

Marco Zank, BSc

Analysis und Numerik eines verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technomathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, Dezember 2014

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den Laplace-Operator untersucht, bei dem die Cauchy-Daten der Eigenwertgleichung durch einen Operator F verknüpft sind. Dazu werden in Kapitel 1, Kapitel 2 und Kapitel 3 die wichtigsten Begriffe und Aussagen über die Sobolev-Räume, die Spektraltheorie und über Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften zusammengetragen. Das Kapitel 4 wird dem Standard-Steklov-Eigenwertproblem mit $F=I$ gewidmet. In Kapitel 5 wird das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator und für den hypersingulären Operator untersucht und Aussagen über das Spektrum der zugrundeliegenden Operatoren für Gebiete, bei denen der Doppelschichtoperator K kompakt ist, bewiesen. Das Kapitel 6 und das Kapitel 7 behandeln die Numerik des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems und insbesondere drei verschiedene Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S . Dazu wird das Konvergenzverhalten der Steklov-Eigenwerte am Beispiel einer Kreisscheibe, einer Ellipse, eines C-förmigen Gebiets, eines Quadrates und eines L-förmigen Gebietes betrachtet. Weiter wird auch das Konvergenzverhalten für die Kontraktionskonstante c_K von $0.5I + K$ untersucht.

Abstract

In this thesis the generalised Steklov eigenvalue problem for the Laplacian is studied where the Cauchy data of the eigenvalue problem are linked via an operator F . The most important concepts and statements about Sobolev spaces, the spectral theory and boundary integral operators and their properties are collected in chapter 1, chapter 2 and chapter 3, respectively. Chapter 4 is about the standard Steklov eigenvalue problem with $F=I$. In chapter 5 the generalised Steklov eigenvalue problem is examined for the inverse simple layer operator and for the hypersingular boundary integral operator and statements about the spectrum of the underlying operators are proved for domains providing that the double layer operator K is compact. Chapter 6 and chapter 7 are about the numerics of the generalised Steklov eigenvalue problem and in particular three different approximations of the Steklov Poincaré operator S are studied. The convergence behaviour of the Steklov eigenvalues is examined by considering a disc, an ellipse, a C shaped domain, a square, and an L shaped domain. Further the convergence behaviour is also examined for the contraction rate c_K for the operator $0.5I + K$.

Vorwort

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. O. Steinbach dafür, dass er mir dieses Thema vorgeschlagen hat und daher mein Interesse für Eigenwertprobleme geweckt hat. Da ich mich durch diese Arbeit tiefer in die Theorie von Eigenwertproblemen einlesen musste, habe ich durch diese Arbeit sehr viel dazugelernt. Weiter bedanke ich mich auch für die ausgezeichnete Betreuung durch Herrn Prof. Dr. O. Steinbach. Außerdem möchte ich mich bei Herrn Dr. G. Of für die Zurverfügungstellung vom Programm *toy2d* und für die Hilfe bei der Implementierung der numerischen Beispiele bedanken. Überdies bedanke ich mich beim gesamten Institut für die Unterstützung im Studium.

Graz, Dezember 2014

Marco Zank

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 11 |
| 1 Lipschitz-Gebiet, Einbettungssätze, Spursätze | 13 |
| 2 Spektraltheorie | 17 |
| 3 Randintegraloperatoren für die Laplace-Gleichung | 25 |
| 3.1 Das Einfachschichtpotential \tilde{V} | 26 |
| 3.2 Der Einfachschichtoperator V | 27 |
| 3.3 Das Doppelschichtpotential W | 28 |
| 3.4 Der Doppelschichtoperator K | 29 |
| 3.5 Der adjungierte Doppelschichtoperator K' | 29 |
| 3.6 Der hypersinguläre Operator D | 30 |
| 3.7 Der Steklov-Poincaré-Operator S | 31 |
| 3.8 Randintegralgleichungen | 32 |
| 3.9 Spektrum und Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators K | 33 |
| 4 Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 39 |
| 4.1 Klassische und schwache Form | 39 |
| 4.2 Existenz der Steklov-Eigenwerte über Maximierungsprobleme | 42 |
| 4.2.1 Maximierungsproblem für den kleinsten Steklov-Eigenwert | 42 |
| 4.2.2 Maximierungsproblem für den nachfolgenden Steklov-Eigenwert | 42 |
| 4.3 Existenz der Steklov-Eigenwerte über den Steklov-Poincaré-Operator S | 43 |
| 5 Analysis für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem | 47 |
| 5.1 Klassische und schwache Form | 47 |
| 5.2 Inverser Einfachschichtoperator V^{-1} | 50 |
| 5.3 Hypersingulärer Operator D | 54 |
| 6 Numerik für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem | 59 |
| 6.1 Grundlagen der Finite-Element-Methode und der Randelementmethode | 59 |
| 6.2 Approximation des Steklov-Poincaré-Operators durch die Randelementmethode | 63 |
| 6.3 Approximation des Steklov-Poincaré-Operators durch die Finite-Element-Methode | 66 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6.4 | Diskrete, verallgemeinerte Eigenwertprobleme | 68 |
| 6.4.1 | Approximation des Neumann-Randwertproblems | 68 |
| 6.4.2 | Approximation des Standard-Steklov-Eigenwertproblems | 69 |
| 6.4.3 | Approximation des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1} | 70 |
| 6.4.4 | Approximation des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems für den hypersingulären Operator D | 72 |
| 7 | Numerische Beispiele | 73 |
| 7.1 | Kreisscheibe | 74 |
| 7.1.1 | Neumann-Randwertproblem | 74 |
| 7.1.2 | Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 75 |
| 7.1.3 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Ein- fachsichtoperator V^{-1} | 78 |
| 7.1.4 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D | 82 |
| 7.2 | Ellipse | 87 |
| 7.2.1 | Neumann-Randwertproblem | 87 |
| 7.2.2 | Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 88 |
| 7.2.3 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Ein- fachsichtoperator V^{-1} | 92 |
| 7.2.4 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D | 97 |
| 7.3 | C-förmiges Gebiet | 102 |
| 7.3.1 | Neumann-Randwertproblem | 102 |
| 7.3.2 | Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 103 |
| 7.3.3 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Ein- fachsichtoperator V^{-1} | 106 |
| 7.3.4 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D | 111 |
| 7.4 | Quadrat | 117 |
| 7.4.1 | Neumann-Randwertproblem | 117 |
| 7.4.2 | Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 118 |
| 7.4.3 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Ein- fachsichtoperator V^{-1} | 121 |
| 7.4.4 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D | 126 |
| 7.5 | L-förmiges Gebiet | 132 |
| 7.5.1 | Neumann-Randwertproblem | 132 |
| 7.5.2 | Standard-Steklov-Eigenwertproblem | 133 |
| 7.5.3 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Ein- fachsichtoperator V^{-1} | 136 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 7.5.4 | Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D | 141 |
| | Zusammenfassung - Ausblick | 147 |

Einleitung

In dieser Masterarbeit wird das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial n} u = \mu F u \text{ auf } \Gamma$$

behandelt. Mit Hilfe des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems lassen sich je nach Wahl des hier auf der rechten Seite auftretenden Operators $F: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Zusammenhänge zwischen den Steklov-Eigenwerten und den Eigenwerten des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ beziehungsweise zwischen dem Spektrum des zum verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems zugeordneten Operators und dem Spektrum des Doppelschichtoperators K angeben. Wenn der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist, dann lässt sich die Existenz von Steklov-Eigenwerten und Steklov-Eigenfunktionen nachweisen beziehungsweise Aussagen über das Spektrum des zum verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems zugeordneten Operators beweisen. Weiter wird das Konvergenzverhalten der Steklov-Eigenwerte mit Hilfe von numerischen Beispielen untersucht. Damit kann man die Kontraktionskonstante c_K von $\frac{1}{2}I + K$ näherungsweise bestimmen.

Kapitel 1, Kapitel 2 und Kapitel 3 enthalten die Begriffe und Sätze, die in den nachfolgenden Kapiteln benötigt werden. Das Kapitel 1 handelt von Grundbegriffen und Sätzen über Sobolev-Räume. Dazu zählen Einbettungssätze und Spursätze für Sobolev-Räume. Das Kapitel 2 fasst die wichtigsten Definitionen und Aussagen über die Spektraltheorie zusammen. In Kapitel 3 werden Randintegraloperatoren für die Laplace-Gleichung und deren Eigenschaften formuliert. Für den Nachweis der Existenzsätze für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem werden insbesondere die Aussagen aus dem Unterkapitel 3.9 benötigt.

Kapitel 4 ist das zentrale Kapitel über das Standard-Steklov-Eigenwertproblem, welches in ähnlicher Form von Auchmuty [3] beziehungsweise in meinen Arbeiten [24, 25] genauer untersucht wurde. Zuerst wird die schwache Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems hergeleitet. Von dieser schwachen Form wird die Existenz eines kleinsten Steklov-Eigenwerts und zugehöriger Steklov-Eigenfunktion bewiesen. Auch für die nachfolgenden Steklov-Eigenwerte mit zugehörigen Steklov-Eigenfunktionen wird die Existenz gezeigt.

In Kapitel 5 wird das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem untersucht. Dazu wird wieder die schwache Form des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems hergeleitet und mit Hilfe des Steklov-Poincaré-Operators S formuliert. Dann werden für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1} und für den hypersingulären Operator D Aussagen über das Spektrum der zugrundeliegenden Operatoren und deren Eigenwerte für kompaktes $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ nachgewiesen.

Das Kapitel 6 beinhaltet die numerische Betrachtung des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems. Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die Steklov-Eigenwerte und die Steklov-Eigenfunktionen analytisch zu berechnen. Daher ist man auf numerische Näherungsverfahren angewiesen. Dazu werden zuerst die Grundlagen für die Finite-Element-Methode und für die Randelementmethode bereitgestellt. Weiter werden drei verschiedene Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S mit Hilfe der Randelementmethode beziehungsweise der Finite-Element-Methode betrachtet. Im letzten Unterkapitel werden die resultierenden, diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem formuliert. In Kapitel 7 werden numerische Beispiele für verschiedene Gebiete im \mathbb{R}^2 dargestellt. Es werden für die Kreisscheibe, die Ellipse, das C-förmige Gebiet, das Quadrat und das L-förmige Gebiet das Konvergenzverhalten der Steklov-Eigenwerte untersucht. Die drei Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S werden verglichen. Auch die Approximation der Kontraktionskonstante c_K von $\frac{1}{2}I + K$ wird in diesem Kapitel behandelt.

Für Gebiete im \mathbb{R}^3 benötigt man schnelle Randelementmethoden und schnelle Löser für verallgemeinerte Eigenwertprobleme, was nicht im Fokus dieser Arbeit ist. Daher werden keine numerischen Beispiele für Gebiete im \mathbb{R}^3 angegeben.

1 Lipschitz-Gebiet, Einbettungssätze, Spursätze

In diesem Kapitel werden die Definition des Lipschitz-Gebiets, Einbettungssätze und Spursätze für Sobolev-Räume dargestellt. Diese Begriffe und Sätze sind grundlegend für die Betrachtungen des Standard-Steklov-Eigenwertproblems in Kapitel 4 und für die Betrachtungen des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems in Kapitel 5. Für Details sei auf [12, 1, 23, 19] verwiesen. Es werden die Notationen wie in [19] verwendet.

Definition 1.1 (Gebiet). *Eine nichtleere, zusammenhängende und offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}, d \geq 2$, heißt Gebiet.*

Definition 1.2 (Lipschitz-Hypograph). *Sei $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ und $\zeta : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Menge*

$$\Omega = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d < \zeta(x') \text{ für alle } x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}\}$$

heißt Lipschitz-Hypograph, falls $\zeta : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

Definition 1.3 (Lipschitz-Gebiet). *Sei $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Dann ist Ω ein Lipschitz-Gebiet, wenn sein Rand $\Gamma = \partial\Omega$ kompakt ist und endliche Familien $\{W_j\}$ und $\{\Omega_j\}$ existieren mit:*

1. *Die Familie $\{W_j\}$ ist eine endliche, offene Überdeckung von Γ , das heißt, $W_j \subset \mathbb{R}^d$ ist offen und $\Gamma \subset \bigcup_j W_j$.*
2. *Jedes Ω_j kann durch Rotation und Translation in einen Lipschitz-Hypographen transformiert werden.*
3. *Für alle j gilt die Gleichung $W_j \cap \Omega = W_j \cap \Omega_j$.*

Falls die Parametrisierung ζ in $C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ beziehungsweise $C^{k,\kappa}(\mathbb{R}^{d-1})$ für $k \in \mathbb{N}_0, \kappa \in (0, 1]$ liegt, dann bezeichnet man Ω als C^k -Gebiet beziehungsweise $C^{k,\kappa}$ -Gebiet, wobei mit $C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ die k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^{d-1} und mit $C^{k,\kappa}(\mathbb{R}^{d-1})$ die Hölder-stetigen Funktionen mit Hölder-Exponent κ auf \mathbb{R}^{d-1} bezeichnet werden. Insbesondere für $k = 0$ und $\kappa = 1$ ist das $C^{0,1}$ -Gebiet ein Lipschitz-Gebiet.

Mit $H^s(\Omega), H_0^1(\Omega), W_p^s(\Omega), \dot{W}_p^s(\Omega), H^s(\partial\Omega), H_{pw}^s(\partial\Omega)$ werden die üblichen Sobolev-Räume bezeichnet. Man siehe dazu [19].

Satz 1.4 (Einbettungssatz von Rellich, [2, Satz A6.4]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und sei $s \geq 1$. Dann ist die Einbettung

$$\text{Id}: H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s-1}(\Omega)$$

ein kompakter Operator.

Satz 1.5 (Einbettungssatz für die Spurräume, [8, Satz 4.2.2]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und seien $|t|, |s| \leq \frac{1}{2}$ mit $t < s$. Dann ist die Einbettung

$$\text{Id}: H^s(\partial\Omega) \hookrightarrow H^t(\partial\Omega)$$

ein kompakter Operator.

Satz 1.6 (Einbettungssatz von Sobolev, [2, Satz 8.9]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und seien $s \geq 0, t \geq 0$ ganzzahlig. Weiter seien $1 \leq p_1 < \infty$ und $1 \leq p_2 < \infty$. Ist

$$s - \frac{d}{p_1} \geq t - \frac{d}{p_2}, \quad \text{und } s \geq t,$$

dann ist die Einbettung

$$\text{Id}: W_{p_1}^s(\Omega) \hookrightarrow W_{p_2}^t(\Omega)$$

ein stetiger Operator.

Satz 1.7 (Spursatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Der Spuroperator

$$\gamma_0^{\text{int}}: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$$

ist für $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ linear und beschränkt. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_T , so dass für alle $u \in H^s(\Omega)$

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_T \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

gilt.

Für $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ hat der Spuroperator $\gamma_0^{\text{int}}: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ eine stetige Rechtsinverse

$$\mathcal{E}: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^s(\Omega),$$

für die $\gamma_0^{\text{int}} \mathcal{E} w = w$ für alle $w \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und $\|\mathcal{E} w\|_{H^s(\Omega)} \leq c_{IT} \|w\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ für $w \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ gelten.

Beweis. Siehe Beweis von Theorem 3.38 und Theorem 3.37 in [12]. □

Satz 1.8 (Kompakter Spursatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.

1. Falls $1 < p < d$ ist, dann ist der Spuroperator

$$\gamma_0^{\text{int}}: W_p^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$$

kompakt für jedes q mit $1 \leq q < \frac{dp-p}{d-p}$.

2. Falls $p \geq d$ ist, dann ist für jedes $q \geq 1$ der Spuroperator

$$\gamma_0^{\text{int}}: W_p^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$$

kompakt.

Beweis. Siehe Beweis von Theorem 6.2 in [13] und siehe Unterkapitel 6.10.5 in [11]. \square

Satz 1.9 ([6, Korollar 1.5.1.6]). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $s \leq 1$, $p \geq 1$ und $s - \frac{1}{p}$ nicht ganzzahlig. Dann ist $v \in \dot{W}_p^s(\Omega)$ genau dann, wenn $v \in W_p^s(\Omega)$ und*

$$\gamma_0^{\text{int}} v = 0.$$

2 Spektraltheorie

In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe der Spektraltheorie zusammengetragen. Dazu werden unbeschränkte, lineare Operatoren und deren Spektrum analysiert. Für Details sei auf [21, 10, 22] verwiesen, wobei hier die Notationen von [21] verwendet werden.

Im gesamten Kapitel seien $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ und $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle_Z)$ Hilberträume über \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Definition 2.1. *Es werden folgende Bezeichnungen und Schreibweisen verwendet:*

1. Ein Operator T von X nach Y ist ein Paar $(T, D(T))$, wobei $D(T) \subset X$ ein Unterraum von X und $T: D(T) \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung sind. Man nennt $D(T)$ den Definitionsbereich von T .
2. Zwei Operatoren T und S von X nach Y sind gleich, wenn $D(T) = D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(T)$ sind. Man schreibt dann $T = S$.
3. Sind T und S Operatoren von X nach Y , so schreibt man $T \subset S$, falls $D(T) \subset D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(T)$ gelten. Man sagt dann: T ist eine Einschränkung von S oder S ist eine Fortsetzung von T .
4. Ein Operator T von X nach Y ist dicht definiert, falls $D(T) \subset X$ dicht in X ist.
5. Mit

$$B(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y: T \text{ ist linear und beschränkt.}\}$$

bezeichnet man die Menge der beschränkten Operatoren T von X nach Y mit $D(T) = X$.

Definition 2.2 (Hilbert-adjungierter Operator für dicht definierte Operatoren). *Sei $T: D(T) \rightarrow Y$ ein dicht definierter, linearer Operator von X nach Y . Der zu T Hilbert-adjungierte Operator $T^*: D(T^*) \rightarrow X$ ist folgendermaßen definiert. Der Definitionsbereich $D(T^*)$ von T^* besteht aus allen $y \in Y$, so dass ein $y^* \in X$ existiert mit*

$$\langle y^*, x \rangle_X = \langle y, Tx \rangle_Y$$

für alle $x \in D(T)$. Für jedes solche $y \in D(T^*)$ ist der Hilbert-adjungierte Operator T^* definiert durch

$$T^*y := y^*.$$

Bemerkung 2.3. *Der Hilbert-adjungierte Operator T^* von Definition 2.2 ist wieder ein linearer Operator.*

Bemerkung 2.4. Sei $T \in B(X, Y)$. Der zu T Hilbert-adjungierte Operator T^* ist ein linearer Operator mit $D(T^*) = Y$ und $T^*: Y \rightarrow X$ ist gegeben durch

$$\langle T^*y, x \rangle_X = \langle y, Tx \rangle_Y$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Satz 2.5 ([21, Satz 2.36]). Die Zuordnung $B(X, Y) \rightarrow B(Y, X)$, $T \mapsto T^*$ ist normerhaltend und konjugiert linear. Das heißt, für $T, T_1, T_2 \in B(X, Y)$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gelten $\|T^*\| = \|T\|$ und $(aT_1 + bT_2)^* = \bar{a}T_1^* + \bar{b}T_2^*$.

Satz 2.6 ([21, Satz 2.40]). Sei T ein dicht definierter Operator von X nach Y .

1. Ist auch T^* dicht definiert, so ist T^{**} eine Fortsetzung von T .
2. Es gilt $\ker(T^*) = \text{ran}(T)^\perp$.
3. T ist genau dann beschränkt, wenn $T^* \in B(Y, X)$ ist. Es gilt dann $\|T\| = \|T^*\|$.
4. Ist T beschränkt, so ist T^{**} die eindeutig bestimmte, stetige Fortsetzung von T auf ganz X .

Satz 2.7 ([21, Satz 2.43]). Sei T_1 ein dicht definierter Operator von Y nach Z und sei T_2 ein dicht definierter Operator von X nach Y .

1. Ist T_1T_2 dicht definiert, so gilt $(T_1T_2)^* \supset T_2^*T_1^*$.
2. Ist $T_1 \in B(Y, Z)$ und damit $D(T_1T_2) = D(T_2)$ dicht, so gilt $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.
3. Ist T_2 injektiv mit $T_2^{-1} \in B(Y, X)$, so ist T_1T_2 dicht definiert und es gilt $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

Satz 2.8 ([21, Satz 2.45]). Seien T_1 und T_2 Operatoren von X nach Y .

1. Ist $T_1 + T_2$ dicht definiert, so gilt $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$.
2. Ist $T_2 \in B(X, Y)$ und T_1 dicht definiert, so gilt $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

Definition 2.9. Sei $T: D(T) \rightarrow X$ ein linearer Operator von X nach X .

1. Der Operator T heißt hermitesch, wenn er zu sich selbst formal Hilbert-adjungiert ist. Das heißt, wenn für alle $x, y \in D(T)$

$$\langle Tx, y \rangle_X = \langle x, Ty \rangle_X$$

gilt.

2. Der Operator T heißt symmetrisch, wenn er hermitesch und dicht definiert ist.
3. Der Operator T heißt selbstadjungiert, wenn er dicht definiert ist und $T = T^*$ gilt.

Bemerkung 2.10. Sei $T: D(T) \rightarrow X$ ein symmetrischer Operator von X nach X . Da dann der zu T Hilbert-adjungierte Operator $T^*: D(T^*) \rightarrow X$ existiert, gilt: Ein linearer Operator T ist genau dann symmetrisch, wenn er dicht definiert ist und $T \subset T^*$ gilt.

Bemerkung 2.11. Sei $T \in B(X, X)$. Dann sind die Begriffe hermitesch, symmetrisch und selbstadjungiert äquivalent.

Definition 2.12. Ein Operator $K \in B(X, Y)$ heißt kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Menge aus X in Y relativ kompakt ist. Die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y wird mit $K(X, Y)$ bezeichnet.

Lemma 2.13 ([10, Satz 8.1-3]). Sei $K \in B(X, Y)$. Der Operator K ist genau dann kompakt, wenn jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ aus X eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ enthält, für die $(Kx_{n_k})_k$ konvergiert.

Satz 2.14 ([21, Satz 3.5]). Für einen Operator $K \in B(X, Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. K ist kompakt,
2. K^*K ist kompakt,
3. K^* ist kompakt.

Satz 2.15 (Entwicklungssatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren, [21, Satz 3.12]). Sei K ein kompakter, selbstadjungierter Operator im Hilbertraum X . Dann gibt es endlich oder abzählbar viele reelle Zahlen λ_n mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$, $\lambda_n \rightarrow 0$ im unendlichen Fall, und orthonormierte Elemente $\varphi_n \in X$ mit

$$Kx = \sum_n \lambda_n \langle \varphi_n, x \rangle_X \varphi_n \quad \text{für alle } x \in X,$$

insbesondere also $K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. Ist außerdem $\{\psi_m\}_m$ eine Orthonormalbasis von $\ker(K)$, so ist $\{\varphi_n\}_n \cup \{\psi_m\}_m$ eine Orthonormalbasis von X .

Definition 2.16 (Abgeschlossener Operator). Ein Operator T von X nach Y heißt abgeschlossen, falls gilt: Konvergiert die Folge $(x_n)_n \subset D(T)$ gegen $x \in X$ und konvergiert $(Tx_n)_n$ gegen $y \in Y$, so folgt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

Bemerkung 2.17. Ein injektiver Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

Definition 2.18. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt offen, wenn das Bild jeder offenen Menge aus X offen in Y ist.

Satz 2.19 (Satz von der offenen Abbildung, [21, Satz 4.2]). Sei $T \in B(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.

Satz 2.20 (Satz von der stetigen Inversen, [21, Satz 4.3]). Sei $T \in B(X, Y)$ bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig.

Satz 2.21 (Satz vom abgeschlossenen Graphen, [21, Satz 4.4]). Sei T ein abgeschlossener, linearer Operator von X nach Y mit abgeschlossenem Definitionsbereich $D(T)$ (zum Beispiel $D(T) = X$). Dann ist T beschränkt.

Korollar 2.22 ([21, Korollar 4.6]). Sei T ein linearer Operator von X nach Y . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. T ist abgeschlossen und $D(T)$ ist abgeschlossen,
2. T ist abgeschlossen und stetig,
3. T ist stetig und $D(T)$ ist abgeschlossen.

Definition 2.23. Ein dicht definierter, linearer Operator T im Hilbertraum X heißt normal, wenn $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt.

Bemerkung 2.24. Jeder selbstadjungierte Operator ist normal.

Satz 2.25 ([21, Satz 4.17]). Sei T ein linearer Operator im Hilbertraum X .

1. Wenn T normal ist, dann ist T abgeschlossen.
2. Wenn T dicht definiert und abgeschlossen ist, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
 - a) T ist normal,
 - b) T^* ist normal,
 - c) $T^*T = TT^*$.

Lemma 2.26 (Komplexifizierung vom Hilbertraum X). Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ ein reeller Hilbertraum. Dann wird $X \times X$ mit

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y'), \\ (a + ib)(x, y) &:= (ax - by, ay + bx), \\ \langle (x, y), (x', y') \rangle_{X_{\mathbb{C}}} &:= \langle x, x' \rangle_X + \langle y, y' \rangle_X + i \{ \langle x, y' \rangle_X - \langle x', y \rangle_X \} \end{aligned}$$

für $x, x', y, y' \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}$ zu einem komplexen Hilbertraum $(X \times X, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_{\mathbb{C}}})$. Die Norm $\|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}}$ hat die Darstellung für $(x, y) \in X \times X$

$$\|(x, y)\|_{X_{\mathbb{C}}} := \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle_{X_{\mathbb{C}}}} = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2}.$$

Für das Element $(x, y) \in X \times X$ schreibt man $x + iy$ und der Vektorraum $X \times X$ mit dieser Struktur wird mit $X_{\mathbb{C}}$ bezeichnet und heißt Komplexifizierung von X .

Beweis. Der Beweis erfolgt über direktes Nachrechnen. □

Lemma 2.27 (Komplexifizierung vom linearen Operator T). Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ ein reeller Hilbertraum und T ein linearer Operator in X . Dann wird durch

$$D(T_{\mathbb{C}}) := \{x + iy : x, y \in D(T)\}, \quad T_{\mathbb{C}}(x + iy) := Tx + iTy$$

ein linearer Operator in $X_{\mathbb{C}}$ definiert und der lineare Operator $T_{\mathbb{C}}$ wird als Komplexifizierung von T bezeichnet.

Beweis. Der Beweis erfolgt über direktes Nachrechnen. \square

Satz 2.28 ([21, Satz 4.19]). *Sei T ein linearer Operator im reellen Hilbertraum X und sei $T_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von T in $X_{\mathbb{C}}$.*

1. $T_{\mathbb{C}}$ ist genau dann injektiv, surjektiv, stetig invertierbar, dicht definiert, abgeschlossen, wenn das entsprechende für T gilt. Es gelten $(T_{\mathbb{C}})^{-1} = (T^{-1})_{\mathbb{C}}$, $\text{ran}(T_{\mathbb{C}}) = \{x + iy : x, y \in \text{ran}(T)\}$.
2. Ist T dicht definiert, so gilt $(T_{\mathbb{C}})^* = (T^*)_{\mathbb{C}}$. Insbesondere ist $T_{\mathbb{C}}$ genau dann symmetrisch, selbstadjungiert, normal, wenn dies für T gilt.

Definition 2.29. *Sei T ein linearer Operator in X .*

1. Die Menge

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{K} : (T - z) : D(T) \rightarrow X \text{ ist bijektiv und } (T - z)^{-1} \text{ ist stetig.}\}$$

heißt die Resolventenmenge von T .

2. Die Funktion $R(T, \cdot) : \rho(T) \rightarrow B(X, X)$, $z \mapsto R(T, z) := (T - z)^{-1}$ heißt Resolvente oder Resolventenfunktion von T und $R(T, z)$ für $z \in \rho(T)$ heißt die Resolvente von T im Punkt z .
3. Das Spektrum $\sigma(T)$ eines Operators T in X ist definiert als $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ und die Elemente von $\sigma(T)$ heißen Spektralwerte.
4. Ein Element $z \in \sigma(T)$ wird als Eigenwert von T bezeichnet, falls $(T - z)$ nicht injektiv ist. Das heißt, $z \in \sigma(T)$ ist ein Eigenwert von T , falls $\ker(T - z) \neq \{0\}$ ist und jedes Element $x \in \ker(T - z) \setminus \{0\}$ heißt Eigenelement oder Eigenfunktion von T zum Eigenwert z . Den Unterraum $\ker(T - z) \subset X$ nennt man den geometrischen Eigenraum zu z und dessen Dimension $\dim(\ker(T - z))$ wird als (geometrische) Vielfachheit von z bezeichnet.

Bemerkung 2.30. *Sei T ein linearer Operator in X und sei T nicht abgeschlossen. Dann ist $\rho(T) = \emptyset$.*

Bemerkung 2.31. *Sei T ein abgeschlossener, linearer Operator in X . Dann gilt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 2.21)*

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{K} : (T - z) : D(T) \rightarrow X \text{ ist bijektiv.}\}.$$

Das Spektrum $\sigma(T)$ eines linearen Operators T lässt sich folgendermaßen unterteilen.

Definition 2.32. *Sei T ein linearer Operator in X .*

1. Das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ eines Operators T in X ist definiert als

$$\sigma_p(T) := \{z \in \mathbb{K} : (T - z) \text{ ist nicht injektiv.}\}$$

und die Elemente von $\sigma_p(T)$ sind die Eigenwerte von T .

2. Das stetige Spektrum $\sigma_c(T)$ eines Operators T in X ist definiert als

$$\sigma_c(T) := \{z \in \mathbb{K}: (T - z) \text{ ist injektiv, nicht surjektiv und mit dichtem Bild.}\}.$$

3. Das Residualspektrum $\sigma_r(T)$ eines Operators T in X ist definiert als

$$\sigma_r(T) := \{z \in \mathbb{K}: (T - z) \text{ ist injektiv und ohne dichtes Bild.}\}.$$

Bemerkung 2.33. Für einen linearen Operator T in X gilt die Unterteilung

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \uplus \sigma_c(T) \uplus \sigma_r(T).$$

Für selbstadjungierte Operatoren T unterteilt man dessen Spektrum $\sigma(T)$ auch folgendermaßen.

Definition 2.34. Sei T ein selbstadjungierter Operator in X .

1. Das wesentliche Spektrum $\sigma_e(T)$ eines selbstadjungierten Operators T in X ist die Menge der reellen Zahlen, die
 - Eigenwerte unendlicher geometrischer Vielfachheit, oder
 - Häufungspunkte des Spektrums (oder auch beides)
 sind.
2. Das diskrete Spektrum $\sigma_d(T)$ ist die Menge der Eigenwerte endlicher Vielfachheit, die isolierte Punkte von $\sigma(T)$ sind.

Bemerkung 2.35. Für einen selbstadjungierten Operator T in X gilt die Unterteilung

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \uplus \sigma_e(T)$$

und es gelten

$$\begin{aligned} \sigma_d(T) &\subset \sigma_p(T), \\ \sigma_c(T) \uplus \sigma_r(T) &\subset \sigma_e(T). \end{aligned}$$

Satz 2.36 ([21, Satz 5.2]). Sei T ein linearer, abgeschlossener, dicht definierter Operator im Hilbertraum X , so gelten $\rho(T^*) = \rho(T)^*$ und $\sigma(T^*) = \sigma(T)^* := \{\bar{z}: z \in \sigma(T)\}$.

Satz 2.37. Sei $T \in B(X, X)$ ein bijektiver Operator im Hilbertraum X , so gilt $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{z}: z \in \sigma(T)\}$.

Beweis. Da $T \in B(X, X)$ bijektiv ist, ist laut dem Satz von der stetigen Inversen (Satz 2.20) wieder $T^{-1} \in B(X, X)$. Daher gelten $0 \in \rho(T)$ beziehungsweise $0 \notin \sigma(T)$ und $0 \in \rho(T^{-1})$ beziehungsweise $0 \notin \sigma(T^{-1})$.

Sei $z \in \sigma(T^{-1})$ und sei angenommen, es gilt $\frac{1}{z} \notin \sigma(T)$. Es folgen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \notin \sigma(T) &\iff T - \frac{1}{z} \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff zT - 1 \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff z - T^{-1} \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff -(T^{-1} - z) \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff z \notin \sigma(T^{-1}) \end{aligned}$$

und das ist ein Widerspruch zu $z \in \sigma(T^{-1})$. Daher gilt $\sigma(T^{-1}) \subset \{\frac{1}{z} : z \in \sigma(T)\}$.

Sei $z \in \sigma(T)$ und sei angenommen, es gilt $\frac{1}{z} \notin \sigma(T^{-1})$. Es folgen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \notin \sigma(T^{-1}) &\iff T^{-1} - \frac{1}{z} \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff zT^{-1} - 1 \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff z - T \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff -(T - z) \text{ ist bijektiv.} \\ &\iff z \notin \sigma(T) \end{aligned}$$

und das ist ein Widerspruch zu $z \in \sigma(T)$. Daher gilt $\{\frac{1}{z} : z \in \sigma(T)\} \subset \sigma(T^{-1})$. \square

Satz 2.38 (Resolventengleichungen, [21, Satz 5.4]). *Seien S und T lineare Operatoren in X .*

1. *Erste Resolventengleichung: Für $z, z' \in \rho(T)$ gilt*

$$R(T, z) - R(T, z') = (z - z')R(T, z)R(T, z') = (z - z')R(T, z')R(T, z).$$

2. *Zweite Resolventengleichung: Ist $D(S) = D(T)$, so gilt für $z \in \rho(T) \cap \rho(S)$*

$$R(T, z) - R(S, z) = R(T, z)(S - T)R(S, z) = R(S, z)(S - T)R(T, z).$$

Satz 2.39 ([21, Satz 5.7]). *Sei T ein abgeschlossener, linearer Operator in X .*

1. *Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist eine offene Abbildung in \mathbb{K} und das Spektrum $\sigma(T)$ ist abgeschlossen in \mathbb{K} . Für $z \in \rho(T)$ gilt*

$$\|R(T, z)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(T))}.$$

2. *Die Resolvente $R(T, \cdot)$ ist analytisch in $\rho(T)$. Das heißt, sie ist um jeden Punkt $z_0 \in \rho(T)$ in eine normkonvergente Potenzreihe*

$$R(T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n R(T, z_0)^{n+1}$$

entwickelbar.

3. Die Resolvente $R(T, \cdot)$ ist normstetig in $\rho(T)$. Das heißt, für $z, z_0 \in \rho(T)$ mit $z \rightarrow z_0$ gilt $\|R(T, z) - R(T, z_0)\| \rightarrow 0$.

Satz 2.40 ([21, Satz 5.12]). Sei T ein linearer Operator im Hilbertraum X .

1. Wenn T hermitesch ist, dann sind die Eigenwerte reell.
2. Wenn T hermitesch oder normal ist, dann sind die Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

Satz 2.41 ([21, Satz 5.14]). Sei T ein symmetrischer Operator im komplexen Hilbertraum X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. T ist selbstadjungiert,
2. $\text{ran}(T - z) = X$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
3. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Satz 2.42 ([21, Satz 5.16]). Sei T ein beschränkter, selbstadjungierter Operator im komplexen oder reellen Hilbertraum X . Dann gilt

$$\|T\| = \max \{|z| : z \in \sigma(T)\}.$$

Satz 2.43 (Entwicklungssatz für kompakte, normale Operatoren, [21, Satz 5.17]). Sei K ein kompakter, normaler Operator im komplexen Hilbertraum X . Dann gibt es endlich oder abzählbar viele komplexe Zahlen λ_n mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$ mit $\lambda_n \rightarrow 0$ im unendlichen Fall und orthonormierte Elemente φ_n mit

$$Kx = \sum_n \lambda_n \langle \varphi_n, x \rangle_X \varphi_n \quad \text{für alle } x \in X.$$

Weiter ist K genau dann selbstadjungiert, wenn alle λ_n reell sind.

Satz 2.44 ([21, Satz 5.18]). Das Spektrum jedes selbstadjungierten Operators T im reellen oder komplexen Hilbertraum ist nicht leer. Dies gilt auch für jeden normalen Operator im komplexen Hilbertraum.

Satz 2.45 ([21, Satz 5.24]). Sei $K \in B(X, X)$ kompakt. Dann gelten folgende Aussagen.

1. Das Spektrum $\sigma(K)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich höchstens bei 0 häufen. Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert endlicher geometrischer Vielfachheit.
2. Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert endlicher algebraischer Vielfachheit. Die algebraische Vielfachheit von λ ist die Dimension des algebraischen Eigenraums

$$A_\lambda := \{x \in X : (K - \lambda)^n x = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(K - \lambda)^n.$$

3. Ist X unendlichdimensional, so ist $0 \in \sigma(K)$.

Satz 2.46 ([21, Satz 5.25]). Sei $K \in B(X, X)$ kompakt. Dann ist $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenwert von K , wenn \bar{z} Eigenwert von K^* ist. Die Vielfachheiten sind gleich.

3 Randintegraloperatoren für die Laplace-Gleichung

In diesem Kapitel werden die Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften für die Laplace-Gleichung dargestellt. Für Details sei auf [19, 12, 8, 9, 7] verwiesen. Hier werden die Notationen wie in [19] verwendet.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Weiter sei das Dualitätsprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$$

die stetige Fortsetzung vom $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt. Das heißt, man definiert für $w \in L^2(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle w, v \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} w(x)v(x)ds_x$$

für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit $w \notin L^2(\Gamma)$ definiert man

$$\langle w, v \rangle_{\Gamma} := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} w_k(x)v(x)ds_x$$

für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, wobei für die Folge $(w_k)_k \subset L^2(\Gamma)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

gilt. Eine solche Folge $(w_k)_k \subset L^2(\Gamma)$ existiert, da $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ die Vervollständigung von $L^2(\Gamma)$ bezüglich der Norm

$$\|z\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \sup_{0 \neq \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{|\int_{\Gamma} z(x)\varphi(x)ds_x|}{\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}} \quad \text{mit } z \in L^2(\Gamma)$$

ist. Analog sei das Dualitätsprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}: \tilde{H}^{-1}(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

die stetige Fortsetzung vom $L^2(\Omega)$ -Skalarprodukt. Man siehe dazu Kapitel 4 in [8].

Satz 3.1 (Normalenableitung für $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$). *Falls $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ die Gleichung*

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega$$

erfüllen, dann existiert ein $\gamma_1^{\text{int}}u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \gamma_1^{\text{int}}u, \gamma_0^{\text{int}}v \rangle_\Gamma$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

gilt. Weiter ist $\gamma_1^{\text{int}}u$ eindeutig durch u und f festgelegt und es existiert eine positive Konstante c mit

$$\|\gamma_1^{\text{int}}u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)} + c\|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Das heißt, der Operator $\gamma_1^{\text{int}}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist eine lineare und beschränkte Abbildung für festes $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ und stimmt für hinreichend glatten Rand Γ und hinreichend glattes u mit $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma$ überein.

Beweis. Siehe Beweis von Lemma 5.1.1 in [8] und Lemma 4.3 in [12]. \square

Um Randintegraloperatoren definieren zu können, benötigt man die Fundamentallösung. Für die Laplace-Gleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega$$

lautet die Fundamentallösung für $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$

$$U^*(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\|, & \text{falls } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|}, & \text{falls } d = 3. \end{cases}$$

Für die Herleitung der Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung siehe man zum Beispiel [12, 19].

3.1 Das Einfachschichtpotential \tilde{V}

Das Einfachschichtpotential \tilde{V} definiert man für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ als

$$\tilde{V}w(x) := \langle U^*(x, \cdot), w \rangle_\Gamma \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \quad (3.1)$$

beziehungsweise für $w \in L^2(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ als

$$\tilde{V}w(x) := \int_\Gamma U^*(x, y)w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Weiter ist $\tilde{V}w$ in (3.1) Lösung der homogenen Laplace-Gleichung

$$-\Delta(\tilde{V}w)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$$

und das Einfachschichtpotential ist eine lineare, beschränkte Abbildung

$$\tilde{V}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante $c_2^{\tilde{V}}$, so dass für alle $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\left\| \tilde{V}w \right\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2^{\tilde{V}} \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt.

3.2 Der Einfachschichtoperator V

Die Anwendung des Spuroperators $\gamma_0^{\text{int}}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ auf das Einfachschichtpotential $\tilde{V}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ definiert den linearen, beschränkten Einfachschichtoperator

$$V := \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_2^V , so dass für alle $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|Vw\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^V \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt. Weiter ist der Einfachschichtoperator $V: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ L^2 -symmetrisch. Das heißt, es gilt für alle $w, z \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Vw, z \rangle_{\Gamma} = \langle Vz, w \rangle_{\Gamma}.$$

Für $w \in L^\infty(\Gamma)$ hat der Einfachschichtoperator V die Darstellung als schwach singuläres Integral

$$Vw(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y)w(y)ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

man siehe dazu Satz 3.3.5 in [17].

Auf dem Raum

$$H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) := \left\{ w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \langle w, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma} = 0 \right\}$$

ist der Einfachschichtoperator V elliptisch.

Satz 3.2 ([19, Satz 6.22]). *Der Einfachschichtoperator V ist auf $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ elliptisch. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_1^V , so dass für alle $w \in H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\langle Vw, w \rangle_{\Gamma} \geq c_1^V \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

gilt.

Satz 3.3 (Elliptizität des Einfachschichtoperators, [19, Satz 6.23]). *Falls $d = 2$ ist, sei der Durchmesser des Gebiets $\text{diam}(\Omega) < 1$. Dann ist der Einfachschichtoperator V auf $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ elliptisch. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_1^V , so dass für alle $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\langle Vw, w \rangle_{\Gamma} \geq c_1^V \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

gilt.

Mit dem Satz 3.3 lässt sich der Einfachschichtoperator $V: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ invertieren, falls für $d = 2$ der Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$ ist. Der inverse Einfachschichtoperator $V^{-1}: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist linear, beschränkt und elliptisch. Das heißt, es gelten für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \langle V^{-1}v, v \rangle_{\Gamma} &\geq \frac{1}{c_2^V} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2, \\ \|V^{-1}v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \frac{1}{c_1^V} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

mit den positiven Konstanten c_1^V, c_2^V vom Einfachschichtoperator V . Weiter ist der inverse Einfachschichtoperator $V^{-1}: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ L^2 -symmetrisch. Das heißt, es gilt für alle $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle V^{-1}u, v \rangle_{\Gamma} = \langle V^{-1}v, u \rangle_{\Gamma}.$$

Die natürliche Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sei definiert durch

$$w_{\text{eq}} := V^{-1}\mathbf{1} \iff Vw_{\text{eq}} = \mathbf{1} \quad (3.2)$$

und damit erhält man den Raum

$$H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \langle w_{\text{eq}}, v \rangle_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Weiter ist die Abbildung

$$V: H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.3)$$

ein Isomorphismus.

3.3 Das Doppelschichtpotential W

Das Doppelschichtpotential W definiert man für $v \in L^1(\Gamma)$ als

$$Wv(x) := \langle \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, \cdot), v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x, y) v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma. \quad (3.4)$$

Weiter ist Wv in (3.4) Lösung der homogenen Laplace-Gleichung

$$-\Delta(Wv)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$$

und das Doppelschichtpotential ist eine lineare, beschränkte Abbildung

$$W: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_2^W , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|Wv\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2^W \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt.

3.4 Der Doppelschichtoperator K

Den Doppelschichtoperator K definiert man für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ als

$$Kv := \gamma_0^{\text{int}} Wv + \frac{1}{2}v \quad \text{fast überall}$$

und dieser ist eine lineare, beschränkte Abbildung

$$K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_2^K , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|Kv\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^K \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt.

Falls Γ hinreichend glatt ist, folgt für $v \in L^\infty(\Gamma)$ die Darstellung als schwach singuläres Integral

$$Kv(x) = \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x,y)v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

man siehe dazu Lemma 3.3.8 in [17] beziehungsweise Satz 7.4 in [12].

Für die konstante Funktion $v = \mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gelten

$$\ker \left(\frac{1}{2}I + K \right) = \text{span}\{\mathbf{1}\} \quad (3.5)$$

und damit

$$(K\mathbf{1})(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Weiter sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I + K &: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \frac{1}{2}I - K &: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

Isomorphismen.

3.5 Der adjungierte Doppelschichtoperator K'

Den adjungierten Doppelschichtoperator K' definiert man für $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ als

$$K'w := \gamma_1^{\text{int}} Vw - \frac{1}{2}w$$

im Sinne von $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und dieser ist eine lineare, beschränkte Abbildung

$$K': H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante $c_2^{K'}$, so dass für alle $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|K'w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^{K'} \|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt.

Falls Γ hinreichend glatt ist, folgt für $w \in L^\infty(\Gamma)$ die Darstellung als schwach singuläres Integral

$$K'w(x) = \int_{\Gamma} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U^*(x,y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

man siehe dazu Lemma 3.3.8 in [17] beziehungsweise Satz 7.4 in [12].

Für die natürliche Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt

$$\ker \left(\frac{1}{2}I + K' \right) = \text{span}\{w_{\text{eq}}\}$$

und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I + K' &: H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \frac{1}{2}I - K' &: H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen. Weiter ist K' der L^2 -adjungierte Operator zu K . Das heißt, es gilt

$$\langle Kv, z \rangle_{\Gamma} = \langle K'z, v \rangle_{\Gamma}$$

für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

3.6 Der hypersinguläre Operator D

Die Anwendung der Normalenableitung $\gamma_1^{\text{int}}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (Satz 3.1) auf das Doppelschichtpotential $W: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ definiert den linearen, beschränkten, hypersingulären Operator

$$D := -\gamma_1^{\text{int}}W: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_2^D , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|Dv\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^D \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt. Weiter ist der hypersinguläre Operator $D: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ L^2 -symmetrisch. Das heißt, es gilt für alle $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Du, v \rangle_{\Gamma} = \langle Dv, u \rangle_{\Gamma}.$$

Satz 3.4 (Elliptizität des hypersingulären Operators, [19, Satz 6.24]). *Der hypersinguläre Operator $D: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist $H^{\frac{1}{2}}_*(\Gamma)$ -elliptisch. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_1^D , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}_*(\Gamma)$*

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq c_1^D \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

gilt.

Satz 3.5 (Semi-Elliptizität des hypersingulären Operators, [19, Korollar 6.25]). *Der hypersinguläre Operator $D: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist semi-elliptisch. Das heißt, es existiert eine positive Konstante \bar{c}_1^D , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

gilt.

Der Kern des hypersingulären Operators D ist gegeben durch

$$\ker D = \text{span}\{\mathbf{1}\}$$

und die Abbildung

$$D: H^{\frac{1}{2}}_*(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.6)$$

ist ein Isomorphismus.

3.7 Der Steklov-Poincaré-Operator S

Der Steklov-Poincaré-Operator S ist definiert als

$$S := V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.7)$$

und dieser ist linear und beschränkt. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_2^S , so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\|Sv\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^S \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ Lösung im schwachen Sinne der homogenen Laplace-Gleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega,$$

dann folgt mit [19, (6.40)]

$$S\gamma_0^{\text{int}} u = \gamma_1^{\text{int}} u.$$

Mit der ersten Greenschen Formel (Lemma 5.1.1 in [8]) für $u, v \in H^1(\Omega)$ mit $0 = -\Delta u \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ erhält man

$$a(u, v) = \langle -\Delta u, v \rangle_{\Omega} + \langle \gamma_1^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma_1^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} = \langle S \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Damit gilt für den Steklov-Poincaré-Operator $S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$a(u, v) = \langle S \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$.

Der Steklov-Poincaré-Operator $S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ besitzt die symmetrische Darstellung

$$S = D + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \quad (3.8)$$

und ist L^2 -symmetrisch. Das heißt, es gilt für alle $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} = \langle Sv, u \rangle_{\Gamma}.$$

Satz 3.6 (Semi-Elliptizität des Steklov-Poincaré-Operators, [19, (6.45)]). *Der Steklov-Poincaré-Operator $S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist semi-elliptisch. Das heißt, es gilt für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\langle Sv, v \rangle_{\Gamma} \geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

mit der positiven Konstante \bar{c}_1^D des hypersingulären Operators D .

Wegen Satz 3.6 ist der Kern des Steklov-Poincaré-Operators S gegeben durch

$$\ker S = \text{span}\{\mathbf{1}\}$$

und die Abbildung

$$S: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.9)$$

ist ein Isomorphismus.

3.8 Randintegralgleichungen

Die Randintegralgleichungen für die homogene Laplace-Gleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega$$

mit $u \in H^1(\Omega)$ lauten

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u \\ \gamma_1^{\text{int}} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u \\ \gamma_1^{\text{int}} u \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix}$$

als Calderón-Projektor bezeichnet wird.

Satz 3.7 (Beziehungen für Randintegraloperatoren, [19, Korollar 6.19]). *Für die Randintegraloperatoren gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned} VD &= \left(\frac{1}{2}I + K\right) \left(\frac{1}{2}I - K\right), \\ DV &= \left(\frac{1}{2}I + K'\right) \left(\frac{1}{2}I - K'\right), \\ VK' &= KV, \\ K'V &= DK. \end{aligned}$$

3.9 Spektrum und Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators K

Es sei für $d = 2$ der Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$. Dann existiert der lineare, beschränkte, elliptische, inverse Einfachschichtoperator $V^{-1}: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Man definiert durch

$$\langle u, v \rangle_{V^{-1}} := \langle V^{-1}u, v \rangle_{\Gamma}$$

für $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ein Skalarprodukt auf $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Die durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ induzierte Norm wird mit $\|\cdot\|_{V^{-1}} := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}}$ bezeichnet und diese Norm ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$. Das heißt, $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}})$ ist ein reeller Hilbertraum, der zum reellen Hilbertraum $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)})$ isomorph ist. Im Weiteren wird $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}})$ mit \mathcal{H} bezeichnet. Es wird der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ auch im Hilbertraum \mathcal{H} betrachtet, dann schreibt man $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Lemma 3.8. *Die konstante Funktion $u_0 := \mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_0^K := -\frac{1}{2}$ mit einfacher geometrischer Vielfachheit.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus (3.5). □

Die beiden folgenden Sätze sind auch für beschränkte Lipschitz-Gebiete im \mathbb{R}^d beziehungsweise \mathbb{R}^2 richtig und geben daher einen Überblick über das Spektrum $\sigma(K)$ des Doppelschichtoperators K .

Satz 3.9 ([4, Satz 2.5]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Für das Spektrum $\sigma(K)$ des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt*

$$\sigma(K) \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Satz 3.10 ([14, Korollar 3.7]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 . Das Spektrum $\sigma(K)$ des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist um den Ursprung mit Ausnahme von $-\frac{1}{2}$ symmetrisch.*

Wenn der Doppelschichtoperator K kompakt ist, kann man mehr über dessen Spektrum aussagen. Der Doppelschichtoperator wird dazu im Hilbertraum \mathcal{H} untersucht.

Lemma 3.11. *Der Doppelschichtoperator $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist beschränkt in \mathcal{H} .*

Beweis. Dies folgt aus der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{V^{-1}}$ und $\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$. \square

Lemma 3.12. *Für den Doppelschichtoperator $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gilt*

$$\langle Ku, v \rangle_{V^{-1}} = \langle Kv, u \rangle_{V^{-1}}$$

für alle $u, v \in \mathcal{H}$ und ist daher selbstadjungiert auf \mathcal{H} .

Beweis. Für $u, v \in \mathcal{H}$ folgt mit $K'V^{-1} = V^{-1}K$ von Satz 3.7

$$\langle Ku, v \rangle_{V^{-1}} = \langle V^{-1}Ku, v \rangle_{\Gamma} = \langle K'V^{-1}u, v \rangle_{\Gamma} = \langle V^{-1}u, Kv \rangle_{\Gamma} = \langle Kv, u \rangle_{V^{-1}}.$$

\square

Für glatte Gebiete Ω ist der Doppelschichtoperator K kompakt. Es gilt folgender Satz.

Satz 3.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes $C^{2,\alpha}$ -Gebiet mit $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt.*

Beweis. Man siehe Satz 8.22 in [9] für $d = 2$ und Korollar 3.7 in [5] zusammen mit dem Einbettungssatz für die Spurräume (Satz 1.5) für $d = 3$. Alternativ sei auf (4.52) auf Seite 165 in [20] zusammen mit dem Einbettungssatz für die Spurräume (Satz 1.5) verwiesen. \square

Korollar 3.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes $C^{2,\alpha}$ -Gebiet mit $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist der Doppelschichtoperator $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt und selbstadjungiert.*

Beweis. Die Kompaktheit folgt aus Satz 3.13 und aus der Isomorphie zwischen den Hilberträumen $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right)$ und \mathcal{H} . Dass $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert ist, ist Lemma 3.12. \square

Satz 3.15. *Sei der Doppelschichtoperator $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Es ist $0 \in \sigma(K)$.*
2. *Das Spektrum $\sigma(K)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich bei 0 häufen. Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert endlicher geometrischer und algebraischer Vielfachheit. Das heißt, es gelten $\sigma_e(K) = \{0\}$ und $\sigma_d(K) = \sigma(K) \setminus \{0\}$.*

3. Für $\lambda_n, \lambda_{n+1} \in \sigma_d(K)$ mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$, $\lambda_n \rightarrow 0$ im unendlichen Fall, gibt es orthonormierte Elemente $u_n \in \mathcal{H}$ mit

$$Kv = \sum_n \lambda_n \langle u_n, v \rangle_{V^{-1}} u_n \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere gilt $Ku_n = \lambda_n u_n$. Ist $\{\psi_m\}_m$ eine Orthonormalbasis von $\ker(K)$, so ist $\{u_n\}_n \cup \{\psi_m\}_m$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} .

Beweis. Da $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ laut Voraussetzung, Lemma 3.11 und Lemma 3.12 kompakt, beschränkt und selbstadjungiert ist, folgen die Aussagen aus Satz 2.45 und dem Entwicklungssatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren (Satz 2.15). \square

Satz 3.16 (Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators K , [19, Satz 6.26]). Für $u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt

$$(1 - c_K) \|u\|_{V^{-1}} \leq \left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) u \right\|_{V^{-1}} \leq c_K \|u\|_{V^{-1}},$$

wobei die Kontraktionskonstante durch

$$c_K := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^V c_1^D} < 1 \quad (3.10)$$

mit den Elliptizitätskonstanten c_1^V vom Einfeldschichtoperator V und c_1^D vom hypersingulären Operator D gegeben ist.

Korollar 3.17 ([19, Korollar 6.27]). Für $u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt

$$\left\| \left(\frac{1}{2}I + K \right) u \right\|_{V^{-1}} \leq c_K \|u\|_{V^{-1}},$$

wobei die Kontraktionskonstante $c_K < 1$ in (3.10) gegeben ist. Das heißt, es gilt für den Operator $\frac{1}{2}I + K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$\left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = c_K < 1.$$

Lemma 3.18. Für den Operator $\frac{1}{2}I + K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gelten

$$\sigma \left(\frac{1}{2}I + K \right) = \left\{ z + \frac{1}{2} : z \in \sigma(K) \right\} \subset [0, 1)$$

und

$$\frac{1}{2} \leq c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = \frac{1}{2} + \lambda_{\max}^K < 1$$

mit dem maximalen Spektralwert

$$\lambda_{\max}^K := \max \{ z : z \in \sigma(K) \} \in \left[0, \frac{1}{2} \right).$$

Falls $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt ist, dann gilt

$$\lambda_{\max}^K = \max \{z: z \in \sigma_d(K) \cup \{0\}\}.$$

Das heißt, entweder λ_{\max}^K ist null, falls das diskrete Spektrum $\sigma_d(K)$ keine Eigenwerte größer null enthält, oder λ_{\max}^K ist der größte Eigenwert von K größer null.

Beweis. Es gelten mit Bemerkung 2.31 und Satz 3.9

$$\begin{aligned} z \in \sigma \left(\frac{1}{2}I + K \right) &\iff \frac{1}{2}I + K - zI = K - \left(z - \frac{1}{2} \right) I \text{ ist nicht bijektiv.} \\ &\iff z - \frac{1}{2} \in \sigma(K) \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

und deswegen

$$\sigma \left(\frac{1}{2}I + K \right) \subset [0, 1). \quad (3.12)$$

Mit Satz 2.42 folgen aus (3.12) und (3.11)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| &= \max \left\{ |z| : z \in \sigma \left(\frac{1}{2}I + K \right) \right\} \\ &= \max \left\{ z : z \in \sigma \left(\frac{1}{2}I + K \right) \right\} \\ &= \max \left\{ z : z - \frac{1}{2} \in \sigma(K) \right\} \\ &= \max \left\{ \tilde{z} + \frac{1}{2} : \tilde{z} \in \sigma(K) \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \max \{ \tilde{z} : \tilde{z} \in \sigma(K) \} \\ &= \frac{1}{2} + \lambda_{\max}^K \end{aligned}$$

und damit die erste Behauptung des Lemmas.

Falls $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt ist, gelten laut Satz 3.15 für das diskrete Spektrum $\sigma_d(K) = \sigma(K) \setminus \{0\}$ und $0 \in \sigma(K)$. Damit folgt die zweite Behauptung des Lemmas. \square

Korollar 3.19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$\frac{1}{2} \leq c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = \frac{1}{2} - \lambda_{\min}^K < 1$$

mit dem minimalen Spektralwert

$$\lambda_{\min}^K := \min \left\{ z : z \in \sigma(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\} \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right].$$

Falls $K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompakt ist, dann gilt

$$\lambda_{\min}^K = \min \left\{ z: z \in \left(\sigma_d(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right) \cup \{0\} \right\}.$$

Das heißt, entweder λ_{\min}^K ist null, falls das diskrete Spektrum $\sigma_d(K)$ keine Eigenwerte kleiner null und größer $-\frac{1}{2}$ enthält, oder λ_{\min}^K ist der kleinste Eigenwert von K größer $-\frac{1}{2}$.

Beweis. Dies folgt aus der Symmetrie des Spektrums $\sigma(K)$ (Satz 3.10) um null und aus dem Lemma 3.18. \square

Lemma 3.20. Für den Operator $\frac{1}{2}I - K: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gilt

$$\sigma \left(\frac{1}{2}I - K \right) = \left\{ \frac{1}{2} - z: z \in \sigma(K) \right\} \subset (0, 1].$$

Beweis. Es gelten mit Bemerkung 2.31 und Satz 3.9

$$\begin{aligned} z \in \sigma \left(\frac{1}{2}I - K \right) &\iff \frac{1}{2}I - K - zI = - \left[K - \left(\frac{1}{2} - z \right) I \right] \text{ ist nicht bijektiv.} \\ &\iff \frac{1}{2} - z \in \sigma(K) \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

und deswegen

$$\sigma \left(\frac{1}{2}I - K \right) \subset (0, 1].$$

\square

4 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

In diesem Kapitel wird das Standard-Steklov-Eigenwertproblem betrachtet, welches in ähnlicher Form von Auchmuty [3] beziehungsweise in meinen Arbeiten [24, 25] genauer untersucht wurde.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und für $d = 2$ sei der Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$.

4.1 Klassische und schwache Form

Das Standard-Steklov-Eigenwertproblem lautet:

Gesucht sind die Werte $\mu \in \mathbb{R}$, so dass eine (klassische) Lösung $u \neq 0$ des Systems

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = \mu u(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (4.2)$$

existiert.

Durch Multiplikation der Gleichung (4.1) mit einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion v , Integration über Ω , partieller Integration und Einsetzen der Randbedingung (4.2) erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u(x) v(x) ds_x \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \mu u(x) v(x) ds_x. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Gleichung (4.3) macht auch für $u, v \in H^1(\Omega)$ Sinn und die schwache Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems lautet daher:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H^1(\Omega)$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \mu \langle \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \quad (4.4)$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

und dem $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt

$$\langle \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} u)(x) (\gamma_0^{\text{int}} v)(x) ds_x$$

gilt.

Die konstante Funktion $u_0 = \mathbf{1} \in H^1(\Omega)$ ist eine Steklov-Eigenfunktion zum Steklov-Eigenwert $\mu_0 = 0$. Daher betrachtet man das Standard-Steklov-Eigenwertproblem:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H_*^1(\Omega)$, so dass für alle $v \in H_*^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \mu \langle \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \quad (4.5)$$

mit dem Raum

$$H_*^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : \langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} w \rangle_{\Gamma} = 0\}$$

und mit der natürlichen Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (3.2) gilt.

Lemma 4.1. *Die Bilinearformen*

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) &: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle \gamma_0^{\text{int}} \cdot, \gamma_0^{\text{int}} \cdot \rangle_{\Gamma} &: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

sind beschränkt. Das heißt, es gelten mit einer positiven Konstanten $c_2 := c_T^2$

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (4.6)$$

$$|\langle \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}| \leq c_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (4.7)$$

für alle $u, v \in H^1(\Omega)$, wobei c_T die Konstante aus dem Spursatz (Satz 1.7) ist.

Beweis. Zu (4.6): Man erhält mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $u, v \in H^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

und damit die Beschränktheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$.

Zu (4.7): Es folgt für $u, v \in H^1(\Omega)$ unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und des Spursatzes (Satz 1.7)

$$\begin{aligned} |\langle \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}| &= \left| \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} u)(x) (\gamma_0^{\text{int}} v)(x) ds_x \right| \\ &\leq \|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0^{\text{int}} v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\gamma_0^{\text{int}} v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq c_T^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit die Beschränktheit der Bilinearform $\langle \gamma_0^{\text{int}} \cdot, \gamma_0^{\text{int}} \cdot \rangle_{\Gamma}$. \square

Lemma 4.2. Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot): H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist semi-elliptisch. Das heißt, es gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(v, v) \geq |v|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Weiter ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot): H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ elliptisch in $H_*^1(\Omega)$. Das heißt, es existiert eine positive Konstante c_1^A , so dass für alle $v \in H_*^1(\Omega)$

$$a(v, v) \geq c_1^A \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

gilt.

Beweis. Für $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = |v|_{H^1(\Omega)}^2$$

und damit ist $a(\cdot, \cdot)$ semi-elliptisch.

Die Abbildung $\langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} \cdot \rangle_{\Gamma}: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear und beschränkt, weil mit dem Spursatz (Satz 1.7) für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$|\langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}| \leq \|w_{\text{eq}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\gamma_0^{\text{int}} v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|w_{\text{eq}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

gilt. Weiter folgt für $v := \alpha \mathbf{1} \in H^1(\Omega)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ aus

$$0 = \langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} = \alpha \langle w_{\text{eq}}, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma} = \alpha \underbrace{\langle V^{-1} \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma}}_{\neq 0},$$

dass $\alpha = 0$ und damit $v = \mathbf{0}$ gelten. Daher erfüllt die Abbildung $\langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} \cdot \rangle_{\Gamma}: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ alle Voraussetzungen vom Normierungssatz von Sobolev (Satz 2.6 in [19]) und es wird deswegen für $v \in H^1(\Omega)$ durch

$$\|v\|_{H^1(\Omega), w_{\text{eq}}} := \left\{ \left[\langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \right]^2 + |v|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eine äquivalente Norm auf $H^1(\Omega)$ definiert. Die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf $H_*^1(\Omega)$ folgt durch

$$a(v, v) = |v|_{H^1(\Omega)}^2 = \underbrace{\left[\langle w_{\text{eq}}, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \right]^2}_{=0} + |v|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega), w_{\text{eq}}}^2 \geq c_1^A \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

für alle $v \in H_*^1(\Omega)$. □

Lemma 4.3. Die Bilinearform $\langle \gamma_0^{\text{int}} \cdot, \gamma_0^{\text{int}} \cdot \rangle_{\Gamma}: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist positiv semidefinit. Das heißt, es gilt

$$\langle \gamma_0^{\text{int}} v, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \geq 0 \text{ für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Für $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\langle \gamma_0^{\text{int}} v, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \underbrace{(\gamma_0^{\text{int}} v)(x)}_{\geq 0}^2 ds_x \geq 0.$$

□

4.2 Existenz der Steklov-Eigenwerte über Maximierungsprobleme

In diesem Unterkapitel wird die Existenz der Steklov-Eigenwerte über Maximierungsprobleme hergeleitet. Dies erfolgt analog zu [3, 24].

4.2.1 Maximierungsproblem für den kleinsten Steklov-Eigenwert

Um die Existenz eines Steklov-Eigenwerts und einer Steklov-Eigenfunktion der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) zu beweisen, geht man über zu einem Maximierungsproblem. Dazu definiert man die Abbildungen

$$\begin{aligned} J: H_*^1(\Omega) &\rightarrow [0, \infty), & J(v) &:= a(v, v), \\ B: H_*^1(\Omega) &\rightarrow [0, \infty), & B(v) &:= \langle \gamma_0^{\text{int}} v, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

und die Menge

$$K := \{v \in H_*^1(\Omega) : J(v) \leq 1\}.$$

Man betrachtet das folgende Maximierungsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in H_*^1(\Omega) \text{ mit } B(u) = \sup_{v \in K} B(v). \quad (4.8)$$

Wenn man entsprechende Eigenschaften der Abbildungen J, B und der Menge K nachweist, um den verallgemeinerten Weierstraßschen Existenzsatz (Theorem 2.D im Unterkapitel 2.5 in [26]) zu verwenden, kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.4 (Existenzsatz des kleinsten Steklov-Eigenwerts). *Es existieren maximierende Punkte $\pm u_1 \in H_*^1(\Omega)$ von (4.8). Diese maximierenden Punkte sind Lösungen der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) mit*

$$a(u_1, u_1) = J(u_1) = 1.$$

Der korrespondierende Steklov-Eigenwert $\mu_1 = \frac{1}{B(u_1)}$ ist der kleinste Steklov-Eigenwert von der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5).

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Satz 3.11 in [24]. □

4.2.2 Maximierungsproblem für den nachfolgenden Steklov-Eigenwert

Es seien die ersten N Steklov-Eigenwerte $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$ und die zugehörigen Steklov-Eigenfunktionen $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ mit

$$a(u_j, u_k) = \mu_j \langle \gamma_0^{\text{int}} u_j, \gamma_0^{\text{int}} u_k \rangle_\Gamma = \delta_{jk} \quad \text{für } 1 \leq j, k \leq N$$

von der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) gegeben. Um den nachfolgenden Steklov-Eigenwert μ_{N+1} und die zugehörige Steklov-Eigenfunktion u_{N+1} zu berechnen, definiert man für $1 \leq j \leq N$ die linearen Abbildungen

$$b_j(\cdot) := \langle \gamma_0^{\text{int}} \cdot, \gamma_0^{\text{int}} u_j \rangle_\Gamma: H_*^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

die Menge

$$K_N := \{v \in K: b_j(v) = \langle \gamma_0^{\text{int}} v, \gamma_0^{\text{int}} u_j \rangle_\Gamma = 0 \text{ für } 1 \leq j \leq N\}$$

und betrachtet das Maximierungsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in H_*^1(\Omega) \text{ mit } B(u) = \sup_{v \in K_N} B(v). \quad (4.9)$$

Satz 4.5 (Existenzsatz des nachfolgenden Steklov-Eigenwerts). *Es existieren maximierende Punkte $\pm u_{N+1} \in H_*^1(\Omega)$ von (4.9). Diese maximierenden Punkte sind Lösungen der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) mit*

$$a(u_{N+1}, u_{N+1}) = J(u_{N+1}) = 1$$

und

$$a(u_{N+1}, u_j) = \langle \gamma_0^{\text{int}} u_{N+1}, \gamma_0^{\text{int}} u_j \rangle_\Gamma = 0 \text{ für } 1 \leq j \leq N.$$

Der korrespondierende Steklov-Eigenwert $\mu_{N+1} = \frac{1}{B(u_{N+1})}$ ist der kleinste Steklov-Eigenwert von der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) mit $\mu_{N+1} \geq \mu_N$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Satz 3.15 in [24]. \square

Satz 4.6. *Es hat jeder Steklov-Eigenwert μ_j von der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.5) endliche Vielfachheit und es gilt*

$$\mu_j \rightarrow \infty \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Satz 3.17 in [24]. \square

4.3 Existenz der Steklov-Eigenwerte über den Steklov-Poincaré-Operator S

Für die Betrachtung des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.4) mit Hilfe von kompakten Operatoren benötigt man folgenden Zusammenhang zwischen der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und dem Steklov-Poincaré-Operator S . Mit Hilfe der ersten Greenschen Formel (Lemma 5.1.1 in [8]) für $u, v \in H^1(\Omega)$ mit $0 = -\Delta u \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = \langle -\Delta u, v \rangle_\Omega + \langle \gamma_1^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_\Gamma = \langle S \gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_\Gamma$$

mit dem Steklov-Poincaré-Operator (3.7)

$$S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad S \gamma_0^{\text{int}} u = \gamma_1^{\text{int}} u.$$

Damit ist das Standard-Steklov-Eigenwertproblem (4.4) zum Eigenwertproblem für den Steklov-Poincaré-Operator S äquivalent:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} = \mu \langle u, v \rangle_{\Gamma} \quad (4.10)$$

gilt.

Um die Existenz von Steklov-Eigenfunktionen und Steklov-Eigenwerten von (4.10) nachzuweisen, wird für fixes $g \in L^2(\Gamma)$ folgendes Variationsproblem betrachtet:

Gesucht ist $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} + \langle u, v \rangle_{\Gamma} = \langle g, v \rangle_{\Gamma} \quad (4.11)$$

gilt.

Lemma 4.7. *Das Variationsproblem in (4.11) hat eine eindeutige Lösung $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und es existiert eine positive Konstante c , so dass die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

gilt.

Beweis. Es gilt für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit Satz 3.6

$$\langle Sv, v \rangle_{\Gamma} + \langle v, v \rangle_{\Gamma} \geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \min\{\bar{c}_1^D, 1\} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad (4.12)$$

und daraus folgt mit dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 3.4 in [19]) die eindeutige Lösbarkeit von (4.11) mit eindeutiger Lösung $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Mit (4.12) und (4.11) für $v = u$ folgen

$$\min\{\bar{c}_1^D, 1\} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \leq \langle Su, u \rangle_{\Gamma} + \langle u, u \rangle_{\Gamma} = \langle g, u \rangle_{\Gamma} \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

und damit die Abschätzung. □

Der Lösungsoperator

$$\tilde{T}: L^2(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad g \mapsto \tilde{T}g := u$$

ordnet jedem $g \in L^2(\Gamma)$ die laut Lemma 4.7 eindeutige Lösung $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ zu und dieser Operator ist linear und laut Lemma 4.7 stetig. Mit der Einbettung

$$I: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad w \mapsto Iw := w$$

definiert man den linearen Operator

$$T := I\tilde{T}: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad g \mapsto Tg := I\tilde{T}g = Iu = u.$$

Weil die Einbettung $I: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ wegen des Einbettungssatzes für Spurräume (Satz 1.5) kompakt ist, ist der Operator $T: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ kompakt.

Bemerkung 4.8. Für $g \in L^2(\Gamma)$ gilt $\tilde{T}g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und daher folgt $Tg = I\tilde{T}g = \tilde{T}g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$.

Lemma 4.9. Der Operator $T: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ ist selbstadjungiert. Das heißt, es gilt für alle $f, g \in L^2(\Gamma)$

$$\langle Tf, g \rangle_{\Gamma} = \langle f, Tg \rangle_{\Gamma}.$$

Beweis. Seien $f, g \in L^2(\Gamma)$. Man setzt $u_g := Tg = \tilde{T}g$ und $u_f := Tf = \tilde{T}f$ und es gelten für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su_f, v \rangle_{\Gamma} + \langle u_f, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle_{\Gamma}, \quad (4.13)$$

$$\langle Su_g, v \rangle_{\Gamma} + \langle u_g, v \rangle_{\Gamma} = \langle g, v \rangle_{\Gamma}. \quad (4.14)$$

Mit (4.13), (4.14) und der L^2 -Symmetrie von S folgen

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle_{\Gamma} &= \langle u_f, g \rangle_{\Gamma} \\ &= \langle Su_g, u_f \rangle_{\Gamma} + \langle u_g, u_f \rangle_{\Gamma} \\ &= \langle Su_f, u_g \rangle_{\Gamma} + \langle u_f, u_g \rangle_{\Gamma} \\ &= \langle f, u_g \rangle_{\Gamma} \\ &= \langle f, Tg \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Da der lineare Operator T selbstadjungiert und kompakt ist, folgt folgender Satz.

Satz 4.10. Es gibt endlich oder abzählbar viele reelle Zahlen λ_n mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$, $\lambda_n \rightarrow 0$ im unendlichen Fall, und orthonormierte Elemente $u_n \in L^2(\Gamma)$ mit

$$Tv = \sum_n \lambda_n \langle u_n, v \rangle_{\Gamma} u_n \quad \text{für alle } v \in L^2(\Gamma),$$

insbesondere also $Tu_n = \lambda_n u_n$. Außerdem ist $\{u_n\}_n$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Gamma)$. Weiter sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten endlich.

Beweis. Die Aussagen folgen aus dem Entwicklungssatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren (Satz 2.15) und Satz 2.45 zusammen mit der Injektivität von T . \square

Satz 4.11. Es gibt endlich oder abzählbar viele reelle Zahlen μ_n mit $0 \leq \mu_n \leq \mu_{n+1}$, $\mu_n \rightarrow \infty$ im unendlichen Fall, und $L^2(\Gamma)$ -orthonormierte Elemente $u_n \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit $Su_n = \mu_n u_n$. Außerdem ist $\{u_n\}_n$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Gamma)$. Weiter ist $u_0 := |\Gamma|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ die Steklov-Eigenfunktion, die zum einfachen Steklov-Eigenwert $\mu_0 := 0$ korrespondiert. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten sind endlich.

Beweis. Seien $u_n \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ eine Eigenfunktion vom Operator T und $\lambda_n \neq 0$ der zugehörige Eigenwert, welche man durch Satz 4.10 erhält. Wegen der Definition des Operators T folgen für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\lambda_n \langle Su_n, v \rangle_\Gamma + \lambda_n \langle u_n, v \rangle_\Gamma = \langle u_n, v \rangle_\Gamma$$

und damit

$$\langle Su_n, v \rangle_\Gamma = \left(\frac{1}{\lambda_n} - 1 \right) \langle u_n, v \rangle_\Gamma. \quad (4.15)$$

Da $0 \neq u_n \in L^2(\Gamma)$ und damit auch $0 < \|u_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \langle u_n, u_n \rangle_\Gamma$ gelten, folgt aus (4.15) für $v = u_n$ und Satz 3.6

$$0 \leq \langle Su_n, u_n \rangle_\Gamma = \left(\frac{1}{\lambda_n} - 1 \right) \underbrace{\langle u_n, u_n \rangle_\Gamma}_{>0}$$

und daher gilt

$$\mu_n := \frac{1}{\lambda_n} - 1 \geq 0.$$

Weil $\lambda_n \rightarrow 0$ gilt, folgt $\mu_n \rightarrow \infty$. Da die konstante Funktion $\mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ den Kern $\ker S = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ vom Steklov-Poincaré-Operator S aufspannt, ist $\mu_0 := 0$ der Steklov-Eigenwert, der zur konstanten Steklov-Eigenfunktion u_0 korrespondiert. Dieser Steklov-Eigenwert hat einfache geometrische Vielfachheit. \square

5 Analysis für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem

In diesem Kapitel wird das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem betrachtet und analysiert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und für $d = 2$ sei der Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$.

5.1 Klassische und schwache Form

Das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem lautet:

Gesucht sind die Werte $\mu \in \mathbb{R}$, so dass eine (klassische) Lösung $u \neq 0$ des Systems

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = \mu(Fu)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (5.2)$$

existiert, wobei F ein gegebener linearer Operator ist, welcher noch genauer spezifiziert wird.

Durch Multiplikation der Gleichung (5.1) mit einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion v , Integration über Ω , partieller Integration und Einsetzen der Randbedingung (5.2) erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} u(x)v(x)ds_x \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\Gamma} \mu(Fu)(x)v(x)ds_x. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Gleichung (5.3) macht auch für $u, v \in H^1(\Omega)$ Sinn, falls der gegebene Operator F gewissen Voraussetzungen genügt. Die schwache Form des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems lautet daher:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H^1(\Omega)$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \mu \langle F\gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} \quad (5.4)$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

dem Dualitätsprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$$

und einem $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptischen, beschränkten, L^2 -symmetrischen, linearen Operator $F: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt. Das heißt, es existieren Konstanten $c_1^F, c_2^F > 0$, so dass für alle $w_1, w_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \langle Fw_1, w_1 \rangle_{\Gamma} &\geq c_1^F \|w_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2, \\ |\langle Fw_1, w_2 \rangle_{\Gamma}| &\leq c_2^F \|w_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|w_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\ \langle Fw_1, w_2 \rangle_{\Gamma} &= \langle w_1, Fw_2 \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

gelten.

Mit Hilfe der ersten Greenschen Formel (Lemma 5.1.1 in [8]) für $u, v \in H^1(\Omega)$ mit $0 = -\Delta u \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = \langle -\Delta u, v \rangle_{\Omega} + \langle \gamma_1^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma} = \langle S\gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{\Gamma}$$

mit dem Steklov-Poincaré-Operator (3.7)

$$S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad S\gamma_0^{\text{int}} u = \gamma_1^{\text{int}} u.$$

Damit ist das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem (5.4) zum Eigenwertproblem äquivalent:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} = \mu \langle Fu, v \rangle_{\Gamma} \quad (5.5)$$

mit einem $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptischen, beschränkten, L^2 -symmetrischen, linearen Operator $F: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt.

Für die konstante Funktion $u_0 = v = \mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.5) folgt mit der Elliptizität von F und mit $\ker S = \text{span}\{\mathbf{1}\}$

$$0 = \langle S\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma} = \mu_0 \underbrace{\langle F\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma}}_{>0}$$

und damit ist $u_0 = \mathbf{1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eine Steklov-Eigenfunktion zum Steklov-Eigenwert $\mu_0 = 0$. Weiter ist laut (3.9) der Steklov-Poincaré-Operator bijektiv als Abbildung

$$S: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Daher betrachtet man das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} = \mu \langle Fu, v \rangle_{\Gamma} \quad (5.6)$$

mit einem $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptischen, beschränkten, L^2 -symmetrischen, linearen Operator $F: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt, wobei die Räume $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ wie in Kapitel 3 definiert sind.

Das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem in (5.6) lautet in Operatorschreibweise:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass

$$Su = \mu Fu \iff F^{-1}Su = \mu u \quad (5.7)$$

mit einem $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptischen, beschränkten, L^2 -symmetrischen, linearen Operator $F: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt.

Das heißt, man ist am Spektrum $\sigma(F^{-1}S)$ des linearen, beschränkten Operators $F^{-1}S: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und insbesondere an dessen Eigenwerte interessiert.

Lemma 5.1. *Sei $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eine Steklov-Eigenfunktion zum Steklov-Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.6). Dann gilt*

$$0 < \mu \leq \frac{c_2^S}{c_1^F}.$$

Beweis. Für $v = u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.6) gilt mit der Elliptizität von F und S auf $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\underbrace{\langle Su, u \rangle_{\Gamma}}_{>0} = \mu \underbrace{\langle Fu, u \rangle_{\Gamma}}_{>0}$$

und damit folgt mit der Beschränktheit von S auf $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und der $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Elliptizität von F

$$0 < \mu = \frac{\langle Su, u \rangle_{\Gamma}}{\langle Fu, u \rangle_{\Gamma}} \leq \frac{c_2^S \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2}{\langle Fu, u \rangle_{\Gamma}} \leq \frac{c_2^S \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2}{c_1^F \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2} = \frac{c_2^S}{c_1^F}.$$

□

Bemerkung 5.2. *Die Konstanten c_2^S, c_1^F in Lemma 5.1 hängen vom Gebiet Ω ab und der Quotient $\frac{c_2^S}{c_1^F}$ kann je nach Wahl des Operators F durch Variation des Gebiets Ω beliebig groß werden.*

Lemma 5.3. *Seien $0 \neq u, \tilde{u} \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Steklov-Eigenfunktionen zu den Steklov-Eigenwerten $\mu \neq \tilde{\mu}$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.6). Dann gilt*

$$\langle Fu, \tilde{u} \rangle_{\Gamma} = \langle F\tilde{u}, u \rangle_{\Gamma} = 0.$$

Beweis. Mit $v = \tilde{u} \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.6) beziehungsweise mit $v = u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.6) und mit der L^2 -Symmetrie von S gilt

$$\mu \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma = \langle Su, \tilde{u} \rangle_\Gamma = \langle S\tilde{u}, u \rangle_\Gamma = \tilde{\mu} \langle F\tilde{u}, u \rangle_\Gamma.$$

Daraus folgen mit der L^2 -Symmetrie von F

$$0 = \mu \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma - \tilde{\mu} \langle F\tilde{u}, u \rangle_\Gamma = \mu \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma - \tilde{\mu} \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma = \underbrace{(\mu - \tilde{\mu})}_{\neq 0} \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma$$

und damit

$$0 = \langle Fu, \tilde{u} \rangle_\Gamma = \langle F\tilde{u}, u \rangle_\Gamma.$$

□

5.2 Inverser Einfachschichtoperator V^{-1}

Der inverse Einfachschichtoperator

$$V^{-1}: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

aus (3.3) ist linear, L^2 -symmetrisch, beschränkt und $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch. Setzt man in (5.6) den Operator $F := V^{-1}$, dann betrachtet man das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_\Gamma = \mu \langle V^{-1}u, v \rangle_\Gamma \quad (5.8)$$

gilt.

Setzt man $F := V^{-1}$ und die nichtsymmetrische Darstellung des Steklov-Poincaré-Operators (3.7) in (5.7) ein, dann ist man am Spektrum des Operators

$$VS = VV^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) = \frac{1}{2}I + K: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (5.9)$$

und damit am Spektrum des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ interessiert. Damit lassen sich viele Aussagen über das Spektrum von K aus dem Unterkapitel 3.9 auf das Spektrum von VS und damit auch Aussagen über die Eigenwerte übertragen. Für die Formulierung mit dem inversen Einfachschichtoperator V^{-1} kann Lemma 5.1 verfeinert werden.

Lemma 5.4. *Es gilt für $VS: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\sigma(VS) = \left\{ z + \frac{1}{2}: z \in \sigma(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\} \subset (0, 1)$$

und insbesondere gelten für Eigenwerte λ^K des Doppelschichtoperators K und Steklov-Eigenwerte μ von (5.8)

$$\mu = \lambda^K + \frac{1}{2}$$

und daher

$$0 < \mu < 1. \quad (5.10)$$

Beweis. Wegen (5.9) gilt $VS = \frac{1}{2}I + K$ und daher folgt die Behauptung aus Lemma 3.18, wobei der einfache Eigenwert $\lambda_0^K = -\frac{1}{2} \in \sigma(K)$ von K ausgeschlossen wird, da er zur konstanten Eigenfunktion $u_0 = \mathbf{1}$ korrespondiert. \square

Die Schranke (5.10) lässt sich auch ohne Verwendung von Eigenschaften des Spektrums $\sigma(K)$ des Doppelschichtoperators K beweisen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist am Beweis der Elliptizität des Einfachschichtoperators V (Satz 6.22 in [19]) angelehnt.

Lemma 5.5. *Sei $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eine Steklov-Eigenfunktion zum Steklov-Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.8). Dann gilt*

$$0 < \mu < 1.$$

Beweis. Für $v = u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.8) erhält man analog zu Lemma 5.1

$$0 < \mu = \frac{\langle Su, u \rangle_\Gamma}{\langle V^{-1}u, u \rangle_\Gamma}. \quad (5.11)$$

Setzt man $0 \neq z := V^{-1}u \in H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $w(x) := \tilde{V}z(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ mit dem Einfachschichtpotential \tilde{V} , dann gelten $0 \neq w|_\Omega \in H^1(\Omega)$, $0 \neq w|_{\Omega^c} \in H^1(\Omega^c)$, wobei für Details auf [8, 12] verwiesen wird und mit $\Omega^c := \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ der Außenraum bezeichnet wird. Mit den Greenschen Formeln für den Innenraum (Lemma 5.1.1 in [8]) und Außenraum (Lemma 5.1.2 in [8]) gelten

$$0 < a_\Omega(w, w) := \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla w(x) dx = \langle \gamma_1^{\text{int}} w, \gamma_0^{\text{int}} w \rangle_\Gamma, \quad (5.12)$$

$$0 < a_{\Omega^c}(w, w) := \int_{\Omega^c} \nabla w(x) \cdot \nabla w(x) dx = -\langle \gamma_1^{\text{ext}} w, \gamma_0^{\text{ext}} w \rangle_\Gamma, \quad (5.13)$$

wobei mit γ_0^{ext} die äußere Spur und mit γ_1^{ext} die äußere Normalenableitung bezeichnet werden und für Details siehe man [8, 12]. Mit der Sprungbedingung für die Spur des Einfachschichtpotentials ((6.9) in [19]) gilt $\gamma_0^{\text{int}} w = \gamma_0^{\text{ext}} w = Vz = u$ und zusammen mit der Sprungbedingung für die Normalenableitung des Einfachschichtpotentials (Lemma 6.9 in [19]) folgt für die Summe aus (5.12) und (5.13)

$$a_\Omega(w, w) + a_{\Omega^c}(w, w) = \langle \gamma_1^{\text{int}} w - \gamma_1^{\text{ext}} w, u \rangle_\Gamma = \langle z, u \rangle_\Gamma = \langle V^{-1}u, u \rangle_\Gamma. \quad (5.14)$$

Weiter folgt aus (5.12) mit $\gamma_0^{\text{int}} w = Vz = u$ und der Definition des Steklov-Poincaré-Operators S mit $S\gamma_0^{\text{int}} w = \gamma_1^{\text{int}} w$

$$a_\Omega(w, w) = \langle S\gamma_0^{\text{int}} w, \gamma_0^{\text{int}} w \rangle_\Gamma = \langle Su, u \rangle_\Gamma. \quad (5.15)$$

Setzt man (5.14) und (5.15) in die Eigenwertdarstellung (5.11) ein, erhält man

$$0 < \mu = \frac{\langle Su, u \rangle_\Gamma}{\langle V^{-1}u, u \rangle_\Gamma} = \frac{a_\Omega(w, w)}{a_\Omega(w, w) + \underbrace{a_{\Omega^c}(w, w)}_{>0}} < 1$$

und damit die Behauptung. \square

Für zweidimensionale Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich die Symmetrie des Spektrums $\sigma(VS)$ um $\frac{1}{2}$ nachweisen.

Lemma 5.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 mit Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$. Das Spektrum $\sigma(VS)$ des Operators $VS: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist um $\frac{1}{2}$ symmetrisch.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 5.4 und Satz 3.10. \square

Falls das Gebiet Ω glatt genug ist, dann folgt aus Satz 3.13 die Kompaktheit des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und es kann mehr über das Spektrum von $\sigma(VS)$ ausgesagt werden.

Satz 5.7. *Sei das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hinreichend glatt, so dass der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist. Dann gelten folgende Aussagen für den Operator $VS: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

1. *Es ist $\frac{1}{2} \in \sigma(VS)$.*
2. *Das Spektrum $\sigma(VS)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich bei $\frac{1}{2}$ häufen. Jedes $\lambda \in \sigma(VS) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ist Steklov-Eigenwert endlicher geometrischer und algebraischer Vielfachheit. Das heißt, es gelten $\sigma_e(VS) = \{\frac{1}{2}\}$ und $\sigma_d(VS) = \sigma(VS) \setminus \{\frac{1}{2}\}$.*
3. *Für $\mu_n, \mu_{n+1} \in \sigma_d(VS)$ mit $|\mu_n - \frac{1}{2}| \geq |\mu_{n+1} - \frac{1}{2}| > 0$, $\mu_n \rightarrow \frac{1}{2}$ im unendlichen Fall, gibt es $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -orthonormierte Elemente $u_n \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit*

$$\left(VS - \frac{1}{2}I \right) v = \sum_n \left(\mu_n - \frac{1}{2} \right) \langle u_n, v \rangle_{V^{-1}} u_n \quad \text{für alle } v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Insbesondere gilt $VSu_n = \mu_n u_n$. Ist $\{\psi_m\}_m$ eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -Orthonormalbasis vom Kern $\ker(VS - \frac{1}{2}I)$, so ist $\{u_n\}_n \cup \{\psi_m\}_m$ eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -Orthonormalbasis von $H_^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 5.4 und Satz 3.15. \square

Korollar 5.8. Sei das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hinreichend glatt, so dass der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist. Dann existieren Steklov-Eigenfunktionen $u_n \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.8) mit zugehörigen Steklov-Eigenwerten $\mu_n \in (0, 1)$ mit $|\mu_n - \frac{1}{2}| \geq |\mu_{n+1} - \frac{1}{2}| > 0$, $\mu_n \rightarrow \frac{1}{2}$ im unendlichen Fall, und mit einzigem Häufungspunkt $\frac{1}{2}$. Für $d = 2$ liegen diese Steklov-Eigenwerte symmetrisch um $\frac{1}{2}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 5.7 und Lemma 5.6. \square

Korollar 5.9. Für die Kontraktionskonstante c_K aus (3.10) des Doppelschichtoperators gilt

$$c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = \mu_{\max} < 1 \quad (5.16)$$

mit dem maximalen Spektralwert

$$\mu_{\max} := \max \{z: z \in \sigma(VS)\} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Beweis. Für $z \in \sigma(VS)$ folgt aus Lemma 5.4 mit $y \in \sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$z = \frac{1}{2} + y \iff y = z - \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

und zusammen mit Lemma 3.18 folgt die Behauptung. \square

Korollar 5.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = 1 - \mu_{\min} < 1 \quad (5.18)$$

mit dem minimalen Spektralwert

$$\mu_{\min} := \min \{z: z \in \sigma(VS)\} \in \left(0, \frac{1}{2} \right].$$

Beweis. Für $z \in \sigma(VS)$ mit $0 < z \leq \frac{1}{2}$ folgt mit (5.17) und mit $y \in \sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$y = z - \frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right].$$

Mit Satz 3.10 folgt, dass $-y \in [0, \frac{1}{2}) \cap (\sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\})$ ist und mit Lemma 5.4 gilt

$$\frac{1}{2} + (-y) = \frac{1}{2} - \left(z - \frac{1}{2} \right) = 1 - z \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \cap \sigma(VS),$$

woraus

$$\mu_{\max} = 1 - \mu_{\min} \quad (5.19)$$

folgt. Mit (5.19) und mit Korollar 5.9 gilt

$$1 > c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = \mu_{\max} = 1 - \mu_{\min}.$$

\square

5.3 Hypersingulärer Operator D

Der hypersinguläre Operator

$$D: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

aus (3.6) ist linear, L^2 -symmetrisch, beschränkt und $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -elliptisch. Setzt man in (5.6) den Operator $F := D$, dann betrachtet man das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator:

Gesucht sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Su, v \rangle_{\Gamma} = \mu \langle Du, v \rangle_{\Gamma} \quad (5.20)$$

gilt.

Setzt man $F := D$ und die nichtsymmetrische Darstellung des Steklov-Poincaré-Operators (3.7) in (5.7) ein, dann ist man am Spektrum des Operators

$$D^{-1}S = D^{-1}V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) : H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (5.21)$$

interessiert. Es folgt aus Satz 3.7 auf dem Raum $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} VD = \left(\frac{1}{2}I + K \right) \left(\frac{1}{2}I - K \right) &\iff D = V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \left(\frac{1}{2}I - K \right) \\ &\iff D \left(\frac{1}{2}I - K \right)^{-1} = V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \end{aligned}$$

und daraus folgt für (5.21)

$$D^{-1}S = D^{-1}D \left(\frac{1}{2}I - K \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}I - K \right)^{-1} : H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (5.22)$$

Daher ist man am Spektrum des Doppelschichtoperators $K: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ interessiert. Damit lassen sich viele Aussagen über das Spektrum von K aus dem Unterkapitel 3.9 auf das Spektrum von $D^{-1}S$ und damit auch Aussagen über die Eigenwerte übertragen. Für die Formulierung mit dem hypersingulären Operator D kann Lemma 5.1 verfeinert werden.

Lemma 5.11. *Es gilt für $D^{-1}S: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\sigma(D^{-1}S) = \left\{ \frac{2}{1-2z} : z \in \sigma(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\} \subset (1, \infty)$$

und insbesondere gelten für Eigenwerte λ^K des Doppelschichtoperators K und Steklov-Eigenwerte μ von (5.20)

$$\mu = \frac{2}{1-2\lambda^K}$$

und daher

$$1 < \mu < \infty. \quad (5.23)$$

Beweis. Wegen (5.22) gilt $D^{-1}S = \left(\frac{1}{2}I - K\right)^{-1}$. Daher folgt aus dem Satz 2.37 und Lemma 3.20

$$\begin{aligned}\sigma(D^{-1}S) &= \sigma\left(\left(\frac{1}{2}I - K\right)^{-1}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{z} : z \in \sigma\left(\frac{1}{2}I - K\right)\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{\frac{1}{2} - z} : z \in \sigma(K)\right\} \\ &= \left\{\frac{2}{1 - 2z} : z \in \sigma(K)\right\} \subset [1, \infty).\end{aligned}$$

Der einfache Eigenwert $\lambda_0^K = -\frac{1}{2} \in \sigma(K)$ von K wird ausgeschlossen, da er zur konstanten Eigenfunktion $u_0 = \mathbf{1}$ korrespondiert und damit folgt die Behauptung. \square

Die Schranke (5.23) lässt sich auch ohne Verwendung von Eigenschaften des Spektrums $\sigma(K)$ des Doppelschichtoperators K beweisen.

Lemma 5.12. *Sei $0 \neq u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eine Steklov-Eigenfunktion zum Steklov-Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.20). Dann gilt*

$$1 < \mu \leq \frac{c_K}{c_1^D c_1^V} < \frac{1}{c_1^D c_1^V}.$$

Beweis. Für $v = u \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (5.20) erhält man analog zu Lemma 5.1

$$0 < \mu = \frac{\langle Su, u \rangle_\Gamma}{\langle Du, u \rangle_\Gamma}. \quad (5.24)$$

Mit der symmetrischen Darstellung des Steklov-Poincaré-Operators (3.8) und der Elliptizität von V^{-1} und D folgt aus (5.24)

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\langle Su, u \rangle_\Gamma}{\langle Du, u \rangle_\Gamma} \\ &= \frac{\langle Du, u \rangle_\Gamma}{\langle Du, u \rangle_\Gamma} + \frac{\langle (\frac{1}{2}I + K') V^{-1} (\frac{1}{2}I + K) u, u \rangle_\Gamma}{\langle Du, u \rangle_\Gamma} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{\langle V^{-1} (\frac{1}{2}I + K) u, (\frac{1}{2}I + K) u \rangle_\Gamma}{\langle Du, u \rangle_\Gamma}}_{>0} \\ &> 1\end{aligned}$$

und damit erhält man die Abschätzung nach unten.

Mit der nichtsymmetrischen Darstellung des Steklov-Poincaré-Operators (3.7), der $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Elliptizität von D , der Beschränktheit von V^{-1} , der Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators aus Korollar 3.17 und der Normäquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ und $\|\cdot\|_{V^{-1}}$ folgt aus (5.24)

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\langle Su, u \rangle_{\Gamma}}{\langle Du, u \rangle_{\Gamma}} \\
&= \frac{\langle V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)u, u \rangle_{\Gamma}}{\langle Du, u \rangle_{\Gamma}} \\
&= \frac{\langle (\frac{1}{2}I + K)u, u \rangle_{V^{-1}}}{\langle Du, u \rangle_{\Gamma}} \\
&\leq \frac{\|(\frac{1}{2}I + K)u\|_{V^{-1}} \|u\|_{V^{-1}}}{c_1^D \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2} \\
&\leq \frac{c_K \|u\|_{V^{-1}}^2}{c_1^D \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2} \\
&\leq \frac{c_K \frac{1}{c_1^V} \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2}{c_1^D \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2} \\
&\leq \frac{c_K}{c_1^D c_1^V}
\end{aligned}$$

und damit erhält man die Abschätzung nach oben. \square

Bemerkung 5.13. Die Konstanten c_1^D, c_1^V in Lemma 5.12 hängen vom Gebiet Ω ab und der Quotient $\frac{1}{c_1^D c_1^V}$ kann durch Variation des Gebiets Ω beliebig groß werden. Man siehe auch die numerischen Beispiele.

Für zweidimensionale Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich die Symmetrie des Spektrums $\sigma((D^{-1}S)^{-1})$ um $\frac{1}{2}$ nachweisen. Damit sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $D^{-1}S$ um $\frac{1}{2}$ symmetrisch.

Lemma 5.14. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 mit Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$. Das Spektrum $\sigma((D^{-1}S)^{-1})$ des Operators $(D^{-1}S)^{-1}: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist um $\frac{1}{2}$ symmetrisch und es gilt

$$\sigma((D^{-1}S)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{2} - z : z \in \sigma(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\} \subset (0, 1).$$

Beweis. Es gilt laut (5.22)

$$(D^{-1}S)^{-1} = \frac{1}{2}I - K : H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und dessen Spektrum $\sigma((D^{-1}S)^{-1})$ ist laut Lemma 3.20 und Satz 3.10 um $\frac{1}{2}$ symmetrisch. Weiter gilt wegen des Lemmas 3.20

$$\sigma((D^{-1}S)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{2} - z : z \in \sigma(K) \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\} \subset (0, 1).$$

□

Falls das Gebiet Ω glatt genug ist, dann folgt aus Satz 3.13 die Kompaktheit des Doppelschichtoperators $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und es kann mehr über das Spektrum von $\sigma(D^{-1}S)$ ausgesagt werden.

Satz 5.15. *Sei das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hinreichend glatt, so dass der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist. Dann gelten folgende Aussagen für den Operator $D^{-1}S: H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

1. *Es ist $2 \in \sigma(D^{-1}S)$.*
2. *Das Spektrum $\sigma(D^{-1}S)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich bei 2 häufen. Jedes $\lambda \in \sigma(D^{-1}S) \setminus \{2\}$ ist Steklov-Eigenwert endlicher geometrischer und algebraischer Vielfachheit. Das heißt, es gelten $\sigma_e(D^{-1}S) = \{2\}$ und $\sigma_d(D^{-1}S) = \sigma(D^{-1}S) \setminus \{2\}$.*
3. *Für $\mu_n, \mu_{n+1} \in \sigma_d(D^{-1}S)$ mit $|\mu_n - 2| \geq |\mu_{n+1} - 2| > 0$, $\mu_n \rightarrow 2$ im unendlichen Fall, gibt es $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -orthonormierte Elemente $u_n \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit*

$$\left(\frac{1}{2}I - (D^{-1}S)^{-1} \right) v = \sum_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_n} \right) \langle u_n, v \rangle_{V^{-1}} u_n \quad \text{für alle } v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Insbesondere gilt $D^{-1}S u_n = \mu_n u_n$. Ist $\{\psi_m\}_m$ eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -Orthonormalbasis vom Kern $\ker\left(\frac{1}{2}I - (D^{-1}S)^{-1}\right)$, so ist $\{u_n\}_n \cup \{\psi_m\}_m$ eine $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{-1}}$ -Orthonormalbasis von $H_^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 5.11 und Satz 3.15. □

Korollar 5.16. *Sei das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hinreichend glatt, so dass der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist. Dann existieren Steklov-Eigenfunktionen $u_n \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vom verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem (5.20) mit zugehörigen Steklov-Eigenwerten $\mu_n \in \left(1, \frac{1}{c_1^d c_1^V}\right)$ mit $|\mu_n - 2| \geq |\mu_{n+1} - 2| > 0$, $\mu_n \rightarrow 2$ im unendlichen Fall, und mit einzigem Häufungspunkt 2. Für $d = 2$ liegen die Kehrwerte der Steklov-Eigenwerte symmetrisch um $\frac{1}{2}$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 5.15, Lemma 5.12 und Lemma 5.14. □

Korollar 5.17. Für die Kontraktionskonstante c_K aus (3.10) des Doppelschichtoperators K gilt

$$c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = 1 - \frac{1}{\mu_{\max}} < 1 \quad (5.25)$$

mit dem maximalen Spektralwert

$$\mu_{\max} := \max \{z: z \in \sigma(D^{-1}S)\} \in [2, \infty).$$

Beweis. Für $z \in \sigma(D^{-1}S)$ folgt aus Lemma 5.11 mit $y \in \sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$z = \frac{2}{1-2y} \iff y = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \quad (5.26)$$

und zusammen mit Lemma 3.18 folgt die Behauptung. \square

Korollar 5.18. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = \frac{1}{\mu_{\min}} < 1 \quad (5.27)$$

mit dem minimalen Spektralwert

$$\mu_{\min} := \min \{z: z \in \sigma(D^{-1}S)\} \in (1, 2].$$

Beweis. Für $z \in \sigma(D^{-1}S)$ mit $1 < z \leq 2$ folgt mit (5.26) und mit $y \in \sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Mit Satz 3.10 folgt, dass $-y \in [0, \frac{1}{2}) \cap (\sigma(K) \setminus \{-\frac{1}{2}\})$ ist und mit Lemma 5.11 gilt

$$\frac{2}{1-2(-y)} = \frac{2}{1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \in [2, \infty) \cap \sigma(D^{-1}S),$$

woraus

$$\mu_{\max} = \frac{1}{1-\frac{1}{\mu_{\min}}} = \frac{\mu_{\min}}{\mu_{\min}-1} \quad (5.28)$$

folgt. Mit (5.28) und mit Korollar 5.17 gilt

$$1 > c_K = \left\| \frac{1}{2}I + K \right\| = 1 - \frac{1}{\mu_{\max}} = 1 - \frac{1}{\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\min}-1}} = 1 - \frac{\mu_{\min}-1}{\mu_{\min}} = \frac{1}{\mu_{\min}}.$$

\square

6 Numerik für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die Finite-Element-Methode und für die Randelementmethode, Approximationen für den Steklov-Poincaré-Operator S und die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme dargestellt.

6.1 Grundlagen der Finite-Element-Methode und der Randelementmethode

Es werden die Bezeichnungen und Notationen wie in [19, 15] verwendet. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ein beschränktes Gebiet mit polygonaler ($d = 2$) oder polyedrischer ($d = 3$) Berandung $\Gamma := \partial\Omega$ und für $d = 2$ sei der Durchmesser $\text{diam}(\Omega) < 1$. Weiter sei $(\mathcal{T}_{N_\Omega})_{N_\Omega}$ eine Folge von zulässigen, formregulären und global-gleichmäßigen Finite-Element-Netzen mit

$$\bar{\Omega} = \bar{\mathcal{T}}_{N_\Omega} = \bigcup_{l=1}^{N_\Omega} \bar{\tau}_l^{\text{FE}},$$

wobei das finite Element τ_l^{FE} ein Dreieck ($d = 2$) oder ein Tetraeder ($d = 3$) ist. Für ein finites Element τ_l^{FE} seien

$$\Delta_l^{\text{FE}} := \int_{\tau_l^{\text{FE}}} dx$$

die Fläche des Dreiecks ($d = 2$) oder das Volumen des Tetraeders ($d = 3$) und

$$H_l := (\Delta_l^{\text{FE}})^{\frac{1}{d}}$$

die lokale Finite-Element-Maschenweite. Die globale Finite-Element-Maschenweite H ist definiert durch

$$H := \max_{l=1, \dots, N_\Omega} H_l.$$

Mit $\{x_k\}_{k=1}^M = \{x_k\}_{k=1}^{M_\Omega} \uplus \{x_k\}_{k=M_\Omega+1}^M$ werden die Knoten der Zerlegung \mathcal{T}_{N_Ω} bezeichnet, wobei die Knoten so sortiert sein sollen, dass $\{x_k\}_{k=1}^{M_\Omega}$ die Knoten im Inneren von Ω und $\{x_k\}_{k=M_\Omega+1}^M$ die Knoten am Rand Γ sind. Mit $M_\Gamma := M - M_\Omega$ wird die Anzahl der Knoten

am Rand Γ bezeichnet. Es seien $\{\phi_i^1\}_{i=1}^M$ die stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen mit

$$\phi_i^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_i, \\ 0 & \text{für } x = x_j \neq x_i, \\ \text{linear} & \text{sonst} \end{cases}$$

und der diskrete Raum $S_H^1(\Omega) := \text{span}\{\phi_i^1\}_{i=1}^M \subset H^1(\Omega)$ der Ansatzraum der stetigen, stückweise linearen Funktionen mit Dimension $\dim S_H^1(\Omega) = M_\Omega + M_\Gamma = M$. Eine Funktion $z_H \in S_H^1(\Omega)$ besitzt die Darstellung

$$z_H = \sum_{k=1}^M z_k \phi_k^1 = \sum_{k=1}^{M_\Omega} z_k \phi_k^1 + \sum_{k=1}^{M_\Gamma} z_{M_\Omega+k} \phi_{M_\Omega+k}^1 \in S_H^1(\Omega)$$

und eine Identifizierung durch den Koeffizientenvektor $\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{z}_\Omega \\ \underline{z}_\Gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$ mit dem Koeffizientenvektor zu den inneren Knoten $\underline{z}_\Omega \in \mathbb{R}^{M_\Omega}$ und dem Koeffizientenvektor zu den Knoten am Rand $\underline{z}_\Gamma \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$, wobei der Koeffizientenvektor $\underline{z} \in \mathbb{R}^M$ durch die Koeffizienten $z_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, M_\Omega, M_\Omega + 1, \dots, M$ definiert ist.

Satz 6.1 (Approximationseigenschaft von $S_H^1(\Omega)$, [19, Satz 9.10]). *Sei $u \in H^s(\Omega)$ für ein $s \in [\sigma, 2]$ und ein $\sigma \in \{0, 1\}$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c*

$$\inf_{z_H \in S_H^1(\Omega)} \|u - z_H\|_{H^\sigma(\Omega)} \leq c H^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Omega)}.$$

Die Folge von Finite-Element-Netzen $(\mathcal{T}_{N_\Omega})_{N_\Omega}$ induziert eine Folge von Rand-Netzen $(\Gamma_{N_\Gamma})_{N_\Gamma}$ mit

$$\partial \bar{\mathcal{T}}_{N_\Omega} = \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{N_\Gamma} = \bigcup_{l=1}^{N_\Gamma} \bar{\tau}_l,$$

wobei das Randelement $\tau_l \subset \partial \bar{\tau}_i^{\text{FE}}$ eine Kante ($d = 2$) oder ein Dreieck ($d = 3$) für ein finites Element τ_i^{FE} ist. Mit $\{x_{M_\Omega+k}\}_{k=1}^{M_\Gamma}$ werden die Knoten der Zerlegung Γ_{N_Γ} bezeichnet.

Für $d = 2$ kann mit Hilfe des Referenzelements $\tau := (0, 1)$ das Randelement τ_l durch eine Parametrisierung

$$x(\xi) = \chi_l(\xi) = x_{l_1} + \xi(x_{l_2} - x_{l_1}) \in \tau_l \quad \text{für } \xi \in \tau$$

mit den Knoten x_{l_1}, x_{l_2} des Randelements τ_l und $\tau_l = \chi_l(\tau)$ dargestellt werden.

Für $d = 3$ kann analog mit Hilfe des Referenzelements

$$\tau := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1\}$$

das Randelement τ_l durch eine Parametrisierung

$$x(\xi) = \chi_l(\xi) = x_{l_1} + \xi_1(x_{l_2} - x_{l_1}) + \xi_2(x_{l_3} - x_{l_1}) \in \tau_l \quad \text{für } \xi \in \tau$$

mit den Knoten $x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}$ des Randelements τ_l und $\tau_l = \chi_l(\tau)$ dargestellt werden.

Für ein Randelement τ_l seien

$$\Delta_l := \int_{\tau_l} ds_x$$

die Länge der Kante ($d = 2$) oder die Fläche des Dreiecks ($d = 3$) und

$$h_l := \Delta_l^{\frac{1}{d-1}}$$

die lokale Maschenweite. Die globale Maschenweite h ist definiert durch

$$h := \max_{l=1, \dots, N_\Gamma} h_l.$$

Es seien $\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M_\Gamma}$ die stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen mit

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{M_\Omega+i}, \\ 0 & \text{für } x = x_{M_\Omega+j} \neq x_{M_\Omega+i}, \\ \text{linear} & \text{sonst} \end{cases}$$

und der diskrete Raum $S_h^1(\Gamma) := \text{span}\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M_\Gamma} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ der Ansatzraum der stetigen, stückweise linearen Funktionen mit Dimension $\dim S_h^1(\Gamma) = M_\Gamma$. Eine Funktion $v_h \in S_h^1(\Gamma)$ besitzt die Darstellung

$$v_h = \sum_{i=1}^{M_\Gamma} v_i \varphi_i^1 \in S_h^1(\Gamma)$$

und eine Identifizierung durch den Koeffizientenvektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$, der durch die Koeffizienten $v_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, M_\Gamma$ definiert ist.

Satz 6.2 (Approximationseigenschaft von $S_h^1(\Gamma)$, [15, Satz 2.3]). *Sei $v \in H_{\text{pw}}^s(\Gamma)$ für ein $s \in [1, 2]$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c*

$$\inf_{v_h \in S_h^1(\Gamma)} \|v - v_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |v|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}$$

für alle $\sigma \in [-2, 1]$.

Analog seien $\{\varphi_k^0\}_{k=1}^{N_\Gamma}$ die stückweise konstanten Basisfunktionen mit

$$\varphi_k^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \tau_k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der diskrete Raum $S_h^0(\Gamma) := \text{span}\{\varphi_k^0\}_{k=1}^{N_\Gamma} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ der Ansatzraum der stückweise konstanten Funktionen mit Dimension $\dim S_h^0(\Gamma) = N_\Gamma$. Eine Funktion $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ besitzt die Darstellung

$$w_h = \sum_{k=1}^{N_\Gamma} w_k \varphi_k^0 \in S_h^0(\Gamma)$$

und eine Identifizierung durch den Koeffizientenvektor $\underline{w} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma}$, der durch die Koeffizienten $w_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, N_\Gamma$ definiert ist.

Satz 6.3 (Approximationseigenschaft von $S_h^0(\Gamma)$, [15, Satz 2.1]). Sei $w \in H_{\text{pw}}^s(\Gamma)$ für ein $s \in [0, 1]$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c

$$\inf_{w_h \in S_h^0(\Gamma)} \|w - w_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |w|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}$$

für alle $\sigma \in [-1, 0]$.

Um die unstetigen, stückweise linearen Basisfunktionen $\{\varphi_{k,1}^{-1}, \dots, \varphi_{k,d}^{-1}\}_{k=1}^{N_\Gamma}$ definieren zu können, benötigt man lineare Formfunktionen. Für $d = 2$ seien die linearen Formfunktionen durch

$$\psi_1^1(\xi) := 1 - \xi, \quad \psi_2^1(\xi) := \xi$$

für $\xi \in \tau$ auf dem Referenzelement τ definiert und analog für $d = 3$ seien die linearen Formfunktionen durch

$$\psi_1^1(\xi) := 1 - \xi_1 - \xi_2, \quad \psi_2^1(\xi) := \xi_1, \quad \psi_3^1(\xi) := \xi_2$$

für $\xi \in \tau$ auf dem Referenzelement τ festgelegt. Diese Formfunktionen induzieren global unstetige, stückweise lineare Basisfunktionen

$$\varphi_{k,j}^{-1}(x) = \begin{cases} \psi_j^1(\xi) & \text{für } x = \chi_k(\xi) \in \tau_k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $k = 1, \dots, N_\Gamma$, $j = 1, \dots, d$. Der globale Ansatzraum der unstetigen, stückweise linearen Funktionen wird mit $S_h^{1,-1}(\Gamma) := \text{span}\{\varphi_{k,1}^{-1}, \dots, \varphi_{k,d}^{-1}\}_{k=1}^{N_\Gamma} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bezeichnet und dieser besitzt die Dimension $\dim S_h^{1,-1}(\Gamma) = dN_\Gamma$. Eine Funktion $w_h \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$ besitzt die Darstellung

$$w_h = \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{j=1}^d w_{k,j} \varphi_{k,j}^{-1} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$$

und eine Identifizierung durch den Koeffizientenvektor $\underline{w} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma}$, der durch die Koeffizienten $w_{k,j} \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, N_\Gamma$, $j = 1, \dots, d$ definiert ist.

Satz 6.4 (Approximationseigenschaft von $S_h^{1,-1}(\Gamma)$, [15, Satz 2.2]). Sei $w \in H_{\text{pw}}^s(\Gamma)$ für ein $s \in [0, 2]$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c

$$\inf_{w_h \in S_h^{1,-1}(\Gamma)} \|w - w_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |w|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}$$

für alle $\sigma \in [-2, 0]$.

Für die Stabilisierung des Steklov-Poincaré-Operators S und des hypersingulären Operators D benötigt man die natürliche Dichte $w_{\text{eq}} = V^{-1}\mathbf{1} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (3.2). Da die Auswertung $\langle w_{\text{eq}}, v_h \rangle_\Gamma$ für ein $v_h \in S_h^1(\Gamma)$ nicht direkt berechenbar ist, benötigt man eine Approximation $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$, welche als die eindeutige Lösung des diskreten Variationsproblems gegeben ist:

Gesucht ist $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$, so dass für alle $w_h \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$

$$\langle V w_{\text{eq},h}, w_h \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{1}, w_h \rangle_\Gamma \quad (6.1)$$

gilt.

Das diskrete Variationsproblem (6.1) ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$V_h^{-1,-1} \underline{w}_{\text{eq}} = \underline{f}_{\text{eq}}$$

mit der gesuchten Lösung $\mathbb{R}^{dN_\Gamma} \ni \underline{w}_{\text{eq}} \leftrightarrow w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$, mit der Matrix $V_h^{-1,-1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times dN_\Gamma}$ und dem Vektor $\underline{f}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma}$ mit den Einträgen

$$\begin{aligned} V_h^{-1,-1}[j, i] &:= \left\langle V \varphi_{k(i),d(i)}^{-1}, \varphi_{k(j),d(j)}^{-1} \right\rangle_\Gamma, \\ \underline{f}_{\text{eq}}[j] &:= \left\langle \mathbf{1}, \varphi_{k(j),d(j)}^{-1} \right\rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (6.2)$$

für $i, j = 1, \dots, dN_\Gamma$ und den entsprechenden Indizierungen $k(\cdot), d(\cdot)$. Der Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ ist durch

$$\underline{a}_{\text{eq}}[i] := \left\langle w_{\text{eq},h}, \varphi_i^1 \right\rangle_\Gamma \quad (6.3)$$

für $i = 1, \dots, M_\Gamma$ gegeben.

6.2 Approximation des Steklov-Poincaré-Operators durch die Randelementmethode

Mit der symmetrischen Darstellung (3.8) des Steklov-Poincaré-Operators S gilt für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$Sv = Dv + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) w$$

mit

$$w := V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Das heißt, $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist die eindeutige Lösung des Variationsproblems:

Gesucht ist $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $z \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle Vw, z \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K \right) v, z \right\rangle_\Gamma \quad (6.4)$$

gilt.

Man betrachte die Diskretisierung von (6.4) mit einem konformen Ansatzraum $Z_h \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Das heißt, man betrachtet folgendes Variationsproblem, das eindeutig lösbar ist:

Gesucht ist $w_h \in Z_h$, so dass für alle $z_h \in Z_h$

$$\langle V w_h, z_h \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) v, z_h \right\rangle_\Gamma \quad (6.5)$$

gilt.

Mit der Näherungslösung $w_h \in Z_h$ von (6.5) lässt sich eine Approximation

$$\tilde{S}^{\text{BEM}} v := Dv + \left(\frac{1}{2} I + K' \right) w_h \quad (6.6)$$

des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Randelementmethode definieren. Es gelten folgende Sätze.

Satz 6.5 ([18, Satz 3.7]). *Der approximierte Steklov-Poincaré-Operator \tilde{S}^{BEM} in (6.6) ist beschränkt. Das heißt, es existiert eine positive Konstante $c_2^{\tilde{S}^{\text{BEM}}}$, so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\left\| \tilde{S}^{\text{BEM}} v \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2^{\tilde{S}^{\text{BEM}}} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

gilt. Weiter gilt für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit einer positiven Konstante c die quasi-optimale Fehlerabschätzung

$$\left\| (S - \tilde{S}^{\text{BEM}}) v \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \cdot \inf_{w_h \in Z_h} \|Sv - w_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Satz 6.6. *Der approximierte Steklov-Poincaré-Operator \tilde{S}^{BEM} in (6.6) ist auf $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ elliptisch. Das heißt, es existiert eine positive Konstante $c_1^{\tilde{S}^{\text{BEM}}}$, so dass für alle $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*

$$\left\langle \tilde{S}^{\text{BEM}} v, v \right\rangle_\Gamma \geq c_1^{\tilde{S}^{\text{BEM}}} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

gilt.

Beweis. Sei $v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Es gilt mit (6.6), (6.5) und der Elliptizität von V (Satz 3.3)

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{S}^{\text{BEM}} v, v \right\rangle_\Gamma &= \langle Dv, v \rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K' \right) w_h, v \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle Dv, v \rangle_\Gamma + \left\langle w_h, \left(\frac{1}{2} I + K \right) v \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle Dv, v \rangle_\Gamma + \underbrace{\langle V w_h, w_h \rangle_\Gamma}_{\geq 0} \\ &\geq \langle Dv, v \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung aus der $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Elliptizität von D (Satz 3.4). \square

In dieser Arbeit werden für den konformen Ansatzraum $Z_h \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ der Raum der stückweise konstanten Basisfunktionen $S_h^0(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und der Raum der unstetigen, stückweise linearen Basisfunktionen $S_h^{1,-1}(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ betrachtet. Für $Z_h = S_h^0(\Gamma)$ in (6.5) erhält man die eindeutige Lösung $w_h^0 \in S_h^0(\Gamma)$ von (6.5) und damit

$$\tilde{S}^{\text{BEM},0}v := Dv + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w_h^0 \quad (6.7)$$

als Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Randelementmethode mit stückweise konstanten Basisfunktionen. Analog ergibt sich für $Z_h = S_h^{1,-1}(\Gamma)$ in (6.5) die eindeutige Lösung $w_h^{-1} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$ von (6.5) und daraus erhält man

$$\tilde{S}^{\text{BEM},-1}v := Dv + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w_h^{-1} \quad (6.8)$$

als Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Randelementmethode mit unstetigen, stückweise linearen Basisfunktionen.

Korollar 6.7. Für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit $Sv \in H_{\text{pw}}^1(\Gamma)$ gilt mit einer positiven Konstante c die Fehlerabschätzung

$$\left\| (S - \tilde{S}^{\text{BEM},0})v \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq ch^{\frac{3}{2}} |Sv|_{H_{\text{pw}}^1(\Gamma)}.$$

Für $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit $Sv \in H_{\text{pw}}^2(\Gamma)$ gilt mit einer positiven Konstante c die Fehlerabschätzung

$$\left\| (S - \tilde{S}^{\text{BEM},-1})v \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq ch^{\frac{5}{2}} |Sv|_{H_{\text{pw}}^2(\Gamma)}.$$

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus Satz 6.5 zusammen mit den Approximationseigenschaften von Satz 6.3 und Satz 6.4. \square

In den numerischen Beispielen benötigt man die Auswertung von

$$\langle Su_h, v_h \rangle_{\Gamma} \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und damit die Berechnung der Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{M_{\Gamma} \times M_{\Gamma}}$ mit den Einträgen

$$S_h[j, i] := \langle S\varphi_i^1, \varphi_j^1 \rangle_{\Gamma} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, M_{\Gamma}. \quad (6.9)$$

Da die direkte Berechnung der Matrix S_h nicht möglich ist, benötigt man eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Randelementmethode mit stückweise konstanten Basisfunktionen ist das Variationsproblem in (6.5) mit $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \underline{v} \leftrightarrow v_h \in S_h^1(\Gamma)$ äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$V_h^{0,0} \underline{w} = \left(\frac{1}{2}M_h^{0,1} + K_h^{0,1}\right) \underline{v}$$

für $\mathbb{R}^{N_\Gamma} \ni \underline{w} \leftrightarrow w_h \in S_h^0(\Gamma)$ mit den Matrizen $V_h^{0,0} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}$, $M_h^{0,1} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma \times M_\Gamma}$, $K_h^{0,1} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma \times M_\Gamma}$ mit den Einträgen

$$V_h^{0,0}[j, i] := \langle V\varphi_i^0, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma, \quad (6.10)$$

$$M_h^{0,1}[j, l] := \langle \varphi_l^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma, \quad (6.11)$$

$$K_h^{0,1}[j, l] := \langle K\varphi_l^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma$$

für $i, j = 1, \dots, N_\Gamma$ und $l = 1, \dots, M_\Gamma$. Daraus erhält man für die Approximation (6.7) die Matrix

$$\tilde{S}_h^{\text{BEM},0} := D_h + \left(\frac{1}{2}(M_h^{0,1})^\top + (K_h^{0,1})^\top \right) (V_h^{0,0})^{-1} \left(\frac{1}{2}M_h^{0,1} + K_h^{0,1} \right) \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}, \quad (6.12)$$

wobei die Matrix $D_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ durch

$$D_h[k, l] := \langle D\varphi_l^1, \varphi_k^1 \rangle_\Gamma \quad (6.13)$$

für $k, l = 1, \dots, M_\Gamma$ gegeben ist.

Analog für die Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Randelementmethode mit un stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen ist das Variationsproblem in (6.5) mit $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{v} \leftrightarrow v_h \in S_h^1(\Gamma)$ äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$V_h^{-1,-1}\underline{w} = \left(\frac{1}{2}M_h^{-1,1} + K_h^{-1,1} \right) \underline{v}$$

für $\mathbb{R}^{dN_\Gamma} \ni \underline{w} \leftrightarrow w_h \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$ mit den Matrizen $M_h^{-1,1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times M_\Gamma}$, $K_h^{-1,1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times M_\Gamma}$ mit den Einträgen

$$M_h^{-1,1}[j, l] := \langle \varphi_l^1, \varphi_{k(j),d(j)}^{-1} \rangle_\Gamma, \quad (6.14)$$

$$K_h^{-1,1}[j, l] := \langle K\varphi_l^1, \varphi_{k(j),d(j)}^{-1} \rangle_\Gamma$$

für $j = 1, \dots, dN_\Gamma$ und $l = 1, \dots, M_\Gamma$ und den entsprechenden Indizierungen $k(\cdot), d(\cdot)$ und der Matrix $V_h^{-1,-1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times dN_\Gamma}$ in (6.2). Daraus erhält man für die Approximation (6.8) die Matrix

$$\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1} := D_h + \left(\frac{1}{2}(M_h^{-1,1})^\top + (K_h^{-1,1})^\top \right) (V_h^{-1,-1})^{-1} \left(\frac{1}{2}M_h^{-1,1} + K_h^{-1,1} \right) \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}, \quad (6.15)$$

wobei die Matrix $D_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ durch (6.13) gegeben ist.

6.3 Approximation des Steklov-Poincaré-Operators durch die Finite-Element-Methode

Mit Hilfe der ersten Greenschen Formel (Lemma 5.1.1 in [8]) für $u, v \in H^1(\Omega)$ mit $0 = -\Delta u \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = \langle -\Delta u, v \rangle_\Omega + \langle \gamma_1^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_\Gamma = \langle S\gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_\Gamma$$

mit dem Steklov-Poincaré-Operator (3.7)

$$S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad S\gamma_0^{\text{int}}u = \gamma_1^{\text{int}}u.$$

Die Diskretisierung des Variationsproblems (5.4) durch den Raum der stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen $S_H^1(\Omega)$ ist gegeben durch das diskrete Variationsproblem:

Gesucht sind $\mu_H \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_H \in S_H^1(\Omega)$, so dass für alle $v_H \in S_H^1(\Omega)$

$$a(u_H, v_H) = \mu_H \langle F\gamma_0^{\text{int}}u_H, \gamma_0^{\text{int}}v_H \rangle_{\Gamma} \quad (6.16)$$

gilt.

Da $\mu_0 = \mu_{H,0} = 0 \in \mathbb{R}$ ein Steklov-Eigenwert zur konstanten Steklov-Eigenfunktion $u_0 = u_{H,0} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1} \in S_H^1(\Omega)$ von (6.16) ist, betrachtet man das stabilisierte Variationsproblem für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$ und für die Approximation $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$ von w_{eq} , die als eindeutige Lösung von (6.1) gegeben ist:

Gesucht sind $\mu_H \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_H \in S_H^1(\Omega)$, so dass für alle $v_H \in S_H^1(\Omega)$

$$a(u_H, v_H) + \alpha \langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}}u_H \rangle_{\Gamma} \langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}}v_H \rangle_{\Gamma} = \mu_H \langle F\gamma_0^{\text{int}}u_H, \gamma_0^{\text{int}}v_H \rangle_{\Gamma} \quad (6.17)$$

gilt.

Für eine Basisfunktion $\phi_i^1 \in S_H^1(\Omega)$, die einem inneren Knoten $x_i \in \Omega$ mit $i \in \{1, \dots, M_{\Omega}\}$ zugeordnet ist, gilt $\gamma_0^{\text{int}}\phi_i^1 = 0$. Daher ist das diskrete Variationsproblem (6.17) äquivalent zum diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} A_{\Omega\Omega} & A_{\Omega\Gamma} \\ A_{\Gamma\Omega} & A_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_{\Omega} \\ \underline{u}_{\Gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^{\top} \underline{u}_{\Gamma} \end{pmatrix} = \mu_H \begin{pmatrix} 0 \\ F_h \underline{u}_{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

mit dem gesuchten Eigenwert $\mu_H \in \mathbb{R}$ und mit der gesuchten Eigenfunktion

$$u_H \in S_H^1(\Omega) \leftrightarrow \underline{u} := \begin{pmatrix} \underline{u}_{\Omega} \\ \underline{u}_{\Gamma} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M,$$

wobei $\underline{u}_{\Omega} \in \mathbb{R}^{M_{\Omega}}$ die Koeffizienten zu den inneren Knoten und $\underline{u}_{\Gamma} \in \mathbb{R}^{M_{\Gamma}}$ die Koeffizienten zu den Knoten am Rand enthalten. Die Matrizen $A_{\Omega\Omega} \in \mathbb{R}^{M_{\Omega} \times M_{\Omega}}$, $A_{\Gamma\Omega}^{\top} = A_{\Omega\Gamma} \in \mathbb{R}^{M_{\Omega} \times M_{\Gamma}}$, $A_{\Gamma\Gamma} \in \mathbb{R}^{M_{\Gamma} \times M_{\Gamma}}$, $F_h \in \mathbb{R}^{M_{\Gamma} \times M_{\Gamma}}$ sind gegeben durch die Einträge

$$\begin{aligned} A_{\Omega\Omega}[i, j] &:= a(\phi_j^1, \phi_i^1), \\ A_{\Omega\Gamma}[i, k] &:= a(\phi_{M_{\Omega}+k}^1, \phi_i^1), \\ A_{\Gamma\Omega}[k, i] &:= a(\phi_i^1, \phi_{M_{\Omega}+k}^1), \\ A_{\Gamma\Gamma}[k, l] &:= a(\phi_{M_{\Omega}+l}^1, \phi_{M_{\Omega}+k}^1), \\ F_h[k, l] &:= \langle F\gamma_0^{\text{int}}\phi_{M_{\Omega}+l}^1, \gamma_0^{\text{int}}\phi_{M_{\Omega}+k}^1 \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

für $i, j = 1, \dots, M_{\Omega}$ und $k, l = 1, \dots, M_{\Gamma}$ und der Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_{\Gamma}}$ ist durch (6.3) gegeben. Bildet man für (6.18) das Schur-Komplement, so erhält man das diskrete, verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$\left(S_h^{\text{FEM}} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^{\top} \right) \underline{u}_{\Gamma} = \mu_H F_h \underline{u}_{\Gamma} \quad (6.19)$$

mit dem gesuchten Steklov-Eigenwert $\mu_h = \mu_H \in \mathbb{R}$ und mit der gesuchten Steklov-Eigenfunktion

$$\underline{u}_\Gamma \in \mathbb{R}^{M_\Gamma} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} := \gamma_0^{\text{int}} u_H = \sum_{k=1}^{M_\Gamma} u_k^{\text{FEM}} \varphi_k^1 \in S_h^1(\Gamma),$$

wobei $u_k^{\text{FEM}} := \underline{u}_\Gamma[k]$ für $k = 1, \dots, M_\Gamma$ und

$$S_h^{\text{FEM}} := (A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma\Omega} A_{\Omega\Omega}^{-1} A_{\Omega\Gamma}) \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma} \quad (6.20)$$

eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S durch die Finite-Element-Methode sind.

6.4 Diskrete, verallgemeinerte Eigenwertprobleme

In diesem Kapitel werden die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme formuliert. Um zusätzlich die Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S zu vergleichen, wird auch die Approximation des Neumann-Randwertproblems untersucht.

6.4.1 Approximation des Neumann-Randwertproblems

In diesem Unterkapitel wird das Konvergenzverhalten der verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S anhand des Neumann-Randwertproblems

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \gamma_1^{\text{int}} u = g \quad \text{auf } \Gamma \quad (6.21)$$

für ein gegebenes $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ verglichen. Die schwache, stabilisierte Form mittels des Steklov-Poincaré-Operators S von (6.21) für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$ mit der natürlichen Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ lautet:

Gesucht ist $\gamma_0^{\text{int}} u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so dass für alle $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle S \gamma_0^{\text{int}} u, v \rangle_\Gamma + \alpha \langle w_{\text{eq}}, v \rangle_\Gamma = \langle g, v \rangle_\Gamma \quad (6.22)$$

gilt.

Die Diskretisierung von (6.22) mit stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen ist für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$:

Gesucht ist $u_h \in S_h^1(\Gamma)$, so dass für alle $v_h \in S_h^1(\Gamma)$

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma + \alpha \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma = \langle g_h, v_h \rangle_\Gamma \quad (6.23)$$

gilt, wobei $g_h \in S_h^0(\Gamma)$ die $L^2(\Gamma)$ -Approximation von g und $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma)$ die Approximation von w_{eq} , die als eindeutige Lösung von (6.1) gegeben ist, sind.

Da die direkte Auswertung von

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und damit die direkte Berechnung der Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.9) nicht möglich sind, muss man eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S benutzen. Hier werden die beiden Approximationen durch die Randelementmethode $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ in (6.12) und $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ in (6.15) sowie die Approximation durch die Finite-Element-Methode S_h^{FEM} in (6.20) bezüglich des Konvergenzverhaltens des $L^2(\Gamma)$ -Fehlers der Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ verglichen. Die linearen Gleichungssysteme

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},0} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^0 = \underline{g}, \quad (6.24)$$

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^{-1} = \underline{g}, \quad (6.25)$$

$$\left(S_h^{\text{FEM}} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \underline{u}^{\text{FEM}} = \underline{g} \quad (6.26)$$

für ein $\alpha > 0$ mit den gesuchten, eindeutigen Lösungen $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$, mit dem Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ in (6.3) und mit dem Vektor $\underline{g} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ gegeben durch

$$\underline{g}[k] := \langle g_h, \varphi_k^1 \rangle_\Gamma \quad \text{für } k = 1, \dots, M_\Gamma$$

sind bis auf die zusätzliche Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S äquivalent zum Variationsproblem (6.23).

6.4.2 Approximation des Standard-Steklov-Eigenwertproblems

Die Diskretisierung der schwachen Form des Standard-Steklov-Eigenwertproblems (4.10) mit stetigen, stückweise linearen Funktionen $S_h^1(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M_\Gamma} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ lautet:

Gesucht sind $\mu_h \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_h \in S_h^1(\Gamma)$, so dass für alle $v_h \in S_h^1(\Gamma)$

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma = \mu_h \langle u_h, v_h \rangle_\Gamma \quad (6.27)$$

gilt.

Da $\mu_0 = \mu_{h,0} = 0 \in \mathbb{R}$ ein Steklov-Eigenwert zur konstanten Steklov-Eigenfunktion $u_0 = u_{h,0} = |\Gamma|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1} \in S_h^1(\Gamma)$ von (6.27) ist, betrachtet man das stabilisierte Variationsproblem für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$:

Gesucht sind $\mu_h \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_h \in S_h^1(\Gamma)$, so dass für alle $v_h \in S_h^1(\Gamma)$

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma + \alpha \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma = \mu_h \langle u_h, v_h \rangle_\Gamma, \quad (6.28)$$

gilt, wobei $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ die eindeutige Lösung von (6.1) ist.

Da die direkte Auswertung von

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und damit die direkte Berechnung der Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.9) nicht möglich sind, muss man eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S benutzen. Hier werden

die beiden Approximationen durch die Randelementmethode $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ in (6.12) und $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ in (6.15) bezüglich des Konvergenzverhaltens der Steklov-Eigenwerte verglichen. Die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},0} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^0 = \tilde{\mu}_h^0 M_h^{1,1} \tilde{\underline{u}}^0, \quad (6.29)$$

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^{-1} = \tilde{\mu}_h^{-1} M_h^{1,1} \tilde{\underline{u}}^{-1} \quad (6.30)$$

für ein $\alpha > 0$ mit den gesuchten Steklov-Eigenfunktionen $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und den gesuchten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_h^0$ beziehungsweise $\tilde{\mu}_h^{-1}$, mit dem Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ in (6.3) und mit der Massenmatrix $M_h^{1,1} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ gegeben durch

$$M_h^{1,1}[k, l] := \langle \varphi_l^1, \varphi_k^1 \rangle_\Gamma \quad \text{für } k, l = 1, \dots, M_\Gamma$$

sind bis auf die zusätzliche Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S äquivalent zum Variationsproblem (6.28). Weiter vergleicht man das Konvergenzverhalten von den diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblemen (6.29) und (6.30) mit dem Konvergenzverhalten des diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\left(S_h^{\text{FEM}} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \underline{u}^{\text{FEM}} = \mu_h^{\text{FEM}} M_h^{1,1} \underline{u}^{\text{FEM}} \quad (6.31)$$

mit der gesuchten Steklov-Eigenfunktion $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ und mit dem gesuchten Steklov-Eigenwert $\mu_h^{\text{FEM}} \in \mathbb{R}$, wobei man (6.31) aus dem diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblem (6.19) mit $F_h = M_h^{1,1}$ erhält.

6.4.3 Approximation des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems für den inversen Einfeldschichtoperator V^{-1}

Die Diskretisierung der schwachen Form des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems (5.8) mit stetigen, stückweise linearen Funktionen $S_h^1(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M_\Gamma} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, wobei für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$ mit der eindeutigen Lösung $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ von (6.1) durch die Stabilisierung

$$\alpha \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma)$$

die Orthogonalitätsbeziehung mit der natürlichen Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle w_{\text{eq}}, v \rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \iff \quad v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

näherungsweise erfüllt wird, lautet:

Gesucht sind $\mu_h \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_h \in S_h^1(\Gamma)$, so dass für alle $v_h \in S_h^1(\Gamma)$

$$\langle S u_h, v_h \rangle_\Gamma + \alpha \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma = \mu_h \langle V^{-1} u_h, v_h \rangle_\Gamma \quad (6.32)$$

gilt.

Da die direkte Auswertung von

$$\langle Su_h, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und damit die direkte Berechnung der Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.9) nicht möglich sind, muss man eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S benützen. Hier werden die beiden Approximationen durch die Randelementmethode $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ in (6.12) und $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ in (6.15) bezüglich des Konvergenzverhaltens der Steklov-Eigenwerte verglichen. Weiter ist die direkte Auswertung von

$$\langle V^{-1}u_h, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (6.33)$$

nicht möglich. Die Approximation $(V_h^{0,0})^{-1}$ von V^{-1} mit der Matrix $V_h^{0,0} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}$ in (6.10) führt für (6.33) mit der Massenmatrix $M_h^{0,1} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.11) auf die Matrix

$$(M_h^{0,1})^\top (V_h^{0,0})^{-1} M_h^{0,1} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma},$$

welche im Allgemeinen nicht regulär ist beziehungsweise diese Wahl der Ansatzräume verletzt eine Stabilitätsbedingung. Daher verwendet man die Approximation $(V_h^{-1,-1})^{-1}$ von V^{-1} mit der Matrix $V_h^{-1,-1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times dN_\Gamma}$ in (6.2) und diese führt für (6.33) mit der Massenmatrix $M_h^{-1,1} \in \mathbb{R}^{dN_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.14) auf die Matrix

$$(M_h^{-1,1})^\top (V_h^{-1,-1})^{-1} M_h^{-1,1}.$$

Die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},0} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^0 = \tilde{\mu}_h^0 (M_h^{-1,1})^\top (V_h^{-1,-1})^{-1} M_h^{-1,1} \tilde{\underline{u}}^0, \quad (6.34)$$

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^{-1} = \tilde{\mu}_h^{-1} (M_h^{-1,1})^\top (V_h^{-1,-1})^{-1} M_h^{-1,1} \tilde{\underline{u}}^{-1} \quad (6.35)$$

für ein $\alpha > 0$ mit den gesuchten Steklov-Eigenfunktionen $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und den gesuchten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_h^0$ beziehungsweise $\tilde{\mu}_h^{-1}$ und mit dem Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ in (6.3) sind bis auf die zusätzlichen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S und des inversen Einfachschichtoperators V^{-1} äquivalent zum Variationsproblem (6.32). Weiter vergleicht man das Konvergenzverhalten von den diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblemen (6.34) und (6.35) mit dem Konvergenzverhalten des diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\left(S_h^{\text{FEM}} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \underline{u}^{\text{FEM}} = \mu_h^{\text{FEM}} (M_h^{-1,1})^\top (V_h^{-1,-1})^{-1} M_h^{-1,1} \underline{u}^{\text{FEM}} \quad (6.36)$$

mit der gesuchten Steklov-Eigenfunktion $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ und mit dem gesuchten Steklov-Eigenwert $\mu_h^{\text{FEM}} \in \mathbb{R}$, wobei man (6.36) aus dem diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblem (6.19) mit $F_h = (M_h^{-1,1})^\top (V_h^{-1,-1})^{-1} M_h^{-1,1}$ erhält.

6.4.4 Approximation des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems für den hypersingulären Operator D

Die Diskretisierung der schwachen Form des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems (5.20) mit stetigen, stückweise linearen Funktionen $S_h^1(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_i^1\}_{i=1}^{M_\Gamma} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, wobei für ein hinreichend kleines $\alpha > 0$ mit der eindeutigen Lösung $w_{\text{eq},h} \in S_h^{1,-1}(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ von (6.1) durch die Stabilisierung

$$\alpha \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma)$$

die Orthogonalitätsbeziehung mit der natürlichen Dichte $w_{\text{eq}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle w_{\text{eq}}, v \rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für } v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \iff v \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

näherungsweise erfüllt wird und der hypersinguläre Operator D durch

$$\langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma)$$

stabilisiert wird, lautet:

Gesucht sind $\mu_h \in \mathbb{R}$ und $0 \neq u_h \in S_h^1(\Gamma)$, so dass für alle $v_h \in S_h^1(\Gamma)$

$$\langle Su_h, v_h \rangle_\Gamma + \alpha \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma = \mu_h (\langle Du_h, v_h \rangle_\Gamma + \langle w_{\text{eq},h}, u_h \rangle_\Gamma \langle w_{\text{eq},h}, v_h \rangle_\Gamma) \quad (6.37)$$

gilt.

Da die direkte Auswertung von

$$\langle Su_h, v_h \rangle_\Gamma \quad \text{für } u_h, v_h \in S_h^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

und damit die direkte Berechnung der Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.9) nicht möglich sind, muss man eine Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S benutzen. Hier werden die beiden Approximationen durch die Randelementmethode $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ in (6.12) und $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ in (6.15) bezüglich des Konvergenzverhaltens der Steklov-Eigenwerte verglichen. Die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},0} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^0 = \tilde{\mu}_h^0 (D_h + \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top) \tilde{\underline{u}}^0, \quad (6.38)$$

$$\left(\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \tilde{\underline{u}}^{-1} = \tilde{\mu}_h^{-1} (D_h + \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top) \tilde{\underline{u}}^{-1} \quad (6.39)$$

für ein $\alpha > 0$ mit den gesuchten Steklov-Eigenfunktionen $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und den gesuchten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_h^0$ beziehungsweise $\tilde{\mu}_h^{-1}$, mit dem Stabilisierungsvektor $\underline{a}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{M_\Gamma}$ in (6.3) und mit der Matrix $D_h \in \mathbb{R}^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$ in (6.13) sind bis auf die zusätzliche Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S äquivalent zum Variationsproblem (6.37). Weiter vergleicht man das Konvergenzverhalten von den diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblemen (6.38) und (6.39) mit dem Konvergenzverhalten des diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\left(S_h^{\text{FEM}} + \alpha \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top \right) \underline{u}^{\text{FEM}} = \mu_h^{\text{FEM}} (D_h + \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top) \underline{u}^{\text{FEM}} \quad (6.40)$$

mit der gesuchten Steklov-Eigenfunktion $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ und mit dem gesuchten Steklov-Eigenwert $\mu_h^{\text{FEM}} \in \mathbb{R}$, wobei man (6.40) aus dem diskreten, verallgemeinerten Eigenwertproblem (6.19) mit $F_h = D_h + \underline{a}_{\text{eq}} \underline{a}_{\text{eq}}^\top$ erhält.

7 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden numerische Beispiele für das Neumann-Randwertproblem, das Standard-Steklov-Eigenwertproblem und das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem dargestellt und die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S verglichen. Dazu werden die Gleichungssysteme für das Neumann-Randwertproblem (6.24), (6.25) und (6.26) beziehungsweise die diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme (6.29), (6.30), (6.31), (6.34), (6.35), (6.36), (6.38), (6.39) und (6.40) für verschiedene Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gelöst und die Konvergenzordnung der $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten beziehungsweise der Fehler der Steklov-Eigenwerte untersucht. Die Bezeichnungen für die Randelementmethode und Finite-Element-Methode seien in diesem Kapitel wie in Unterkapitel 6.1. Für das Lösen der linearen Gleichungssysteme und der diskreten, verallgemeinerten Eigenwertprobleme wurde das Programm *toy2d* aus der Lehrveranstaltung *Numerik und Simulation*, welche von Herrn Dr. G. Of abgehalten wurde, verwendet. Hier wurde auf Löser für die verallgemeinerten Eigenwertprobleme der Softwarebibliothek *LAPACK* zurückgegriffen. Weiter wurde für schwachbesetzte Matrizen das Paket *PARDISO* eingesetzt. Für Netzverfeinerungen wurden Routinen aus *toy2d* und der Netz-Generator *NETGEN* benutzt.

7.1 Kreisscheibe

Sei $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{8}\}$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, mit Radius $R := \frac{1}{\sqrt{8}}$, mit dem Durchmesser $\text{diam}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ und mit dem Rand $\Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{8}\}$. Die Kreisscheibe Ω wurde durch regelmäßige Vielecke $\Omega_h \subset \Omega$ approximiert. Die Triangulierungen für die Kreisscheibe Ω sind in Abbildung 7.1 dargestellt.

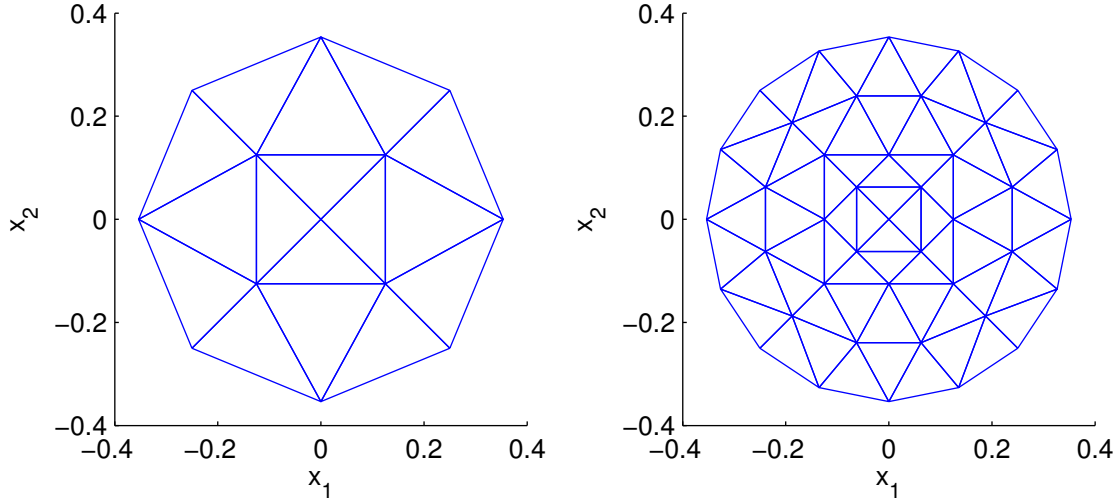


Abbildung 7.1: Triangulierungen für die Kreisscheibe für Level 1 und Level 2.

7.1.1 Neumann-Randwertproblem

Die Neumann-Daten $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (6.22) seien so gewählt, dass $u \in H^1(\Omega)$ gegeben durch $u(x) := -\ln \|x - y\| + C$ mit $y = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (6.22) ist und $C \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $\langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}} u \rangle_\Gamma = 0$ gilt. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die Lösungen von (6.24), (6.25) und (6.26) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Die $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sind für mehrere Levels in den Tabellen 7.1, 7.2, 7.3 gegeben und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 8 | 8 | 4.08e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.03e-03 | 1.98 |
| 3 | 32 | 32 | 2.62e-04 | 1.98 |
| 4 | 64 | 64 | 6.57e-05 | 1.99 |
| 5 | 128 | 128 | 1.64e-05 | 2.00 |

Tabelle 7.1: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|--|------|
| 1 | 8 | 8 | 4.86e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.10e-03 | 2.14 |
| 3 | 32 | 32 | 2.68e-04 | 2.04 |
| 4 | 64 | 64 | 6.63e-05 | 2.01 |
| 5 | 128 | 128 | 1.65e-05 | 2.01 |

Tabelle 7.2: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\ \gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|--|------|
| 1 | 13 | 16 | 8.07e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 2.35e-03 | 1.78 |
| 3 | 145 | 256 | 6.15e-04 | 1.93 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.56e-04 | 1.98 |
| 5 | 2113 | 4096 | 3.91e-05 | 2.00 |

Tabelle 7.3: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

7.1.2 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

Für das Steklov-Eigenwertproblem (4.10) lassen sich die Steklov-Eigenwerte analytisch bestimmen. Diese lauten

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_{2s-1} = \frac{s}{R} = \sqrt{8}s, \quad \mu_{2s} = \frac{s}{R} = \sqrt{8}s$$

für $s \in \mathbb{N}, s \geq 1$ und es gilt $\mu_s \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.29), (6.30) und (6.31) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.4, 7.5, 7.6 für die ersten Levels gegeben. Bis auf den nullten Steklov-Eigenwert haben alle approximierte Steklov-Eigenwerte die Vielfachheit 2. Diese Eigenschaft haben auch die exakten Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.89587 | 2.89587 | 5.55449 | 5.55449 |
| 2 | 16 | 16 | 2.84630 | 2.84630 | 5.68051 | 5.68051 |
| 3 | 32 | 32 | 2.83295 | 2.83295 | 5.66519 | 5.66519 |
| 4 | 64 | 64 | 2.82956 | 2.82956 | 5.65908 | 5.65908 |
| 5 | 128 | 128 | 2.82871 | 2.82871 | 5.65742 | 5.65742 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.82843 | | 5.65685 | |

Tabelle 7.4: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.89587 | 2.89587 | 5.71040 | 5.71040 |
| 2 | 16 | 16 | 2.84630 | 2.84630 | 5.68948 | 5.68948 |
| 3 | 32 | 32 | 2.83295 | 2.83295 | 5.66590 | 5.66590 |
| 4 | 64 | 64 | 2.82956 | 2.82956 | 5.65915 | 5.65915 |
| 5 | 128 | 128 | 2.82871 | 2.82871 | 5.65743 | 5.65743 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.82843 | | 5.65685 | |

Tabelle 7.5: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 2.89585 | 2.89585 | 6.60350 | 6.95141 |
| 2 | 41 | 64 | 2.84630 | 2.84630 | 5.90780 | 5.97189 |
| 3 | 145 | 256 | 2.83295 | 2.83295 | 5.72009 | 5.73474 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.82956 | 2.82956 | 5.67270 | 5.67627 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.82871 | 2.82871 | 5.66082 | 5.66171 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.82843 | | 5.65685 | |

Tabelle 7.6: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.7, 7.8, 7.9 für die ersten Levels dargestellt und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 6.74398e-02 | 0.00 | 6.74398e-02 | 0.00 | 1.02369e-01 | 0.00 | 1.02369e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.78753e-02 | 1.92 | 1.78753e-02 | 1.92 | 2.36521e-02 | 2.11 | 2.36521e-02 | 2.11 |
| 3 | 32 | 32 | 4.52543e-03 | 1.98 | 4.52543e-03 | 1.98 | 8.33786e-03 | 1.50 | 8.33786e-03 | 1.50 |
| 4 | 64 | 64 | 1.13478e-03 | 2.00 | 1.13478e-03 | 2.00 | 2.22575e-03 | 1.91 | 2.22575e-03 | 1.91 |
| 5 | 128 | 128 | 2.83904e-04 | 2.00 | 2.83904e-04 | 2.00 | 5.65094e-04 | 1.98 | 5.65094e-04 | 1.98 |

Tabelle 7.7: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 6.74398e-02 | 0.00 | 6.74398e-02 | 0.00 | 5.35502e-02 | 0.00 | 5.35505e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.78753e-02 | 1.92 | 1.78753e-02 | 1.92 | 3.26247e-02 | 0.71 | 3.26248e-02 | 0.71 |
| 3 | 32 | 32 | 4.52543e-03 | 1.98 | 4.52543e-03 | 1.98 | 9.04202e-03 | 1.85 | 9.04203e-03 | 1.85 |
| 4 | 64 | 64 | 1.13478e-03 | 2.00 | 1.13478e-03 | 2.00 | 2.29392e-03 | 1.98 | 2.29392e-03 | 1.98 |
| 5 | 128 | 128 | 2.83904e-04 | 2.00 | 2.83904e-04 | 2.00 | 5.72546e-04 | 2.00 | 5.72546e-04 | 2.00 |

Tabelle 7.8: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 6.74238e-02 | 0.00 | 6.74238e-02 | 0.00 | 9.46642e-01 | 0.00 | 1.29455e+00 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 1.78731e-02 | 1.92 | 1.78731e-02 | 1.92 | 2.50948e-01 | 1.92 | 3.15032e-01 | 2.04 |
| 3 | 145 | 256 | 4.52514e-03 | 1.98 | 4.52514e-03 | 1.98 | 6.32381e-02 | 1.99 | 7.78863e-02 | 2.02 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.13474e-03 | 2.00 | 1.13474e-03 | 2.00 | 1.58461e-02 | 2.00 | 1.94190e-02 | 2.00 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.83899e-04 | 2.00 | 2.83899e-04 | 2.00 | 3.96441e-03 | 2.00 | 4.85171e-03 | 2.00 |

Tabelle 7.9: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierten Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.2 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

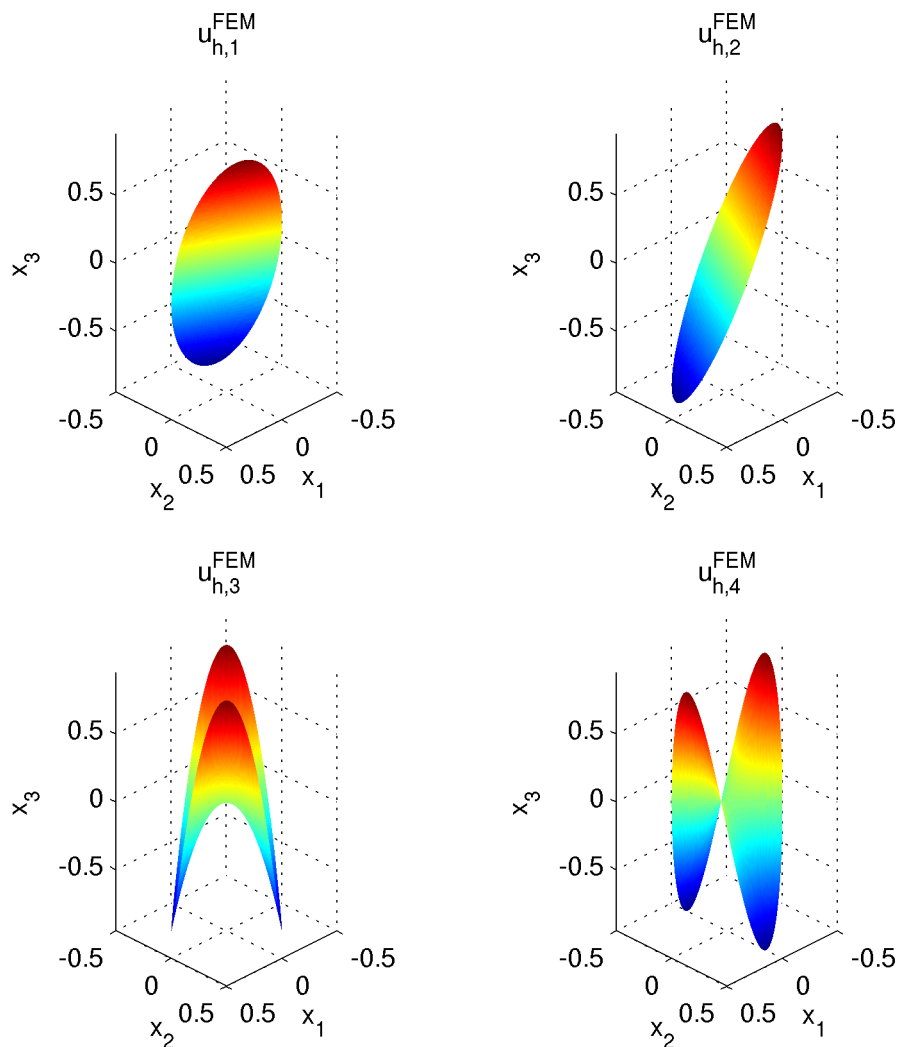


Abbildung 7.2: Vier approximierten Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.1.3 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1}

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.8) lassen sich die Steklov-Eigenwerte analytisch bestimmen. Diese lauten

$$\mu_s = \frac{1}{2}$$

für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ und daher ist $\mu_s = \frac{1}{2}$ ein Steklov-Eigenwert mit unendlicher Vielfachheit. Außerdem ist der größte Steklov-Eigenwert

$$\mu_{\max} = c_K = \frac{1}{2}. \quad (7.1)$$

Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.34), (6.35) und (6.36) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.10, 7.11, 7.12 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.24928 | 0.35547 | 0.35547 | 0.46822 |
| 2 | 16 | 16 | 0.25480 | 0.28632 | 0.28632 | 0.35689 |
| 3 | 32 | 32 | 0.25614 | 0.26438 | 0.26438 | 0.28729 |
| 4 | 64 | 64 | 0.25647 | 0.25855 | 0.25855 | 0.26469 |
| 5 | 128 | 128 | 0.25655 | 0.25707 | 0.25707 | 0.25863 |
| $\mu_j =$ | | | 0.5 | | 0.5 | |

Tabelle 7.10: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.43060 | 0.45066 | 0.45066 | 0.48136 |
| 2 | 16 | 16 | 0.46979 | 0.47244 | 0.47244 | 0.47897 |
| 3 | 32 | 32 | 0.48839 | 0.48871 | 0.48871 | 0.48964 |
| 4 | 64 | 64 | 0.49752 | 0.49756 | 0.49756 | 0.49767 |
| 5 | 128 | 128 | 0.50000 | 0.50000 | 0.50000 | 0.50000 |
| $\mu_j =$ | | | 0.5 | | 0.5 | |

Tabelle 7.11: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 0.49658 | 0.49658 | 0.55665 | 0.58597 |
| 2 | 41 | 64 | 0.49964 | 0.49964 | 0.51780 | 0.52341 |
| 3 | 145 | 256 | 0.49996 | 0.49996 | 0.50468 | 0.50597 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.50000 | 0.50000 | 0.50119 | 0.50150 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.50000 | 0.50000 | 0.50030 | 0.50038 |
| $\mu_j =$ | | | 0.5 | | 0.5 | |

Tabelle 7.12: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.13, 7.14, 7.15 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 2.50717e-01 | 0.00 | 1.44527e-01 | 0.00 | 1.44527e-01 | 0.00 | 3.17802e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 2.45198e-01 | 0.03 | 2.13680e-01 | -0.56 | 2.13679e-01 | -0.56 | 1.43107e-01 | -2.17 |
| 3 | 32 | 32 | 2.43862e-01 | 0.01 | 2.35620e-01 | -0.14 | 2.35620e-01 | -0.14 | 2.12706e-01 | -0.57 |
| 4 | 64 | 64 | 2.43531e-01 | 0.00 | 2.41447e-01 | -0.04 | 2.41447e-01 | -0.04 | 2.35314e-01 | -0.15 |
| 5 | 128 | 128 | 2.43449e-01 | 0.00 | 2.42926e-01 | -0.01 | 2.42926e-01 | -0.01 | 2.41366e-01 | -0.04 |

Tabelle 7.13: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 6.94017e-02 | 0.00 | 4.93415e-02 | 0.00 | 4.93414e-02 | 0.00 | 1.86369e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 3.02127e-02 | 1.20 | 2.75598e-02 | 0.84 | 2.75598e-02 | 0.84 | 2.10305e-02 | -0.17 |
| 3 | 32 | 32 | 1.16110e-02 | 1.38 | 1.12854e-02 | 1.29 | 1.12854e-02 | 1.29 | 1.03632e-02 | 1.02 |
| 4 | 64 | 64 | 2.47602e-03 | 2.23 | 2.43826e-03 | 2.21 | 2.43825e-03 | 2.21 | 2.32700e-03 | 2.15 |
| 5 | 128 | 128 | 7.99718e-07 | 11.60 | 7.99689e-07 | 11.57 | 5.88174e-07 | 12.02 | 5.88165e-07 | 11.95 |

Tabelle 7.14: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 3.42383e-03 | 0.00 | 3.42381e-03 | 0.00 | 5.66470e-02 | 0.00 | 8.59745e-02 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 3.60294e-04 | 3.25 | 3.60289e-04 | 3.25 | 1.78037e-02 | 1.67 | 2.34107e-02 | 1.88 |
| 3 | 145 | 256 | 4.08236e-05 | 3.14 | 4.08230e-05 | 3.14 | 4.68225e-03 | 1.93 | 5.97071e-03 | 1.97 |
| 4 | 545 | 1024 | 4.84161e-06 | 3.08 | 4.84154e-06 | 3.08 | 1.18887e-03 | 1.98 | 1.50345e-03 | 1.99 |
| 5 | 2113 | 4096 | 5.88960e-07 | 3.04 | 5.88951e-07 | 3.04 | 2.98931e-04 | 1.99 | 3.77072e-04 | 2.00 |

Tabelle 7.15: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.3 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum $\{\frac{1}{2}\}$ von oben und unten angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.16). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$\begin{aligned} c_K &\approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := \tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}, \\ c_K &\approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := 1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}, \\ c_K &\approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := 1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} \end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.16) und (5.18). In den Tabellen 7.16, 7.17 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K = 0.5$ betrachtet wird, man siehe (7.1).

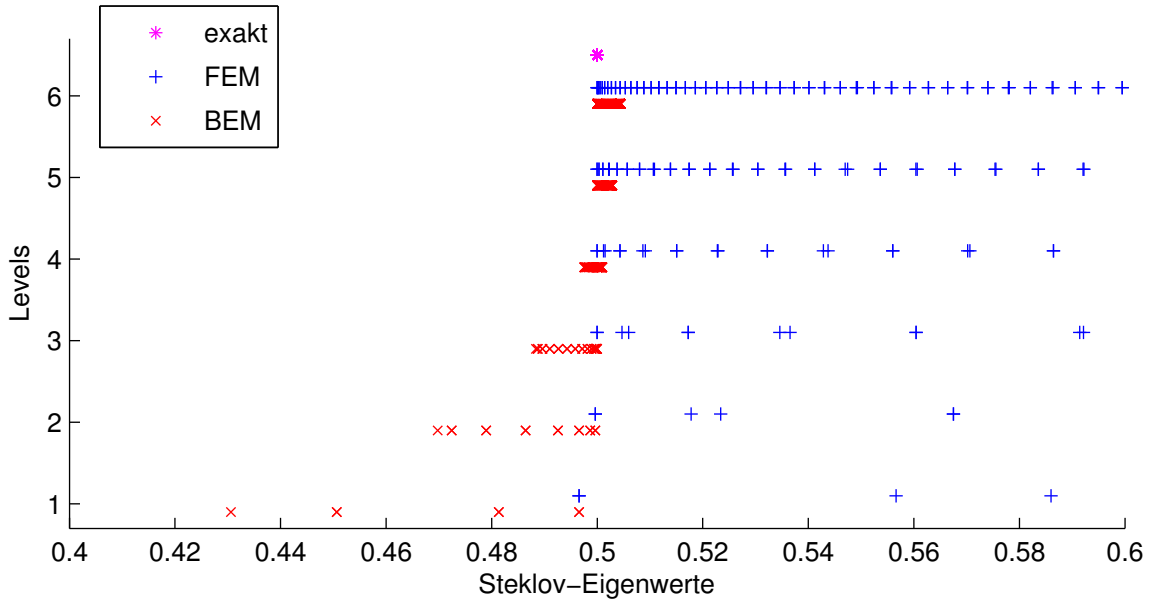


Abbildung 7.3: Konvergenzverhalten der approxmierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\bar{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \bar{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\bar{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \bar{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------|---------------------------------|-------|-------------------------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 0.56940 | 6.94017e-02 | 0.00 | 0.49658 | 3.42108e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.53021 | 3.02127e-02 | 1.20 | 0.49964 | 3.59903e-04 | 3.25 |
| 3 | 32 | 32 | 0.51161 | 1.16110e-02 | 1.38 | 0.49996 | 4.07732e-05 | 3.14 |
| 4 | 64 | 64 | 0.50248 | 2.47602e-03 | 2.23 | 0.50097 | 9.66311e-04 | -4.57 |
| 5 | 128 | 128 | 0.50000 | 7.99718e-07 | 11.60 | 0.50283 | 2.83109e-03 | -1.55 |

Tabelle 7.16: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.50342 | 3.42383e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.50036 | 3.60294e-04 | 3.25 |
| 3 | 145 | 256 | 0.50004 | 4.08236e-05 | 3.14 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.50000 | 4.84161e-06 | 3.08 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.50000 | 5.88960e-07 | 3.04 |

Tabelle 7.17: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.4 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

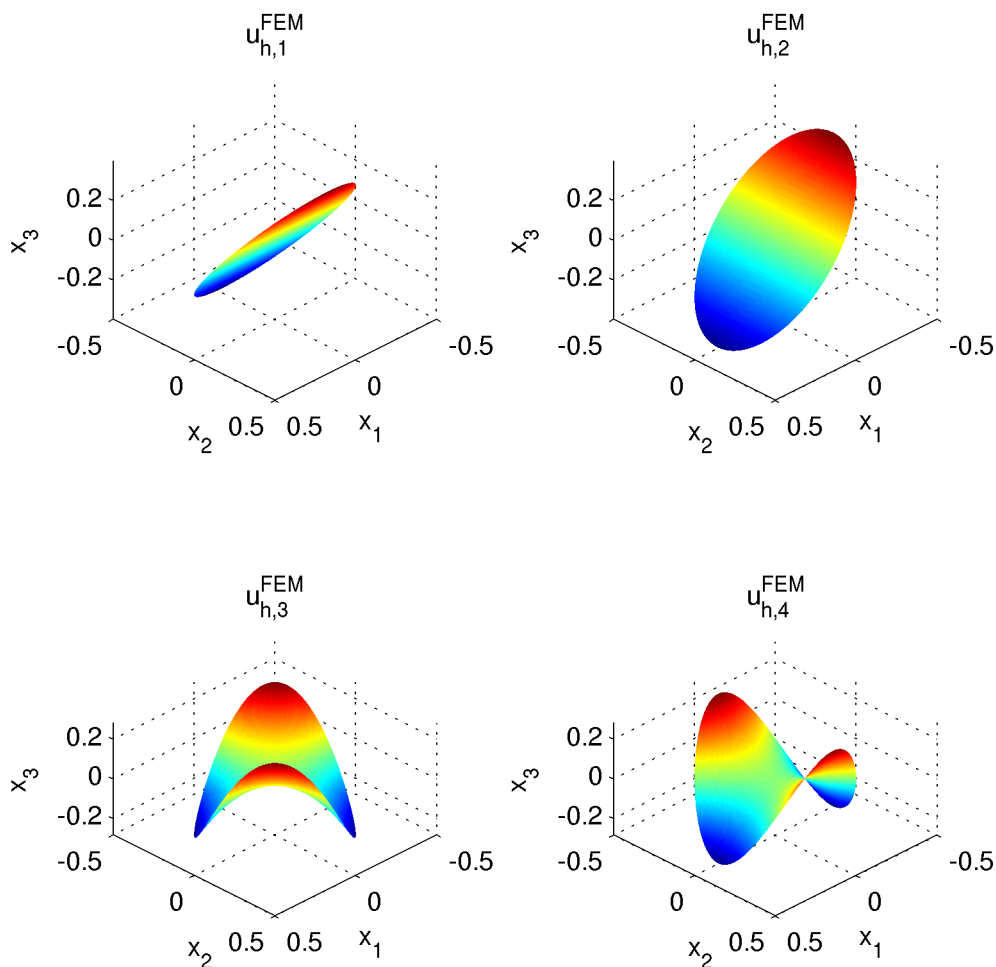


Abbildung 7.4: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.1.4 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.20) lassen sich die Steklov-Eigenwerte analytisch bestimmen. Diese lauten

$$\mu_s = 2$$

für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ und daher ist $\mu_s = 2$ ein Steklov-Eigenwert mit unendlicher Vielfachheit. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.38), (6.39) und (6.40) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.18, 7.19, 7.20 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.00000 | 1.42486 | 1.42486 | 1.88111 |
| 2 | 16 | 16 | 1.00000 | 1.12397 | 1.12397 | 1.40268 |
| 3 | 32 | 32 | 1.00000 | 1.03227 | 1.03227 | 1.12207 |
| 4 | 64 | 64 | 1.00000 | 1.00815 | 1.00815 | 1.03214 |
| 5 | 128 | 128 | 1.00000 | 1.00204 | 1.00204 | 1.00814 |
| $\mu_j =$ | | | 2 | | 2 | |

Tabelle 7.18: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.72735 | 1.80639 | 1.80639 | 1.93392 |
| 2 | 16 | 16 | 1.84373 | 1.85460 | 1.85460 | 1.88248 |
| 3 | 32 | 32 | 1.90675 | 1.90818 | 1.90818 | 1.91235 |
| 4 | 64 | 64 | 1.93990 | 1.94010 | 1.94010 | 1.94067 |
| 5 | 128 | 128 | 1.95696 | 1.95698 | 1.95698 | 1.95707 |
| $\mu_j =$ | | | 2 | | 2 | |

Tabelle 7.19: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 1.99999 | 1.99999 | 2.23638 | 2.35420 |
| 2 | 41 | 64 | 2.00000 | 2.00000 | 2.06948 | 2.09189 |
| 3 | 145 | 256 | 2.00000 | 2.00000 | 2.01832 | 2.02347 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.00000 | 2.00000 | 2.00469 | 2.00595 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.00000 | 2.00000 | 2.00119 | 2.00150 |
| $\mu_j =$ | | | 2 | | 2 | |

Tabelle 7.20: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.21, 7.22, 7.23 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S . Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 1.00000e+00 | 0.00 | 5.75141e-01 | 0.00 | 5.75141e-01 | 0.00 | 1.18886e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.00000e+00 | 0.00 | 8.76028e-01 | -0.61 | 8.76028e-01 | -0.61 | 5.97317e-01 | -2.33 |
| 3 | 32 | 32 | 1.00000e+00 | -0.00 | 9.67730e-01 | -0.14 | 9.67730e-01 | -0.14 | 8.77926e-01 | -0.56 |
| 4 | 64 | 64 | 1.00000e+00 | 0.00 | 9.91850e-01 | -0.04 | 9.91850e-01 | -0.04 | 9.67859e-01 | -0.14 |
| 5 | 128 | 128 | 1.00000e+00 | 0.00 | 9.97957e-01 | -0.01 | 9.97957e-01 | -0.01 | 9.91858e-01 | -0.04 |

Tabelle 7.21: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 2.72651e-01 | 0.00 | 1.93606e-01 | 0.00 | 1.93606e-01 | 0.00 | 6.60815e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.56269e-01 | 0.80 | 1.45401e-01 | 0.41 | 1.45401e-01 | 0.41 | 1.17524e-01 | -0.83 |
| 3 | 32 | 32 | 9.32550e-02 | 0.74 | 9.18151e-02 | 0.66 | 9.18151e-02 | 0.66 | 8.76450e-02 | 0.42 |
| 4 | 64 | 64 | 6.00983e-02 | 0.63 | 5.99049e-02 | 0.62 | 5.99049e-02 | 0.62 | 5.93285e-02 | 0.56 |
| 5 | 128 | 128 | 4.30422e-02 | 0.48 | 4.30150e-02 | 0.48 | 4.30150e-02 | 0.48 | 4.29334e-02 | 0.47 |

Tabelle 7.22: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 1.10112e-05 | 0.00 | 1.10112e-05 | 0.00 | 2.36378e-01 | 0.00 | 3.54204e-01 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 1.54876e-06 | 2.83 | 1.54876e-06 | 2.83 | 6.94782e-02 | 1.77 | 9.18851e-02 | 1.95 |
| 3 | 145 | 256 | 1.99303e-07 | 2.96 | 1.99303e-07 | 2.96 | 1.83187e-02 | 1.92 | 2.34706e-02 | 1.97 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.50950e-08 | 2.99 | 2.50944e-08 | 2.99 | 4.69269e-03 | 1.96 | 5.95079e-03 | 1.98 |
| 5 | 2113 | 4096 | 3.14166e-09 | 3.00 | 3.14166e-09 | 3.00 | 1.18719e-03 | 1.98 | 1.49973e-03 | 1.99 |

Tabelle 7.23: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.5 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum $\{2\}$ von oben und unten angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.25). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}},$$

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}},$$

$$c_K \approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := \frac{1}{\mu_{h,1}^{\text{FEM}}}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.25) und (5.27). In den Tabellen 7.24, 7.25 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K = 0.5$ betrachtet wird, man siehe (7.1).

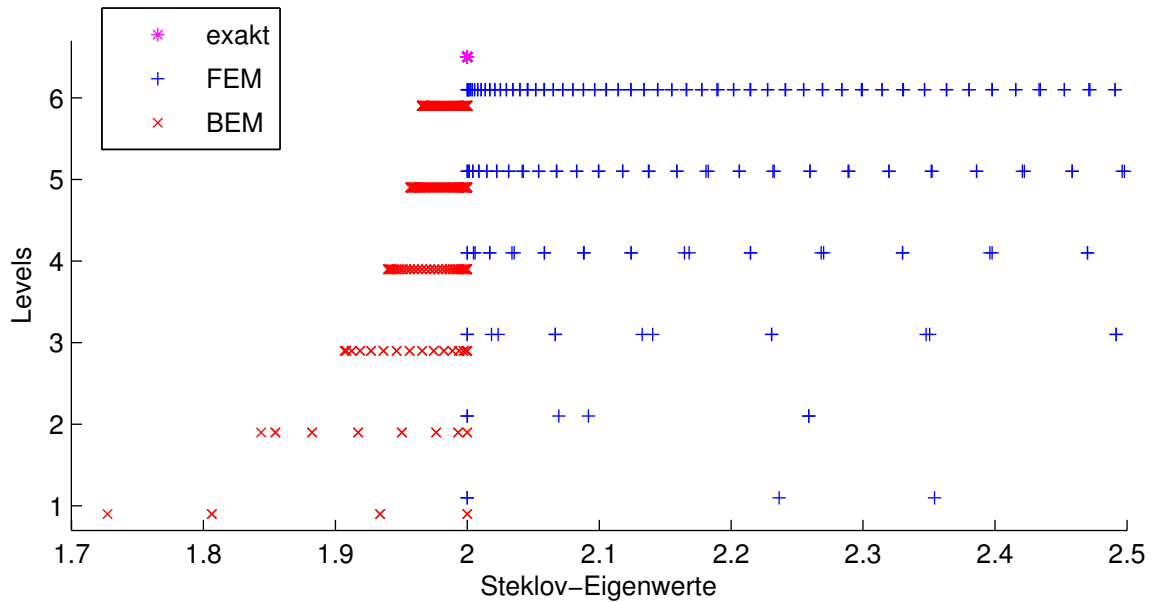


Abbildung 7.5: Konvergenzverhalten der approxmierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\bar{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \bar{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\bar{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \bar{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------|---------------------------------|------|-------------------------|---------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 0.57892 | 7.89219e-02 | 0.00 | 0.50000 | 8.99000e-14 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.54238 | 4.23783e-02 | 0.90 | 0.50000 | 1.16100e-13 | 0.00 |
| 3 | 32 | 32 | 0.52445 | 2.44540e-02 | 0.79 | 0.50000 | 7.09000e-14 | 0.00 |
| 4 | 64 | 64 | 0.51549 | 1.54900e-02 | 0.66 | 0.50000 | 3.82000e-14 | 0.00 |
| 5 | 128 | 128 | 0.51100 | 1.09972e-02 | 0.49 | 0.50000 | 1.93000e-14 | 0.00 |

Tabelle 7.24: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.50000 | 2.75282e-06 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.50000 | 3.87190e-07 | 2.83 |
| 3 | 145 | 256 | 0.50000 | 4.98259e-08 | 2.96 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.50000 | 6.27377e-09 | 2.99 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.50000 | 7.85783e-10 | 3.01 |

Tabelle 7.25: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.6 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

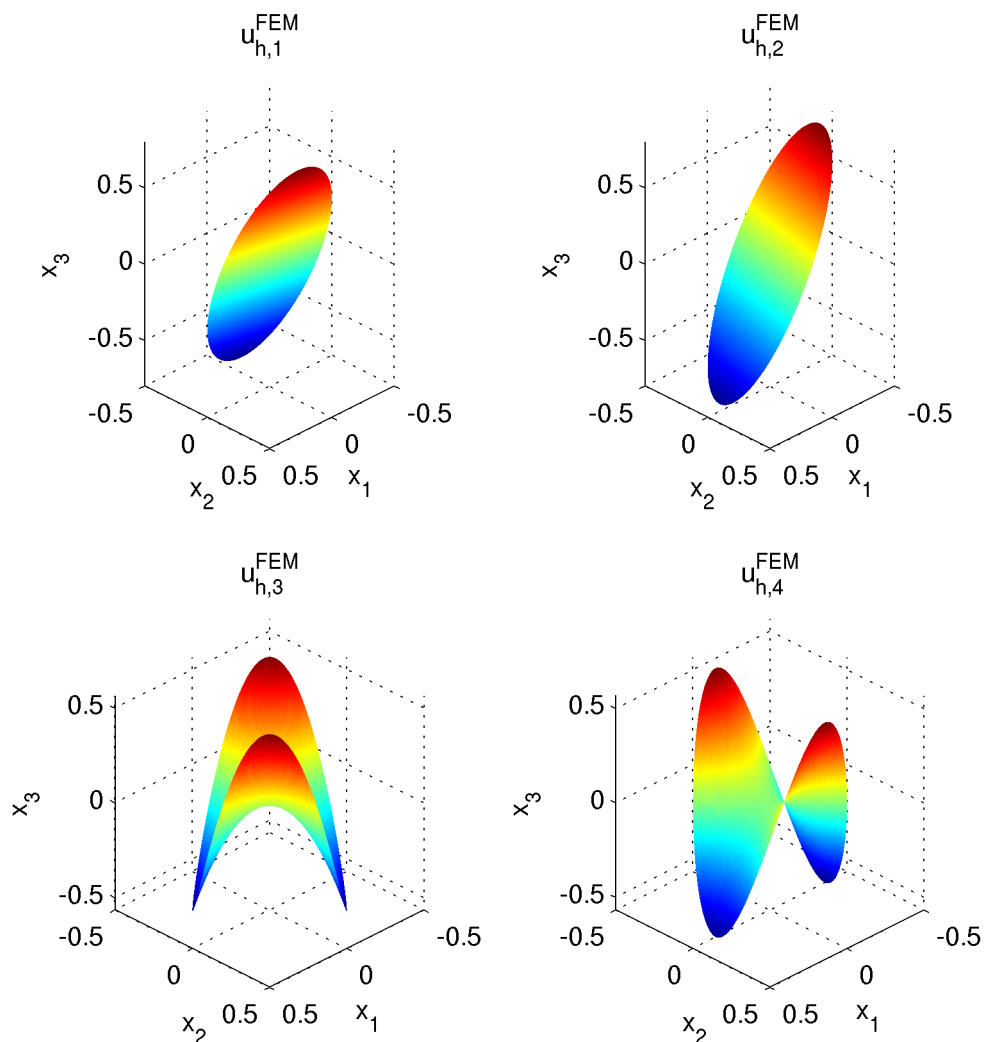


Abbildung 7.6: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.2 Ellipse

Sei $\Omega := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1 \right\}$ eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a := \frac{1 + \sqrt{5}}{8} \approx 0.404508, \quad b := \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} \approx 0.318005,$$

mit dem Durchmesser $\text{diam}(\Omega) = 2a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.809017 < 1$ und mit dem Rand $\Gamma := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$. Die Ellipse Ω wurde durch regelmäßige Vielecke $\Omega_h \subset \Omega$ approximiert. Die Triangulierungen für die Ellipse Ω sind in Abbildung 7.7 dargestellt.

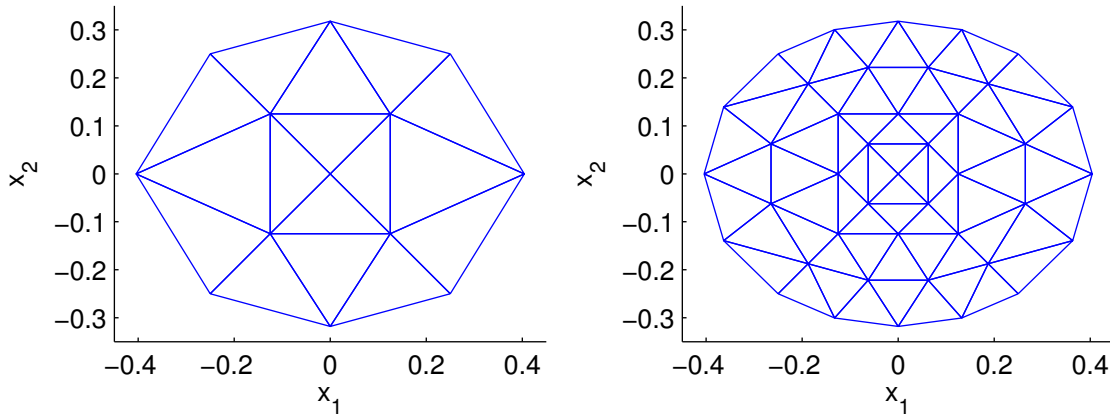


Abbildung 7.7: Triangulierungen für die Ellipse für Level 1 und Level 2.

7.2.1 Neumann-Randwertproblem

Die Neumann-Daten $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (6.22) seien so gewählt, dass $u \in H^1(\Omega)$ gegeben durch $u(x) := -\ln \|x - y\| + C$ mit $y = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (6.22) ist und $C \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $\langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}} u \rangle_{\Gamma} = 0$ gilt. Es seien $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die Lösungen von (6.24), (6.25) und (6.26) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Die $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sind für mehrere Levels in den Tabellen 7.26, 7.27, 7.28 gegeben und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^0\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|--|------|
| 1 | 8 | 8 | 4.41e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.09e-03 | 2.01 |
| 3 | 32 | 32 | 2.76e-04 | 1.98 |
| 4 | 64 | 64 | 6.92e-05 | 2.00 |
| 5 | 128 | 128 | 1.73e-05 | 2.00 |
| 6 | 256 | 256 | 4.32e-06 | 2.00 |
| 7 | 512 | 512 | 1.08e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.26: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^{-1}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 8 | 8 | 5.10e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.18e-03 | 2.12 |
| 3 | 32 | 32 | 2.84e-04 | 2.05 |
| 4 | 64 | 64 | 7.00e-05 | 2.02 |
| 5 | 128 | 128 | 1.74e-05 | 2.01 |
| 6 | 256 | 256 | 4.33e-06 | 2.00 |
| 7 | 512 | 512 | 1.08e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.27: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - u_h^{\text{FEM}}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 13 | 16 | 8.19e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 2.52e-03 | 1.70 |
| 3 | 145 | 256 | 6.76e-04 | 1.90 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.73e-04 | 1.97 |
| 5 | 2113 | 4096 | 4.35e-05 | 1.99 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.09e-05 | 2.00 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.73e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.28: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

7.2.2 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

Für das Steklov-Eigenwertproblem (4.10) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 10 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.29), (6.30) und (6.31) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.29, 7.30, 7.31 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.41117 | 3.32843 | 4.99181 | 5.60506 |
| 2 | 16 | 16 | 2.32911 | 3.31282 | 5.40645 | 5.68134 |
| 3 | 32 | 32 | 2.30882 | 3.30676 | 5.39726 | 5.65709 |
| 4 | 64 | 64 | 2.30378 | 3.30506 | 5.39199 | 5.64887 |
| 5 | 128 | 128 | 2.30252 | 3.30462 | 5.39050 | 5.64669 |
| 6 | 256 | 256 | 2.30220 | 3.30450 | 5.39011 | 5.64614 |
| 7 | 512 | 512 | 2.30212 | 3.30448 | 5.39002 | 5.64600 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.30210 | 3.30447 | 5.38999 | 5.64595 |

Tabelle 7.29: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.41117 | 3.32905 | 5.35094 | 5.75846 |
| 2 | 16 | 16 | 2.32919 | 3.31304 | 5.41718 | 5.69014 |
| 3 | 32 | 32 | 2.30882 | 3.30678 | 5.39807 | 5.65781 |
| 4 | 64 | 64 | 2.30378 | 3.30506 | 5.39206 | 5.64894 |
| 5 | 128 | 128 | 2.30252 | 3.30462 | 5.39051 | 5.64670 |
| 6 | 256 | 256 | 2.30220 | 3.30450 | 5.39011 | 5.64614 |
| 7 | 512 | 512 | 2.30212 | 3.30448 | 5.39002 | 5.64600 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.30210 | 3.30447 | 5.38999 | 5.64595 |

Tabelle 7.30: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 2.41116 | 3.32959 | 6.54459 | 6.65718 |
| 2 | 41 | 64 | 2.32966 | 3.31431 | 5.68629 | 5.90798 |
| 3 | 145 | 256 | 2.30900 | 3.30717 | 5.46404 | 5.71204 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.30383 | 3.30516 | 5.40854 | 5.66253 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.30253 | 3.30464 | 5.39463 | 5.65010 |
| 6 | 8321 | 16384 | 2.30221 | 3.30451 | 5.39115 | 5.64699 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.30213 | 3.30448 | 5.39028 | 5.64621 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.30210 | 3.30447 | 5.38999 | 5.64595 |

Tabelle 7.31: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.32, 7.33, 7.34 für die ersten Levels dargestellt und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 1.09069e-01 | 0.00 | 2.39607e-02 | 0.00 | 3.98174e-01 | 0.00 | 4.08912e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 2.70148e-02 | 2.01 | 8.35028e-03 | 1.52 | 1.64695e-02 | 4.60 | 3.53911e-02 | 0.21 |
| 3 | 32 | 32 | 6.71722e-03 | 2.01 | 2.29662e-03 | 1.86 | 7.27528e-03 | 1.18 | 1.11410e-02 | 1.67 |
| 4 | 64 | 64 | 1.67699e-03 | 2.00 | 5.87206e-04 | 1.97 | 2.00273e-03 | 1.86 | 2.91733e-03 | 1.93 |
| 5 | 128 | 128 | 4.18831e-04 | 2.00 | 1.47519e-04 | 1.99 | 5.12059e-04 | 1.97 | 7.36535e-04 | 1.99 |
| 6 | 256 | 256 | 1.04395e-04 | 2.00 | 3.68228e-05 | 2.00 | 1.28421e-04 | 2.00 | 1.84022e-04 | 2.00 |
| 7 | 512 | 512 | 2.57913e-05 | 2.02 | 9.10052e-06 | 2.02 | 3.17818e-05 | 2.01 | 4.54842e-05 | 2.02 |

Tabelle 7.32: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 1.09070e-01 | 0.00 | 2.45773e-02 | 0.00 | 3.90489e-02 | 0.00 | 1.12506e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 2.70912e-02 | 2.01 | 8.56903e-03 | 1.52 | 2.71914e-02 | 0.52 | 4.41927e-02 | 1.35 |
| 3 | 32 | 32 | 6.72348e-03 | 2.01 | 2.31119e-03 | 1.89 | 8.08130e-03 | 1.75 | 1.18574e-02 | 1.90 |
| 4 | 64 | 64 | 1.67753e-03 | 2.00 | 5.88371e-04 | 1.97 | 2.07826e-03 | 1.96 | 2.98628e-03 | 1.99 |
| 5 | 128 | 128 | 4.18883e-04 | 2.00 | 1.47630e-04 | 1.99 | 5.20128e-04 | 2.00 | 7.43988e-04 | 2.00 |
| 6 | 256 | 256 | 1.04400e-04 | 2.00 | 3.68347e-05 | 2.00 | 1.29350e-04 | 2.01 | 1.84885e-04 | 2.01 |
| 7 | 512 | 512 | 2.57920e-05 | 2.02 | 9.10188e-06 | 2.02 | 3.18931e-05 | 2.02 | 4.55879e-05 | 2.02 |

Tabelle 7.33: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 1.09057e-01 | 0.00 | 2.51226e-02 | 0.00 | 1.15461e+00 | 0.00 | 1.01123e+00 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 2.75573e-02 | 1.98 | 9.84103e-03 | 1.35 | 2.96307e-01 | 1.96 | 2.62031e-01 | 1.95 |
| 3 | 145 | 256 | 6.89943e-03 | 2.00 | 2.70023e-03 | 1.87 | 7.40514e-02 | 2.00 | 6.60919e-02 | 1.99 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.72621e-03 | 2.00 | 6.90376e-04 | 1.97 | 1.85529e-02 | 2.00 | 1.65749e-02 | 2.00 |
| 5 | 2113 | 4096 | 4.31405e-04 | 2.00 | 1.73468e-04 | 1.99 | 4.64404e-03 | 2.00 | 4.14759e-03 | 2.00 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.07558e-04 | 2.00 | 4.33207e-05 | 2.00 | 1.16126e-03 | 2.00 | 1.03670e-03 | 2.00 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.65834e-05 | 2.02 | 1.07257e-05 | 2.01 | 2.89991e-04 | 2.00 | 2.58657e-04 | 2.00 |

Tabelle 7.34: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.8 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

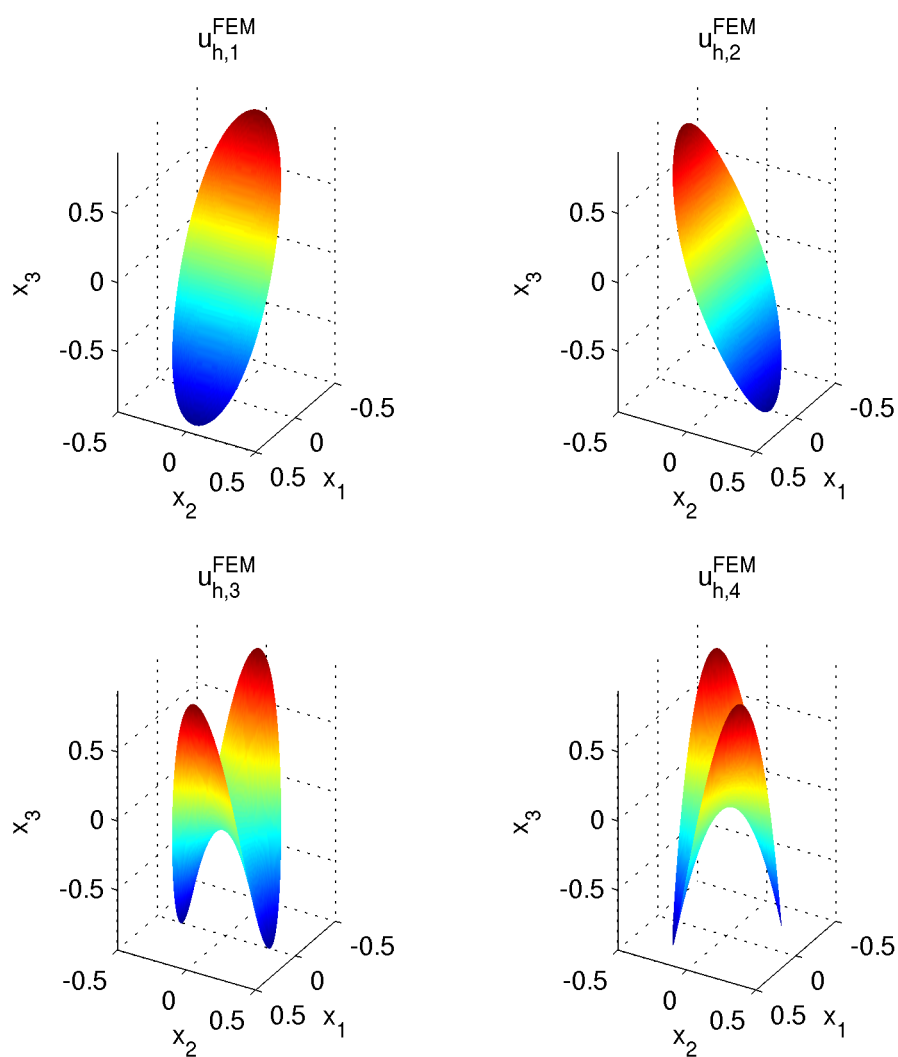


Abbildung 7.8: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.2.3 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfeldoperator V^{-1}

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.8) lassen sich die Steklov-Eigenwerte analytisch bestimmen, man siehe [16]. Diese lauten

$$\mu_s = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^s$$

für $s \in \mathbb{N}, s \geq 1$ mit dem Verhältnis der Halbachsen

$$r = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 0.786151$$

und daher ist $\frac{1}{2}$ Häufungspunkt der Steklov-Eigenwerte. Der größte Steklov-Eigenwert ist

$$\mu_{\max} = c_K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^1 \approx 0.559863. \quad (7.2)$$

Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.34), (6.35) und (6.36) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.35, 7.36, 7.37 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.24833 | 0.34065 | 0.37006 | 0.44678 |
| 2 | 16 | 16 | 0.25463 | 0.28382 | 0.28854 | 0.35627 |
| 3 | 32 | 32 | 0.25611 | 0.26395 | 0.26476 | 0.28715 |
| 4 | 64 | 64 | 0.25647 | 0.25848 | 0.25863 | 0.26466 |
| 5 | 128 | 128 | 0.25656 | 0.25706 | 0.25709 | 0.25863 |
| 6 | 256 | 256 | 0.25657 | 0.25670 | 0.25671 | 0.25709 |
| 7 | 512 | 512 | 0.25658 | 0.25661 | 0.25661 | 0.25671 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.44014 | 0.49283 | 0.49914 | 0.49990 |

Tabelle 7.35: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.42046 | 0.42338 | 0.45321 | 0.47112 |
| 2 | 16 | 16 | 0.44175 | 0.46198 | 0.46222 | 0.47626 |
| 3 | 32 | 32 | 0.44064 | 0.48266 | 0.48266 | 0.48691 |
| 4 | 64 | 64 | 0.44027 | 0.49276 | 0.49404 | 0.49404 |
| 5 | 128 | 128 | 0.44017 | 0.49282 | 0.49911 | 0.49991 |
| 6 | 256 | 256 | 0.44015 | 0.49283 | 0.49913 | 0.49990 |
| 7 | 512 | 512 | 0.44014 | 0.49283 | 0.49914 | 0.49990 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.44014 | 0.49283 | 0.49914 | 0.49990 |

Tabelle 7.36: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 0.44443 | 0.54625 | 0.56601 | 0.57018 |
| 2 | 41 | 64 | 0.44192 | 0.51522 | 0.52528 | 0.55711 |
| 3 | 145 | 256 | 0.44065 | 0.49863 | 0.51190 | 0.51752 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.44027 | 0.49432 | 0.50379 | 0.50514 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.44017 | 0.49321 | 0.50032 | 0.50190 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.44015 | 0.49293 | 0.49944 | 0.50047 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.44014 | 0.49286 | 0.49922 | 0.50004 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.44014 | 0.49283 | 0.49914 | 0.49990 |

Tabelle 7.37: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.38, 7.39, 7.40 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S . Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 1.91807e-01 | 0.00 | 1.52178e-01 | 0.00 | 1.29086e-01 | 0.00 | 5.31210e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.85511e-01 | 0.05 | 2.09013e-01 | -0.46 | 2.10606e-01 | -0.71 | 1.43623e-01 | -1.43 |
| 3 | 32 | 32 | 1.84025e-01 | 0.01 | 2.28883e-01 | -0.13 | 2.34387e-01 | -0.15 | 2.12744e-01 | -0.57 |
| 4 | 64 | 64 | 1.83666e-01 | 0.00 | 2.34355e-01 | -0.03 | 2.40511e-01 | -0.04 | 2.35239e-01 | -0.15 |
| 5 | 128 | 128 | 1.83581e-01 | 0.00 | 2.35771e-01 | -0.01 | 2.42048e-01 | -0.01 | 2.41269e-01 | -0.04 |
| 6 | 256 | 256 | 1.83562e-01 | 0.00 | 2.36131e-01 | -0.00 | 2.42433e-01 | -0.00 | 2.42804e-01 | -0.01 |
| 7 | 512 | 512 | 1.83558e-01 | 0.00 | 2.36222e-01 | -0.00 | 2.42530e-01 | -0.00 | 2.43190e-01 | -0.00 |

Tabelle 7.38: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 1.96797e-02 | 0.00 | 6.94530e-02 | 0.00 | 4.59350e-02 | 0.00 | 2.87774e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.61288e-03 | 3.61 | 3.08488e-02 | 1.17 | 3.69185e-02 | 0.32 | 2.36361e-02 | 0.28 |
| 3 | 32 | 32 | 5.06813e-04 | 1.67 | 1.01772e-02 | 1.60 | 1.64839e-02 | 1.16 | 1.29909e-02 | 0.86 |
| 4 | 64 | 64 | 1.36101e-04 | 1.90 | 7.26284e-05 | 7.13 | 5.10325e-03 | 1.69 | 5.85856e-03 | 1.15 |
| 5 | 128 | 128 | 3.50565e-05 | 1.96 | 1.32440e-05 | 2.46 | 3.37440e-05 | 7.24 | 1.22615e-05 | 8.90 |
| 6 | 256 | 256 | 8.88330e-06 | 1.98 | 2.96000e-06 | 2.16 | 7.37610e-06 | 2.19 | 5.92141e-06 | 1.05 |
| 7 | 512 | 512 | 2.23499e-06 | 1.99 | 7.08960e-07 | 2.06 | 1.77018e-06 | 2.06 | 1.65722e-06 | 1.84 |

Tabelle 7.39: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 4.29120e-03 | 0.00 | 5.34179e-02 | 0.00 | 6.68669e-02 | 0.00 | 7.02871e-02 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 1.78506e-03 | 1.27 | 2.23882e-02 | 1.25 | 2.61409e-02 | 1.35 | 5.72131e-02 | 0.30 |
| 3 | 145 | 256 | 5.14933e-04 | 1.79 | 5.79776e-03 | 1.95 | 1.27578e-02 | 1.03 | 1.76250e-02 | 1.70 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.36609e-04 | 1.91 | 1.48856e-03 | 1.96 | 4.65133e-03 | 1.46 | 5.24416e-03 | 1.75 |
| 5 | 2113 | 4096 | 3.50896e-05 | 1.96 | 3.80542e-04 | 1.97 | 1.18088e-03 | 1.98 | 2.00478e-03 | 1.39 |
| 6 | 8321 | 16384 | 8.88549e-06 | 1.98 | 9.63067e-05 | 1.98 | 3.02361e-04 | 1.97 | 5.73043e-04 | 1.81 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.23515e-06 | 1.99 | 2.42025e-05 | 1.99 | 7.71434e-05 | 1.97 | 1.45557e-04 | 1.98 |

Tabelle 7.40: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.9 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.16). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$\begin{aligned}
c_K &\approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := \tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}, \\
c_K &\approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := 1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}, \\
c_K &\approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := 1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}
\end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$\left| c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} \right|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.16) und (5.18). In den Tabellen 7.41, 7.42 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.559862961478403$ betrachtet wird, man siehe (7.2).

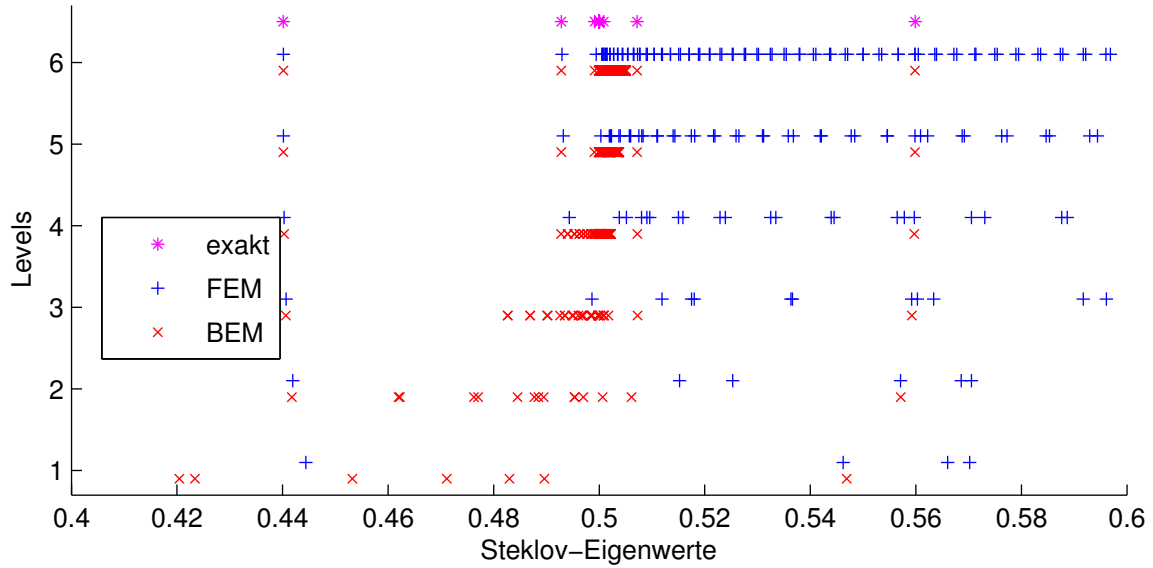


Abbildung 7.9: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 0.57954 | 1.96797e-02 | 0.00 | 0.54689 | 1.29727e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.55825 | 1.61288e-03 | 3.61 | 0.55716 | 2.70300e-03 | 2.26 |
| 3 | 32 | 32 | 0.55936 | 5.06813e-04 | 1.67 | 0.55925 | 6.14908e-04 | 2.14 |
| 4 | 64 | 64 | 0.55973 | 1.36101e-04 | 1.90 | 0.55971 | 1.48289e-04 | 2.05 |
| 5 | 128 | 128 | 0.55983 | 3.50565e-05 | 1.96 | 0.55983 | 3.65068e-05 | 2.02 |
| 6 | 256 | 256 | 0.55985 | 8.88330e-06 | 1.98 | 0.55985 | 9.06056e-06 | 2.01 |
| 7 | 512 | 512 | 0.55986 | 2.23499e-06 | 1.99 | 0.55986 | 2.25697e-06 | 2.01 |

Tabelle 7.41: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.55557 | 4.29120e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.55808 | 1.78506e-03 | 1.27 |
| 3 | 145 | 256 | 0.55935 | 5.14933e-04 | 1.79 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.55973 | 1.36609e-04 | 1.91 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.55983 | 3.50896e-05 | 1.96 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.55985 | 8.88549e-06 | 1.98 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.55986 | 2.23515e-06 | 1.99 |

Tabelle 7.42: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.10 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

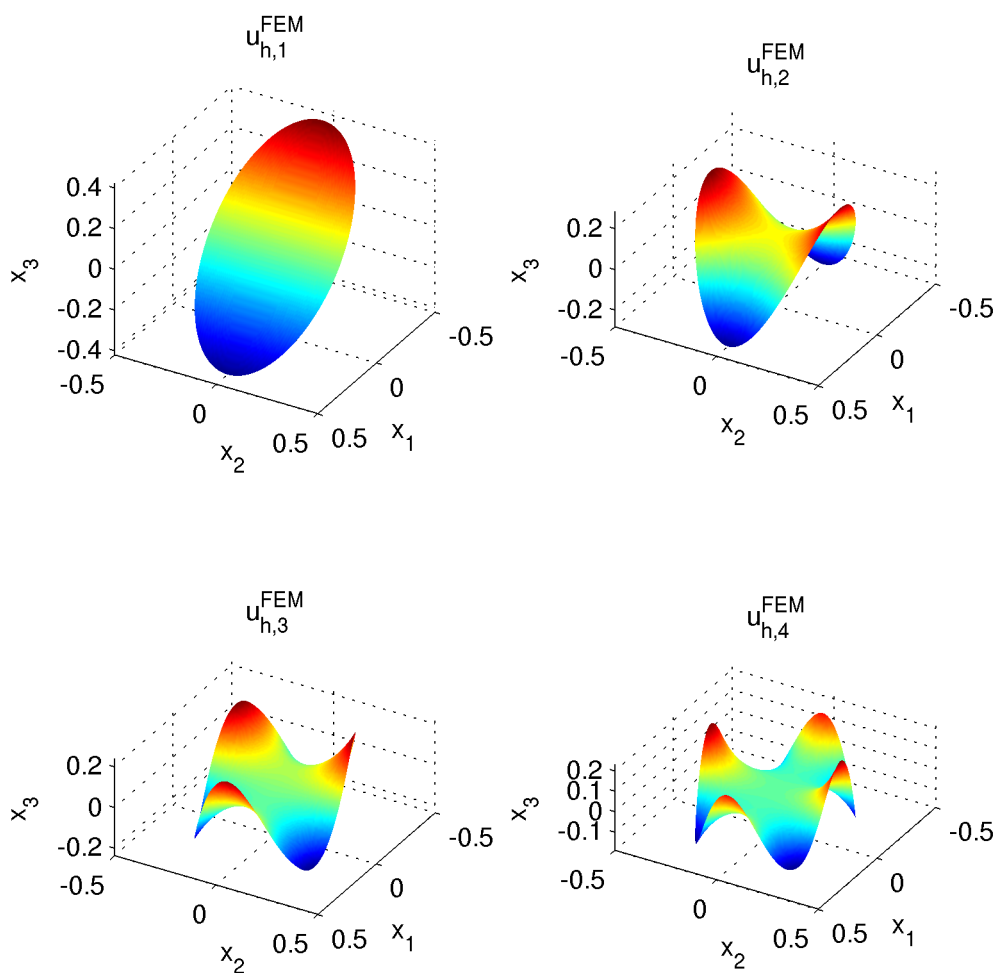


Abbildung 7.10: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.2.4 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.20) lassen sich die Steklov-Eigenwerte analytisch bestimmen, man siehe [16]. Diese lauten

$$\mu_s = \frac{2}{1 \pm \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^s}$$

für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ mit dem Verhältnis der Halbachsen

$$r = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} \approx 0.786151$$

und daher ist 2 Häufungspunkt der Steklov-Eigenwerte. Der größte Steklov-Eigenwert ist

$$\mu_{\max} = \frac{2}{1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^1} \approx 2.272020.$$

Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{\underline{u}}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.38), (6.39) und (6.40) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.43, 7.44, 7.45 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.00002 | 1.38394 | 1.47247 | 1.81875 |
| 2 | 16 | 16 | 1.00000 | 1.11811 | 1.12987 | 1.40122 |
| 3 | 32 | 32 | 1.00000 | 1.03149 | 1.03300 | 1.12178 |
| 4 | 64 | 64 | 1.00000 | 1.00805 | 1.00824 | 1.03210 |
| 5 | 128 | 128 | 1.00000 | 1.00203 | 1.00205 | 1.00814 |
| 6 | 256 | 256 | 1.00000 | 1.00051 | 1.00051 | 1.00204 |
| 7 | 512 | 512 | 1.00000 | 1.00013 | 1.00013 | 1.00051 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.78615 | 1.97174 | 1.99657 | 1.99959 |

Tabelle 7.43: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.70695 | 1.73329 | 1.83080 | 1.87523 |
| 2 | 16 | 16 | 1.79231 | 1.82226 | 1.82374 | 1.87414 |
| 3 | 32 | 32 | 1.78790 | 1.88756 | 1.88756 | 1.90507 |
| 4 | 64 | 64 | 1.78660 | 1.92734 | 1.92734 | 1.93270 |
| 5 | 128 | 128 | 1.78627 | 1.94981 | 1.94981 | 1.95138 |
| 6 | 256 | 256 | 1.78618 | 1.96181 | 1.96181 | 1.96226 |
| 7 | 512 | 512 | 1.78616 | 1.96801 | 1.96801 | 1.96814 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.78615 | 1.97174 | 1.99657 | 1.99959 |

Tabelle 7.44: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 1.81474 | 2.22532 | 2.27653 | 2.30680 |
| 2 | 41 | 64 | 1.79322 | 2.06079 | 2.10033 | 2.25996 |
| 3 | 145 | 256 | 1.78794 | 1.99468 | 2.04766 | 2.06817 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.78660 | 1.97765 | 2.01489 | 2.02020 |
| 5 | 2113 | 4096 | 1.78627 | 1.97325 | 2.00126 | 2.00756 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.78618 | 1.97212 | 1.99778 | 2.00187 |
| 7 | 33025 | 65536 | 1.78616 | 1.97183 | 1.99688 | 2.00017 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.78615 | 1.97174 | 1.99657 | 1.99959 |

Tabelle 7.45: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.46, 7.47, 7.48 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S . Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 7.86136e-01 | 0.00 | 5.87794e-01 | 0.00 | 5.24100e-01 | 0.00 | 1.80841e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 7.86151e-01 | -0.00 | 8.53625e-01 | -0.54 | 8.66702e-01 | -0.73 | 5.98365e-01 | -1.73 |
| 3 | 32 | 32 | 7.86151e-01 | -0.00 | 9.40249e-01 | -0.14 | 9.63577e-01 | -0.15 | 8.77811e-01 | -0.55 |
| 4 | 64 | 64 | 7.86151e-01 | -0.00 | 9.63687e-01 | -0.04 | 9.88334e-01 | -0.04 | 9.67492e-01 | -0.14 |
| 5 | 128 | 128 | 7.86151e-01 | -0.00 | 9.69706e-01 | -0.01 | 9.94520e-01 | -0.01 | 9.91453e-01 | -0.04 |
| 6 | 256 | 256 | 7.86151e-01 | -0.00 | 9.71227e-01 | -0.00 | 9.96061e-01 | -0.00 | 9.97548e-01 | -0.01 |
| 7 | 512 | 512 | 7.86151e-01 | -0.00 | 9.71609e-01 | -0.00 | 9.96446e-01 | -0.00 | 9.99078e-01 | -0.00 |

Tabelle 7.46: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 7.91977e-02 | 0.00 | 2.38445e-01 | 0.00 | 1.65770e-01 | 0.00 | 1.24360e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 6.15472e-03 | 3.69 | 1.49480e-01 | 0.67 | 1.72831e-01 | -0.06 | 1.25451e-01 | -0.01 |
| 3 | 32 | 32 | 1.74913e-03 | 1.82 | 8.41801e-02 | 0.83 | 1.09011e-01 | 0.66 | 9.45210e-02 | 0.41 |
| 4 | 64 | 64 | 4.49457e-04 | 1.96 | 4.44013e-02 | 0.92 | 6.92382e-02 | 0.65 | 6.68906e-02 | 0.50 |
| 5 | 128 | 128 | 1.13665e-04 | 1.98 | 2.19261e-02 | 1.02 | 4.67630e-02 | 0.57 | 4.82062e-02 | 0.47 |
| 6 | 256 | 256 | 2.85641e-05 | 1.99 | 9.93014e-03 | 1.14 | 3.47671e-02 | 0.43 | 3.73323e-02 | 0.37 |
| 7 | 512 | 512 | 7.15823e-06 | 2.00 | 3.72645e-03 | 1.41 | 2.85634e-02 | 0.28 | 3.14481e-02 | 0.25 |

Tabelle 7.47: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 2.85871e-02 | 0.00 | 2.53586e-01 | 0.00 | 2.79956e-01 | 0.00 | 3.07206e-01 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 7.06665e-03 | 2.02 | 8.90501e-02 | 1.51 | 1.03752e-01 | 1.43 | 2.60373e-01 | 0.24 |
| 3 | 145 | 256 | 1.78474e-03 | 1.99 | 2.29432e-02 | 1.96 | 5.10827e-02 | 1.02 | 6.85759e-02 | 1.92 |
| 4 | 545 | 1024 | 4.51657e-04 | 1.98 | 5.91492e-03 | 1.96 | 1.83146e-02 | 1.48 | 2.06105e-02 | 1.73 |
| 5 | 2113 | 4096 | 1.13806e-04 | 1.99 | 1.51724e-03 | 1.96 | 4.68424e-03 | 1.97 | 7.97319e-03 | 1.37 |
| 6 | 8321 | 16384 | 2.85735e-05 | 1.99 | 3.84756e-04 | 1.98 | 1.20424e-03 | 1.96 | 2.27649e-03 | 1.81 |
| 7 | 33025 | 65536 | 7.15892e-06 | 2.00 | 9.67982e-05 | 1.99 | 3.07889e-04 | 1.97 | 5.80198e-04 | 1.97 |

Tabelle 7.48: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.11 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.25). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}},$$

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}},$$

$$c_K \approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := \frac{1}{\mu_{h,1}^{\text{FEM}}}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.25) und (5.27). In den Tabellen 7.49, 7.50 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.559862961478403$ betrachtet wird, man siehe (7.2).

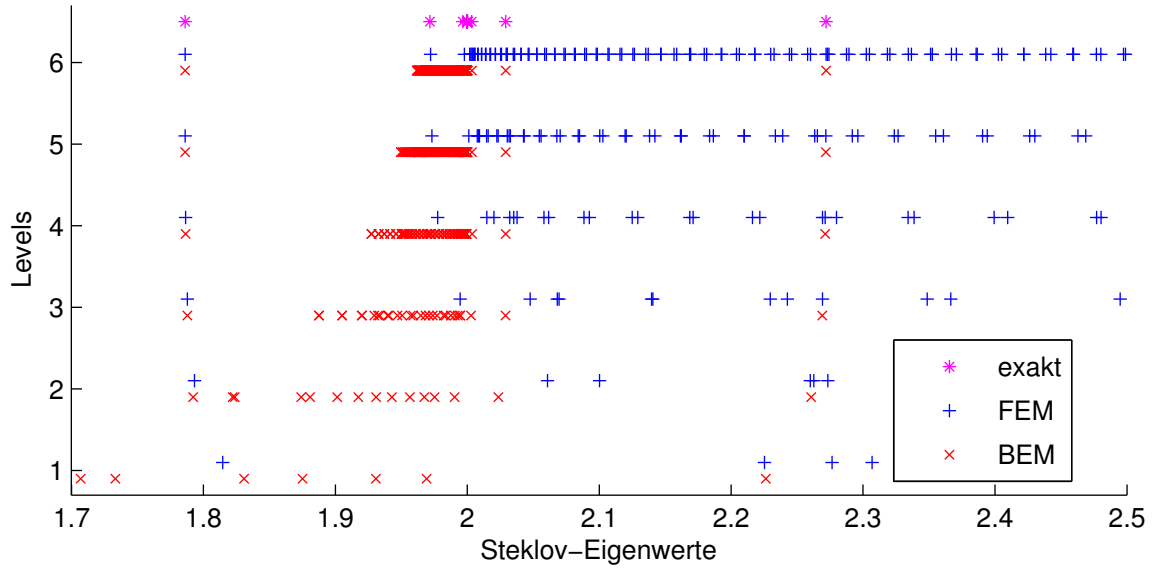


Abbildung 7.11: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 0.58584 | 2.59760e-02 | 0.00 | 0.55082 | 9.04234e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.55794 | 1.92255e-03 | 3.76 | 0.55766 | 2.20268e-03 | 2.04 |
| 3 | 32 | 32 | 0.55932 | 5.47724e-04 | 1.81 | 0.55931 | 5.57115e-04 | 1.98 |
| 4 | 64 | 64 | 0.55972 | 1.40845e-04 | 1.96 | 0.55972 | 1.41354e-04 | 1.98 |
| 5 | 128 | 128 | 0.55983 | 3.56255e-05 | 1.98 | 0.55983 | 3.56536e-05 | 1.99 |
| 6 | 256 | 256 | 0.55985 | 8.95316e-06 | 1.99 | 0.55985 | 8.95431e-06 | 1.99 |
| 7 | 512 | 512 | 0.55986 | 2.24371e-06 | 2.00 | 0.55986 | 2.24364e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.49: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.55104 | 8.81936e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.55766 | 2.20629e-03 | 2.00 |
| 3 | 145 | 256 | 0.55930 | 5.58863e-04 | 1.98 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.55972 | 1.41534e-04 | 1.98 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.55983 | 3.56699e-05 | 1.99 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.55985 | 8.95611e-06 | 1.99 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.55986 | 2.24393e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.50: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.12 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

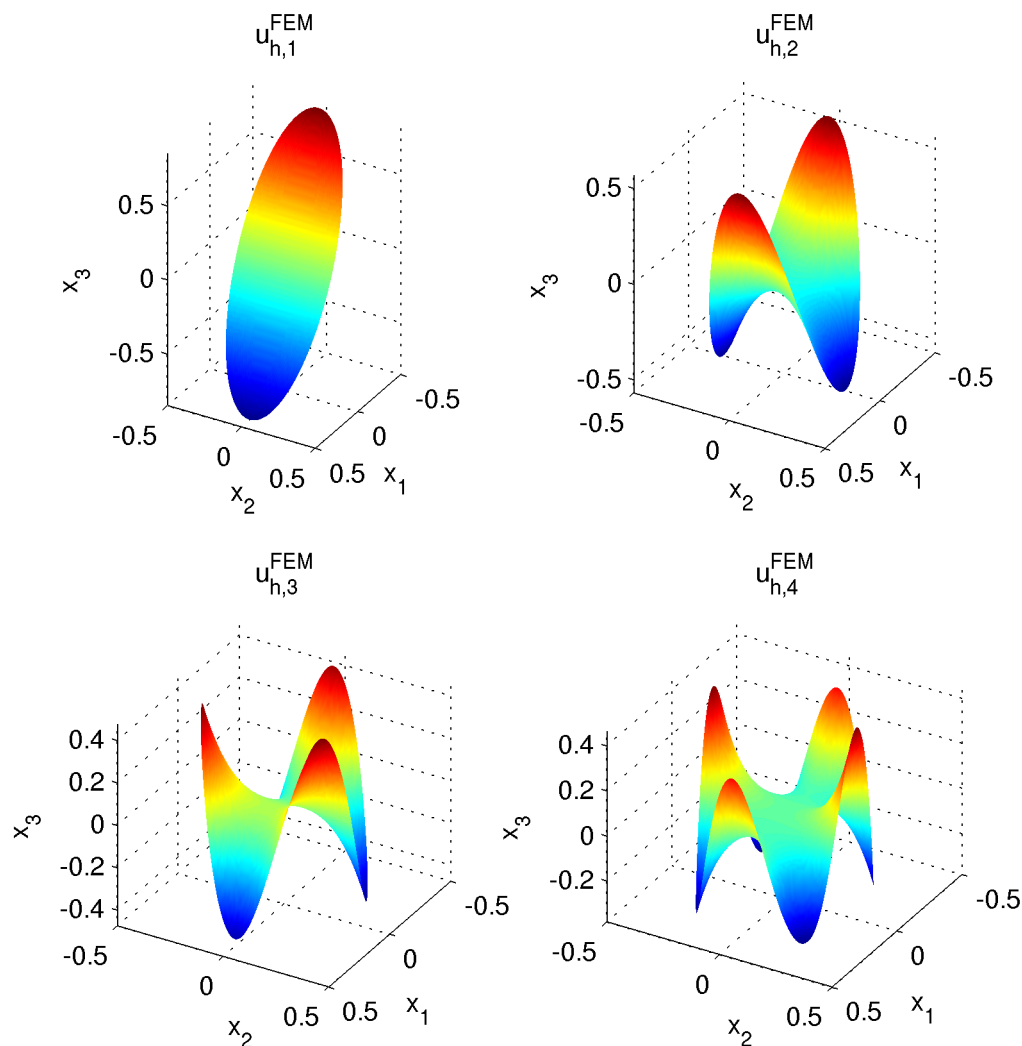


Abbildung 7.12: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.3 C-förmiges Gebiet

Sei $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ mit

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0.2^2 < x_1^2 + x_2^2 < 0.4^2, x_2 \geq 0\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1 + 0.3)^2 + x_2^2 < 0.1^2, x_2 \leq 0\}, \\ \Omega_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 0.3)^2 + x_2^2 < 0.1^2, x_2 \leq 0\}\end{aligned}$$

ein C-förmiges Gebiet mit dem Durchmesser $\text{diam}(\Omega) = 0.8 < 1$ und mit dem Rand Γ . Das C-förmige Gebiet Ω ist glatt, nichtkonvex und wurde durch Vielecke $\Omega_h \subset \Omega$ approximiert. Die Triangulierungen für das C-förmige Gebiet Ω sind in Abbildung 7.13 dargestellt.

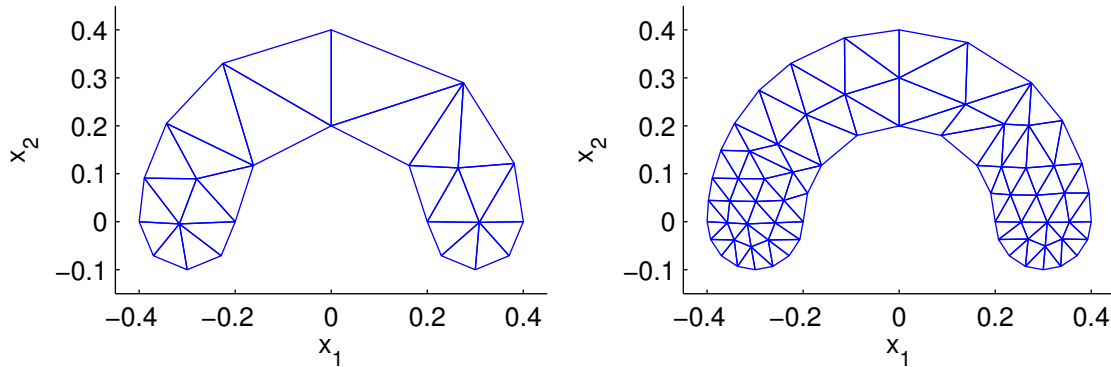


Abbildung 7.13: Triangulierungen für das C-förmige Gebiet für Level 0 und Level 1.

7.3.1 Neumann-Randwertproblem

Die Neumann-Daten $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (6.22) seien so gewählt, dass $u \in H^1(\Omega)$ gegeben durch $u(x) := -\ln \|x - y\| + C$ mit $y = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (6.22) ist und $C \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $\langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}} u \rangle_{\Gamma} = 0$ gilt. Es seien $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die Lösungen von (6.24), (6.25) und (6.26) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Die $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sind für mehrere Levels in den Tabellen 7.51, 7.52, 7.53 gegeben und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^0\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|--|------|
| 0 | 19 | 19 | 4.53e-03 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.03e-03 | 2.14 |
| 2 | 76 | 76 | 2.50e-04 | 2.04 |
| 3 | 152 | 152 | 6.19e-05 | 2.02 |
| 4 | 304 | 304 | 1.54e-05 | 2.01 |
| 5 | 608 | 608 | 3.83e-06 | 2.00 |
| 6 | 1216 | 1216 | 9.57e-07 | 2.00 |

Tabelle 7.51: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^{-1}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 0 | 19 | 19 | 4.79e-03 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.07e-03 | 2.17 |
| 2 | 76 | 76 | 2.54e-04 | 2.07 |
| 3 | 152 | 152 | 6.21e-05 | 2.03 |
| 4 | 304 | 304 | 1.54e-05 | 2.01 |
| 5 | 608 | 608 | 3.84e-06 | 2.01 |
| 6 | 1216 | 1216 | 9.57e-07 | 2.00 |

Tabelle 7.52: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - u_h^{\text{FEM}}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 0 | 23 | 25 | 6.19e-03 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 1.76e-03 | 1.82 |
| 2 | 239 | 400 | 4.69e-04 | 1.91 |
| 3 | 877 | 1600 | 1.20e-04 | 1.97 |
| 4 | 3353 | 6400 | 3.02e-05 | 1.99 |
| 5 | 13105 | 25600 | 7.58e-06 | 2.00 |
| 6 | 51809 | 102400 | 1.90e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.53: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

7.3.2 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

Für das Steklov-Eigenwertproblem (4.10) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 8 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{\tilde{u}}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{\tilde{u}}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.29), (6.30) und (6.31) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.54, 7.55, 7.56 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 19 | 19 | 0.67477 | 2.54196 | 5.02243 | 6.45433 |
| 1 | 38 | 38 | 0.64702 | 2.43311 | 4.88740 | 7.38498 |
| 2 | 76 | 76 | 0.63977 | 2.40529 | 4.84432 | 7.38845 |
| 3 | 152 | 152 | 0.63791 | 2.39829 | 4.83339 | 7.38254 |
| 4 | 304 | 304 | 0.63744 | 2.39654 | 4.83071 | 7.38076 |
| 5 | 608 | 608 | 0.63732 | 2.39611 | 4.83005 | 7.38030 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.63729 | 2.39600 | 4.82989 | 7.38019 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.63728 | 2.39596 | 4.82983 | 7.38015 |

Tabelle 7.54: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 19 | 19 | 0.67897 | 2.57818 | 5.19736 | 7.47611 |
| 1 | 38 | 38 | 0.64755 | 2.43659 | 4.90483 | 7.44194 |
| 2 | 76 | 76 | 0.63984 | 2.40565 | 4.84575 | 7.39291 |
| 3 | 152 | 152 | 0.63792 | 2.39833 | 4.83352 | 7.38295 |
| 4 | 304 | 304 | 0.63744 | 2.39655 | 4.83072 | 7.38080 |
| 5 | 608 | 608 | 0.63732 | 2.39611 | 4.83005 | 7.38031 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.63729 | 2.39600 | 4.82989 | 7.38019 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.63728 | 2.39596 | 4.82983 | 7.38015 |

Tabelle 7.55: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 23 | 25 | 0.73670 | 2.76468 | 5.83288 | 8.97492 |
| 1 | 70 | 100 | 0.66670 | 2.51118 | 5.15127 | 7.94373 |
| 2 | 239 | 400 | 0.64512 | 2.42828 | 4.92148 | 7.54372 |
| 3 | 877 | 1600 | 0.63928 | 2.40440 | 4.85401 | 7.42363 |
| 4 | 3353 | 6400 | 0.63778 | 2.39810 | 4.83598 | 7.39124 |
| 5 | 13105 | 25600 | 0.63741 | 2.39650 | 4.83138 | 7.38294 |
| 6 | 51809 | 102400 | 0.63731 | 2.39609 | 4.83022 | 7.38085 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.63728 | 2.39596 | 4.82983 | 7.38015 |

Tabelle 7.56: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.57, 7.58, 7.59 für die ersten Levels dargestellt und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|-------|
| 0 | 19 | 19 | 3.74891e-02 | 0.00 | 1.45999e-01 | 0.00 | 1.92595e-01 | 0.00 | 9.25825e-01 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 9.73625e-03 | 1.95 | 3.71540e-02 | 1.97 | 5.75678e-02 | 1.74 | 4.83093e-03 | 7.58 |
| 2 | 76 | 76 | 2.49022e-03 | 1.97 | 9.33241e-03 | 1.99 | 1.44835e-02 | 1.99 | 8.30099e-03 | -0.78 |
| 3 | 152 | 152 | 6.29428e-04 | 1.98 | 2.32920e-03 | 2.00 | 3.56245e-03 | 2.02 | 2.38997e-03 | 1.80 |
| 4 | 304 | 304 | 1.58095e-04 | 1.99 | 5.80572e-04 | 2.00 | 8.77152e-04 | 2.02 | 6.10229e-04 | 1.97 |
| 5 | 608 | 608 | 3.95231e-05 | 2.00 | 1.44365e-04 | 2.01 | 2.15939e-04 | 2.02 | 1.51912e-04 | 2.01 |
| 6 | 1216 | 1216 | 9.75266e-06 | 2.02 | 3.57538e-05 | 2.01 | 5.30098e-05 | 2.03 | 3.74175e-05 | 2.02 |

Tabelle 7.57: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 19 | 19 | 4.16938e-02 | 0.00 | 1.82218e-01 | 0.00 | 3.67532e-01 | 0.00 | 9.59533e-02 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.02696e-02 | 2.02 | 4.06313e-02 | 2.16 | 7.49997e-02 | 2.29 | 6.17830e-02 | 0.64 |
| 2 | 76 | 76 | 2.55935e-03 | 2.00 | 9.68747e-03 | 2.07 | 1.59182e-02 | 2.24 | 1.27551e-02 | 2.28 |
| 3 | 152 | 152 | 6.38165e-04 | 2.00 | 2.36809e-03 | 2.03 | 3.69133e-03 | 2.11 | 2.79424e-03 | 2.19 |
| 4 | 304 | 304 | 1.59191e-04 | 2.00 | 5.85077e-04 | 2.02 | 8.90230e-04 | 2.05 | 6.51846e-04 | 2.10 |
| 5 | 608 | 608 | 3.96604e-05 | 2.00 | 1.44905e-04 | 2.01 | 2.17390e-04 | 2.03 | 1.56583e-04 | 2.06 |
| 6 | 1216 | 1216 | 9.76985e-06 | 2.02 | 3.58200e-05 | 2.02 | 5.31799e-05 | 2.03 | 3.79694e-05 | 2.04 |

Tabelle 7.58: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 23 | 25 | 9.94196e-02 | 0.00 | 3.68721e-01 | 0.00 | 1.00305e+00 | 0.00 | 1.59477e+00 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 2.94170e-02 | 1.76 | 1.15223e-01 | 1.68 | 3.21436e-01 | 1.64 | 5.63573e-01 | 1.50 |
| 2 | 239 | 400 | 7.84324e-03 | 1.91 | 3.23196e-02 | 1.83 | 9.16511e-02 | 1.81 | 1.63570e-01 | 1.78 |
| 3 | 877 | 1600 | 2.00402e-03 | 1.97 | 8.44223e-03 | 1.94 | 2.41731e-02 | 1.92 | 4.34790e-02 | 1.91 |
| 4 | 3353 | 6400 | 5.04315e-04 | 1.99 | 2.13988e-03 | 1.98 | 6.14819e-03 | 1.98 | 1.10924e-02 | 1.97 |
| 5 | 13105 | 25600 | 1.26227e-04 | 2.00 | 5.36614e-04 | 2.00 | 1.54325e-03 | 1.99 | 2.78890e-03 | 1.99 |
| 6 | 51809 | 102400 | 3.14337e-05 | 2.01 | 1.34002e-04 | 2.00 | 3.85616e-04 | 2.00 | 6.97906e-04 | 2.00 |

Tabelle 7.59: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.14 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

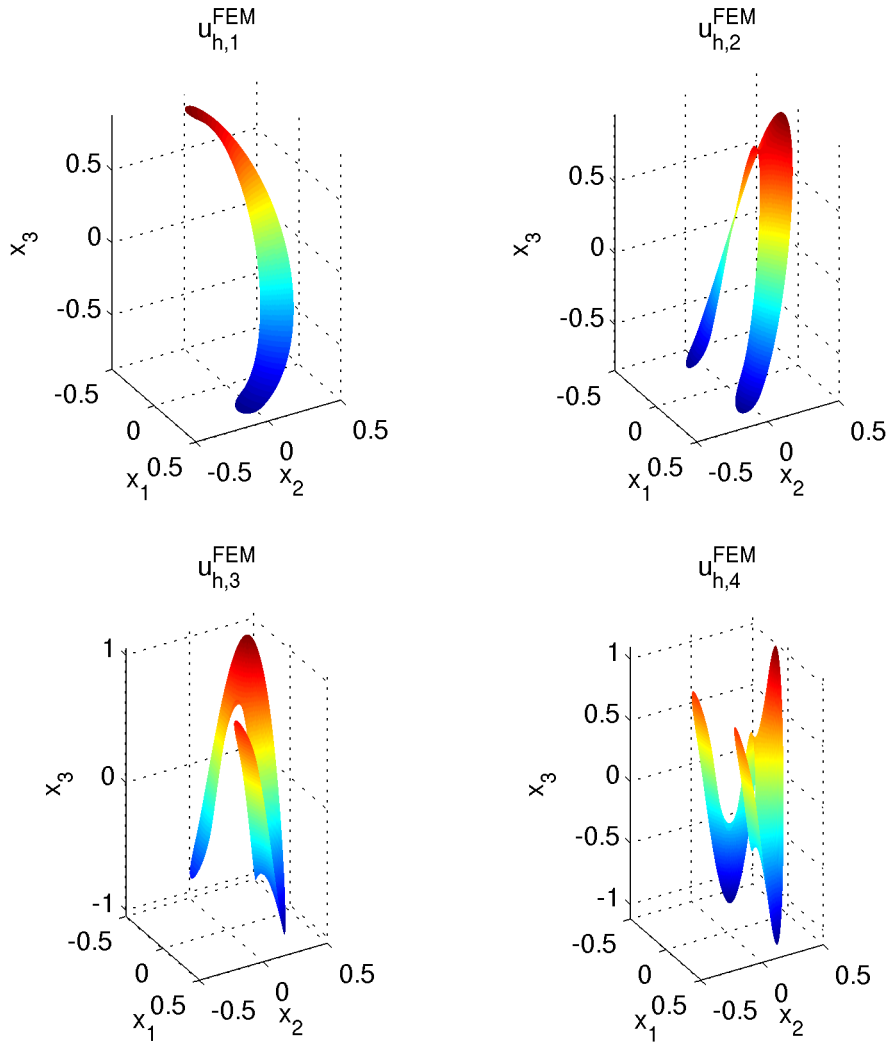


Abbildung 7.14: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.3.3 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfeldschichtoperator V^{-1}

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.8) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierte Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 8 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und

$\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.34), (6.35) und (6.36) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.60, 7.61, 7.62 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 19 | 19 | 0.13186 | 0.25733 | 0.25788 | 0.29309 |
| 1 | 38 | 38 | 0.12682 | 0.25540 | 0.26086 | 0.26161 |
| 2 | 76 | 76 | 0.12547 | 0.25631 | 0.25773 | 0.25785 |
| 3 | 152 | 152 | 0.12511 | 0.25652 | 0.25688 | 0.25691 |
| 4 | 304 | 304 | 0.12502 | 0.25657 | 0.25666 | 0.25667 |
| 5 | 608 | 608 | 0.12500 | 0.25658 | 0.25660 | 0.25661 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.12499 | 0.25658 | 0.25659 | 0.25659 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.12499 | 0.31514 | 0.39523 | 0.44638 |

Tabelle 7.60: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 19 | 19 | 0.13263 | 0.33185 | 0.41512 | 0.43995 |
| 1 | 38 | 38 | 0.12692 | 0.31898 | 0.39913 | 0.45268 |
| 2 | 76 | 76 | 0.12548 | 0.31606 | 0.39592 | 0.44766 |
| 3 | 152 | 152 | 0.12511 | 0.31537 | 0.39537 | 0.44664 |
| 4 | 304 | 304 | 0.12502 | 0.31520 | 0.39526 | 0.44644 |
| 5 | 608 | 608 | 0.12500 | 0.31516 | 0.39524 | 0.44640 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.12499 | 0.31515 | 0.39523 | 0.44639 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.12499 | 0.31514 | 0.39523 | 0.44638 |

Tabelle 7.61: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 23 | 25 | 0.14422 | 0.36328 | 0.47768 | 0.55390 |
| 1 | 70 | 100 | 0.13066 | 0.33347 | 0.43411 | 0.49825 |
| 2 | 239 | 400 | 0.12650 | 0.32067 | 0.40879 | 0.46934 |
| 3 | 877 | 1600 | 0.12538 | 0.31663 | 0.39910 | 0.45390 |
| 4 | 3353 | 6400 | 0.12509 | 0.31552 | 0.39625 | 0.44846 |
| 5 | 13105 | 25600 | 0.12501 | 0.31524 | 0.39549 | 0.44692 |
| 6 | 51809 | 102400 | 0.12500 | 0.31517 | 0.39530 | 0.44652 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.12499 | 0.31514 | 0.39523 | 0.44638 |

Tabelle 7.62: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.63, 7.64, 7.65 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0$ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------------|------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| 0 | 19 | 19 | 6.86684e-03 | 0.00 | 5.78141e-02 | 0.00 | 1.37348e-01 | 0.00 | 1.53290e-01 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.83098e-03 | 1.91 | 5.97387e-02 | -0.05 | 1.34371e-01 | 0.03 | 1.84776e-01 | -0.27 |
| 2 | 76 | 76 | 4.75598e-04 | 1.94 | 5.88359e-02 | 0.02 | 1.37505e-01 | -0.03 | 1.88538e-01 | -0.03 |
| 3 | 152 | 152 | 1.20973e-04 | 1.98 | 5.86171e-02 | 0.01 | 1.38349e-01 | -0.01 | 1.89473e-01 | -0.01 |
| 4 | 304 | 304 | 3.04242e-05 | 1.99 | 5.85692e-02 | 0.00 | 1.38571e-01 | -0.00 | 1.89712e-01 | -0.00 |
| 5 | 608 | 608 | 7.56243e-06 | 2.01 | 5.85611e-02 | 0.00 | 1.38631e-01 | -0.00 | 1.89776e-01 | -0.00 |
| 6 | 1216 | 1216 | 1.81124e-06 | 2.06 | 5.85610e-02 | 0.00 | 1.38647e-01 | -0.00 | 1.89795e-01 | -0.00 |

Tabelle 7.63: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 19 | 19 | 7.64024e-03 | 0.00 | 1.67057e-02 | 0.00 | 1.98883e-02 | 0.00 | 6.43436e-03 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.93248e-03 | 1.98 | 3.84018e-03 | 2.12 | 3.89332e-03 | 2.35 | 6.29760e-03 | 0.03 |
| 2 | 76 | 76 | 4.89098e-04 | 1.98 | 9.20646e-04 | 2.06 | 6.88064e-04 | 2.50 | 1.27653e-03 | 2.30 |
| 3 | 152 | 152 | 1.22713e-04 | 1.99 | 2.24712e-04 | 2.03 | 1.38269e-04 | 2.32 | 2.51823e-04 | 2.34 |
| 4 | 304 | 304 | 3.06450e-05 | 2.00 | 5.53584e-05 | 2.02 | 3.02635e-05 | 2.19 | 5.39263e-05 | 2.22 |
| 5 | 608 | 608 | 7.59022e-06 | 2.01 | 1.36361e-05 | 2.02 | 6.86853e-06 | 2.14 | 1.20394e-05 | 2.16 |
| 6 | 1216 | 1216 | 1.81473e-06 | 2.06 | 3.32298e-06 | 2.04 | 1.66607e-06 | 2.04 | 2.55820e-06 | 2.23 |

Tabelle 7.64: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 23 | 25 | 1.92304e-02 | 0.00 | 4.81348e-02 | 0.00 | 8.24473e-02 | 0.00 | 1.07515e-01 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 5.67147e-03 | 1.76 | 1.83323e-02 | 1.39 | 3.88799e-02 | 1.08 | 5.18646e-02 | 1.05 |
| 2 | 239 | 400 | 1.51202e-03 | 1.91 | 5.53074e-03 | 1.73 | 1.35560e-02 | 1.52 | 2.29575e-02 | 1.18 |
| 3 | 877 | 1600 | 3.86735e-04 | 1.97 | 1.49092e-03 | 1.89 | 3.86961e-03 | 1.81 | 7.51909e-03 | 1.61 |
| 4 | 3353 | 6400 | 9.73562e-05 | 1.99 | 3.82740e-04 | 1.96 | 1.01658e-03 | 1.93 | 2.07868e-03 | 1.85 |
| 5 | 13105 | 25600 | 2.43248e-05 | 2.00 | 9.64304e-05 | 1.99 | 2.58383e-04 | 1.98 | 5.38665e-04 | 1.95 |
| 6 | 51809 | 102400 | 6.00282e-06 | 2.02 | 2.41035e-05 | 2.00 | 6.49736e-05 | 1.99 | 1.36140e-04 | 1.98 |

Tabelle 7.65: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.15 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 8 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.16). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$\begin{aligned} c_K &\approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := \tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}, \\ c_K &\approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := 1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}, \\ c_K &\approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := 1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} \end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$\left| c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} \right|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.16) und (5.18). In den Tabellen 7.66, 7.67 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.8750104635339074$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ für die Formulierung mit dem hypersingulären Operator in (6.37) für Level 8 berechnet wird.

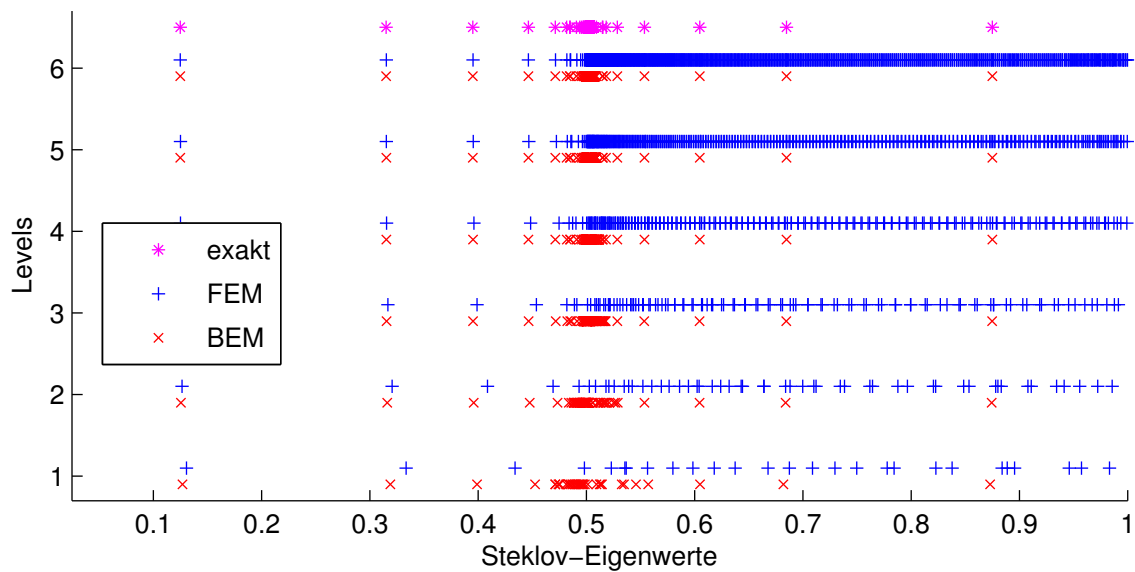


Abbildung 7.15: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 19 | 19 | 0.86737 | 7.64024e-03 | 0.00 | 0.86762 | 7.39478e-03 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 0.87308 | 1.93248e-03 | 1.98 | 0.87309 | 1.92284e-03 | 1.94 |
| 2 | 76 | 76 | 0.87452 | 4.89098e-04 | 1.98 | 0.87452 | 4.88431e-04 | 1.98 |
| 3 | 152 | 152 | 0.87489 | 1.22713e-04 | 1.99 | 0.87489 | 1.22627e-04 | 1.99 |
| 4 | 304 | 304 | 0.87498 | 3.06451e-05 | 2.00 | 0.87498 | 3.06309e-05 | 2.00 |
| 5 | 608 | 608 | 0.87500 | 7.59030e-06 | 2.01 | 0.87500 | 7.58803e-06 | 2.01 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.87501 | 1.81481e-06 | 2.06 | 0.87501 | 1.81447e-06 | 2.06 |

Tabelle 7.66: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 23 | 25 | 0.85578 | 1.92304e-02 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 0.86934 | 5.67147e-03 | 1.76 |
| 2 | 239 | 400 | 0.87350 | 1.51202e-03 | 1.91 |
| 3 | 877 | 1600 | 0.87462 | 3.86735e-04 | 1.97 |
| 4 | 3353 | 6400 | 0.87491 | 9.73563e-05 | 1.99 |
| 5 | 13105 | 25600 | 0.87499 | 2.43249e-05 | 2.00 |
| 6 | 51809 | 102400 | 0.87500 | 6.00290e-06 | 2.02 |

Tabelle 7.67: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.16 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

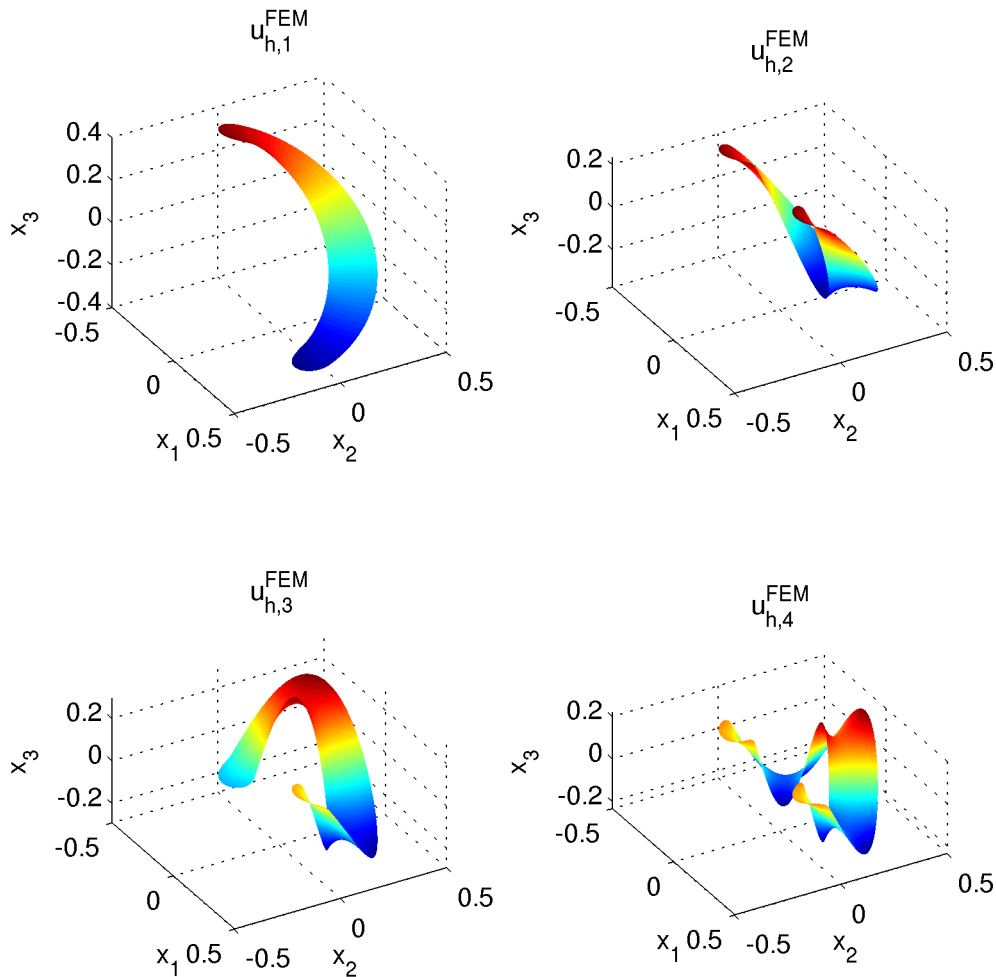


Abbildung 7.16: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.3.4 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.20) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 8 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und

$\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.38), (6.39) und (6.40) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.68, 7.69, 7.70 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 19 | 19 | 1.01930 | 1.02802 | 1.15342 | 1.16728 |
| 1 | 38 | 38 | 1.00000 | 1.02163 | 1.02435 | 1.08781 |
| 2 | 76 | 76 | 1.00000 | 1.00561 | 1.00595 | 1.02273 |
| 3 | 152 | 152 | 1.00000 | 1.00143 | 1.00147 | 1.00575 |
| 4 | 304 | 304 | 1.00000 | 1.00036 | 1.00036 | 1.00144 |
| 5 | 608 | 608 | 1.00000 | 1.00009 | 1.00009 | 1.00036 |
| 6 | 1216 | 1216 | 1.00000 | 1.00002 | 1.00002 | 1.00009 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.14284 | 1.46016 | 1.65353 | 1.80630 |

Tabelle 7.68: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 19 | 19 | 1.16012 | 1.50586 | 1.71162 | 1.75916 |
| 1 | 38 | 38 | 1.14633 | 1.46916 | 1.66298 | 1.82039 |
| 2 | 76 | 76 | 1.14361 | 1.46218 | 1.65495 | 1.80885 |
| 3 | 152 | 152 | 1.14302 | 1.46064 | 1.65383 | 1.80685 |
| 4 | 304 | 304 | 1.14289 | 1.46028 | 1.65360 | 1.80644 |
| 5 | 608 | 608 | 1.14285 | 1.46019 | 1.65355 | 1.80634 |
| 6 | 1216 | 1216 | 1.14285 | 1.46016 | 1.65353 | 1.80631 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.14284 | 1.46016 | 1.65353 | 1.80630 |

Tabelle 7.69: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 23 | 25 | 1.25333 | 1.64109 | 1.97606 | 2.23053 |
| 1 | 70 | 100 | 1.17874 | 1.53374 | 1.80596 | 2.00547 |
| 2 | 239 | 400 | 1.15278 | 1.48317 | 1.70811 | 1.89598 |
| 3 | 877 | 1600 | 1.14542 | 1.46647 | 1.66934 | 1.83614 |
| 4 | 3353 | 6400 | 1.14349 | 1.46179 | 1.65771 | 1.81462 |
| 5 | 13105 | 25600 | 1.14301 | 1.46057 | 1.65460 | 1.80847 |
| 6 | 51809 | 102400 | 1.14288 | 1.46026 | 1.65380 | 1.80685 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.14284 | 1.46016 | 1.65353 | 1.80630 |

Tabelle 7.70: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.71, 7.72, 7.73 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 0 | 19 | 19 | 1.23546e-01 | 0.00 | 4.32141e-01 | 0.00 | 5.00104e-01 | 0.00 | 6.39024e-01 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 1.42843e-01 | -0.21 | 4.38531e-01 | -0.02 | 6.29174e-01 | -0.33 | 7.18494e-01 | -0.17 |
| 2 | 76 | 76 | 1.42843e-01 | -0.00 | 4.54549e-01 | -0.05 | 6.47581e-01 | -0.04 | 7.83577e-01 | -0.13 |
| 3 | 152 | 152 | 1.42843e-01 | -0.00 | 4.58731e-01 | -0.01 | 6.52059e-01 | -0.01 | 8.00552e-01 | -0.03 |
| 4 | 304 | 304 | 1.42843e-01 | -0.00 | 4.59797e-01 | -0.00 | 6.53163e-01 | -0.00 | 8.04860e-01 | -0.01 |
| 5 | 608 | 608 | 1.42843e-01 | -0.00 | 4.60067e-01 | -0.00 | 6.53437e-01 | -0.00 | 8.05943e-01 | -0.00 |
| 6 | 1216 | 1216 | 1.42843e-01 | -0.00 | 4.60134e-01 | -0.00 | 6.53505e-01 | -0.00 | 8.06214e-01 | -0.00 |

Tabelle 7.71: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 19 | 19 | 1.72750e-02 | 0.00 | 4.57059e-02 | 0.00 | 5.80936e-02 | 0.00 | 4.71418e-02 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 3.48280e-03 | 2.31 | 9.00100e-03 | 2.34 | 9.44862e-03 | 2.62 | 1.40849e-02 | 1.74 |
| 2 | 76 | 76 | 7.63320e-04 | 2.19 | 2.02807e-03 | 2.15 | 1.41846e-03 | 2.74 | 2.54212e-03 | 2.47 |
| 3 | 152 | 152 | 1.76101e-04 | 2.12 | 4.84454e-04 | 2.07 | 2.98602e-04 | 2.25 | 5.49024e-04 | 2.21 |
| 4 | 304 | 304 | 4.20171e-05 | 2.07 | 1.18502e-04 | 2.03 | 7.14303e-05 | 2.06 | 1.37187e-04 | 2.00 |
| 5 | 608 | 608 | 1.01625e-05 | 2.05 | 2.91184e-05 | 2.02 | 1.72779e-05 | 2.05 | 3.41251e-05 | 2.01 |
| 6 | 1216 | 1216 | 2.40071e-06 | 2.08 | 7.08906e-06 | 2.04 | 4.36431e-06 | 1.99 | 7.69115e-06 | 2.15 |

Tabelle 7.72: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 23 | 25 | 1.10482e-01 | 0.00 | 1.80929e-01 | 0.00 | 3.22531e-01 | 0.00 | 4.24223e-01 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 3.58937e-02 | 1.62 | 7.35794e-02 | 1.30 | 1.52432e-01 | 1.08 | 1.99169e-01 | 1.09 |
| 2 | 239 | 400 | 9.93407e-03 | 1.85 | 2.30138e-02 | 1.68 | 5.45784e-02 | 1.48 | 8.96761e-02 | 1.15 |
| 3 | 877 | 1600 | 2.57409e-03 | 1.95 | 6.30933e-03 | 1.87 | 1.58071e-02 | 1.79 | 2.98354e-02 | 1.59 |
| 4 | 3353 | 6400 | 6.50682e-04 | 1.98 | 1.63151e-03 | 1.95 | 4.18636e-03 | 1.92 | 8.31203e-03 | 1.84 |
| 5 | 13105 | 25600 | 1.63075e-04 | 2.00 | 4.12401e-04 | 1.98 | 1.06848e-03 | 1.97 | 2.16299e-03 | 1.94 |
| 6 | 51809 | 102400 | 4.06871e-05 | 2.00 | 1.03345e-04 | 2.00 | 2.69135e-04 | 1.99 | 5.48015e-04 | 1.98 |

Tabelle 7.73: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.17 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 8 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.25). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}},$$

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}},$$

$$c_K \approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := \frac{1}{\mu_{h,1}^{\text{FEM}}}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.25) und (5.27). In den Tabellen 7.74, 7.75 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.8750104635339074$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ für die Formulierung mit dem hypersingulären Operator in (6.37) für Level 8 berechnet wird.

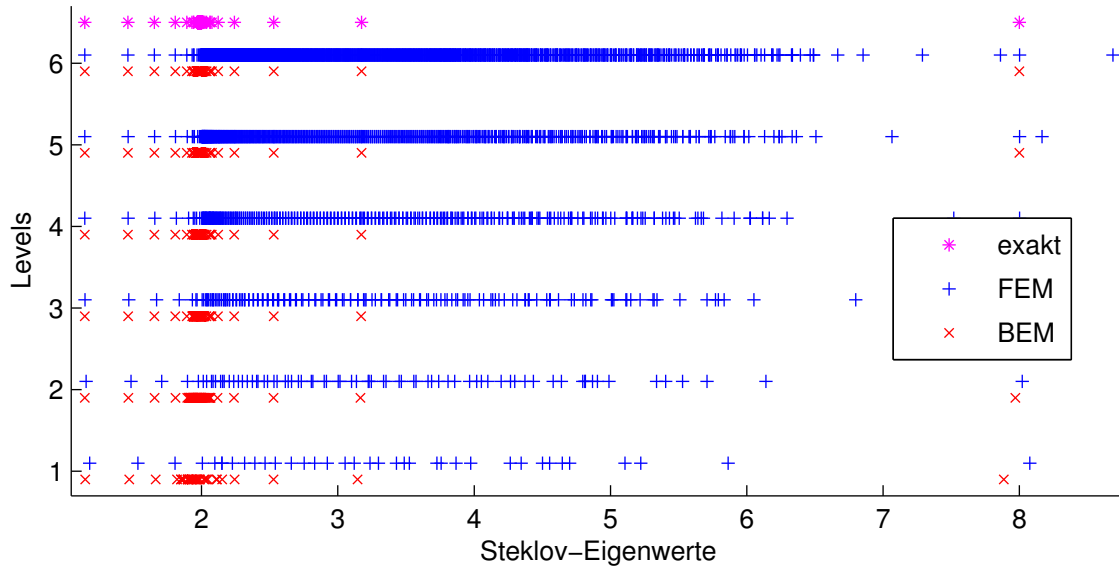


Abbildung 7.17: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 19 | 19 | 0.86198 | 1.30296e-02 | 0.00 | 0.86839 | 6.62532e-03 | 0.00 |
| 1 | 38 | 38 | 0.87235 | 2.65848e-03 | 2.29 | 0.87319 | 1.82273e-03 | 1.86 |
| 2 | 76 | 76 | 0.87443 | 5.84041e-04 | 2.19 | 0.87453 | 4.75848e-04 | 1.94 |
| 3 | 152 | 152 | 0.87488 | 1.34811e-04 | 2.12 | 0.87489 | 1.21091e-04 | 1.97 |
| 4 | 304 | 304 | 0.87498 | 3.21696e-05 | 2.07 | 0.87498 | 3.04449e-05 | 1.99 |
| 5 | 608 | 608 | 0.87500 | 7.78148e-06 | 2.05 | 0.87500 | 7.56544e-06 | 2.01 |
| 6 | 1216 | 1216 | 0.87501 | 1.83878e-06 | 2.08 | 0.87501 | 1.81171e-06 | 2.06 |

Tabelle 7.74: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 23 | 25 | 0.79788 | 7.71328e-02 | 0.00 |
| 1 | 70 | 100 | 0.84837 | 2.66449e-02 | 1.53 |
| 2 | 239 | 400 | 0.86747 | 7.54041e-03 | 1.82 |
| 3 | 877 | 1600 | 0.87304 | 1.96641e-03 | 1.94 |
| 4 | 3353 | 6400 | 0.87451 | 4.97908e-04 | 1.98 |
| 5 | 13105 | 25600 | 0.87489 | 1.24840e-04 | 2.00 |
| 6 | 51809 | 102400 | 0.87498 | 3.11514e-05 | 2.00 |

Tabelle 7.75: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.18 dargestellt, wobei man keine Singularitäten erkennt.

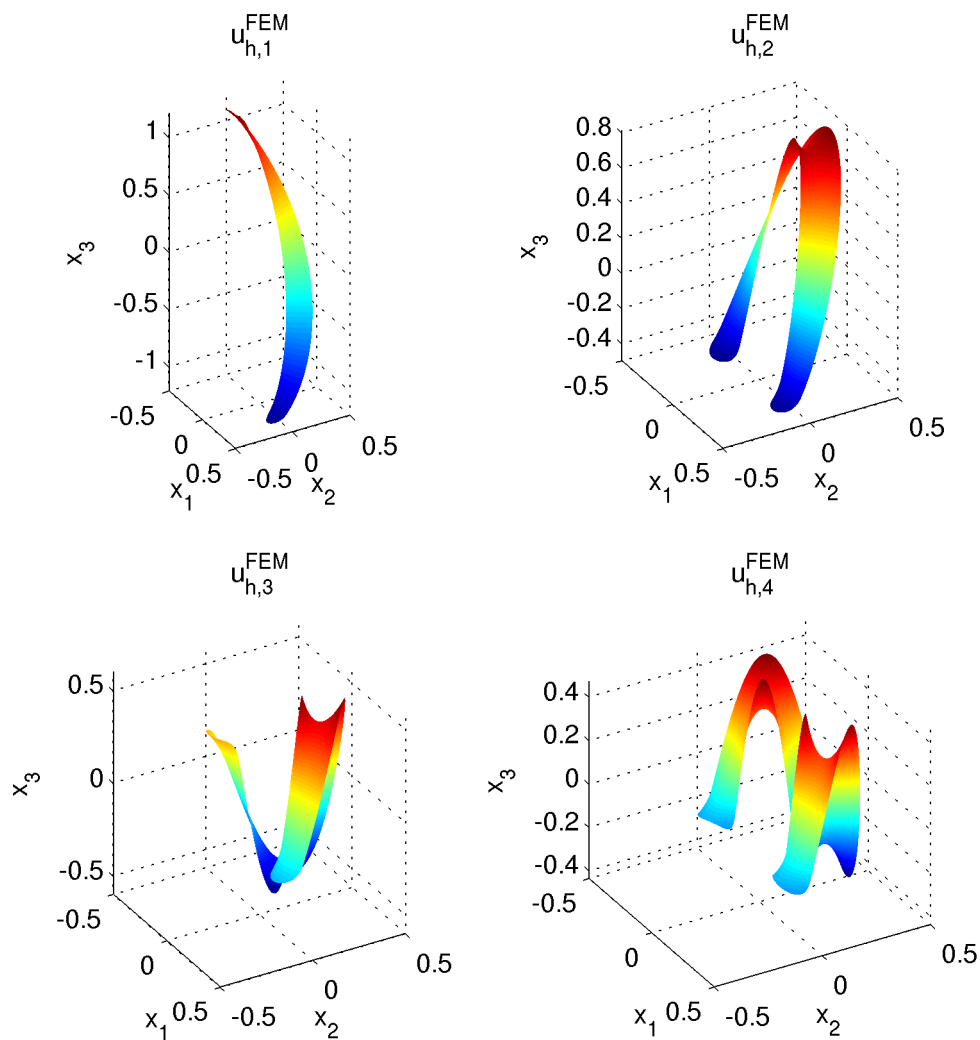


Abbildung 7.18: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.4 Quadrat

Sei $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -0.25 < x_1 < 0.25, -0.25 < x_2 < 0.25\}$ ein Quadrat mit dem Durchmesser $\text{diam}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ und mit dem Rand Γ . Die Triangulierungen für das Quadrat Ω sind in Abbildung 7.19 dargestellt.

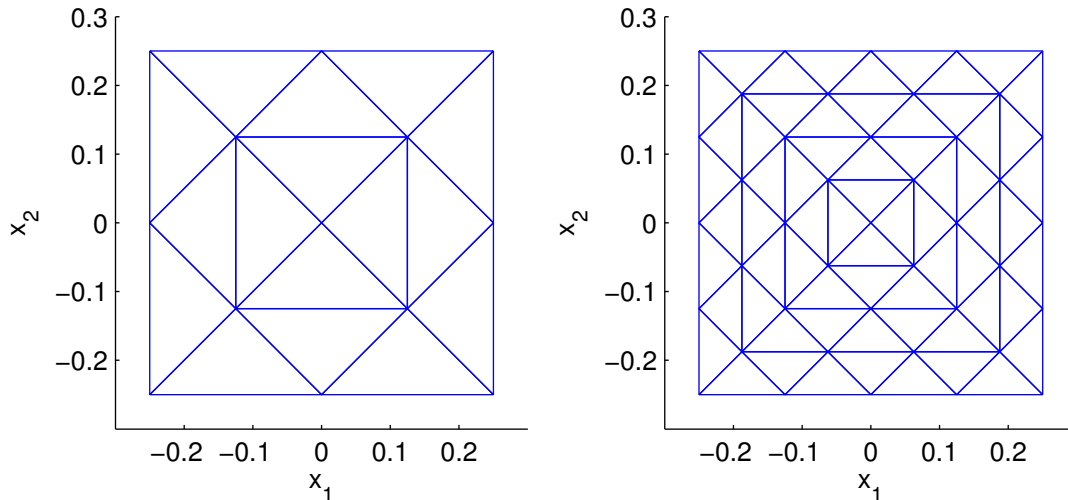


Abbildung 7.19: Triangulierungen für das Quadrat für Level 1 und Level 2.

7.4.1 Neumann-Randwertproblem

Die Neumann-Daten $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (6.22) seien so gewählt, dass $u \in H^1(\Omega)$ gegeben durch $u(x) := -\ln \|x - y\| + C$ mit $y = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (6.22) ist und $C \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $\langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}} u \rangle_\Gamma = 0$ gilt. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die Lösungen von (6.24), (6.25) und (6.26) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Die $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sind für mehrere Levels in den Tabellen 7.76, 7.77, 7.78 gegeben und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 8 | 8 | 6.26e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.70e-03 | 1.88 |
| 3 | 32 | 32 | 4.39e-04 | 1.95 |
| 4 | 64 | 64 | 1.12e-04 | 1.97 |
| 5 | 128 | 128 | 2.82e-05 | 1.99 |
| 6 | 256 | 256 | 7.09e-06 | 1.99 |
| 7 | 512 | 512 | 1.78e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.76: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}} u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^{-1}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 8 | 8 | 6.80e-03 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.76e-03 | 1.95 |
| 3 | 32 | 32 | 4.48e-04 | 1.97 |
| 4 | 64 | 64 | 1.13e-04 | 1.99 |
| 5 | 128 | 128 | 2.84e-05 | 1.99 |
| 6 | 256 | 256 | 7.12e-06 | 2.00 |
| 7 | 512 | 512 | 1.78e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.77: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - u_h^{\text{FEM}}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 1 | 13 | 16 | 8.95e-03 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 2.50e-03 | 1.84 |
| 3 | 145 | 256 | 6.58e-04 | 1.92 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.69e-04 | 1.96 |
| 5 | 2113 | 4096 | 4.27e-05 | 1.98 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.08e-05 | 1.99 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.70e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.78: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

7.4.2 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

Für das Steklov-Eigenwertproblem (4.10) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 10 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.29), (6.30) und (6.31) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.79, 7.80, 7.81 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.74707 | 2.74707 | 3.90352 | 5.77147 |
| 2 | 16 | 16 | 2.75410 | 2.75410 | 3.98944 | 8.90285 |
| 3 | 32 | 32 | 2.75314 | 2.75314 | 3.99889 | 9.26939 |
| 4 | 64 | 64 | 2.75302 | 2.75302 | 3.99987 | 9.29359 |
| 5 | 128 | 128 | 2.75301 | 2.75301 | 3.99999 | 9.29464 |
| 6 | 256 | 256 | 2.75301 | 2.75301 | 4.00000 | 9.29456 |
| 7 | 512 | 512 | 2.75301 | 2.75301 | 4.00000 | 9.29455 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.75301 | | 4 | 9.29455 |

Tabelle 7.79: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 2.81144 | 2.81144 | 4.00008 | 9.47658 |
| 2 | 16 | 16 | 2.75866 | 2.75866 | 4.00002 | 9.38519 |
| 3 | 32 | 32 | 2.75352 | 2.75352 | 4.00000 | 9.30595 |
| 4 | 64 | 64 | 2.75306 | 2.75306 | 4.00000 | 9.29702 |
| 5 | 128 | 128 | 2.75302 | 2.75302 | 4.00000 | 9.29479 |
| 6 | 256 | 256 | 2.75301 | 2.75301 | 4.00000 | 9.29458 |
| 7 | 512 | 512 | 2.75301 | 2.75301 | 4.00000 | 9.29455 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.75301 | | 4 | 9.29455 |

Tabelle 7.80: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 2.88579 | 2.88579 | 4.50000 | 12.00000 |
| 2 | 41 | 64 | 2.79275 | 2.79275 | 4.12403 | 10.22237 |
| 3 | 145 | 256 | 2.76341 | 2.76341 | 4.03111 | 9.54907 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.75564 | 2.75564 | 4.00780 | 9.35969 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.75367 | 2.75367 | 4.00195 | 9.31093 |
| 6 | 8321 | 16384 | 2.75318 | 2.75318 | 4.00049 | 9.29865 |
| 7 | 33025 | 65536 | 2.75305 | 2.75305 | 4.00012 | 9.29558 |
| $\mu_j \approx$ | | | 2.75301 | | 4 | 9.29455 |

Tabelle 7.81: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.82, 7.83, 7.84 für die ersten Levels dargestellt und die Konvergenzordnungen sind 3 für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$, $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ sowie 2 für die Approximation S_h^{FEM} .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 5.94568e-03 | 0.00 | 5.94568e-03 | 0.00 | 9.64751e-02 | 0.00 | 3.52308e+00 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 1.09200e-03 | 2.44 | 1.09200e-03 | 2.44 | 1.05574e-02 | 3.19 | 3.91704e-01 | 3.17 |
| 3 | 32 | 32 | 1.25493e-04 | 3.12 | 1.25493e-04 | 3.12 | 1.11406e-03 | 3.24 | 2.51639e-02 | 3.96 |
| 4 | 64 | 64 | 1.28075e-05 | 3.29 | 1.28075e-05 | 3.29 | 1.25266e-04 | 3.15 | 9.56146e-04 | 4.72 |
| 5 | 128 | 128 | 1.41456e-06 | 3.18 | 1.41454e-06 | 3.18 | 1.46901e-05 | 3.09 | 8.81190e-05 | 3.44 |
| 6 | 256 | 256 | 1.72898e-07 | 3.03 | 1.72879e-07 | 3.03 | 1.74753e-06 | 3.07 | 9.95147e-06 | 3.15 |
| 7 | 512 | 512 | 2.34438e-08 | 2.88 | 2.34252e-08 | 2.88 | 2.05845e-07 | 3.09 | 1.16407e-06 | 3.10 |

Tabelle 7.82: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 5.84311e-02 | 0.00 | 5.84311e-02 | 0.00 | 8.02369e-05 | 0.00 | 1.82031e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 5.64542e-03 | 3.37 | 5.64542e-03 | 3.37 | 1.99976e-05 | 2.00 | 9.06436e-02 | 1.01 |
| 3 | 32 | 32 | 5.07071e-04 | 3.48 | 5.07072e-04 | 3.48 | 4.99159e-06 | 2.00 | 1.14040e-02 | 2.99 |
| 4 | 64 | 64 | 4.78066e-05 | 3.41 | 4.78067e-05 | 3.41 | 1.24674e-06 | 2.00 | 2.46553e-03 | 2.21 |
| 5 | 128 | 128 | 4.92882e-06 | 3.28 | 4.92883e-06 | 3.28 | 3.11357e-07 | 2.00 | 2.36950e-04 | 3.38 |
| 6 | 256 | 256 | 5.56167e-07 | 3.15 | 5.56151e-07 | 3.15 | 7.76142e-08 | 2.00 | 2.43490e-05 | 3.28 |
| 7 | 512 | 512 | 6.77807e-08 | 3.04 | 6.77631e-08 | 3.04 | 1.91911e-08 | 2.02 | 2.68399e-06 | 3.18 |

Tabelle 7.83: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 1.32775e-01 | 0.00 | 1.32775e-01 | 0.00 | 5.00000e-01 | 0.00 | 2.70545e+00 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 3.97407e-02 | 1.74 | 3.97407e-02 | 1.74 | 1.24025e-01 | 2.01 | 9.27823e-01 | 1.54 |
| 3 | 145 | 256 | 1.04027e-02 | 1.93 | 1.04027e-02 | 1.93 | 3.11106e-02 | 2.00 | 2.54524e-01 | 1.87 |
| 4 | 545 | 1024 | 2.63251e-03 | 1.98 | 2.63251e-03 | 1.98 | 7.79880e-03 | 2.00 | 6.51346e-02 | 1.97 |
| 5 | 2113 | 4096 | 6.60261e-04 | 2.00 | 6.60261e-04 | 2.00 | 1.95197e-03 | 2.00 | 1.63786e-02 | 1.99 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.65207e-04 | 2.00 | 1.65207e-04 | 2.00 | 4.88190e-04 | 2.00 | 4.10059e-03 | 2.00 |
| 7 | 33025 | 65536 | 4.13109e-05 | 2.00 | 4.13109e-05 | 2.00 | 1.22063e-04 | 2.00 | 1.02551e-03 | 2.00 |

Tabelle 7.84: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.20 dargestellt, wobei man keine Singularitäten in den Ecken erkennt.

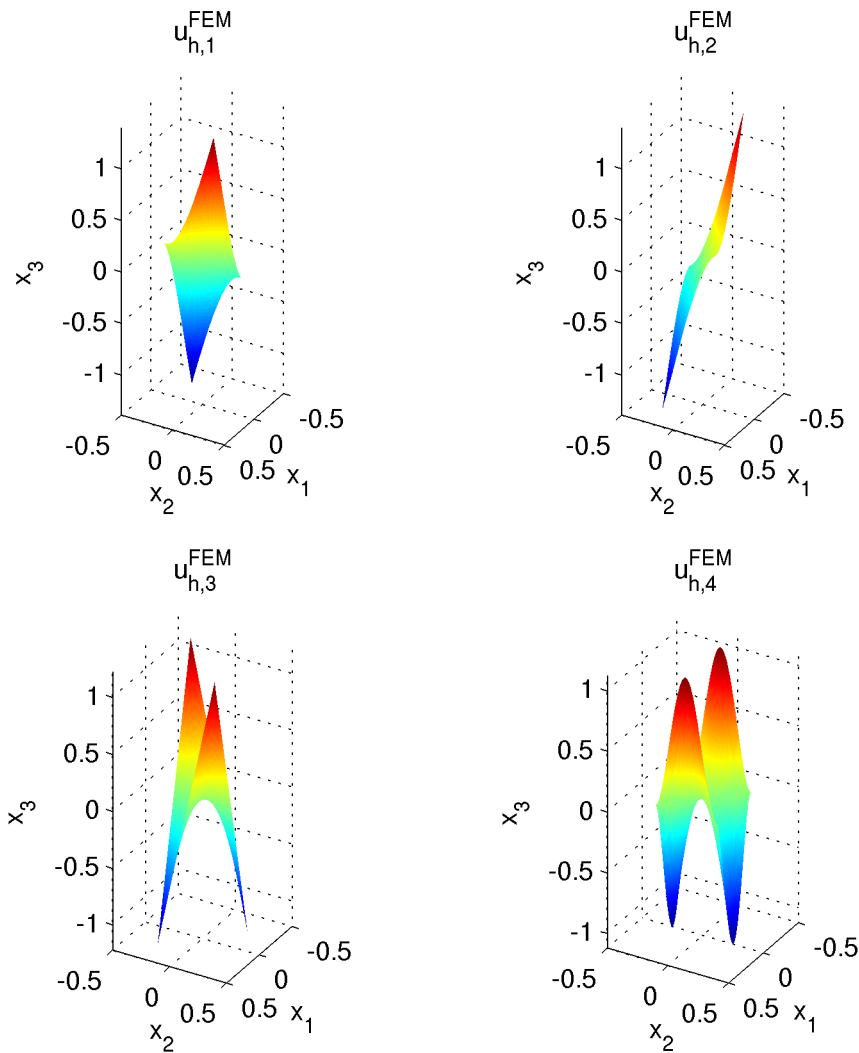


Abbildung 7.20: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.4.3 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1}

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.8) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 10 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und

$\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.34), (6.35) und (6.36) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.85, 7.86, 7.87 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.24410 | 0.30073 | 0.30073 | 0.32653 |
| 2 | 16 | 16 | 0.24643 | 0.26765 | 0.26765 | 0.28596 |
| 3 | 32 | 32 | 0.24942 | 0.25402 | 0.25402 | 0.26154 |
| 4 | 64 | 64 | 0.25130 | 0.25132 | 0.25132 | 0.25206 |
| 5 | 128 | 128 | 0.25021 | 0.25079 | 0.25079 | 0.25180 |
| 6 | 256 | 256 | 0.24991 | 0.25046 | 0.25046 | 0.25141 |
| 7 | 512 | 512 | 0.24972 | 0.25019 | 0.25019 | 0.25098 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.26787 | 0.27137 | | 0.27844 |

Tabelle 7.85: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.33461 | 0.34831 | 0.34831 | 0.40940 |
| 2 | 16 | 16 | 0.31328 | 0.32603 | 0.32603 | 0.37220 |
| 3 | 32 | 32 | 0.30055 | 0.31115 | 0.31115 | 0.34490 |
| 4 | 64 | 64 | 0.29159 | 0.30045 | 0.30045 | 0.32595 |
| 5 | 128 | 128 | 0.28496 | 0.29242 | 0.29242 | 0.31218 |
| 6 | 256 | 256 | 0.27988 | 0.28621 | 0.28621 | 0.30184 |
| 7 | 512 | 512 | 0.27588 | 0.28129 | 0.28129 | 0.29386 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.26787 | 0.27137 | | 0.27844 |

Tabelle 7.86: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 0.37643 | 0.40883 | 0.40883 | 0.67682 |
| 2 | 41 | 64 | 0.33555 | 0.35925 | 0.35925 | 0.46059 |
| 3 | 145 | 256 | 0.31569 | 0.33088 | 0.33088 | 0.38653 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.30227 | 0.31379 | 0.31379 | 0.35175 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.29274 | 0.30209 | 0.30209 | 0.32988 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.28575 | 0.29352 | 0.29352 | 0.31464 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.28044 | 0.28699 | 0.28699 | 0.30346 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.26787 | 0.27137 | | 0.27844 |

Tabelle 7.87: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.88, 7.89, 7.90 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 2.37727e-02 | 0.00 | 2.93562e-02 | 0.00 | 2.93562e-02 | 0.00 | 4.80975e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 2.14364e-02 | 0.15 | 3.71906e-03 | 2.98 | 3.71904e-03 | 2.98 | 7.52044e-03 | 2.68 |
| 3 | 32 | 32 | 1.84528e-02 | 0.22 | 1.73508e-02 | -2.22 | 1.73508e-02 | -2.22 | 1.68981e-02 | -1.17 |
| 4 | 64 | 64 | 1.65720e-02 | 0.16 | 2.00539e-02 | -0.21 | 2.00539e-02 | -0.21 | 2.63742e-02 | -0.64 |
| 5 | 128 | 128 | 1.76619e-02 | -0.09 | 2.05791e-02 | -0.04 | 2.05791e-02 | -0.04 | 2.66312e-02 | -0.01 |
| 6 | 256 | 256 | 1.79631e-02 | -0.02 | 2.09061e-02 | -0.02 | 2.09061e-02 | -0.02 | 2.70249e-02 | -0.02 |
| 7 | 512 | 512 | 1.81475e-02 | -0.01 | 2.11773e-02 | -0.02 | 2.11773e-02 | -0.02 | 2.74585e-02 | -0.02 |

Tabelle 7.88: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 6.67393e-02 | 0.00 | 7.69371e-02 | 0.00 | 7.69371e-02 | 0.00 | 1.30963e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 4.54099e-02 | 0.56 | 5.46624e-02 | 0.49 | 5.46624e-02 | 0.49 | 9.37686e-02 | 0.48 |
| 3 | 32 | 32 | 3.26751e-02 | 0.47 | 3.97788e-02 | 0.46 | 3.97788e-02 | 0.46 | 6.64594e-02 | 0.50 |
| 4 | 64 | 64 | 2.37192e-02 | 0.46 | 2.90800e-02 | 0.45 | 2.90800e-02 | 0.45 | 4.75126e-02 | 0.48 |
| 5 | 128 | 128 | 1.70881e-02 | 0.47 | 2.10523e-02 | 0.47 | 2.10523e-02 | 0.47 | 3.37464e-02 | 0.49 |
| 6 | 256 | 256 | 1.20087e-02 | 0.51 | 1.48416e-02 | 0.50 | 1.48416e-02 | 0.50 | 2.33996e-02 | 0.53 |
| 7 | 512 | 512 | 8.01340e-03 | 0.58 | 9.92302e-03 | 0.58 | 9.92302e-03 | 0.58 | 1.54193e-02 | 0.60 |

Tabelle 7.89: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 1.08558e-01 | 0.00 | 1.37462e-01 | 0.00 | 1.37462e-01 | 0.00 | 3.98386e-01 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 6.76747e-02 | 0.68 | 8.78787e-02 | 0.65 | 8.78787e-02 | 0.65 | 1.82150e-01 | 1.13 |
| 3 | 145 | 256 | 4.78194e-02 | 0.50 | 5.95094e-02 | 0.56 | 5.95094e-02 | 0.56 | 1.08094e-01 | 0.75 |
| 4 | 545 | 1024 | 3.44002e-02 | 0.48 | 4.24162e-02 | 0.49 | 4.24162e-02 | 0.49 | 7.33152e-02 | 0.56 |
| 5 | 2113 | 4096 | 2.48713e-02 | 0.47 | 3.07210e-02 | 0.47 | 3.07210e-02 | 0.47 | 5.14399e-02 | 0.51 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.78765e-02 | 0.48 | 2.21520e-02 | 0.47 | 2.21520e-02 | 0.47 | 3.62012e-02 | 0.51 |
| 7 | 33025 | 65536 | 1.25679e-02 | 0.51 | 1.56155e-02 | 0.50 | 1.56155e-02 | 0.50 | 2.50254e-02 | 0.53 |

Tabelle 7.90: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.21 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 10 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.16). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$\begin{aligned} c_K &\approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := \tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}, \\ c_K &\approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := 1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}, \\ c_K &\approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := 1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} \end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.16) und (5.18). In den Tabellen 7.91, 7.92 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.7321288829875434$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ für die Formulierung mit dem inversen Einfachschichtoperator in (6.32) für Level 10 berechnet wird.

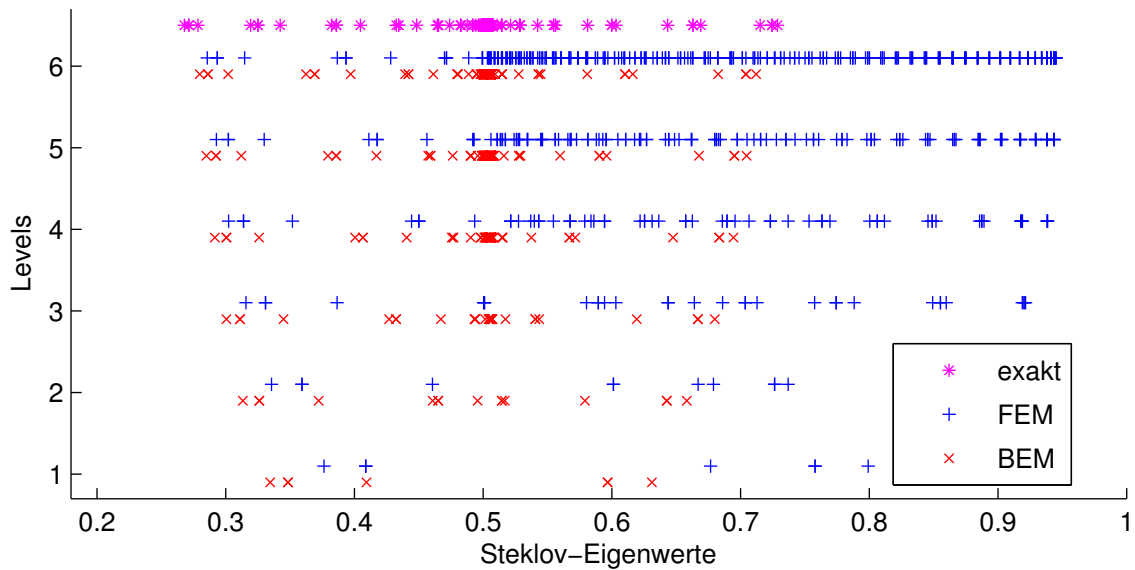


Abbildung 7.21: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|---------------------------------|------|---------------------------|---------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 0.66539 | 6.67393e-02 | 0.00 | 0.63116 | 1.00973e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.68672 | 4.54099e-02 | 0.56 | 0.65823 | 7.38939e-02 | 0.45 |
| 3 | 32 | 32 | 0.69945 | 3.26751e-02 | 0.47 | 0.68003 | 5.20955e-02 | 0.50 |
| 4 | 64 | 64 | 0.70841 | 2.37192e-02 | 0.46 | 0.69449 | 3.76418e-02 | 0.47 |
| 5 | 128 | 128 | 0.71504 | 1.70881e-02 | 0.47 | 0.70465 | 2.74826e-02 | 0.45 |
| 6 | 256 | 256 | 0.72012 | 1.20087e-02 | 0.51 | 0.71212 | 2.00124e-02 | 0.46 |
| 7 | 512 | 512 | 0.72412 | 8.01340e-03 | 0.58 | 0.71780 | 1.43292e-02 | 0.48 |

Tabelle 7.91: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.62357 | 1.08558e-01 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.66445 | 6.76747e-02 | 0.68 |
| 3 | 145 | 256 | 0.68431 | 4.78194e-02 | 0.50 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.69773 | 3.44002e-02 | 0.48 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.70726 | 2.48713e-02 | 0.47 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.71425 | 1.78765e-02 | 0.48 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.71956 | 1.25679e-02 | 0.51 |

Tabelle 7.92: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.22 dargestellt, wobei man Singularitäten in den Ecken erkennt.

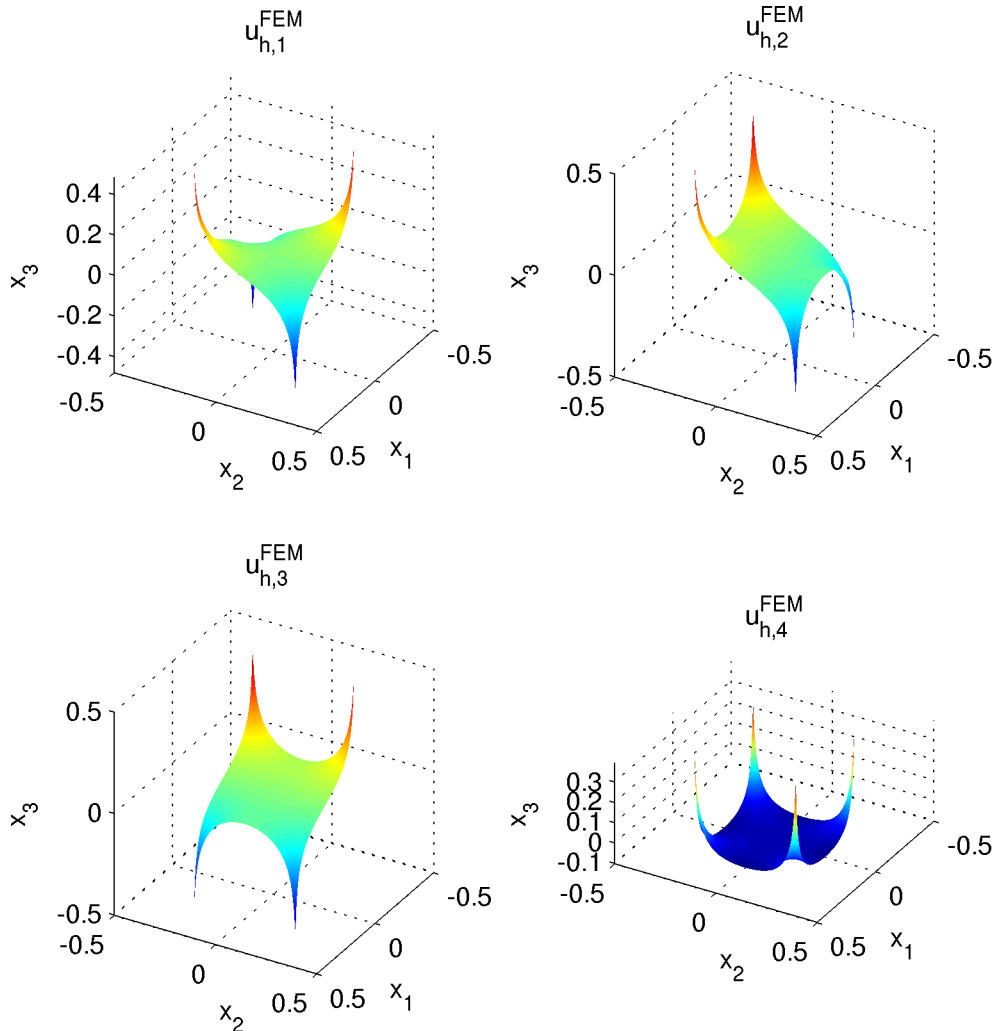


Abbildung 7.22: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.4.4 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.20) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 10 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$

und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.38), (6.39) und (6.40) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellen 7.93, 7.94, 7.95 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.00493 | 1.32400 | 1.32400 | 1.47433 |
| 2 | 16 | 16 | 1.00108 | 1.12350 | 1.12350 | 1.29283 |
| 3 | 32 | 32 | 1.00023 | 1.03270 | 1.03270 | 1.10924 |
| 4 | 64 | 64 | 1.00005 | 1.00822 | 1.00822 | 1.03063 |
| 5 | 128 | 128 | 1.00001 | 1.00205 | 1.00205 | 1.00796 |
| 6 | 256 | 256 | 1.00000 | 1.00051 | 1.00051 | 1.00202 |
| 7 | 512 | 512 | 1.00000 | 1.00013 | 1.00013 | 1.00051 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.36650 | 1.37320 | | 1.38700 |

Tabelle 7.93: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 8 | 8 | 1.51079 | 1.53877 | 1.53877 | 1.68546 |
| 2 | 16 | 16 | 1.46092 | 1.48748 | 1.48748 | 1.59585 |
| 3 | 32 | 32 | 1.43266 | 1.45487 | 1.45487 | 1.53071 |
| 4 | 64 | 64 | 1.41381 | 1.43201 | 1.43201 | 1.48726 |
| 5 | 128 | 128 | 1.40022 | 1.41528 | 1.41528 | 1.45690 |
| 6 | 256 | 256 | 1.39001 | 1.40259 | 1.40259 | 1.43478 |
| 7 | 512 | 512 | 1.38208 | 1.39271 | 1.39271 | 1.41814 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.36650 | 1.37320 | | 1.38700 |

Tabelle 7.94: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 13 | 16 | 1.69961 | 1.80212 | 1.80212 | 2.78641 |
| 2 | 41 | 64 | 1.54861 | 1.62136 | 1.62136 | 1.96272 |
| 3 | 145 | 256 | 1.48927 | 1.52988 | 1.52988 | 1.69308 |
| 4 | 545 | 1024 | 1.45291 | 1.48087 | 1.48087 | 1.58367 |
| 5 | 2113 | 4096 | 1.42820 | 1.44990 | 1.44990 | 1.52139 |
| 6 | 8321 | 16384 | 1.41077 | 1.42835 | 1.42835 | 1.48062 |
| 7 | 33025 | 65536 | 1.39798 | 1.41252 | 1.41252 | 1.45207 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.36650 | 1.37320 | | 1.38700 |

Tabelle 7.95: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.96, 7.97, 7.98 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0$ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| 1 | 8 | 8 | 3.61575e-01 | 0.00 | 4.91999e-02 | 0.00 | 4.91999e-02 | 0.00 | 8.73282e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 3.65419e-01 | -0.02 | 2.49704e-01 | -2.34 | 2.49704e-01 | -2.34 | 9.41675e-02 | -0.11 |
| 3 | 32 | 32 | 3.66275e-01 | -0.00 | 3.40508e-01 | -0.45 | 3.40508e-01 | -0.45 | 2.77758e-01 | -1.56 |
| 4 | 64 | 64 | 3.66457e-01 | -0.00 | 3.64981e-01 | -0.10 | 3.64981e-01 | -0.10 | 3.56366e-01 | -0.36 |
| 5 | 128 | 128 | 3.66494e-01 | -0.00 | 3.71152e-01 | -0.02 | 3.71152e-01 | -0.02 | 3.79041e-01 | -0.09 |
| 6 | 256 | 256 | 3.66501e-01 | -0.00 | 3.72692e-01 | -0.01 | 3.72692e-01 | -0.01 | 3.84979e-01 | -0.02 |
| 7 | 512 | 512 | 3.66503e-01 | -0.00 | 3.73077e-01 | -0.00 | 3.73077e-01 | -0.00 | 3.86490e-01 | -0.01 |

Tabelle 7.96: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 1.44291e-01 | 0.00 | 1.65562e-01 | 0.00 | 1.65562e-01 | 0.00 | 2.98458e-01 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 9.44206e-02 | 0.61 | 1.14276e-01 | 0.53 | 1.14276e-01 | 0.53 | 2.08854e-01 | 0.52 |
| 3 | 32 | 32 | 6.61603e-02 | 0.51 | 8.16654e-02 | 0.48 | 8.16654e-02 | 0.48 | 1.43710e-01 | 0.54 |
| 4 | 64 | 64 | 4.73098e-02 | 0.48 | 5.88056e-02 | 0.47 | 5.88056e-02 | 0.47 | 1.00261e-01 | 0.52 |
| 5 | 128 | 128 | 3.37212e-02 | 0.49 | 4.20719e-02 | 0.48 | 4.20719e-02 | 0.48 | 6.99050e-02 | 0.52 |
| 6 | 256 | 256 | 2.35029e-02 | 0.52 | 2.93851e-02 | 0.52 | 2.93851e-02 | 0.52 | 4.77858e-02 | 0.55 |
| 7 | 512 | 512 | 1.55807e-02 | 0.59 | 1.95004e-02 | 0.59 | 1.95004e-02 | 0.59 | 3.11379e-02 | 0.62 |

Tabelle 7.97: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 3.33106e-01 | 0.00 | 4.28916e-01 | 0.00 | 4.28916e-01 | 0.00 | 1.39941e+00 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 1.82106e-01 | 0.87 | 2.48159e-01 | 0.79 | 2.48159e-01 | 0.79 | 5.75723e-01 | 1.28 |
| 3 | 145 | 256 | 1.22768e-01 | 0.57 | 1.56674e-01 | 0.66 | 1.56674e-01 | 0.66 | 3.06083e-01 | 0.91 |
| 4 | 545 | 1024 | 8.64053e-02 | 0.51 | 1.07664e-01 | 0.54 | 1.07664e-01 | 0.54 | 1.96669e-01 | 0.64 |
| 5 | 2113 | 4096 | 6.16973e-02 | 0.49 | 7.66933e-02 | 0.49 | 7.66933e-02 | 0.49 | 1.34387e-01 | 0.55 |
| 6 | 8321 | 16384 | 4.42623e-02 | 0.48 | 5.51458e-02 | 0.48 | 5.51458e-02 | 0.48 | 9.36268e-02 | 0.52 |
| 7 | 33025 | 65536 | 3.14800e-02 | 0.49 | 3.93133e-02 | 0.49 | 3.93133e-02 | 0.49 | 6.50690e-02 | 0.52 |

Tabelle 7.98: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.23 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 10 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.25). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}},$$

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}},$$

$$c_K \approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := \frac{1}{\mu_{h,1}^{\text{FEM}}}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.25) und (5.27). In den Tabellen 7.99, 7.100 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.7321288829875434$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ für die Formulierung mit dem inversen Einfachschichtoperator in (6.32) für Level 10 berechnet wird.

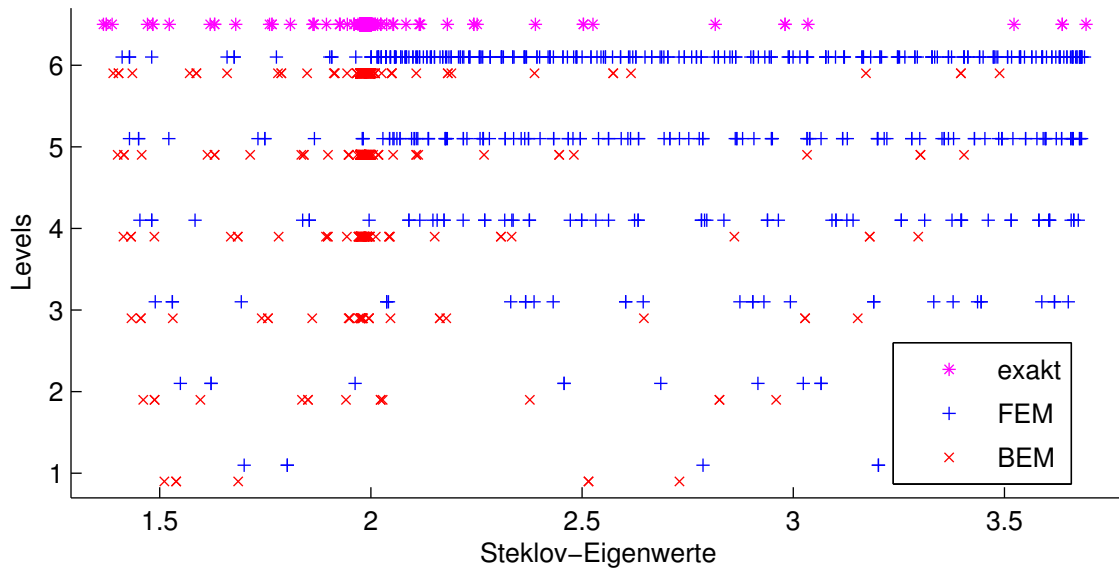


Abbildung 7.23: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 8 | 8 | 0.66190 | 7.02254e-02 | 0.00 | 0.63373 | 9.83942e-02 | 0.00 |
| 2 | 16 | 16 | 0.68450 | 4.76305e-02 | 0.56 | 0.66212 | 7.00104e-02 | 0.49 |
| 3 | 32 | 32 | 0.69800 | 3.41282e-02 | 0.48 | 0.68283 | 4.92963e-02 | 0.51 |
| 4 | 64 | 64 | 0.70731 | 2.48217e-02 | 0.46 | 0.69657 | 3.55566e-02 | 0.47 |
| 5 | 128 | 128 | 0.71417 | 1.79576e-02 | 0.47 | 0.70624 | 2.58875e-02 | 0.46 |
| 6 | 256 | 256 | 0.71942 | 1.27075e-02 | 0.50 | 0.71336 | 1.87656e-02 | 0.46 |
| 7 | 512 | 512 | 0.72355 | 8.58377e-03 | 0.57 | 0.71879 | 1.33363e-02 | 0.49 |

Tabelle 7.99: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 13 | 16 | 0.58837 | 1.43758e-01 | 0.00 |
| 2 | 41 | 64 | 0.64574 | 8.63880e-02 | 0.73 |
| 3 | 145 | 256 | 0.67147 | 6.06596e-02 | 0.51 |
| 4 | 545 | 1024 | 0.68827 | 4.38543e-02 | 0.47 |
| 5 | 2113 | 4096 | 0.70018 | 3.19470e-02 | 0.46 |
| 6 | 8321 | 16384 | 0.70884 | 2.32938e-02 | 0.46 |
| 7 | 33025 | 65536 | 0.71532 | 1.68127e-02 | 0.47 |

Tabelle 7.100: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.24 dargestellt, wobei man Singularitäten in den Ecken erkennt.

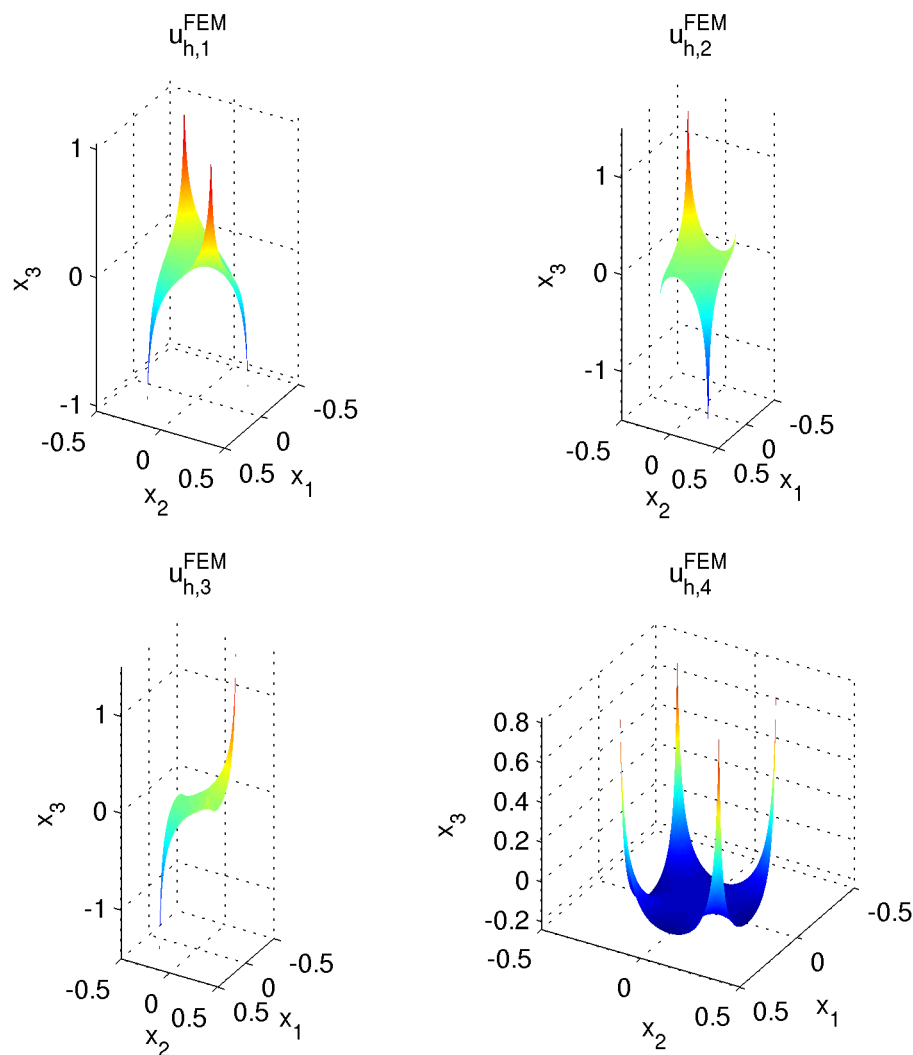


Abbildung 7.24: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.5 L-förmiges Gebiet

Sei $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -0.25 < x_1 < 0, 0 \leq x_2 < 0.25\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -0.25 < x_1 < 0.25, -0.25 < x_2 < 0\}\end{aligned}$$

ein L-förmiges Gebiet mit dem Durchmesser $\text{diam}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ und mit dem Rand Γ . Die Triangulierungen für das L-förmige Gebiet Ω sind in Abbildung 7.25 dargestellt.

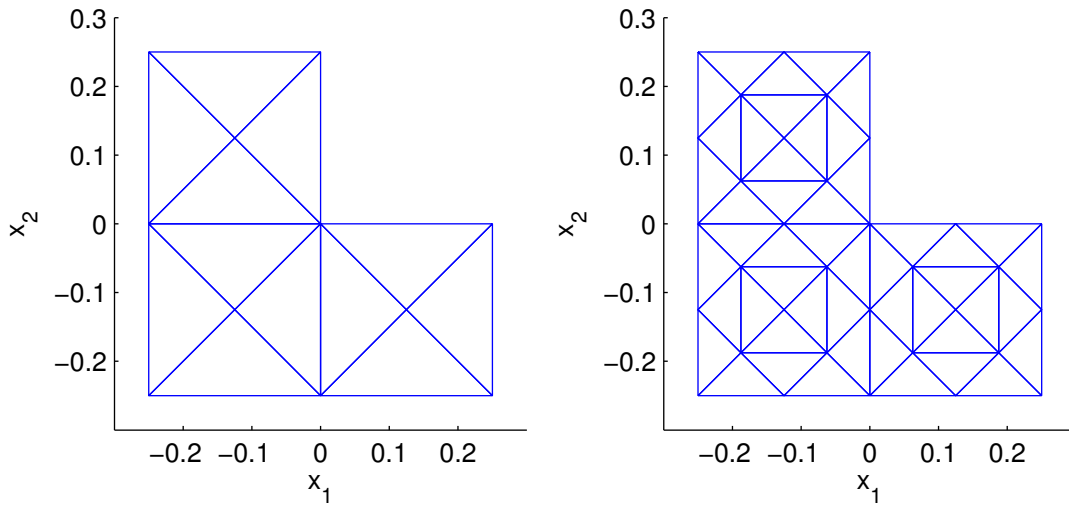


Abbildung 7.25: Triangulierungen für das L-förmige Gebiet für Level 0 und Level 1.

7.5.1 Neumann-Randwertproblem

Die Neumann-Daten $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ in (6.22) seien so gewählt, dass $u \in H^1(\Omega)$ gegeben durch $u(x) := -\ln \|x - y\| + C$ mit $y = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (6.22) ist und $C \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $\langle w_{\text{eq},h}, \gamma_0^{\text{int}} u \rangle_{\Gamma} = 0$ gilt. Es seien $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^0 \leftrightarrow \tilde{u}_h^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \tilde{u}^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_h^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_{\Gamma}} \ni \underline{u}^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_h^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die Lösungen von (6.24), (6.25) und (6.26) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Die $L^2(\Gamma)$ -Fehler der Dirichlet-Daten

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^0\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{u}_h^{-1}\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\gamma_0^{\text{int}} u - u_h^{\text{FEM}}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sind für mehrere Levels in den Tabellen 7.101, 7.102, 7.103 gegeben und die Konvergenzordnungen, unabhängig von der Approximation des Steklov-Poincaré-Operators S , sind 2.

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^0\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|--|------|
| 0 | 8 | 8 | 5.13e-03 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 1.28e-03 | 2.00 |
| 2 | 32 | 32 | 3.40e-04 | 1.91 |
| 3 | 64 | 64 | 8.75e-05 | 1.96 |
| 4 | 128 | 128 | 2.22e-05 | 1.98 |
| 5 | 256 | 256 | 5.60e-06 | 1.99 |
| 6 | 512 | 512 | 1.41e-06 | 1.99 |

Tabelle 7.101: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - \tilde{u}_h^{-1}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 0 | 8 | 8 | 5.15e-03 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 1.37e-03 | 1.90 |
| 2 | 32 | 32 | 3.52e-04 | 1.97 |
| 3 | 64 | 64 | 8.92e-05 | 1.98 |
| 4 | 128 | 128 | 2.24e-05 | 1.99 |
| 5 | 256 | 256 | 5.63e-06 | 2.00 |
| 6 | 512 | 512 | 1.41e-06 | 2.00 |

Tabelle 7.102: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\ \gamma_0^{\text{int}}u - u_h^{\text{FEM}}\ _{L^2(\Gamma)}$ | eoc |
|---|------------|------------|---|------|
| 0 | 11 | 12 | 5.78e-03 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 1.81e-03 | 1.67 |
| 2 | 113 | 192 | 4.96e-04 | 1.87 |
| 3 | 417 | 768 | 1.30e-04 | 1.94 |
| 4 | 1601 | 3072 | 3.31e-05 | 1.97 |
| 5 | 6273 | 12288 | 8.37e-06 | 1.98 |
| 6 | 24833 | 49152 | 2.10e-06 | 1.99 |

Tabelle 7.103: $L^2(\Gamma)$ -Fehler für die Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{int}}u$ und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

7.5.2 Standard-Steklov-Eigenwertproblem

Für das Steklov-Eigenwertproblem (4.10) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierten Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 9 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{\tilde{u}}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{\tilde{u}}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.29), (6.30) und (6.31) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellenn 7.104, 7.105, 7.106 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 8 | 8 | 1.75948 | 3.19911 | 5.16476 | 5.96615 |
| 1 | 16 | 16 | 1.57045 | 3.18312 | 6.27705 | 6.31658 |
| 2 | 32 | 32 | 1.55731 | 3.18395 | 6.31947 | 6.35694 |
| 3 | 64 | 64 | 1.55225 | 3.18383 | 6.32267 | 6.35999 |
| 4 | 128 | 128 | 1.55023 | 3.18381 | 6.32300 | 6.36005 |
| 5 | 256 | 256 | 1.54941 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35992 |
| 6 | 512 | 512 | 1.54908 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35985 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.54888 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35980 |

Tabelle 7.104: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 8 | 8 | 1.77353 | 3.27278 | 6.50022 | 6.53242 |
| 1 | 16 | 16 | 1.58372 | 3.19446 | 6.37811 | 6.41551 |
| 2 | 32 | 32 | 1.56054 | 3.18487 | 6.32840 | 6.36642 |
| 3 | 64 | 64 | 1.55337 | 3.18392 | 6.32353 | 6.36112 |
| 4 | 128 | 128 | 1.55066 | 3.18382 | 6.32309 | 6.36025 |
| 5 | 256 | 256 | 1.54958 | 3.18381 | 6.32305 | 6.35998 |
| 6 | 512 | 512 | 1.54915 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35987 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.54888 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35980 |

Tabelle 7.105: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 11 | 12 | 1.84486 | 3.39326 | 7.30410 | 7.51456 |
| 1 | 33 | 48 | 1.65491 | 3.25124 | 6.67372 | 6.76521 |
| 2 | 113 | 192 | 1.58677 | 3.20228 | 6.42078 | 6.47340 |
| 3 | 417 | 768 | 1.56279 | 3.18861 | 6.34827 | 6.39010 |
| 4 | 1601 | 3072 | 1.55410 | 3.18503 | 6.32941 | 6.36790 |
| 5 | 6273 | 12288 | 1.55087 | 3.18411 | 6.32464 | 6.36202 |
| 6 | 24833 | 49152 | 1.54964 | 3.18388 | 6.32344 | 6.36043 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.54888 | 3.18380 | 6.32304 | 6.35980 |

Tabelle 7.106: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.107, 7.108, 7.109 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0 $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0 $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0 $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0 $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|---------------------------------|-------|
| 0 | 8 | 8 | 2.10605e-01 | 0.00 | 1.53022e-02 | 0.00 | 1.15829e+00 | 0.00 | 3.93651e-01 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 2.15677e-02 | 3.29 | 6.81499e-04 | 4.49 | 4.59902e-02 | 4.65 | 4.32187e-02 | 3.19 |
| 2 | 32 | 32 | 8.42828e-03 | 1.36 | 1.47828e-04 | 2.20 | 3.57495e-03 | 3.69 | 2.86331e-03 | 3.92 |
| 3 | 64 | 64 | 3.36745e-03 | 1.32 | 2.84694e-05 | 2.38 | 3.74311e-04 | 3.26 | 1.92057e-04 | 3.90 |
| 4 | 128 | 128 | 1.34577e-03 | 1.32 | 5.02430e-06 | 2.50 | 4.34331e-05 | 3.11 | 2.52496e-04 | -0.39 |
| 5 | 256 | 256 | 5.29390e-04 | 1.35 | 8.78420e-07 | 2.52 | 5.21935e-06 | 3.06 | 1.24572e-04 | 1.02 |
| 6 | 512 | 512 | 2.00743e-04 | 1.40 | 1.49472e-07 | 2.56 | 6.34955e-07 | 3.04 | 5.09931e-05 | 1.29 |

Tabelle 7.107: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $ \mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1} $ | eoc | $ \mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1} $ | eoc | $ \mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1} $ | eoc | $ \mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 8 | 8 | 2.24650e-01 | 0.00 | 8.89725e-02 | 0.00 | 1.77181e-01 | 0.00 | 1.72622e-01 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 3.48357e-02 | 2.69 | 1.06551e-02 | 3.06 | 5.50685e-02 | 1.69 | 5.57100e-02 | 1.63 |
| 2 | 32 | 32 | 1.16644e-02 | 1.58 | 1.06753e-03 | 3.32 | 5.35711e-03 | 3.36 | 6.62032e-03 | 3.07 |
| 3 | 64 | 64 | 4.49413e-03 | 1.38 | 1.13193e-04 | 3.24 | 4.88631e-04 | 3.45 | 1.32405e-03 | 2.32 |
| 4 | 128 | 128 | 1.78056e-03 | 1.34 | 1.36749e-05 | 3.05 | 4.64624e-05 | 3.39 | 4.52993e-04 | 1.55 |
| 5 | 256 | 256 | 7.00731e-04 | 1.35 | 1.83952e-06 | 2.89 | 4.82690e-06 | 3.27 | 1.79504e-04 | 1.34 |
| 6 | 512 | 512 | 2.68624e-04 | 1.38 | 2.63286e-07 | 2.80 | 5.44161e-07 | 3.15 | 7.02089e-05 | 1.35 |

Tabelle 7.108: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $ \mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}} $ | eoc | $ \mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|------------------------------------|------|
| 0 | 11 | 12 | 2.95982e-01 | 0.00 | 2.09454e-01 | 0.00 | 9.81055e-01 | 0.00 | 1.15476e+00 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 1.06028e-01 | 1.48 | 6.74412e-02 | 1.63 | 3.50681e-01 | 1.48 | 4.05414e-01 | 1.51 |
| 2 | 113 | 192 | 3.78878e-02 | 1.48 | 1.84777e-02 | 1.87 | 9.77398e-02 | 1.84 | 1.13597e-01 | 1.84 |
| 3 | 417 | 768 | 1.39139e-02 | 1.45 | 4.80222e-03 | 1.94 | 2.52243e-02 | 1.95 | 3.03030e-02 | 1.91 |
| 4 | 1601 | 3072 | 5.22481e-03 | 1.41 | 1.22332e-03 | 1.97 | 6.36459e-03 | 1.99 | 8.10431e-03 | 1.90 |
| 5 | 6273 | 12288 | 1.98906e-03 | 1.39 | 3.08943e-04 | 1.99 | 1.59533e-03 | 2.00 | 2.21584e-03 | 1.87 |
| 6 | 24833 | 49152 | 7.59599e-04 | 1.39 | 7.76897e-05 | 1.99 | 3.99118e-04 | 2.00 | 6.25413e-04 | 1.82 |

Tabelle 7.109: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.26 dargestellt, wobei man keine Singularitäten in den Ecken erkennt.

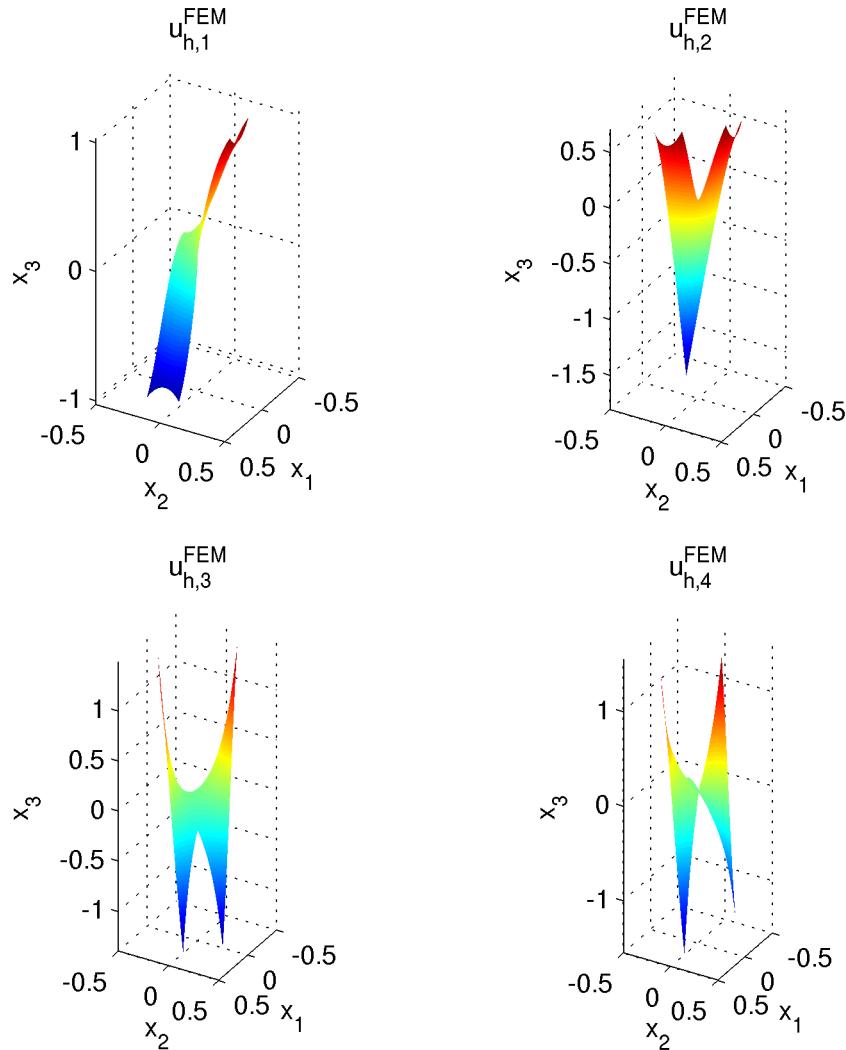


Abbildung 7.26: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.5.3 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfeldschichtoperator V^{-1}

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.8) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierte Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 9 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und

$\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.34), (6.35) und (6.36) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellenn 7.110, 7.111, 7.112 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 8 | 8 | 0.23142 | 0.23596 | 0.31370 | 0.33408 |
| 1 | 16 | 16 | 0.20701 | 0.24379 | 0.26880 | 0.27115 |
| 2 | 32 | 32 | 0.20062 | 0.24776 | 0.25404 | 0.25563 |
| 3 | 64 | 64 | 0.19805 | 0.25022 | 0.25141 | 0.25239 |
| 4 | 128 | 128 | 0.19683 | 0.25043 | 0.25133 | 0.25165 |
| 5 | 256 | 256 | 0.19616 | 0.25009 | 0.25041 | 0.25088 |
| 6 | 512 | 512 | 0.19577 | 0.24987 | 0.25011 | 0.25051 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.19541 | 0.26898 | 0.27119 | 0.27442 |

Tabelle 7.110: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 8 | 8 | 0.24404 | 0.34280 | 0.37932 | 0.38847 |
| 1 | 16 | 16 | 0.21090 | 0.31734 | 0.33614 | 0.35035 |
| 2 | 32 | 32 | 0.20326 | 0.30382 | 0.31590 | 0.32708 |
| 3 | 64 | 64 | 0.19965 | 0.29435 | 0.30297 | 0.31204 |
| 4 | 128 | 128 | 0.19773 | 0.28730 | 0.29375 | 0.30121 |
| 5 | 256 | 256 | 0.19666 | 0.28187 | 0.28687 | 0.29307 |
| 6 | 512 | 512 | 0.19606 | 0.27759 | 0.28156 | 0.28676 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.19541 | 0.26898 | 0.27119 | 0.27442 |

Tabelle 7.111: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 11 | 12 | 0.26615 | 0.38062 | 0.45979 | 0.52302 |
| 1 | 33 | 48 | 0.22736 | 0.34227 | 0.38164 | 0.40989 |
| 2 | 113 | 192 | 0.21088 | 0.32033 | 0.34092 | 0.35755 |
| 3 | 417 | 768 | 0.20342 | 0.30582 | 0.31903 | 0.33139 |
| 4 | 1601 | 3072 | 0.19970 | 0.29565 | 0.30490 | 0.31463 |
| 5 | 6273 | 12288 | 0.19774 | 0.28818 | 0.29500 | 0.30287 |
| 6 | 24833 | 49152 | 0.19667 | 0.28249 | 0.28772 | 0.29419 |
| $\mu_j \approx$ | | | 0.19541 | 0.26898 | 0.27119 | 0.27442 |

Tabelle 7.112: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.113, 7.114, 7.115 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0$ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------------|------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| 0 | 8 | 8 | 3.60129e-02 | 0.00 | 3.30169e-02 | 0.00 | 4.25094e-02 | 0.00 | 5.96551e-02 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 1.16051e-02 | 1.63 | 2.51940e-02 | 0.39 | 2.38954e-03 | 4.15 | 3.27102e-03 | 4.19 |
| 2 | 32 | 32 | 5.21923e-03 | 1.15 | 2.12173e-02 | 0.25 | 1.71500e-02 | -2.84 | 1.87944e-02 | -2.52 |
| 3 | 64 | 64 | 2.64309e-03 | 0.98 | 1.87570e-02 | 0.18 | 1.97853e-02 | -0.21 | 2.20353e-02 | -0.23 |
| 4 | 128 | 128 | 1.42438e-03 | 0.89 | 1.85506e-02 | 0.02 | 1.98625e-02 | -0.01 | 2.27694e-02 | -0.05 |
| 5 | 256 | 256 | 7.52423e-04 | 0.92 | 1.88896e-02 | -0.03 | 2.07830e-02 | -0.07 | 2.35388e-02 | -0.05 |
| 6 | 512 | 512 | 3.68514e-04 | 1.03 | 1.91091e-02 | -0.02 | 2.10810e-02 | -0.02 | 2.39075e-02 | -0.02 |

Tabelle 7.113: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 8 | 8 | 4.86356e-02 | 0.00 | 7.38253e-02 | 0.00 | 1.08128e-01 | 0.00 | 1.14046e-01 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 1.54922e-02 | 1.65 | 4.83574e-02 | 0.61 | 6.49497e-02 | 0.74 | 7.59236e-02 | 0.59 |
| 2 | 32 | 32 | 7.85497e-03 | 0.98 | 3.48416e-02 | 0.47 | 4.47058e-02 | 0.54 | 5.26627e-02 | 0.53 |
| 3 | 64 | 64 | 4.24916e-03 | 0.89 | 2.53696e-02 | 0.46 | 3.17768e-02 | 0.49 | 3.76172e-02 | 0.49 |
| 4 | 128 | 128 | 2.31995e-03 | 0.87 | 1.83159e-02 | 0.47 | 2.25589e-02 | 0.49 | 2.67880e-02 | 0.49 |
| 5 | 256 | 256 | 1.25364e-03 | 0.89 | 1.28885e-02 | 0.51 | 1.56740e-02 | 0.53 | 1.86469e-02 | 0.52 |
| 6 | 512 | 512 | 6.53143e-04 | 0.94 | 8.60723e-03 | 0.58 | 1.03638e-02 | 0.60 | 1.23410e-02 | 0.60 |

Tabelle 7.114: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 11 | 12 | 7.07423e-02 | 0.00 | 1.11642e-01 | 0.00 | 1.88593e-01 | 0.00 | 2.48598e-01 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 3.19521e-02 | 1.15 | 7.32929e-02 | 0.61 | 1.10445e-01 | 0.77 | 1.35468e-01 | 0.88 |
| 2 | 113 | 192 | 1.54731e-02 | 1.05 | 5.13484e-02 | 0.51 | 6.97278e-02 | 0.66 | 8.31235e-02 | 0.70 |
| 3 | 417 | 768 | 8.01000e-03 | 0.95 | 3.68397e-02 | 0.48 | 4.78327e-02 | 0.54 | 5.69710e-02 | 0.55 |
| 4 | 1601 | 3072 | 4.29817e-03 | 0.90 | 2.66663e-02 | 0.47 | 3.37075e-02 | 0.50 | 4.02104e-02 | 0.50 |
| 5 | 6273 | 12288 | 2.33649e-03 | 0.88 | 1.91959e-02 | 0.47 | 2.38078e-02 | 0.50 | 2.84494e-02 | 0.50 |
| 6 | 24833 | 49152 | 1.26034e-03 | 0.89 | 1.35111e-02 | 0.51 | 1.65235e-02 | 0.53 | 1.97704e-02 | 0.53 |

Tabelle 7.115: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.27 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 9 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.16). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$\begin{aligned} c_K &\approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := \tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}, \\ c_K &\approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := 1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}, \\ c_K &\approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := 1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}} \end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$\left| c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} \right|, \quad \left| c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} \right|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.16) und (5.18). In den Tabellen 7.116, 7.117 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.8046337092658311$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ für die Formulierung mit dem hypersingulären Operator in (6.37) für Level 9 berechnet wird.

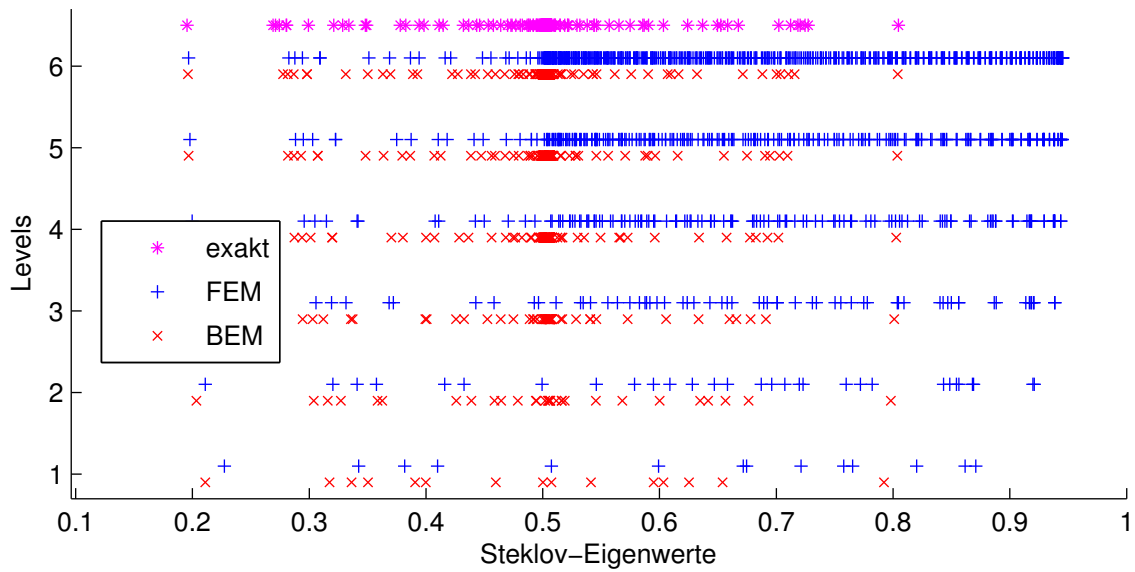


Abbildung 7.27: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|---------------------------------|------|---------------------------|---------------------------------|------|
| 0 | 8 | 8 | 0.75596 | 4.86748e-02 | 0.00 | 0.78677 | 1.78683e-02 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 0.78910 | 1.55314e-02 | 1.65 | 0.79226 | 1.23737e-02 | 0.53 |
| 2 | 32 | 32 | 0.79674 | 7.89417e-03 | 0.98 | 0.79806 | 6.57333e-03 | 0.91 |
| 3 | 64 | 64 | 0.80035 | 4.28836e-03 | 0.88 | 0.80103 | 3.59960e-03 | 0.87 |
| 4 | 128 | 128 | 0.80227 | 2.35914e-03 | 0.86 | 0.80265 | 1.98206e-03 | 0.86 |
| 5 | 256 | 256 | 0.80334 | 1.29283e-03 | 0.87 | 0.80355 | 1.08144e-03 | 0.87 |
| 6 | 512 | 512 | 0.80394 | 6.92339e-04 | 0.90 | 0.80406 | 5.72098e-04 | 0.92 |

Tabelle 7.116: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 11 | 12 | 0.73385 | 7.07815e-02 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 0.77264 | 3.19913e-02 | 1.15 |
| 2 | 113 | 192 | 0.78912 | 1.55123e-02 | 1.04 |
| 3 | 417 | 768 | 0.79658 | 8.04920e-03 | 0.95 |
| 4 | 1601 | 3072 | 0.80030 | 4.33737e-03 | 0.89 |
| 5 | 6273 | 12288 | 0.80226 | 2.37569e-03 | 0.87 |
| 6 | 24833 | 49152 | 0.80333 | 1.29953e-03 | 0.87 |

Tabelle 7.117: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.28 dargestellt, wobei man Singularitäten in den Ecken erkennt.

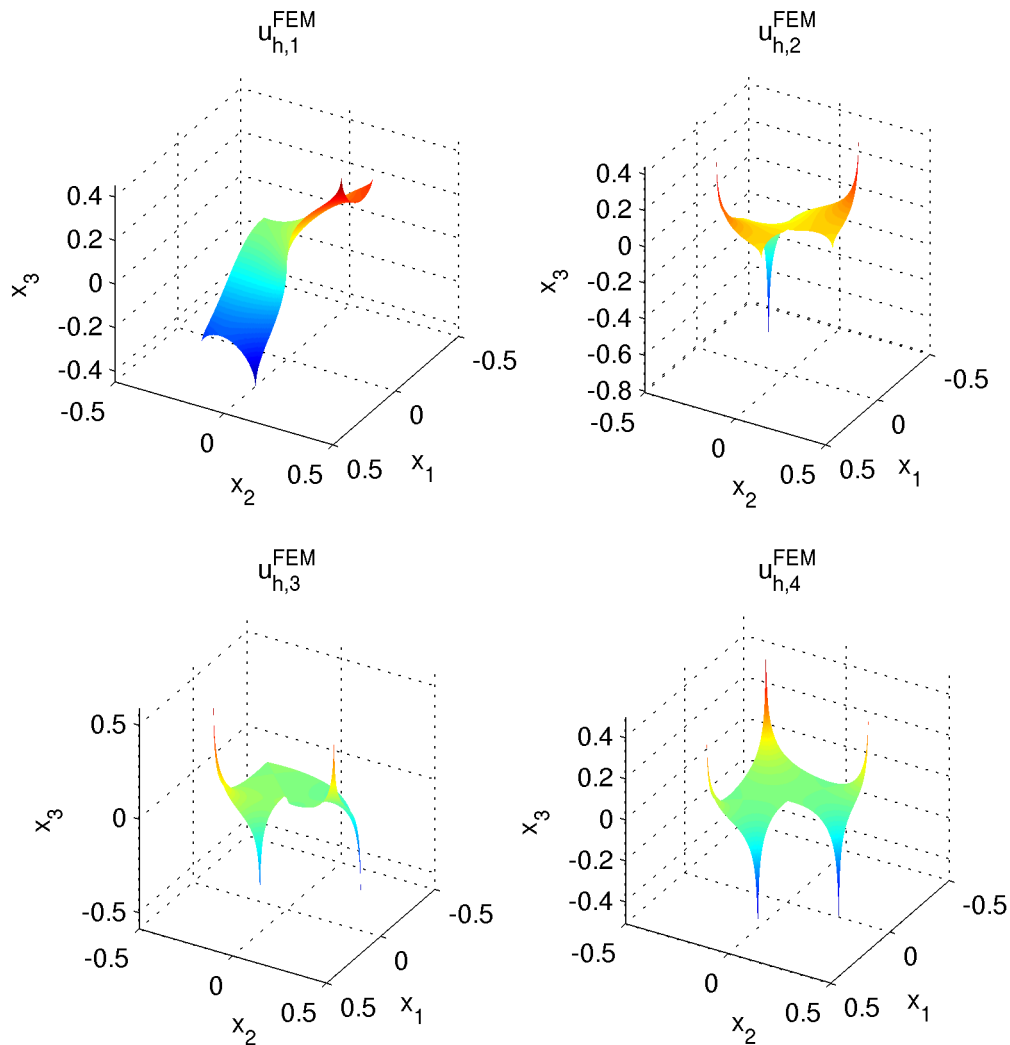


Abbildung 7.28: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

7.5.4 Verallgemeinertes Steklov-Eigenwertproblem für den hypersingulären Operator D

Für das Steklov-Eigenwertproblem (5.20) lassen sich die Steklov-Eigenwerte nicht analytisch bestimmen. Daher werden die approximierte Steklov-Eigenwerte $\tilde{\mu}_{h,j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$ für Level 9 als exakt betrachtet. Es seien $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^0 \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^0 \in S_h^1(\Gamma)$, $\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \tilde{u}_s^{-1} \leftrightarrow \tilde{u}_{h,s}^{-1} \in S_h^1(\Gamma)$ und

$\mathbb{R}^{M_\Gamma} \ni \underline{u}_s^{\text{FEM}} \leftrightarrow u_{h,s}^{\text{FEM}} \in S_h^1(\Gamma)$ die s -ten Steklov-Eigenfunktionen zu den s -ten diskreten Steklov-Eigenwerten $\tilde{\mu}_{h,s}^0$, $\tilde{\mu}_{h,s}^{-1}$ und $\mu_{h,s}^{\text{FEM}}$ von (6.38), (6.39) und (6.40) für $\alpha = \frac{1}{1000}$. Vier approximierte Steklov-Eigenwerte sind in den Tabellenn 7.118, 7.119, 7.120 für die ersten Levels gegeben.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^0$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^0$ |
|-----------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 8 | 8 | 1.00014 | 1.31141 | 1.39670 | 1.51379 |
| 1 | 16 | 16 | 1.00152 | 1.11092 | 1.13772 | 1.26907 |
| 2 | 32 | 32 | 1.00033 | 1.03132 | 1.03483 | 1.12283 |
| 3 | 64 | 64 | 1.00007 | 1.00806 | 1.00850 | 1.03254 |
| 4 | 128 | 128 | 1.00001 | 1.00203 | 1.00209 | 1.00820 |
| 5 | 256 | 256 | 1.00000 | 1.00051 | 1.00052 | 1.00205 |
| 6 | 512 | 512 | 1.00000 | 1.00013 | 1.00013 | 1.00051 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.24298 | 1.36862 | 1.37291 | 1.37913 |

Tabelle 7.118: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | $\tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 8 | 8 | 1.41209 | 1.53588 | 1.65456 | 1.66564 |
| 1 | 16 | 16 | 1.28173 | 1.46958 | 1.51244 | 1.54487 |
| 2 | 32 | 32 | 1.26201 | 1.43944 | 1.46594 | 1.49039 |
| 3 | 64 | 64 | 1.25314 | 1.41943 | 1.43766 | 1.45682 |
| 4 | 128 | 128 | 1.24848 | 1.40490 | 1.41822 | 1.43359 |
| 5 | 256 | 256 | 1.24593 | 1.39393 | 1.40406 | 1.41659 |
| 6 | 512 | 512 | 1.24451 | 1.38541 | 1.39334 | 1.40369 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.24298 | 1.36862 | 1.37291 | 1.37913 |

Tabelle 7.119: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | $\mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 11 | 12 | 1.53920 | 1.70484 | 2.01456 | 2.31290 |
| 1 | 33 | 48 | 1.37518 | 1.56907 | 1.70741 | 1.80664 |
| 2 | 113 | 192 | 1.30206 | 1.50166 | 1.56488 | 1.61103 |
| 3 | 417 | 768 | 1.27181 | 1.46141 | 1.49802 | 1.52939 |
| 4 | 1601 | 3072 | 1.25792 | 1.43485 | 1.45898 | 1.48252 |
| 5 | 6273 | 12288 | 1.25096 | 1.41620 | 1.43320 | 1.45163 |
| 6 | 24833 | 49152 | 1.24728 | 1.40250 | 1.41505 | 1.42985 |
| $\mu_j \approx$ | | | 1.24298 | 1.36862 | 1.37291 | 1.37913 |

Tabelle 7.120: Vier approximierte Steklov-Eigenwerte für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Die Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnungen sind in den Tabellen 7.121, 7.122, 7.123 für die ersten Levels dargestellt. Die Konvergenzordnungen unterscheiden sich für die verschiedenen Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S .

Für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ erhält man im Allgemeinen keine Konvergenz der Steklov-Eigenwerte.

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^0$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^0$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^0$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^0$ | eoc |
|---|------------|------------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| 0 | 8 | 8 | 2.42843e-01 | 0.00 | 5.72088e-02 | 0.00 | 2.37942e-02 | 0.00 | 1.34658e-01 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 2.41468e-01 | 0.01 | 2.57699e-01 | -2.17 | 2.35184e-01 | -3.31 | 1.10066e-01 | 0.29 |
| 2 | 32 | 32 | 2.42652e-01 | -0.01 | 3.37299e-01 | -0.39 | 3.38076e-01 | -0.52 | 2.56306e-01 | -1.22 |
| 3 | 64 | 64 | 2.42916e-01 | -0.00 | 3.60562e-01 | -0.10 | 3.64411e-01 | -0.11 | 3.46587e-01 | -0.44 |
| 4 | 128 | 128 | 2.42971e-01 | -0.00 | 3.66586e-01 | -0.02 | 3.70821e-01 | -0.03 | 3.70928e-01 | -0.10 |
| 5 | 256 | 256 | 2.42982e-01 | -0.00 | 3.68108e-01 | -0.01 | 3.72392e-01 | -0.01 | 3.77081e-01 | -0.02 |
| 6 | 512 | 512 | 2.42984e-01 | -0.00 | 3.68490e-01 | -0.00 | 3.72780e-01 | -0.00 | 3.78620e-01 | -0.01 |

Tabelle 7.121: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},0}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Γ | N_Γ | $\mu_1 - \tilde{\mu}_{h,1}^{-1}$ | eoc | $\mu_2 - \tilde{\mu}_{h,2}^{-1}$ | eoc | $\mu_3 - \tilde{\mu}_{h,3}^{-1}$ | eoc | $\mu_4 - \tilde{\mu}_{h,4}^{-1}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 8 | 8 | 1.69101e-01 | 0.00 | 1.67267e-01 | 0.00 | 2.81652e-01 | 0.00 | 2.86508e-01 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 3.87442e-02 | 2.13 | 1.00962e-01 | 0.73 | 1.39532e-01 | 1.01 | 1.65741e-01 | 0.79 |
| 2 | 32 | 32 | 1.90299e-02 | 1.03 | 7.08217e-02 | 0.51 | 9.30358e-02 | 0.58 | 1.11256e-01 | 0.58 |
| 3 | 64 | 64 | 1.01590e-02 | 0.91 | 5.08095e-02 | 0.48 | 6.47486e-02 | 0.52 | 7.76871e-02 | 0.52 |
| 4 | 128 | 128 | 5.49425e-03 | 0.89 | 3.62842e-02 | 0.49 | 4.53161e-02 | 0.51 | 5.44579e-02 | 0.51 |
| 5 | 256 | 256 | 2.94848e-03 | 0.90 | 2.53155e-02 | 0.52 | 3.11522e-02 | 0.54 | 3.74584e-02 | 0.54 |
| 6 | 512 | 512 | 1.52878e-03 | 0.95 | 1.67911e-02 | 0.59 | 2.04272e-02 | 0.61 | 2.45600e-02 | 0.61 |

Tabelle 7.122: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $\mu_1 - \mu_{h,1}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_2 - \mu_{h,2}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_3 - \mu_{h,3}^{\text{FEM}}$ | eoc | $\mu_4 - \mu_{h,4}^{\text{FEM}}$ | eoc |
|---|------------|------------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
| 0 | 11 | 12 | 2.96210e-01 | 0.00 | 3.36225e-01 | 0.00 | 6.41653e-01 | 0.00 | 9.33770e-01 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 1.32195e-01 | 1.16 | 2.00452e-01 | 0.75 | 3.34506e-01 | 0.94 | 4.27506e-01 | 1.13 |
| 2 | 113 | 192 | 5.90763e-02 | 1.16 | 1.33044e-01 | 0.59 | 1.91972e-01 | 0.80 | 2.31901e-01 | 0.88 |
| 3 | 417 | 768 | 2.88253e-02 | 1.04 | 9.27963e-02 | 0.52 | 1.25109e-01 | 0.62 | 1.50255e-01 | 0.63 |
| 4 | 1601 | 3072 | 1.49330e-02 | 0.95 | 6.62363e-02 | 0.49 | 8.60679e-02 | 0.54 | 1.03387e-01 | 0.54 |
| 5 | 6273 | 12288 | 7.97866e-03 | 0.90 | 4.75869e-02 | 0.48 | 6.02876e-02 | 0.51 | 7.24959e-02 | 0.51 |
| 6 | 24833 | 49152 | 4.29856e-03 | 0.89 | 3.38871e-02 | 0.49 | 4.21429e-02 | 0.52 | 5.07190e-02 | 0.52 |

Tabelle 7.123: Fehler für vier Steklov-Eigenwerte und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

In der Abbildung 7.29 ist das Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6 abgebildet. Die approximierten Steklov-Eigenwerte von Level 9 für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ werden als exakte Steklov-Eigenwerte betrachtet. Man sieht hier, dass durch S_h^{FEM} das Spektrum von oben approximiert wird. Durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ wird das Spektrum trichterförmig angenähert. Daher ist auch der größte approximierte Steklov-Eigenwert $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ durch $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ eine Approximation von $\mu_{\max} = c_K$, man siehe (5.25). Das heißt, man betrachtet die Approximationen

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\max}^{-1} := 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}},$$

$$c_K \approx \tilde{c}_{K,\min}^{-1} := \frac{1}{\tilde{\mu}_{h,1}^{-1}},$$

$$c_K \approx c_{K,\min}^{\text{FEM}} := \frac{1}{\mu_{h,1}^{\text{FEM}}}$$

mit den dazugehörigen Fehlern

$$|c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1}|, \quad |c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1}|, \quad |c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}}|$$

der Kontraktionskonstante c_K mit Hilfe von (5.25) und (5.27). In den Tabellen 7.124, 7.125 wird das Konvergenzverhalten für die approximierten Kontraktionskonstanten $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$, $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$, $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ dargestellt, wobei als exaktes $c_K \approx 0.8046337092658311$ betrachtet wird, das durch $\tilde{\mu}_{h,\max}^{-1}$ für die Formulierung mit dem hypersingulären Operator in (6.37) für Level 9 berechnet wird.

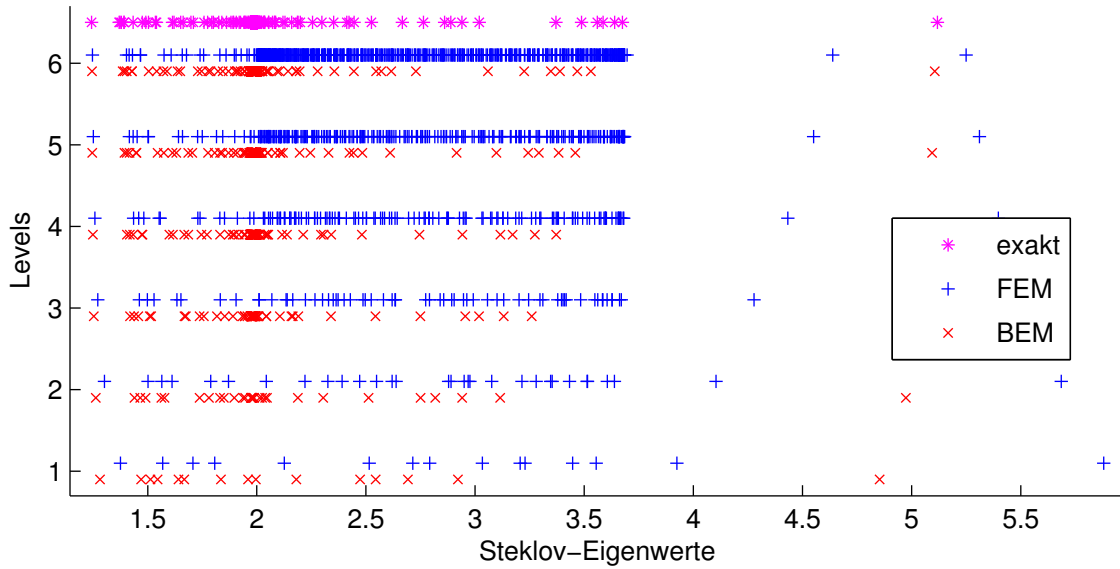


Abbildung 7.29: Konvergenzverhalten der approximierten Steklov-Eigenwerte für die Approximationen $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ und S_h^{FEM} für die Levels 1 bis 6.

| L | M_Γ | N_Γ | $\tilde{c}_{K,\min}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\min}^{-1} $ | eoc | $\tilde{c}_{K,\max}^{-1}$ | $ c_K - \tilde{c}_{K,\max}^{-1} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 8 | 8 | 0.70817 | 9.64615e-02 | 0.00 | 0.78994 | 1.46966e-02 | 0.00 |
| 1 | 16 | 16 | 0.78020 | 2.44376e-02 | 1.98 | 0.79395 | 1.06847e-02 | 0.46 |
| 2 | 32 | 32 | 0.79238 | 1.22499e-02 | 1.00 | 0.79895 | 5.68022e-03 | 0.91 |
| 3 | 64 | 64 | 0.79799 | 6.64064e-03 | 0.88 | 0.80151 | 3.12792e-03 | 0.86 |
| 4 | 128 | 128 | 0.80097 | 3.65908e-03 | 0.86 | 0.80291 | 1.72246e-03 | 0.86 |
| 5 | 256 | 256 | 0.80261 | 2.02248e-03 | 0.86 | 0.80370 | 9.35387e-04 | 0.88 |
| 6 | 512 | 512 | 0.80353 | 1.10689e-03 | 0.87 | 0.80414 | 4.88833e-04 | 0.94 |

Tabelle 7.124: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation $\tilde{S}_h^{\text{BEM},-1}$ des Steklov-Poincaré-Operators S .

| L | M_Ω | N_Ω | $c_{K,\min}^{\text{FEM}}$ | $ c_K - c_{K,\min}^{\text{FEM}} $ | eoc |
|---|------------|------------|---------------------------|-----------------------------------|------|
| 0 | 11 | 12 | 0.64969 | 1.54943e-01 | 0.00 |
| 1 | 33 | 48 | 0.72718 | 7.74562e-02 | 1.00 |
| 2 | 113 | 192 | 0.76801 | 3.66206e-02 | 1.08 |
| 3 | 417 | 768 | 0.78628 | 1.83528e-02 | 1.00 |
| 4 | 1601 | 3072 | 0.79496 | 9.66918e-03 | 0.92 |
| 5 | 6273 | 12288 | 0.79938 | 5.24982e-03 | 0.88 |
| 6 | 24833 | 49152 | 0.80174 | 2.89124e-03 | 0.86 |

Tabelle 7.125: Approximierte Kontraktionskonstante, Fehler und die Konvergenzordnung für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S .

Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6 sind in der Abbildung 7.30 dargestellt, wobei man Singularitäten in den Ecken erkennt.

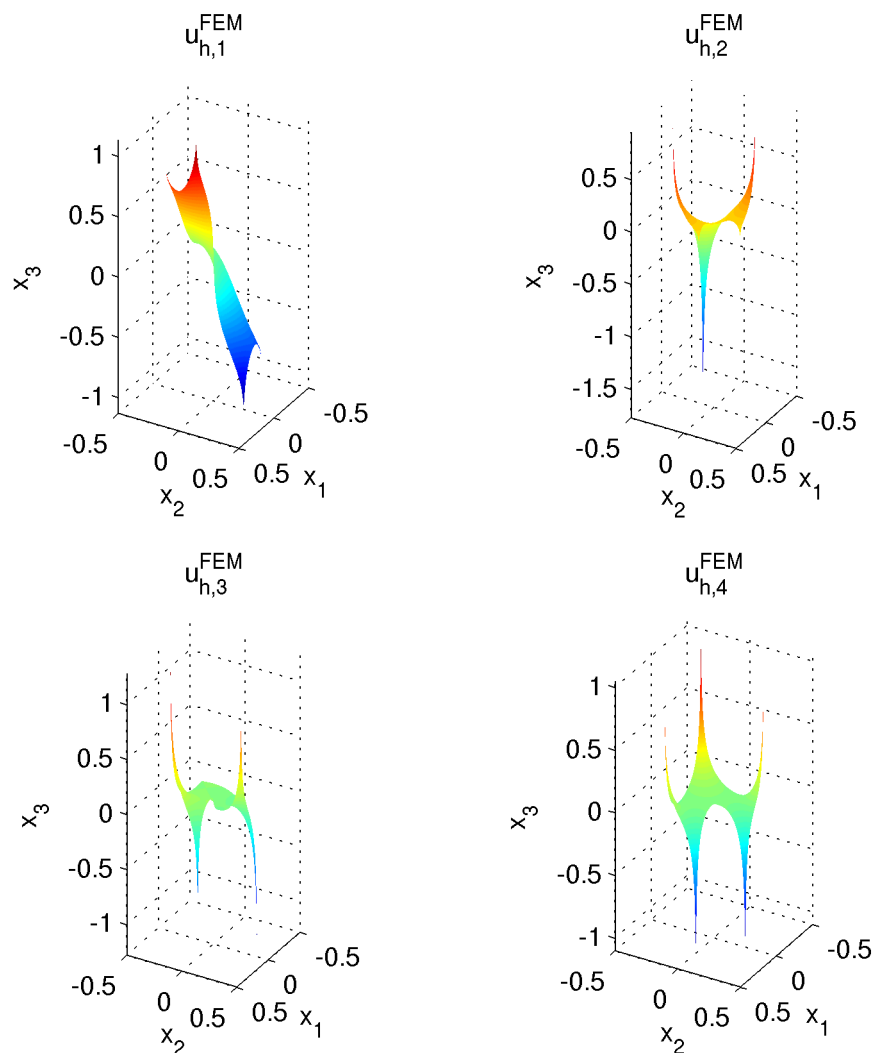


Abbildung 7.30: Vier approximierte Steklov-Eigenfunktionen für die Approximation S_h^{FEM} des Steklov-Poincaré-Operators S für Level 6.

Zusammenfassung - Ausblick

In dieser Arbeit wurde das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial n} u = \mu F u \text{ auf } \Gamma$$

für einen Operator $F: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ untersucht. Dazu wurden in Kapitel 1, Kapitel 2 und Kapitel 3 die wichtigsten Begriffe und Aussagen über die Sobolev-Räume, die Spektraltheorie und über Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften zusammengetragen. Das Kapitel 4 wurde dem Standard-Steklov-Eigenwertproblem gewidmet. In Kapitel 5 wurde das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1} und für den hypersingulären Operator D untersucht und Aussagen über das Spektrum der zugrundeliegenden Operatoren für Gebiete, bei denen der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ kompakt ist, bewiesen. Das Kapitel 6 und das Kapitel 7 handeln über die Numerik des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems und insbesondere über drei verschiedene Approximationen des Steklov-Poincaré-Operators S . Dazu wurde das Konvergenzverhalten der Steklov-Eigenwerte anhand der Kreisscheibe, der Ellipse, des C-förmigen Gebiets, des Quadrats und des L-förmigen Gebiets betrachtet. Weiter wurde auch das Konvergenzverhalten für die Kontraktionskonstante c_K von $\frac{1}{2}I + K$ untersucht.

Wenn der Doppelschichtoperator $K: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ nicht kompakt ist, dann bleiben die Beweise über die Struktur des Spektrums und Existenz von Eigenwerten für die dem verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblem zugeordneten Operatoren offen. Das ist insbesondere der Fall, wenn der Rand Γ eine Ecke besitzt. In den numerischen Beispielen erkennt man, dass die Steklov-Eigenfunktionen des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1} und für den hypersingulären Operator D beim Quadrat und beim L-förmigen Gebiet Singularitäten in den Ecken aufweisen. Daher sind Aussagen über die Regularität von den Steklov-Eigenfunktionen in Abhängigkeit vom Gebiet Ω und dessen Rand Γ von großem Interesse. Die Analysis für Lipschitz-Gebiete für das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem ist generell noch offen.

Weiter sind bei der numerischen Analysis des verallgemeinerten Steklov-Eigenwertproblems viele Fragen unbeantwortet. Insbesondere sind die Konvergenzordnungen vom Gebiet beziehungsweise von der Glattheit des Gebiets abhängig. Diese Abhängigkeit ist noch ungeklärt.

Generell könnte das verallgemeinerte Steklov-Eigenwertproblem außer für den inversen Einfachschichtoperator V^{-1} und für den hypersingulären Operator D auch noch für andere Operatoren $F: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ untersucht werden. Eventuell könnte so ein Zusammenhang zwischen der Kontraktionskonstante c_K von $\frac{1}{2}I + K$ und anderen Konstanten geschaffen werden.

Zusätzlich wäre eine Umsetzung für Gebiete im \mathbb{R}^3 mit schnellen Randelementmethoden und schnellen Lösern für verallgemeinerte Eigenwertprobleme erstrebenswert.

Literaturverzeichnis

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.
- [2] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, 2012.
- [3] Giles Auchmuty. Steklov Eigenproblems and the Representation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **25**:321–348, 2004.
- [4] TongKeun Chang and Kijung Lee. Spectral properties of the layer potentials on Lipschitz domains. *Illinois Journal of Mathematics*, **52**(2):463–472, 2008.
- [5] David Colton and Rainer Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.
- [6] Pierre Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston, 1985.
- [7] Wolfgang Hackbusch. *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [8] George C. Hsiao and Wolfgang L. Wendland. *Boundary integral equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [9] Rainer Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2014.
- [10] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Application*. Wiley, 1978.
- [11] Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík. *Function Spaces*. Springer, 1977.
- [12] William McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [13] Jindřich Nečas. *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Springer, 2011.
- [14] Karl-Mikael Perfekt and Mihai Putinar. Spectral bounds for the Neumann-Poincaré operator on planar domains with corners. *ArXiv e-prints*, 2012.
- [15] Sergej Rjasanow and Olaf Steinbach. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, 2007.
- [16] Gregory J. Rodin and Olaf Steinbach. Boundary element preconditioners for problems defined on slender domains. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **24**(4):1450–1464, 2003.
- [17] Stefan A. Sauter and Christoph Schwab. *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2010.

-
- [18] Olaf Steinbach. *Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods*. Number 1809 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2003.
 - [19] Olaf Steinbach. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements*. Springer, 2007.
 - [20] Michael E. Taylor. *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators, and Layer Potentials*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2007.
 - [21] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen 1: Grundlagen*. Lineare Operatoren in Hilberträumen. Vieweg+Teubner Verlag, 2000.
 - [22] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
 - [23] Joseph Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1987.
 - [24] Marco Zank. Analytische Betrachtung des Schrödinger-Steklov-Eigenwertproblems. Seminar Bakkalaureat TM, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2013.
 - [25] Marco Zank. Numerische Betrachtung des Schrödinger-Steklov-Eigenwertproblems. Bakkalaureatsprojekt TM, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2013.
 - [26] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*. Springer New York, 1995.