgrenzwerte aus Tabelle 5.5 ermittelt durch das jeweilige Modell bezogen auf das experimentell beobachtete Versagen.

5.3.2. Beurteilung von Umformpfaden aus FE-Simulationen

Neben der Beurteilung von bilinearen Pfaden, die aus experimentellen Daten ermittelt wurden, lassen sich mit der Implementierung¹ des Modells in Form einer Postprozessing-Routine auch Vorhersagen für Umformpfade aus FE-Simulationen treffen.



(a) FE-Simulation zu Pfad Nr. 1



(b) FE-Simulation zu Pfad Nr. 5

Abbildung 5.9.: FE-Simulationen und Beurteilung der maximalen Umformbarkeit durch das neu entwickelte phänomenologische Modell. Dargestellt sind Umformpfade ausgewählter Elemente.

Um die prinzipielle Anwendbarkeit des phänomenologischen Modells zur Beurteilung von FE-Simulationen zu demonstrieren, wurden zu den durchgeführten Nakazima-Realversuchen entsprechende FE-Simulationen aufgesetzt. Die erreichbaren Resultate solcher Versagensbeurteilungen sind am Beispiel von zwei ausgewerteten FE-Simulationen in Abbildung 5.9 dargestellt.

¹Detaillierte Informationen zur Umsetzung sind im Anhang zu finden.

5. Validierung des neuen phänomenologischen Modells

Diese, zu den Abbildungen 5.6 und 5.7 äquivalente Darstellung entsteht, wenn der Umformungspfad von jenem Element herangezogen wird, welches als erstes jene Dehnungen erreicht, die vom phänomenologischen Modell als kritisch bewertet.

Abbildung 5.9 demonstriert, dass die maximal erreichbare Umformbarkeit, die aus den Realversuchen bekannt ist, mit Hilfe der FE-Simulationen und dem phänomenologischen Modell im Postprocessing gut vorhergesagt werden kann.

6. Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden eingangs bestehende Versagensmodelle hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zur Beurteilung von nichtlinearen Umformhistorien am Beispiel der verfügbaren experimentellen Daten von Aluminium AA6016 untersucht.

Klassische Modelle nehmen als Ausgangsbasis für Weiterentwicklungen zweifellos eine wichtige Rolle ein, ermöglichen aber für die praktische Anwendung keine zufriedenstellenden Vorhersagen für die Umformbarkeit des Werkstoffes. Numerische Ansätze wie das MMFC-Kriterium zeigen trotz ihrer Einfachheit und des geringen Kalibrierungsaufwandes sehr gute Ergebnisse. Eine sukzessive Verbesserung der Vorhersagequalität durch Hinzunahme ausgewählter experimenteller Daten ist mit diesen Modellen aber nicht möglich.

Das entwickelte phänomenologische Modell ermöglicht eine systematische Steigerung der Qualität der Beurteilung durch die Wahl des Umfangs der verwendeten Versuchsdatenbasis. Die Validierung des Modells mit experimentellen Daten von Aluminium AA6016 zeigt eine Verbesserung der Vorhersage des Werkstoffversagens im Vergleich zur konventionellen Versagensbestimmung mittels der Grenzformänderungsanalyse.

Die prototypische Implementierung demonstriert die Anwendbarkeit des Modells zur Beurteilung von Umformsimulationen mit der Methode der Finiten Elemente.

6. Zusammenfassung

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

Dieser Abschnitt zeigt die prototypenhafte Umsetzung des in Kapitel 4 entwickelten phänomenologischen Versagensmodells als mehrstufigen Prozess. Die *Kalibrierung* des Versagensmodells erfolgt mittels eines Programms in der Umgebung MatLab[®], die eigentliche *Versagensbewertung* eines Bauteils aus einer FE-Simulation findet in einer in C umgesetzten Postprocessing-Routine statt. Die *Darstellung der Ergebnisse* erfolgt schlussendlich im kommerziellen Postprozessor HyperView[®].

A.1. Überblick

Die Entscheidung mit dem phänomenologischen Versagenskriterium nicht direkt in den Ablauf einer FE-Simulation einzugreifen sondern erst nach beendeter Simulation im Postprocessing eine Beurteilung durchzuführen wurde einerseits aus Performance-Überlegungen¹, andererseits aus Gründen der breiteren Anwendbarkeit des Versagensmodells (weitgehende Unabhängigkeit vom verwendeten FE-Solver) getroffen.

Auf der *ersten* Stufe werden die experimentell ermittelten Eingangsdaten vom Benutzer aufbereitet. Mit einer in MatLab[®] entwickelten Routine führt der Benutzer dann auf Basis dieser Daten die Kalibrierung des phänomenologischen Modells durch. Das Ergebnis dieses Schritts ist eine Konfigurationsdatei, welche alle notwendigen Parameter enthält, um das phänomenologische Modell für eine Versagensbeurteilung zu kalibrieren.

Die Beurteilung, wann ein Element des Bauteils innerhalb der FE-Simulation versagen nach dem entwickelten phänomenologischen Modell zeigt wird von einer in der Programmiersprache C umgesetzten Routine durchgeführt. Dies bildet den *zweiten* Schritt der Versagensanalyse. Ergebnisse der Beurteilung können dann in einer Postprocessing Umgebung graphisch dargestellt werden. Dieser Ablauf ist schematisch in Abbildung A.1 dargestellt.

¹Jeder zusätzliche Rechenaufwand verlangsamt die gesamte FE-Simulation. Ausserdem besteht im Postprocessing die Möglichkeit ausgewählte Bereiche des FE-Netzes einer Beurteilung zu unterziehen.

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

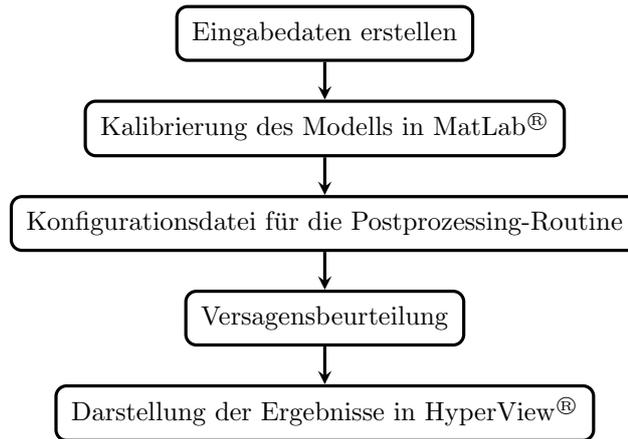


Abbildung A.1.: Schematische Darstellung des mehrstufigen Prozesses zur Versagensbeurteilung mit dem phänomenologischen Modell.

Die Implementierung des phänomenologischen Modells in der vorliegenden Form wurde bewusst modular aufgebaut. Eine klare Trennung zwischen Kalibrierung des Modells und Versagensbeurteilung garantiert eine höhere Stabilität² und bringt eine bessere Anwendbarkeit im industriellen Umfeld. Speziell hinsichtlich der Automatisierbarkeit des Prozesses können alle entwickelten Programme von der Kommandozeilen bedient werden. Eine Steigerung der Benutzerfreundlichkeit wird durch den Einsatz graphischer Oberflächen zur Steuerung der kommandozeilenorientierten Programme erreicht.

A.2. Kalibrierung des phänomenologischen Modells in der Umgebung MatLab®

Die zentrale Aufgabe der Kalibrierung des phänomenologischen Modells wird durch eine Routine in der Programmierumgebung MatLab® erledigt. Neben der Bestimmung der Parameter für das Modell kann die Qualität der ermittelten Konfiguration abgeschätzt werden.

Wie aus den theoretischen Grundlagen zum phänomenologischen Modell in Abschnitt 4.4 hervorgeht, wird eine grundlegende Datenbasis, bestehend aus

- experimentell bestimmter Grenzformänderungskurve und
- einer beliebigen Anzahl an Grenzformänderungswerten aus bilinearen Umformhistorien,

²Die notwendige Kalibrierung des Modells muss nur einmal durchgeführt werden.

hierfür benötigt.

Die Übergabe dieser Daten an die Kalibrierungsroutine wird mittels Konfigurationsdateien realisiert, die von einer speziellen Funktion gelesen und analysiert werden. Der detaillierte Aufbau ist in Abschnitt A.2.2 dargelegt.

A.2.1. Erstellen der Eingabedateien

Dabei handelt es sich um zwei Dateien, welche im ASCII-Format vorliegen müssen und deren struktureller Aufbau streng vorgegeben ist. Als Trennzeichen zwischen einzelnen Werten muss ein Tabulator, als Dezimalzeichen ein Punkt verwendet werden. Zeilen, die mit einem vorangestellten “#” beginnen, werden als Kommentare behandelt und von der Routine grundsätzlich nicht eingelesen. Die Bezeichnungen der beiden Dateien sind im Rahmen der, vom verwendeten Betriebssystem gebotenen Möglichkeiten, frei wählbar.

Eingabe der Grenzformänderungskurve Diese Datei – der Aufbau ist in Abbildung A.2 gezeigt – enthält die Grenzformänderungen, welche unter nahezu konstantem Belastungsverhältnis für ein Blech im Lieferzustand ermittelt wurden. Jede Zeile der Datei darf maximal ein Wertepaar (φ_2, φ_1) enthalten, wobei dabei zu achten ist, dass der Wert der Nebenformänderung in der ersten Spalte, der der Hauptformänderung in der zweiten Spalte steht. Die Reihenfolge der eingetragenen Wertepaare untereinander ist dagegen frei wählbar. Die Routine führt eine automatische Sortierung der Werte durch, um zur korrekten Darstellung der Grenzformänderungskurve zu gelangen. Zwischen den einzelnen Datenpunkten wird linear interpoliert. Aus Gründen einer konsistenten Vorgangsweise wird die Grenzformänderungskurve nach beiden Seiten durch Extrapolation verlängert.

```
# FLC DATA
# MATERIAL: AA6016
# PHI2    PHI1
-0.106    0.314
-0.056    0.307
-0.006    0.281
 0.007    0.257
 0.021    0.239
 0.040    0.249
 0.102    0.286
 0.330    0.373
# END
```

Abbildung A.2.: Darstellung des Aufbaus der Eingabedatei am Beispiel von Aluminium AA6016 [13].

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

Eingabe der experimentellen Daten Der Aufbau der Datei, welche die experimentellen Daten zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells enthält, ist etwas komplexer. Da die Daten aus zweistufigen Umformprozessen stammen, sind zwei Informationen anzugeben, die den bilinearen Dehnpfad in eindeutiger Weise charakterisieren: Umformzustände am Ende des ersten Umformschritts und die ermittelten Grenzformänderungen bei Eintritt des Materialversagens, welches das Ende des zweiten Umformschritts festlegt.

Neben den reinen Informationen des Umformpfades werden in dieser Datei auch die Positionen der Stützstellen, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, festgelegt. Diese Einstellungsmöglichkeit spiegelt sich auch in der Struktur der Konfigurationsdatei wieder. Die erste Zeile dieser Datei, die nicht als Kommentar ausgewiesen ist, muss die Anzahl der gewünschten Gitternetzlinien enthalten. Diese entsprechen sinnvollerweise den unterschiedlichen Klassen an Umformrichtungen des ersten Schritts $\bar{\beta}_{pre}$ (siehe Abbildung 4.5).

Jede dieser Gitternetzlinien wird im Aufbau der Datei durch einen Block repräsentiert. Dieser enthält neben den Daten des Umformpfades noch Informationen darüber, welche experimentellen Punkte zur Ermittlung von bestimmten Stützstellenposition herangezogen werden sollen. Ein Block kann in der Konfigurationsdatei folgende allgemeine Form annehmen:

P_NUMBER	LABEL1	LABEL2	LABEL3	LABEL4	...	LABELN
...
LABEL1	PHI2_PRE	PHI1_PRE	PHI2_POST	PHI1_POST		
LABEL2	PHI2_PRE	PHI1_PRE	PHI2_POST	PHI1_POST		
LABEL3	PHI2_PRE	PHI1_PRE	PHI2_POST	PHI1_POST		
LABEL4	PHI2_PRE	PHI1_PRE	PHI2_POST	PHI1_POST		
...
LABELN	PHI2_PRE	PHI1_PRE	PHI2_POST	PHI1_POST		

Der Anfang jedes Blocks wird durch das Zeichen³ **P**, kombiniert mit einer eindeutigen, aber frei wählbaren Bezeichnung, eingeleitet:

P_NUMBER	LABEL1	LABEL2	LABEL3	LABEL4	...	LABELN
...

Die weiteren Einträge⁴ dieser Zeile legen einerseits die Anzahl der Stützstellen für diese Gitternetzlinie fest, andererseits erfolgt über die, den Bezeichnungen zugeordneten experimentellen Daten in den nachfolgenden Zeilen die Berechnung der Positionen ($\bar{\beta}_{pre}, \bar{\beta}_{post}$) der Stützstellen.

³Die Bezeichnung mit P stammt aus der anschaulichen Überlegung, dass diese Gitterlinien in der aufgebauten Fläche als Polygonzüge erscheinen.

⁴hier als Labels bezeichnet

A.2. Kalibrierung des phänomenologischen Modells in der Umgebung MatLab®

Die nachfolgenden Zeilen des Blocks beginnen jeweils mit einer Bezeichnung, gefolgt von den Formänderungen der Vorumformung, beziehungsweise den Werten aus der Nachumformung:

```
...           ...           ...           ...           ...  
LABELN      PHI2_PRE  PHI1_PRE  PHI2_POST  PHI1_POST  
...           ...           ...           ...           ...
```

Das bedeutet, dass nur jene experimentellen Daten zur Festlegung der Stützstellenposition herangezogen werden, deren Bezeichnungen (Labels) in der ersten Zeile des Blocks aufscheinen. Von den restlichen Werten werden lediglich die Pfadinformationen zur *Kalibrierung* des phänomenologischen Modells herangezogen - sie haben aber keinen Einfluss auf die *Position der Stützstellen*. Der Benutzer bekommt durch diese Vorgehensweise die Möglichkeit, Einfluss auf den grundlegenden Aufbau der später automatisch erstellten Grenzfläche im Rahmen der experimentellen Vorgaben zu nehmen. Der vollständige Aufbau einer Konfigurationsdatei für Aluminium 6016 ist in Abbildung A.3 dargestellt.

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

```
# EXPERIMENTAL DATA
# MATERIAL: AA6016
#
# NUMBER OF GRID LINES
3
#
# GRID LINE 1
P1      020      080      120      RON
#
020  -0.040  0.100  -0.121  0.351
080  -0.050  0.100  -0.047  0.281
120  -0.050  0.100   0.004  0.312
RON  -0.050  0.100   0.251  0.445
020  -0.080  0.200  -0.138  0.397
080  -0.090  0.200  -0.081  0.326
120  -0.080  0.200  -0.046  0.350
RON  -0.090  0.200   0.125  0.488
#
# GRID LINE 2
P2      020      080      RON
#
020  -0.010  0.052  -0.095  0.310
080  -0.010  0.052  -0.018  0.290
RON  -0.007  0.052   0.241  0.317
020  -0.007  0.125  -0.081  0.342
080  -0.007  0.125  -0.004  0.286
RON  -0.007  0.125   0.187  0.353
#
# GRID LINE 3
P3      020      080      120      RON
#
020  0.090  0.095  0.021  0.309
080  0.090  0.095  0.099  0.221
120  0.090  0.095  0.127  0.258
RON  0.090  0.095  0.267  0.310
020  0.150  0.165  0.010  0.311
080  0.150  0.165  0.161  0.257
120  0.150  0.165  0.178  0.276
RON  0.150  0.165  0.257  0.310
```

Abbildung A.3.: Konfigurationsdatei zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells für Aluminium 6016 [13] mit drei Gitternetzlinien.

A.2.2. Aufbau der Kalibrierungsroutine

Im Folgenden wird die Struktur des Programms zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells beschrieben. Als Eingabegrößen dienen die, in Abschnitt A.2.1 dargestellten Dateien. Neben den experimentellen Daten werden für die weitere Berechnung noch Materialkenngrößen benötigt, um das Verhalten des vorliegenden Werkstoffs mit Hilfe der Plastizitätstheorie (siehe Kapitel 2.1.2) beschreiben zu können. Die vorliegende Implementierung beschränkt sich auf die Verwendung der Fließortbeschreibung nach Hill Gl.(2.33). Für die Auswertung des Ansatzes werden die Anisotropieparameter r_0 und r_{90} benötigt.

Eine Darstellung der wichtigsten Schritte innerhalb der Kalibrierungsroutine sind in Abbildung (A.4) dargestellt.

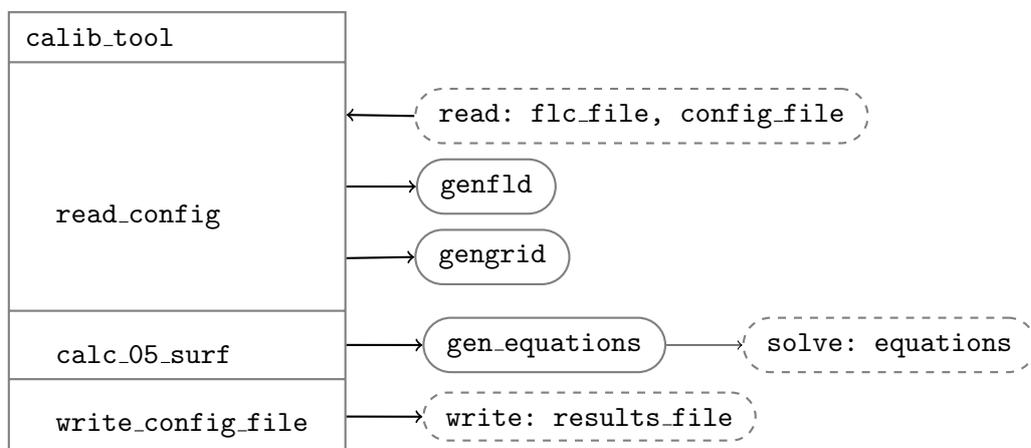


Abbildung A.4.: Schematischer Aufbau der Routine zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells in MatLab®.

Die Routine wird in der MatLab®-Umgebung mit folgendem Syntax gestartet:

```

calib_tool(
    output_file,      % Ergebnisdatei
    config_file,     % Konfigurationsdatei
    flc_file,        % Datei mit Grenzformänderungen
    r0, r90,         % Anisotropieparameter
    mode,            % Modellfunktionalität
    material         % String für Materialbezeichnung
)
  
```

Im ersten Schritt wird von der Hauptfunktion `calib_tool` die Subroutine `read_config` aufgerufen. Diese liest die Dateien, die die Grenzformänderungen (`flc_file`) bzw. die Kon-

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

figurationsdaten (`config_file`) enthalten und analysiert diese auf die Einhaltung formaler Kriterien⁵.

Im ersten Teil der Funktion `read_config` werden die Grenzformänderungen eingelesen und das zweidimensionale Feld an die Subroutine `genfld` übergeben, die eine Transformation aus dem Dehnungsraum in den Raum, beschrieben durch die Größen $\bar{\beta}$ und $\bar{\varphi}$ durchführt. Diese Darstellung erweist sich für die spätere Umrechnung der Messdaten als zweckmäßig und wird daher in ein eigenständiges Modul mit dem Namen `calc_path_data` ausgelagert.

Im zweiten Teil von `read_config` wird die Funktion `gengrid` ausgeführt. Nach erfolgreicher Prüfung der Konfigurationsdaten wird hier die Berechnung der Lage der einzelnen Gitterlinien und der darauf positionierten Stützstellen vorgenommen. Dies beendet den Einlese- und Analysevorgang.

Die eingelesenen Daten werden dann im nächsten Schritt an die Subroutine `calc_05_surf` übergeben. Die Funktion `gen_equations` stellt für jeden in der Konfigurationsdatei aufgelisteten Messwert eine Gleichung der Form (4.15) auf, die den Angaben des Benutzers über Anzahl und Position der Stützstellen entspricht. Auf diese Weise wird das Gleichungssystem (4.20) für die vorgegebenen Messdaten aufgestellt. Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} des linearen Gleichungssystems werden dann an die interne Funktion `pinv` von MatLab[®] übergeben, um eine eindeutige Lösung zu berechnen (siehe Abschnitt 4.5).

Der Lösungsvektor \mathbf{x} enthält alle notwendigen Daten, um die Grenzfläche für eine 50-prozentige Vorumformung nach dem entwickelten phänomenologischen Modell aufbauen zu können. Dazu gehören die Werte $\Delta\lambda_{05}$ an den Stützstellen sowie die Parameter k_0^i und k_1^i , die das Anheben bzw. das Verdrehen der Begrenzungen der einzelnen Regelflächen beschreiben (siehe Abschnitt 4.4).

Das Ergebnis der Kalibrierung, also der zuvor berechnete Lösungsvektor und die Positionen der Stützstellen, wird im letzten Schritt mit Hilfe der Funktion `write_config_file` in Form einer speziellen Datei, ähnlich der Konfigurationsdatei A.2.1 abgespeichert. Der Aufbau ist im nächsten Abschnitt dargestellt.

A.2.3. Ergebnisdatei

Diese Datei wird von der Kalibrierungsroutine erstellt und dient wiederum dem Postprocessing Programm als Konfigurationsdatei. Das Format der Datei ähnelt dem Aufbau der

⁵Sind in der Konfigurationsdatei beispielsweise weniger als zwei Blöcke mit Versuchsdaten enthalten, das heisst wird versucht, mit weniger als zwei Gitterlinien eine Regelfläche aufzubauen, bricht die Routine mit einer Fehlermeldung ab.

A.2. Kalibrierung des phänomenologischen Modells in der Umgebung MatLab®

zuvor erstellten Dateien: Kommentare werden mit “#” gekennzeichnet, als Trennzeichen werden Tabulatoren verwendet. Die Aufbau ist in Abbildung A.5 dargestellt.

```
#####
#   DATE: DD-MMM-YYYY   #
#####
Material_ID_String
# r0   r90
R0    R90
# number of flc points
NUM
# experimental flc follows
PHI2   PHI1
...    ...
...    ...
# grid information follows
NUM_BETA_PRE
NUM_BETA_POST1 NUM_BETA_POST2 ... NUM_BETA_POSTN
# beta_pre values
BETA_PRE1      BETA_PRE2 ... BETA_PREN
# beta_post values
BETA_POST11    BETA_POST12 ... BETA_POST1N
BETA_POST21    BETA_POST22 ... BETA_POST2N
...           ...    ...    ...
#
# delta_lam_05
DLAM11          DLAM12 ... DLAM1N
DLAM21          DLAM22 ... DLAM2N
...           ...    ...    ...
# k0   k1
K01    K11
K02    K12
...    ...
#
# end of config file
```

Abbildung A.5.: Darstellung der Struktur der Ergebnisdatei. Alle zur Kalibrierung des phänomenologischen Modells notwendigen Daten sind enthalten.

Im Kopf der erstellten Datei findet sich das Erstellungsdatum der Datei, und somit der Zeitpunkt der Kalibrierung wieder. Um einen besseren Überblick über die erstellten Dateien, unabhängig vom gewählten Dateinamen, zu haben, wird in der anschließenden Zeile eine Materialkennung vermerkt. Diese kann vom Benutzer beim Aufruf der Kalibrierungsroutine frei gewählt werden und kann zum Beispiel Informationen über den Werkstoff oder die Anzahl der verwendeten Messpunkte enthalten. Diese Materialkennung wird beim Start der Versagensanalyse dem Benutzer als Benachrichtigung angezeigt, hat aber keine Auswirkung auf die folgenden Rechenschritte.

Nach dem Kopf der Datei folgt zuerst ein Block mit Materialinformationen. Die erste Zeile dieses Teils enthält die Anisotropieparameter r_0 und r_{90} . In der darauf folgenden

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

Zeile ist die Anzahl der Datenpunkte der Grenzformänderungskurve festgehalten. Diese ist anschließend in Tabellenform auf den nächsten Zeilen eingetragen.

Der zweite Block dieser Datei enthält die Informationen über das Grundgitter der Regeflächen: Anzahl der Gitterlinien (NUM.BETA_PRE) sowie die Anzahl der Stützstellen (NUM.BETA_POST) für jede dieser Gitterlinien. Die nächsten Zeilen enthalten die expliziten Werte für die Lage der Gitterlinien bei $\bar{\beta}_{pre}^{(i)}$ bzw. pro Zeile zusammengefasst jene Stützstellenpositionen $\bar{\beta}_{post}^{(i,j)}$, die auf den jeweiligen Gitterlinien liegen.

Durch die Angabe dieser Daten ist der Grundstruktur des flächenhaften Gebildes bestimmt und es müssen nur noch die Werte $\Delta\lambda_{05}^{(i,j)}$ an den einzelnen Stützstellen angegeben werden, um die Form der Grenzfläche eindeutig wiederherstellen zu können. Diese sind in der selben Reihenfolge wie die Werte der Stützstellenpositionen $\bar{\beta}_{post}^{(i,j)}$ eingetragen. In den letzten Zeilen der Ergebnisdatei sind die noch fehlenden Parameter k_0^i bzw. k_1^i , wieder durch Zeilenumbrüche getrennt, für jede der oben angegebenen Gitterlinien abgelegt.

A.2.4. graphische Benutzeroberfläche

Um ein für den Benutzer komfortableres Ausführen der Kalibrierung zu ermöglichen wurde über dem kommandozeilenorientierten Programm eine graphische Oberfläche errichtet. Diese ermöglicht die einfache Auswahl der benötigten Eingabedateien, sowie die Übergabe der Materialparameter. Die graphische Benutzeroberfläche kann mit dem Befehl `calib_tool_gui` ohne weitere Angabe von Parametern gestartet werden.

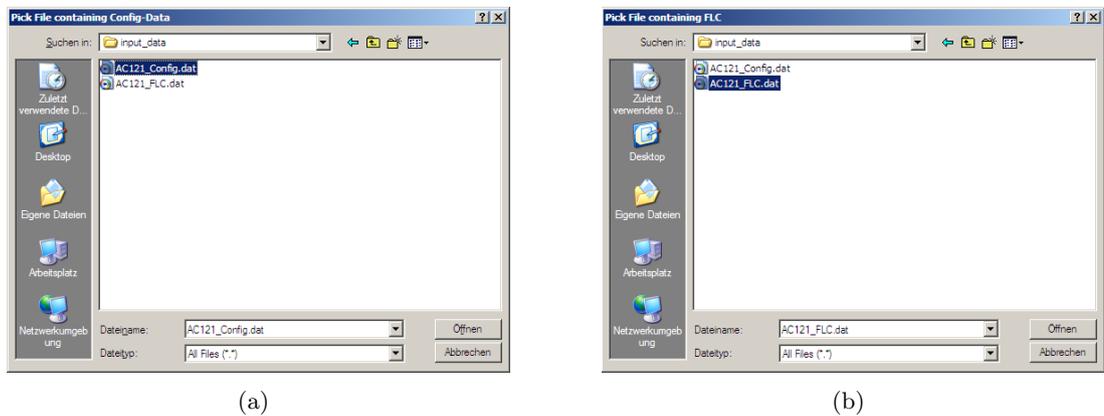


Abbildung A.6.: Dialog zur Auswahl der benötigten Dateien.

Neben der interaktiven Führung durch die Auswahl der zur Modellkalibrierung notwendigen Informationen ermöglicht die graphische Benutzeroberfläche auch eine übersichtliche

A.2. Kalibrierung des phänomenologischen Modells in der Umgebung MatLab®

Darstellung der verwendeten Daten (Abbildung A.7(a)) und der berechneten Ergebnisse (Abbildungen A.7(b) und A.8).

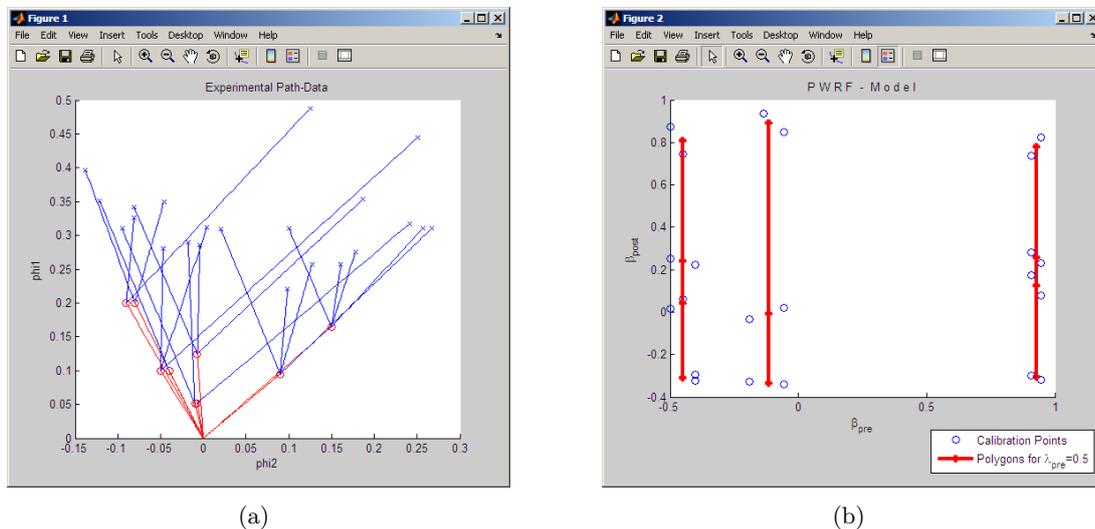


Abbildung A.7.: (a) Darstellung der zur Kalibrierung verwendeten Messdaten im Dehnungsraum und (b) Positionen der ermittelten Stützstellen nach Vorgabe der Konfigurationsdatei.

Der Benutzer kann anhand der präsentierten Daten überprüfen, ob der Vorgang der Kalibrierung zum gewünschten Ergebnis geführt hat. Um auch eine quantitative Aussage über die Modellqualität treffen zu können, werden entsprechend den verwendeten Messdaten Pfadverläufe konstruiert, für die in weiterer Folge eine Versagensbeurteilung durchgeführt wird. Die Differenzen zwischen gemessenen Grenzformänderungen aus der Konfigurationsdatei und den berechneten Werten geben Aufschluss darüber, wie gut das angepasste Modell die Messdaten repräsentiert. Im Falle eines eindeutig bestimmten Systems müssen die Abweichungen bis auf numerische Fehler verschwinden. Dies kann als Hinweis für das korrekte Arbeiten des Kalibrierungsroutine herangezogen werden.

Werden mehr Messpunkte als notwendig zur Kalibrierung verwendet und treten punktuell überdurchschnittlich große Abweichungen auf kann versucht werden, die Anzahl Freiheitsgrade des Modells durch Verfeinerung des zugrundeliegenden Gitters zu erhöhen, um eine bessere Anpassung zu erreichen, oder diesen Bereich durch zusätzliche Experimente stärker abzusichern.

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

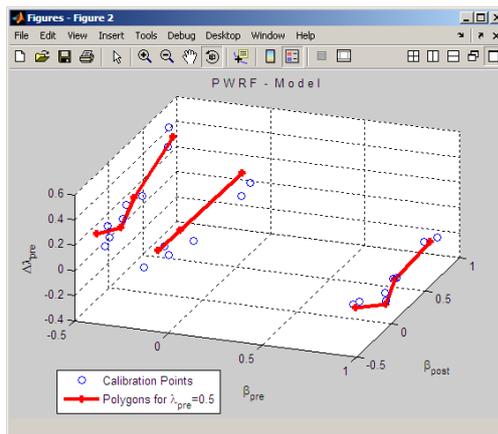


Abbildung A.8.: Darstellung des Ergebnisse der Kalibrierung: Positionen und ermittelte Werte an den Stützstellen.

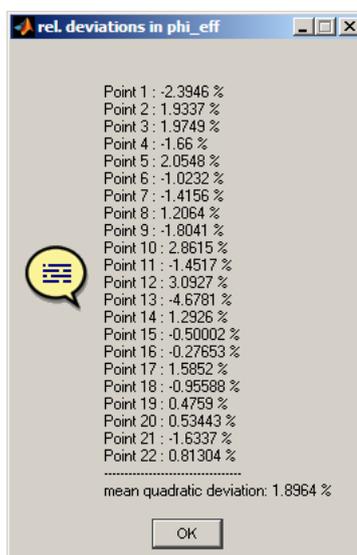


Abbildung A.9.: Darstellung der Abweichungen der zur Kalibrierung verwendeten Daten vom Eintritt des experimentell ermittelten Versagens.

A.3. Postprozessing-Programm

Die in Abschnitten zuvor dargestellten Schritte dienen der *Kalibrierung* des phänomenologischen Modells und müssen für jedes Material nur einmal durchgeführt werden. Die eigentliche Versagensbeurteilung wird von einem eigenen Programm⁶ mit der Bezeich-

nung `failure` (bzw. `failure.exe`) erledigt.

A.3.1. Anforderungen

An die zu entwickelnde Software werden folgende Anforderungen gestellt:

- Möglichkeit der Analyse von Ergebnisdaten des kommerziellen FE-Solvers *LS-DYNA*[®], wobei nur Daten der zweite Umformstufe zur Berechnung vorliegen. An Stelle des ersten Umformschritts wird für alle Elemente ein linearer Pfadverlauf aus dem Koordinatenursprung angenommen.
- Simulationen mit adaptiver Netzverfeinerung sollen beurteilt werden können.
- Darstellung der Resultate der Analyse im Postprozessor *HyperView*[®].
- Verfügbarkeit der Lösung für die Betriebssysteme GNU/Linux und Microsoft-Windows[®].

Die Wahl der zur Umsetzung verwendeten Programmiersprache fiel, vor allem wegen der einfacheren Einbindung der bereits bestehenden Bibliotheken, auf *ANSI-C*.⁷

A.3.1.1. *LS-DYNA*[®] Simulationsdaten

Aus der ersten *LS-DYNA*[®] Ergebnisdatei (in der Regel mit `d3plot` bezeichnet) lassen sich die weiteren zur Simulation gehörenden Dateinamen ableiten. An den sogenannten "root name" werden Zahlen, beginnend mit "01" bis maximal "999" angehängt. Alle Dateien mit diesen Bezeichnungen bilden eine "Familie". Ändert sich im Lauf der Simulation die Geometrie des FE-Modells, zum Beispiel durch adaptive Netzverfeinerung, ist dies durch zwei, an den "root name" angehängte Buchstaben, beginnend mit "aa", im Dateinamen gekennzeichnet. Alle nachfolgend erzeugten Dateien (z.B. `d3plotaa01,...`) gehört dann zu der neuen Familie. Abbildung A.10 zeigt die Abfolge der erstellten Dateinamen von zwei unterschiedlichen *LS-DYNA*[®] Simulationen, einmal mit Netzverfeinerungen während der Berechnung (rechts) und einmal ohne Änderung der Ausgangsgeometrie (links).

Auf diese Weise lässt sich der grobe Ablauf der FE-Simulation allein anhand der vorliegenden Dateinamen ablesen, ohne die gesamten Daten analysieren zu müssen.

⁶Bei der vorliegenden Version handelt es sich um eine prototypische Umsetzung einer Versagensbeurteilung basierend auf dem phänomenologischen Modell.

⁷Natürlich spielten auch die bereits vorhandenen Kenntnisse des Autors eine wichtige Rolle.

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

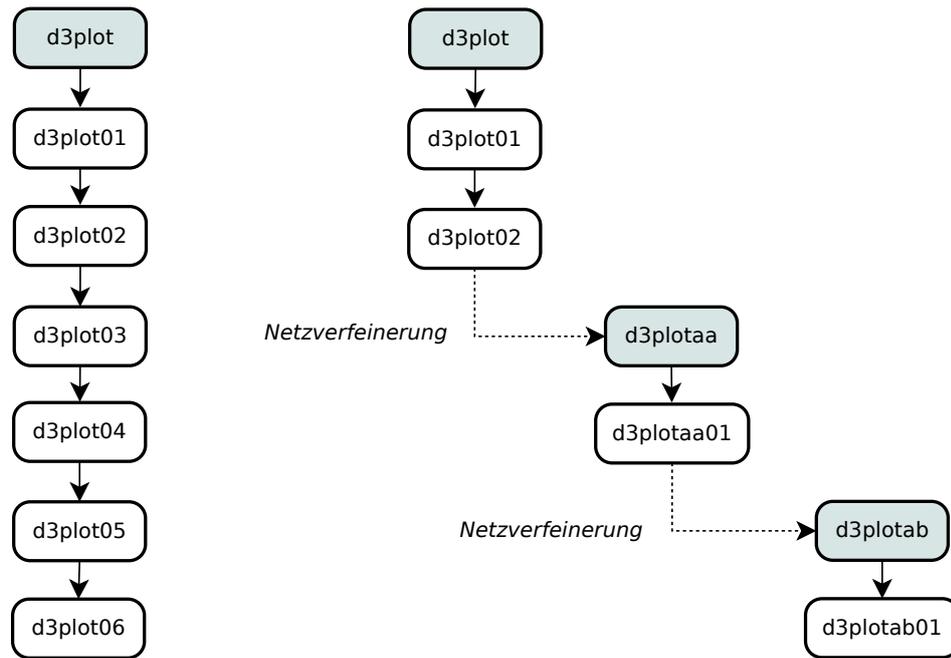


Abbildung A.10.: Vergleich der erzeugten Dateien aus zwei unterschiedlichen LS-DYNA[®] Simulationen, links ohne und rechts mit adaptiver Netzverfeinerung. Blau gekennzeichnete Dateien enthalten die gesamte Information über die Geometrie des FE-Modells.

Die vorliegende Implementierung geht vereinfachend davon aus, dass pro LS-DYNA[®] Ergebnisdatei genau ein Zeitschritt enthalten ist. Realisieren lässt sich dies auf einfache Weise vor dem Start der Simulation durch Setzen des Flags `IEVERP=1` im Keyword `*DATABASE_BINARY` [53, S.619].

Die Grunddatei jeder Familie nimmt eine besondere Rolle ein, denn diese enthält wichtige Informationen über den Aufbau des FE-Modells. In den ersten 64 Bytes dieser Dateien ist der *Schlüssel* zur korrekten Dekodierung der nachfolgenden binären Dateien der Familie hinterlegt. Eine weitere Besonderheit dieser LS-DYNA[®] Dateien ist auch, dass anschließend an den 64 Bytes langen Kontrollblock die *gesamte Geometrie der Ausgangskonfiguration* (vgl. Abschnitt 2.1.1.1) des FE-Modells enthalten ist. In diesem Teil der Datei sind die Koordinaten aller Knoten, sowie die Zugehörigkeit von einzelnen Knoten zu Elementen abgespeichert⁸.

⁸Es ist wichtig anzumerken, dass die von LS-DYNA[®] intern verwendete Knoten- und Elementnummerierung im Allgemeinen nicht mit der, im FE-Preprozessor vergebenen Nummerierung übereinstimmt. Die Zuordnung von *externen* zu *internen* Bezeichnungen ist ebenfalls in der ersten LS-DYNA[®] Ergebnisdatei jeder Familie enthalten.

Erst nach diesen Geometriedaten folgen in der Datei die vom FE-Solver berechneten Größen, wie zum Beispiel Knotenverschiebungen, Dehnungen und Spannungen. Der Vergleich einer Grunddatei mit einer regulären Datei einer Familie ist in Abbildung A.11 schematisch dargestellt. Die Struktur der binären Ergebnisdateien des FE-Solvers LS-DYNA[®] ist im *LS-DYNA[®] Database Manual* [54] dokumentiert.

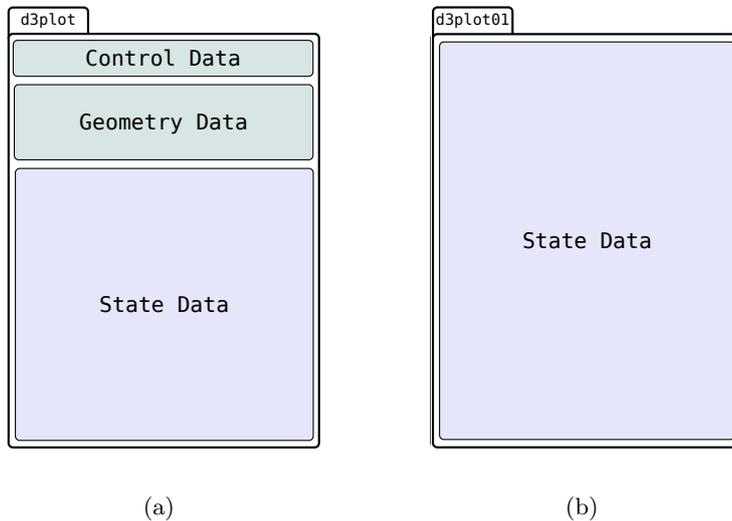


Abbildung A.11.: Schematische Darstellung des Aufbaus der zwei unterschiedlichen Typen von LS-DYNA[®] Ergebnisdateien: die Grunddatei (a) enthält im Gegensatz zur einfachen Ergebnisdatei (b) zusätzliche Kontroll- und Geometriedaten.

A.3.1.2. Adaptive Netzverfeinerung

Die Genauigkeit von Rechenergebnissen aus FE-Simulationen hängen von der Größe der verwendeten Elemente ab [55, S.825]. Um die, durch die Diskretisierung entstehenden Fehler zu minimieren ist es in einzelnen Fällen notwendig, das Gitter feiner aufzulösen. Damit geht aber eine Erhöhung der Freiheitsgrade des zu lösenden Systems einher, was unmittelbare Auswirkungen auf Speicherauslastung und Rechenzeit hat.

Eine Methode, die vor allem in Simulationen von Umformvorgängen weit verbreitet ist, ist die Methode der *adaptiven Netzverfeinerung*. Dabei werden, ausgehend von einem relativ groben Ausgangsnetz, lokale Verfeinerung im FE-Gitter in Bereichen durchgeführt, in denen große Verzerrungen der Elemente auftreten. Bei einem Verfeinerungsschritt des Netzes durch den FE-Solver entstehen aus einem Elemente im Ausgangsgitter vier neue Elemente. Die dazu nötigen fünf Elementknoten werden dabei jeweils in der Mitte der Elementkanten des Ausgangselements bzw. im Mittelpunkt des Ausgangselements er-

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

zeugt [56, S.608]. Dieser Vorgang ist schematisch an Hand eines vierknotigen Elements in Abbildung A.12 dargestellt.

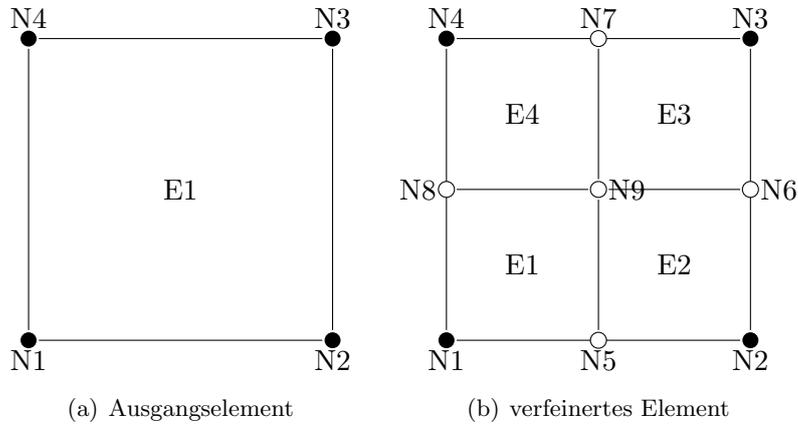


Abbildung A.12.: Netzverfeinerung durch Teilung eines vierknotigen Elements E1 in vier Elemente E1 bis E4.

Die beschriebene Teilung der Elemente in LS-DYNA[®] kann Anhand unterschiedlicher Kriterien erfolgen, zum Beispiel wenn ein kritischer Winkel zwischen den Kanten eines Elements überschritten oder eine vorgegebene Ausdünnung eines Schalenelements erreicht wird [53, S.455].

Eine Netzverfeinerung wird, wie bereits in Abbildung A.10 dargestellt, durch einen neuen Familiendateinamen angezeigt. Das neue und verfeinerte Ausgangsnetz wird dabei zusammen mit dem neuen Kontrollblock am Beginn der Datei abgelegt. Die Anzahl der im letzten Verfeinerungsschritt erzeugten Elemente kann durch Vergleich mit dem groberen Ausgangsnetz ermittelt werden.

Informationen über die Zusammenhänge zwischen Ausgangselement und den daraus neu entstandenen Elementen sind in den LS-DYNA[®] Ergebnisdateien *nicht* hinterlegt [54, S.12], wodurch eine aufwende Rekonstruktion des Vorganges notwendig wird⁹. Um die Umformhistorien auch von verfeinerten Elementen analysieren zu können, ist die Durchführung dieses Vorgangs *unumgänglich*.

Der verfolgte Ansatz zur Zuordnung der neu entstandenen Elemente zu einem Ausgangselement ist im Folgenden dargestellt. Die Nummern der Schalenelemente sind in der LS-DYNA[®] Ergebnisdatei fortlaufend, entsprechend ihrer *internen Elementidentifikationsnummer* abgelegt. Legt der FE-Solver durch Netzverfeinerung neue Elemente an, werden dafür die nächsthöheren Elementnummern vergeben, wobei pro geteiltem Element *drei* neue Elemente hinzukommen. Durch diese Anordnung in Blöcken zu je

⁹Mit entsprechenden Datenstrukturen kann der Aufwand minimiert werden.

drei neu entstandenen Elementen ist es nun möglich, eine eindeutige Zuordnung dieser Elemente zum zugehörigen Ausgangselement zu treffen wenn man davon ausgeht, dass pro Verfeinerungsschritt immer nur eine Teilung eines Elements stattfindet.

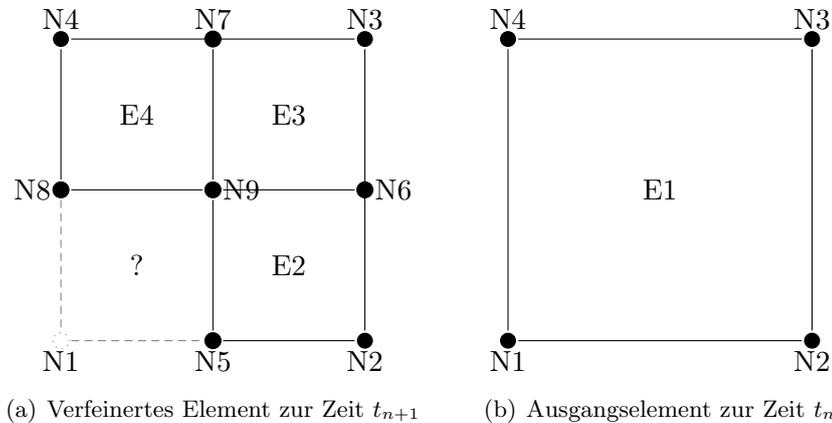


Abbildung A.13.: Rekonstruktion der Zugehörigkeit der Elemente E2-E4 zum Ausgangselement E1.

Aus dem Block, bestehend aus drei aufeinanderfolgenden internen Elementnummern, kann die Menge der gemeinsamen Knoten ermittelt werden. Diese besteht aus 12 *internen* Knotenidentifikationsnummern, wobei fünf einfach, zwei doppelt und eine dreifach vorkommt. Da die Knoten zu unterschiedlichen Zeitschritten der FE-Simulation erzeugt wurden unterscheiden sich die ursprünglich vorhanden und zum Ausgangselement gehörenden von den neu hinzugekommen. Sortiert man die Liste der 12 bzw. 7 eindeutigen Knotennummern der Größe nach und wählt die drei mit den *kleinsten internen Knotennummern*, kennt man drei der vier Eckknoten des ursprünglichen *Ausgangselements*.

Im letzte Schritt wird jenes Element aus dem Zeitschritt vor der Netzverfeinerung gesucht, bei dem drei der vier Knoten mit den ermittelten Eckknoten des verfeinerten Elements übereinstimmen.

Die Frage nach der Elementzugehörigkeit eines oder gar mehrerer Knoten ist mit dem verwendeten primitiven Datenmodell höchst ineffizient und stellt bei der dargelegten Vorgehensweise einen sehr rechenintensiven Vorgang dar.

A.3.2. Umsetzung

Besondere Rücksicht bei der Umsetzung wurde auf die Einhaltung des ANSI-C Standards gelegt, da dies die Portierung der Software auf unterschiedliche Betriebssysteme

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

erleichtert. Lediglich jene Funktionen, welche den Zugriff auf die unterschiedlichen Dateisysteme ermöglichen, liegen für jede der unterstützten Plattformen in angepasster Form vor.

Auch dieses Programm wird von der Kommandozeile gestartet - eine Steuerung über eine einfache graphische Oberfläche wurde für die Postprozessor HyperView[®] erstellt. Diese wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Die Versagensvorhersage wird mit dem Aufruf

```
failure -d <d3plot file> -e <element file> -c <config file>  
        [-o <binary output file>] [-a <ascii output file>] [-t percent]
```

gestartet, wobei die benötigten Eingangsparameter folgende Bedeutung haben:

- d erste Ergebnisdatei des FE-Solvers LS-DYNA[®]
- e Datei mit zu analysierenden Elementnummern
- c Konfigurationsdatei für das verwendete Material
- o Ausgabedatei für Ergebnisse im binären Format für HyperView[®]
- a Ausgabedatei für Ergebnisse im ASCII-Format (optional)
- t beenden der Vorhersage wenn XX Prozent erreicht sind (optional)

Diese Programmversion unterstützt ausschließlich Ergebnisdateien des FE-Solvers LS-DYNA[®]. Um eine möglichst schnelle Versagensanalyse zu garantieren, werden die binären Ergebnisdaten direkt gelesen, was ein grundlegendes Verständnis des vorliegenden Formats voraussetzt. Da keine Bibliotheken für das Einlesen der Ergebnisdaten verfügbar sind, musste auch dieser Teil im Rahmen der vorliegenden Arbeit in rudimentärer Form implementiert werden.

Für das Schreiben der in der Postprocessing-Umgebung darstellbaren Ergebnisdatei lag bereits eine vom Hersteller kostenlos zur Verfügung gestellte Bibliothek vor. Eine Dokumentation des Funktionsumfangs der Bibliothek ist im *HyperWorks[®] Programmers Manual* [57] zu finden.

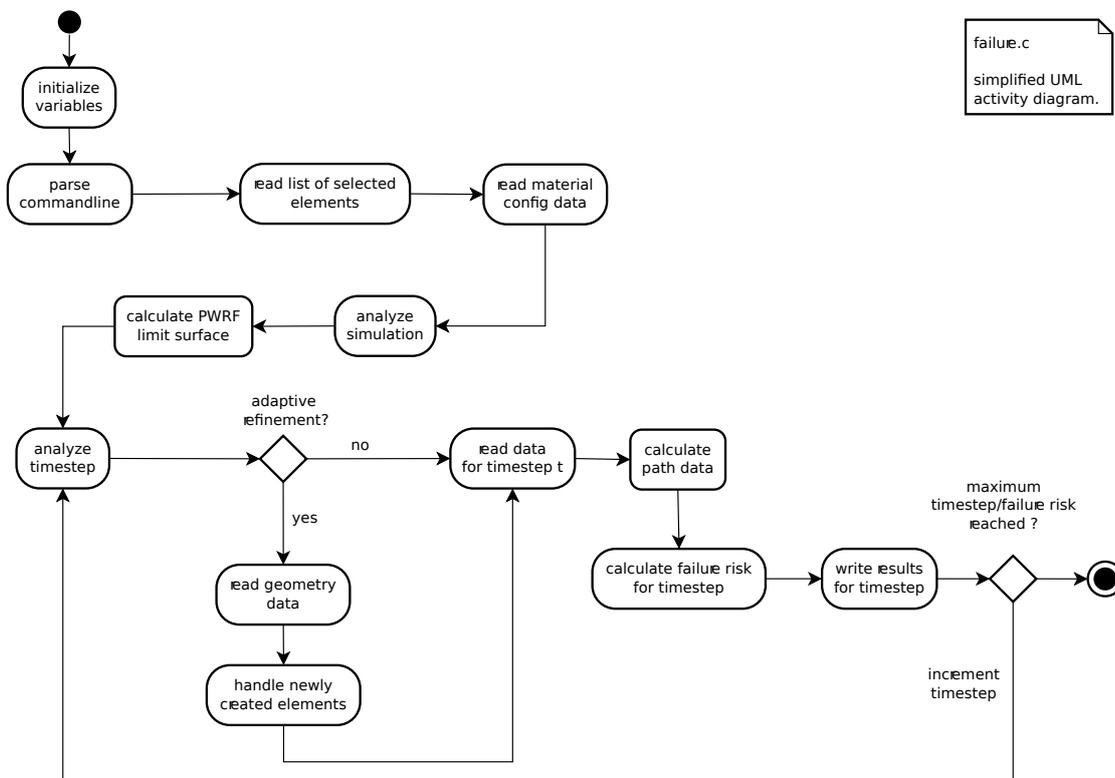
A.3.3. Aufbau des Postprocessing-Programms

Der Aufbau des entwickelten Postprocessing-Programms gliedert sich in eine *Initialisierungsphase*, in der die wichtigsten Programmparameter und grundlegende Daten aus den vorliegenden Simulationsdateien verarbeitet werden.

Anschließend wird mit der *Berechnung* des effektiven Umformvermögens $\bar{\lambda}$ nach Gl. (4.3) aus Abschnitt 4.2.2 begonnen. Mit dieser Größe lässt sich dann pro Zeitschritt der FE-Simulation ein normierter Wert für jedes Element angeben, der das aktuelle Risiko des Versagens widerspiegelt. Dieser Wert wird im Programm mit *Versagensrisiko* bzw. *Failure-Risk* bezeichnet.

A.3.3.1. Initialisierungsphase

Der Schematische Aufbau des Postprocessing-Programms ist in Abbildung A.14 dargestellt. Eingangs werden die benötigten Variablen initialisiert und die beim Start überge-



failure.c
simplified UML activity diagram.

Abbildung A.14.: Schematische Darstellung des Ablaufs des Postprocessing-Programms.

benen Optionen überprüft. Sind nicht alle zwingend vorgeschriebenen Eingangsparameter definiert, bricht das Programm mit einer Fehlermeldung, sowie der Darstellung der benötigten Optionen ab.

Nach dem erfolgreichen Start werden zwei ASCII-Dateien eingelesen: Die erste enthält die Identifikationsnummern (IDs) der zu *analysierenden Elemente* der FE-Simulation und

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

wird von der Postprocessing Umgebung HyperView[®] erstellt¹⁰. Bei der zweiten handelt es sich um die Konfigurationsdatei für das phänomenologischen Modell, welche vom Kalibrierungsroutine `calib_tool` (Abschnitt A.2.2) erstellt wurde und mit dessen Hilfe sich das phänomenologische Modell innerhalb des Postprocessing-Programms kalibrieren lässt.

Nachdem die vom Benutzer erstellten Eingabedateien vom Programm gelesen wurden, kann der Aufbau der zu beurteilenden FE-Simulation analysiert werden (detailliertere Angaben dazu sind im Abschnitt A.3.1.1 zu finden). Zu diesen Daten zählen:

- Anzahl der Knoten und Elemente, sowie Zeit- und Netzverfeinerungsschritte der FE-Simulation,
- Informationen über den Aufbau der Elemente aus Knoten,
- Positionen aller Knoten des FE-Modells,
- vollständiger Dehnungszustand zu Beginn des zweiten Umformschritts.

Mit Hilfe dieser Informationen können die wichtigsten Felder zur Speicherung der benötigten Simulationsdaten initialisiert werden. Da während der Analysephase auch der Dehnungszustand aller Elemente ermittelt wurde, lässt sich bereits an dieser Stelle im Programm die Kalibrierung des phänomenologischen Modells bzw. die Erstellung der individuellen Grenzkurven – als Schnitte durch die Grenzfläche (Abschnitt 4.5) – durchführen. Dies geschieht für alle zu analysierenden Elemente nach Gleichung (4.15), abhängig von deren Umformzustand und -richtung $\bar{\lambda}_{pre}$ bzw. $\bar{\beta}_{pre}$ am Ende des ersten Umformschritts. Die Grenzkurven liegen dann in einer Nachschlagetabelle für die Versagensermittlung vor und müssen nicht erneut berechnet werden.

Alle bisher abgearbeiteten Aktionen im Programmablauf können als *Initialisierungsphase* zusammengefasst werden. Die eigentliche Versagensbeurteilung erfolgt in einer Schleife über die verbleibenden Zeitschritte der FE-Simulation.

A.3.3.2. Versagensvorhersage

Nachdem der erste Zeitschritt bereits während der Initialisierungsphase gelesen wurde, kann mit der Beurteilung des darauffolgenden Zeitschritts fortgesetzt werden. Ist in diesem Zeitschritt eine Netzverfeinerung vom FE-Solver vorgenommen worden, müssen zuvor noch die geänderten Geometriedaten gelesen und der Inhalt der zugehörigen Felder innerhalb des Postprocessing-Programms auf den aktuellen Stand gebracht werden.

¹⁰Der Aufbau dieser Datei ist sehr einfach und kann auch mit Hilfe eines Texteditors erfolgen. Pro Zeile wird eine Elementidentifikationsnummer eingetragen.

Ausserdem müssen für jene FE-Elemente, welche durch die erfolgte Netzverfeinerung im Zeitschritt erzeugt wurden, die entsprechenden Vorgeschichten der Elternelemente an die Kinderelemente weitergegeben werden (siehe dazu Abschnitt A.3.1.2).

Für den aktuellen Zeitschritt werden dann die Knotenverschiebungen des gesamten FE-Modells, sowie die Dehnungstensoren der zu analysierenden 4-Knoten Schalenelemente, jeweils an der Ober- und an der Unterseite eingelesen. Die Verschiebungen aller Knoten werden deshalb benötigt, damit nach erfolgter Analyse der Ablauf der Simulation in der Postprocessing-Umgebung HyperView[®] korrekt visualisiert werden kann. Aus den Dehnungstensoren der Ober- bzw. der Unterseite des Schalenelements wird auf eine mittlere Dehnung des Elements zurückgerechnet. Dies entspricht der Dehnung des Elements in der Mittelfaser, weil den hier verwendeten Schalenelementen ein linearer Ansatz bezüglich des Verschiebungsfeldes zu Grunde liegt [56, S.111].

Da das entwickelte phänomenologische Modell ausschliesslich die Dehnungen im Hauptachsensystem zur Versagensbeurteilung verwendet, müssen für die weiteren Berechnungen aus dem vorliegenden Dehnungstensor die zugehörigen Eigenwerte φ_1, φ_2 und φ_3 ermittelt werden.

Mit den vorliegenden Hauptdehnungen φ_1 und φ_2 lassen sich nun das aktuelle Verhältnis der Dehnungsinkremente β (siehe Gleichung (2.56)), sowie das Inkrement der Vergleichsdehnung $\Delta\bar{\varphi}$ nach Gleichung (2.43) berechnen. Beide Größen werden im aktuellen Zeitschritt t benötigt, um das Inkrement des Modellparameters $\Delta\bar{\lambda}(t)$ (nach Gleichung (4.3)) bzw. die effektive Umformrichtung $\bar{\beta}_{post}(t)$ (Gleichung (4.2)) zu berechnen.

Die Summation der $\Delta\bar{\lambda}(t)$ nach Gl. (4.4) bis zum Zeitschritt t ergibt den aktuellen Wert des effektiven Umformungsvermögens. Zusammen mit der Umformrichtung erhält man für jedes analysierte Element ein Wertepaar $(\bar{\lambda}(t), \bar{\beta}_{post}(t))$. Schneidet im zeitlichen Verlauf der Analyse die so entstehende Trajektorie eines Elements die zugeordnete Grenzkurve, so ist nach dem entwickelten phänomenologischen Modell das lokale Umformvermögen des Werkstoffs verbraucht und Materialversagen wird angezeigt.

Das berechnete Wertepaar $(\bar{\lambda}(t), \bar{\beta}_{post}(t))$ ist ohne Grenzkurve als Bezugsgröße jedoch *unbrauchbar*. Um dennoch eine einfache Darstellung der Versagensbeurteilung am Bauteil zu ermöglichen muss das Wertepaar auf eine skalare Größe umgerechnet werden. Die wesentliche Aussage, die mit dem vorliegenden phänomenologischen Modell getroffen werden soll ist die Bestimmung des *Auftretens von Materialversagen*. Das bedeutet umgelegt auf eine Versagensvariable, dass lediglich die Einteilung in Bereiche < 1 bzw. ≥ 1 von Interesse ist. Um dennoch die Information über eine "Entfernung" zu einem möglichen Versagen zu liefern, wird die Versagensvariable als Quotient

$$\frac{\bar{\lambda}(t)}{\bar{\lambda}^*} \Big|_{\bar{\beta}=const} := \text{Versagensvariable} \quad (\text{A.1})$$

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

eingeführt. Dabei bedeutet $\bar{\lambda}^*$ den Wert des maximal erreichbaren Umformvermögens, gegeben durch einen Punkt auf der Grenzkurve aus dem phänomenologischen Modell.

Bei der Berechnung der Versagensvariablen wird dabei vereinfachend angenommen, dass die Umformrichtung $\bar{\beta}$ im weiteren Verlauf unverändert bleibt. Der Schnittpunkt der Trajektorie eines FE-Elements mit der Grenzkurve im $(\bar{\lambda}, \bar{\beta})$ -Raum wird durch Gl. (A.1) trotz der getroffenen Vereinfachung korrekt auf die Versagensvariable abgebildet. Die Werte der Variable bis zum Erreichen des Versagens und darüber hinaus sind – wie oben angedeutet – im Rahmen des phänomenologischen Modells nicht primär von Interesse und dienen als qualitative Abschätzung des verbleibenden Umformvermögens.

A.3.3.3. Export der Ergebnisdaten

Die nach Gl.(A.1) berechneten Werte der Versagensvariable liegen nach Bearbeitung des letzten Zeitschritts für alle gewählten Elemente zur Verfügung und werden zur Darstellung im Postprozessor in geeignetem Format abgespeichert. Dazu stehen das proprietäre *HyperMesh*[®] *Result File*-Format und ein einfaches ASCII-Format zur Verfügung.

A.4. Integration in die Altair HyperWorks[®] Postprocessing Umgebung

Das Altair HyperWorks[®] Umgebung ermöglicht die Verwendung von benutzerdefinierten Abläufen mittels der Skriptsprache *Tcl/Tk*. Die in Abschnitt A.3.3 vorgestellte Versagensroutine wurde auf diese Weise in die Altair HyperWorks[®] Postprocessing Umgebung integriert. Damit erhält das kommandozeilenorientierte Postprocessing-Programm *failure* eine graphische Benutzeroberfläche, welche nach erfolgreicher Installation der benötigten Skripte ¹¹ über den Menüpunkt “Analysis” erreichbar ist. Aufgrund der Verfügbarkeit von *Tcl/Tk* auf Unix- als auch auf Microsoft Windows Betriebssystemen liegt damit eine plattformunabhängige Lösung vor.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt manuell, indem neben der FE-Solver Datei die Ergebnisdatei unter dem Menüpunkt “Load results” angegeben wird. Dies ist in Abbildung A.17 dargestellt.

Durch das Laden der, vom Postprocessing-Programm erstellten Ausgabedatei, ist nun die skalare Größe “Failure Risk” zur Darstellung verfügbar. Überschreitet dieser Parameter

¹¹Installationsanleitung und die notwendigen Dateien für die Betriebssysteme Microsoft Windows und GNU Linux sind im Anhang zu finden.

A.4. Integration in die Altair HyperWorks® Postprozessing Umgebung

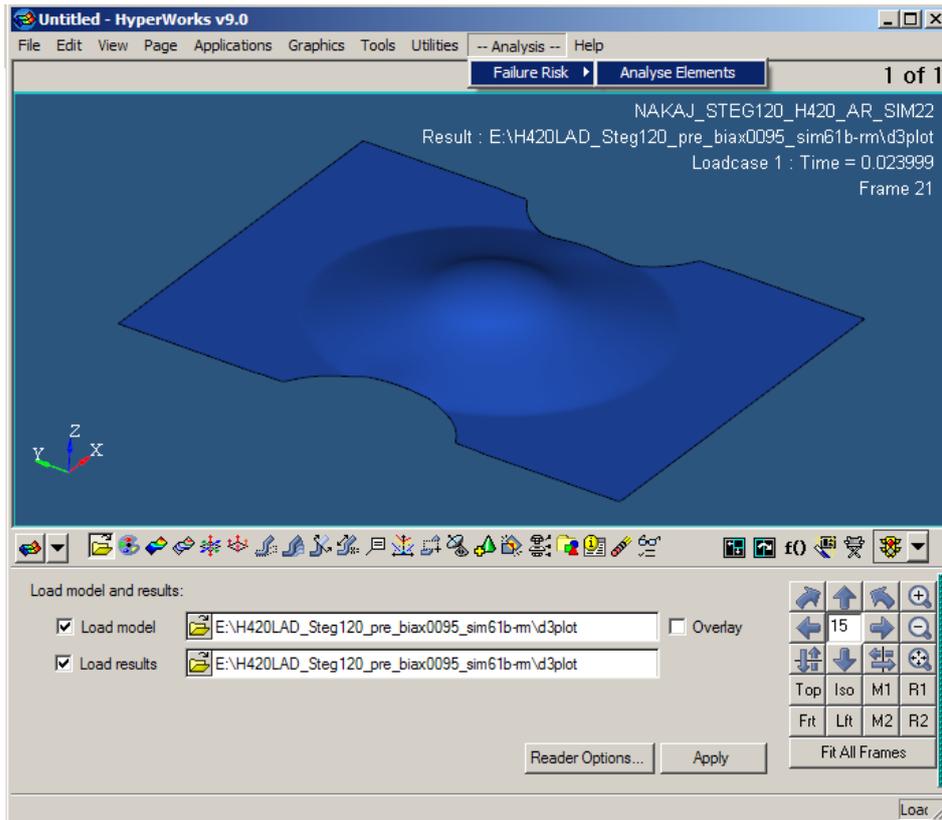


Abbildung A.15.: Integration in die Altair HyperWorks® Postprozessing-Umgebung. Durch die Installation der zusätzlichen Tcl/Tk Skripte erscheint der Menüpunkt “Analysis”.

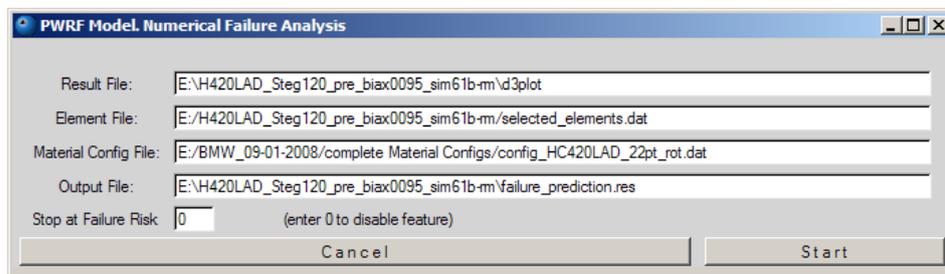


Abbildung A.16.: Graphische Benutzeroberfläche zur Postprozessing Routine failure in Tcl/Tk.

den Wert 1 ist nach dem entwickelten phänomenologischen Modell vom Versagen des betreffenden Elements auszugehen.

A. Implementierung des phänomenologischen Modells

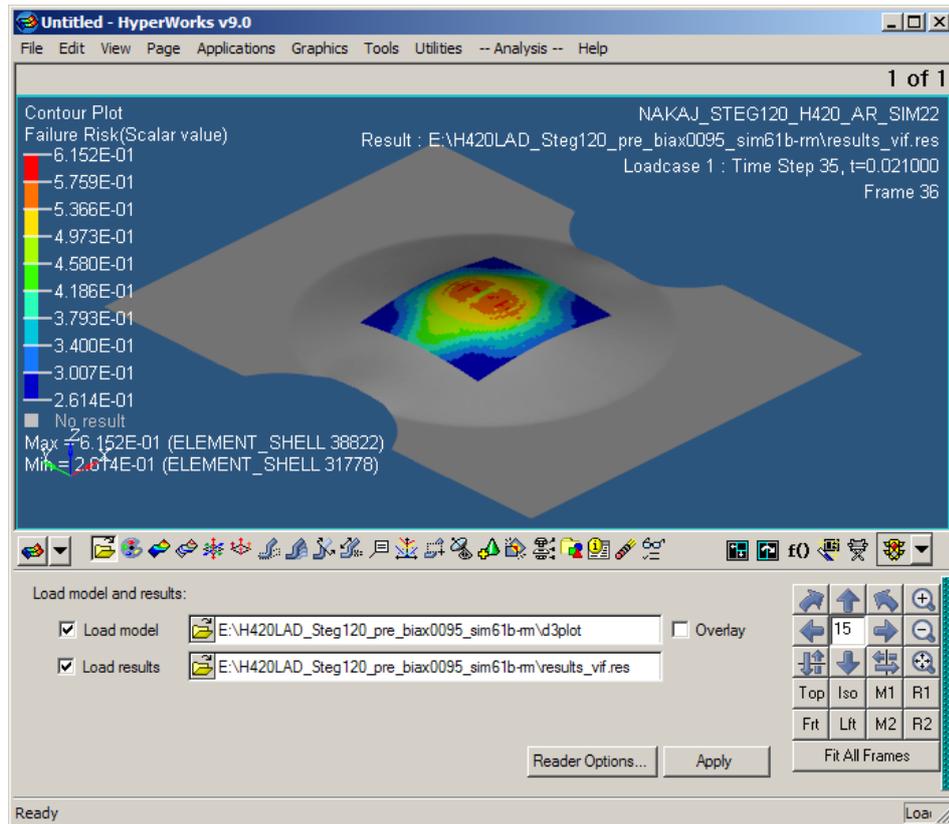


Abbildung A.17.: Darstellung der berechneten Ergebnisse für einen ausgewählten Bereich einer Nakazima-Probe in der Altair HyperWorks® Postprozessing Umgebung.

Literaturverzeichnis

- [1] Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [2] Parisch, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, 2003.
- [3] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2000.
- [4] Weißmantel, Ch. und C. Hamann: *Grundlagen der Festkörperphysik*. Johann Ambrosius Barth, 4. auflage Auflage, 1995.
- [5] Gottstein, G.: *Physikalische Grundlagen der Materialkunde*. Springer, 2007.
- [6] Doege, E. und B. A. Behrens: *Handbuch Umformtechnik*. Springer, 2007.
- [7] Banabic, D., H. J. Bunge, K. Pöhlandt und A. E. Tekkaya: *Formability of Metallic Materials*. Springer-Verlag, 2000.
- [8] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz: *Theory of Elasticity*, volume 7 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 2nd edition, 1970.
- [9] Hill, R.: *Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 314(1519):457–472, Jan 1970.
- [10] Lubliner, J.: *Plasticity Theory Revised Edition (PDF)*. 2006.
- [11] Bargel, H. J. und G. Schulze: *Werkstoffkunde*. 5. Auflage. VDI-Verlag, 1988.
- [12] von Mises, R.: *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Seiten 582–592, 1913.
- [13] BMW Group: *Laborbericht Versuchsergebnisse Aluminium AA6016*. 2006.
- [14] Wagoner, R. H. and J. L. Chenot: *Fundamentals of Metal Forming*. John Wiley & Sons, 1997.

- [15] Hollomon, J. H.: *Tensile Deformation*. Transactions of the Metallurgical Society of AIME, 162:268–290, 1945.
- [16] Hockett, J. E. and O. D. Sherby: *Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23(2):87–98, 1975.
- [17] Swift, H. W.: *Plastic instability under plane stress*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1:1–18, 1952.
- [18] Simo, J. C. and T. J. R. Hughes: *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [19] *DIN 8582 Fertigungsverfahren Umformen - Einordnung; Unterteilung, Begriffe, Alphabetische Übersicht*, September 2003.
- [20] Lange, K.: *Umformtechnik*, Band 3, Blechbearbeitung. Springer, 1990.
- [21] Groche, P.: *Umformtechnik 1*. Technischer Bericht, TU Darmstadt, Fachgebiet für Produktionstechnik und Umformmaschinen, 2009.
- [22] Dodd, B. und Y. Bai: *Ductile Fracture and Ductility*. Academic Press, 1987.
- [23] Hosford, W. F. und R. M. Caddell: *Metal Forming - Mechanics and Metallurgy*. Cambridge University Press, 3rd Auflage, 2007.
- [24] Marciniak, Z., J. L. Duncan, and S. J. Hu: *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Butterworth-Heinemann, 2nd edition, 2002.
- [25] Hill, R.: *A theoretical perspective on in-plane forming of sheet metal*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39(2):295–307, 1991.
- [26] Aretz, H.: *Numerical analysis of diffuse and localized necking in orthotropic sheet metals*. International Journal of Plasticity, 23:798–840, 2007.
- [27] Mattiasson, K., M. Sigvant, and Larsson M.: *Methods for forming limit prediction in ductile metal sheets*. In Santos and Barata da Rocha (editors): *Proceedings of IDDRG*, pages 1–9, 2006.
- [28] Thomason, P. F.: *Ductile Fracture of Metals*. Pergamon Press, 1st edition, 1990.
- [29] Hill, R.: *On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1:19–30, 1952.

- [30] Ostermann, F.: *Anwendungstechnologie Aluminium*. Springer Verlag, 2. Auflage, 2007.
- [31] Banabic, D.: *Advanced Methods in Material Forming*, Kapitel Modelling of the Forming Limit Diagrams Using the Finite Element Method, Seiten 151–165. Springer-Verlag, 2007.
- [32] Nakazima, K., T. Kikuma, and K. Hasuka: *Study on the formability of steel sheets*. Technical Report 264, 1968.
- [33] *ISO 12004 Metallic materials – Sheet and strip – Determination of forming-limit curves – part 1: Measurement and application of forming-limit diagrams in the press shop*, January 2008.
- [34] Marciniak, Z. and K. Kuczynski: *Limit strains in the process of stretch-forming sheet metal*. International Journal of Mechanical Sciences, 9:606–612, 1967.
- [35] Laukonis, J. V. and A. K. Gosh: *Effects of strain path changes on the formability of sheet metals*. Metallurgical Transactions A, 9A:1849–1855, December 1978.
- [36] Müschenborn, W. und H. M. Sonne: *Einfluß des Formänderungsweges auf die Grenzformänderungen des Feinblechs*. Archiv für das Eisenhüttenwesen, 46(9):597–602, September 1975.
- [37] Rüegg, N.: *Entwicklung und Anwendung einer Methodik zum Vergleich theoretischer und experimenteller Dehnungsgrenzwerte bei nichtlinearen Dehnwegen*. Diplomarbeit, Institut für Virtuelle Produktion, ETH Zürich, 2003.
- [38] Painter, M. J. und R. Pearce: *Instability and fracture in sheet metal*. Journal of Physics D: Applied Physics, 7(7):992–1004, 1974.
- [39] Aretz, H.: *Numerical restrictions of the modified maximum force criterion for prediction of forming limits in sheet metal forming*. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 12:677–692, 2004.
- [40] Hora, P., L. Tong, and Reissner J.: *A prediction method for ductile sheet metal failure in FE-Simulation*. In *Proceedings Numisheet'96 Conference*, pages 252–256, 1996.
- [41] Korhonen, A. S.: *On the Theories of Sheet Metal Necking and Forming Limits*. Journal of Engineering Materials and Technology, 100:303–309, 1978.
- [42] Larsson, M., K. Mattiasson und M. Sigvant: *Modelling of the Stress-Strain Curve and its Impact on the Forming Limit Diagram*. In: *ESAFORM 2009*, 2009.

Literaturverzeichnis

- [43] Hora, P., W. Volk, K. Roll, B. Griesbach, L. Kessler, and W. Hotz: *The Numisheet 2008 Benchmark Study*. 2008.
- [44] Graf, A. and W. F. Hosford: *The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of Al 6111 T4*. International Journal of Mechanical Sciences, 36(10):897–910, 1994.
- [45] Dassault Systèmes: *Abaqus 6.10 Analysis User's Manual Volume 3 Materials*, 2010.
- [46] Brunet, M. and F. Morestin: *Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals*. Journal of Materials Processing Technology, 112:214–226, 2001.
- [47] Banabic, D.: *Sheet Metal Forming Processes - Constitutive Modelling and Numerical Simulation*. Springer-Verlag, 2010.
- [48] Gese, H. and H. Dell: *Numerical prediction of FLC with the program Crach*. In *Proceedings of the FLC Zurich*, 2006.
- [49] Hooputra, H., H. Gese, H. Dell und H. Werner: *A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminium extrusions*. International Journal of Crashworthiness, 9(5):449–463, 2004.
- [50] Kühnel, W.: *Differentialgeometrie Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten*. Vieweg Verlag, 4. Auflage, 2008.
- [51] Sormann, H.: *Numerische Methoden in der Physik*. Skriptum, WS 2010/2011.
- [52] Ben-Israel, A. and T. N. E. Greville: *Generalized Inverses Theory and Applications*. John Wiley & Sons, 1974.
- [53] LSTC Livermore Software Technology Corp.: *LS-DYNA Keyword Manual (Version 971)*, May 2007.
- [54] LSTC Livermore Software Technology Corp.: *LS-DYNA Database Binary Output Files*, August 2008.
- [55] Bathe, K. J.: *Finite-Element-Methoden*. Springer, 2. Auflage, 2002.
- [56] LSTC Livermore Software Technology Corp.: *LS-DYNA Theory Manual*, March 2006.
- [57] Altair Engineering, Inc.: *Altair HyperMesh Programmer's Guide*, 2003. Version 6.0.