

**Arno KIMESWENGER**

# **Akustik-Struktur-Interaktion im zeitharmonischen Bereich**

**MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs

Masterstudium Technomathematik



Technische Universität Graz

Betreuer:  
Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, am 14. Juni 2011



## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....  
(Unterschrift)



**Masterarbeit:**

Titel: Akustik-Struktur-Interaktion im zeitharmonischen  
Bereich  
Name, Vorname: Kimeswenger Arno  
Matrikelnummer: 0530105  
Lehrveranstaltung: Masterarbeit  
Institut: Institut für Numerische Mathematik  
Technische Universität Graz  
Betreuung: Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach



# Vorwort

Durch die interessante physikalische Problemstellung und nicht weniger durch die sehr eleganten mathematischen Methoden zum Lösen von Differentialgleichungen wurde das in dieser Arbeit behandelte Thema,

Akustik-Struktur-Interaktion im zeitharmonischen Bereich,

zu einer spannenden Herausforderung. Für den Vorschlag dieser Thematik und für die sehr gute Betreuung möchte ich mich daher bei Herrn Prof. Olaf Steinbach herzlich bedanken. Das Bereitstellen eines Arbeitsplatzes machte die Arbeit zu einer noch angenehmeren Angelegenheit. Für das freundliche Arbeitsklima möchte ich mich beim gesamten Institut bedanken.

Bei Frau Dr. Sarah Engleder möchte ich mich für die Unterstützung und das zur Verfügung stellen der BEM-Software bedanken. Die FEM-Software von Herrn Dipl.-Ing. Christoph Augustin erleichterte mir die Implementierung ungemein, weshalb ich mich an dieser Stelle bei ihm dafür bedanken möchte.

Für die täglichen Ratschläge, Diskussionen und für die Programmierhilfe möchte ich mich bei meinem Bürokollegen und sehr guten Freund Elias Karabelas bedanken. Mein Dank gilt auch Nikola Rogler für ihre Unterstützung und das Korrigieren der Arbeit.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>1 Modelle und Problemstellung</b>	<b>15</b>
1.1 Modell der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	15
1.2 Modell der linearen Akustik . . . . .	18
1.3 Kopplung der linearen Elastizitätstheorie mit der linearen Akustik . .	23
1.4 Problemstellung . . . . .	24
<b>2 Analysis</b>	<b>27</b>
2.1 Grundlagen . . . . .	27
2.2 Analysis der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	37
2.3 Analysis der linearen Akustik . . . . .	40
2.4 Analysis des gekoppelten Modells . . . . .	44
<b>3 Näherungsmethoden</b>	<b>57</b>
3.1 Finite Elemente . . . . .	59
3.2 Randelemente . . . . .	61
3.3 Numerische Methode für das gekoppelte System . . . . .	62
3.4 Eine Fehlerabschätzung für die Punktauswertung . . . . .	66
<b>4 Simulationen</b>	<b>67</b>
4.1 Test mit analytischer Lösung, Anregung über Volumskräfte . . . . .	67
4.2 Test mit analytischer Lösung, Anregung über Neumann Randbedin- gungen . . . . .	69
4.3 Simulation der Akustik-Struktur-Interaktion in einem Unterseeboot . .	72
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>77</b>
<b>A Appendix</b>	<b>81</b>
A.1 Analytische Lösung des gekoppelten Systems . . . . .	81
A.2 Kritische Frequenzen für den hypersingulären Operator . . . . .	83



# Einleitung

Lärm ist ein Faktor, welcher bei technischen Produkten eine sehr wichtige Rolle spielt. Gute/schlechte akustische Eigenschaften eines Produkts können wesentlich zum Produkterfolg/misserfolg beitragen. Es ist daher wichtig, sich Gedanken über die akustischen Eigenschaften zu machen. Experimente und Simulationen können verwendet werden, um diese Eigenschaften zu untersuchen. Da Experimente sehr teuer, manchmal sogar unmöglich sein können, ist die Simulation ein wichtiger Beitrag zur Verbesserung von Produkten.

Das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung von akustischen Eigenschaften von Schiffen. Es ist naheliegend, eine Unterscheidung von schwimmenden Schiffen, das heißt nur zum Teil untergetauchten Schiffen und untergetauchten Schiffen, Unterseebooten, zu treffen. Der Vorteil bei Unterseebooten besteht darin, dass das Boot nur von Wasser umgeben ist. Man kann sich vorstellen, dass dies sowohl bei der Modellierung als auch bei der Analysis bzw. Numerik einfacher zu handhaben ist, als bei schwimmenden Schiffen. Es werden daher im Weiteren Unterseeboote betrachtet. In [3] werden sowohl Unterseeboote als auch schwimmende Schiffe auf ihre akustischen Eigenschaften untersucht.

Um einen akustischen Effekt beobachten zu können, benötigt man eine “lärmerzeugende” Größe. Die Hauptmaschine des Bootes sowie die Schiffspropeller sind wesentlich für den Lärm verantwortlich. Diese beiden Größen üben Kräfte auf das Boot aus und infolgedessen kommt es zu Verformungen des Bootes. Diese Verformungen sind ausschlaggebend für die Entstehung von Druckschwankungen im Wasser, es entsteht Lärm. Man interessiert sich nun für die Lautstärke an gewissen Punkten außerhalb des Bootes.

Es stellt sich die Frage, ob man die beiden Bereiche Verformung aufgrund der Anregung und Ausbreitung der akustischen Welle getrennt voneinander untersuchen kann, oder ob das Wasser wesentlichen Einfluss auf die Verformung hat. Dies hängt von den Materialeigenschaften, Eigenschaften vom Fluid und ganz besonders von der Geometrie ab. Man kann sich leicht vorstellen, dass eine sehr dicke Wand sich weniger vom Fluid beeinflussen lassen wird als eine sehr dünne Wand. Da die Wandstärke bei Schiffen gering ist, kann der Einfluss vom Wasser durchaus sehr groß werden.

Der Vorteil der getrennt voneinander durchgeführten Untersuchung (One Way Coupling) ist der, dass die einzelnen Teilprobleme, d.h. die Verschiebung und die Akustik, einfacher zu behandeln sind, als wenn man beides zugleich behandelt. Nichtsdestotrotz wird in dieser Arbeit die zweiseitige Kopplung (Strong Coupling) untersucht,

da sie ein realistischeres Modell erlaubt.

Die zugrundeliegenden Modelle der Verschiebung sowie der Akustik werden in Kapitel 1 motiviert. Man erhält das Modell der linearen Elastizitätstheorie sowie die Wellengleichung. Besonders elegant wird es, wenn man zeitharmonische Anregungen betrachtet. Im Weiteren wird ausschließlich auf diese Art von Anregungen eingegangen. Darüber hinaus ist eine Beziehung der beiden Modelle zueinander notwendig. Es werden zwei Transmissionsbedingungen motiviert, welche einerseits die Kräfte und deren Übertragung und andererseits die Gleichheit der Normalenkomponente der Geschwindigkeiten behandeln. In Summe erhält man ein System von Differentialgleichungen mit zwei Transmissionsbedingungen und Randbedingungen. Diese Randbedingungen sowie Volumskräfte sind für die Anregung zuständig.

In Kapitel 2 werden zunächst allgemeine Resultate der Funktionalanalysis diskutiert sowie die zugrundeliegenden Räume, die Sobolevräume, eingeführt. Als wesentliches Hilfsmittel wird sich der Satz von der Fredholmschen Alternative herausstellen. Mit diesen Hilfsmitteln werden zunächst die beiden Modelle getrennt auf (eindeutige) Lösbarkeit untersucht. Für die lineare Elastizitätstheorie wird die Variationsformulierung hergeleitet und genauer untersucht. In der Akustik hat man die Helmholtzgleichung, das ist die Gleichung, welche man aus der Wellengleichung bei zeitharmonischen Anregungen erhält, in einem unbeschränkten Gebiet zu lösen. Für die Helmholtzgleichung ist die Fundamentallösung wohlbekannt und somit kann die sehr elegante Methode der Randintegralgleichungen verwendet werden. Der wesentliche Vorteil dieser Methode besteht darin, dass unbeschränkte Gebiete ohne größere Probleme betrachtet werden können, da lediglich Integrale über den Rand benötigt werden. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass man ein bestimmtes Abklingverhalten der Lösung fordern muss, um physikalisch realistische Modelle zu erhalten. Dieses Abklingverhalten, die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung, ist in einer natürlichen Weise in den Randintegralgleichungen eingebaut. Hat man die beiden Teilprobleme getrennt voneinander untersucht, wird im Anschluss das gekoppelte Problem unter die Lupe genommen. Es wird nicht wie in [3] vorgegangen, wo einerseits der Ansatz von Burton und Miller und andererseits eine Formulierung mit Lagrangemultiplikator verwendet wird. Stattdessen wird die Idee von [14, 18] weiterverfolgt, wo eine symmetrische Formulierung hergeleitet wird. Es wird sich herausstellen, dass der Druck auf dem Kopplungsrand nicht eindeutig ist, was jedoch keine Auswirkungen auf die Verschiebung bzw. auf den Druck außerhalb des Bootes hat. Führt man eine geeignete zusätzliche Bedingung für den Druck ein, kann dieser fixiert werden und man erhält eine eindeutige Lösung des gesamten Systems, falls keine Eigenfrequenzen vorliegen.

In Kapitel 3 wird das in Kapitel 2 hergeleitete System mit der Finiten-Elemente-Methode und der Randelementmethode diskretisiert. Für den Fall, dass der Kern des hypersingulären Operators trivial ist, kann eine numerische Analysis angegeben werden. Ist der Kern jedoch nicht trivial, wird in dieser Arbeit keine Aussage über

Konvergenz usw. angegeben. Beispiele in Kapitel 4 zeigen jedoch, dass auch für diesen Fall die theoretischen Aussagen aus Kapitel 3 zu funktionieren scheinen. Letztendlich wird eine Simulation für ein einfaches Unterseeboot betrachtet. Dieses Beispiel ist ein Nachbau des Beispiels aus [3].



# 1 Modelle und Problemstellung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die verwendeten Modelle, das heißt die Modelle der linearen Elastizitätstheorie und der linearen Akustik, vorzustellen. Für eine genaue Herleitung der Modelle wird auf einschlägige Literatur verwiesen. Weiters wird auf die Kopplung dieser beiden Modelle eingegangen.

## 1.1 Modell der linearen Elastizitätstheorie

Für eine genauere Betrachtung sei an dieser Stelle auf [4, 11] verwiesen.

Die wesentlichen Grundlagen für die Herleitung der (linearen) Elastizitätstheorie sind die **Masseerhaltung**, **Impulserhaltung**, sowie die **Drehimpulserhaltung**. Des Weiteren wird noch ein Materialgesetz benötigt.

Die **Masseerhaltung** ist ein Axiom, welches besagt, dass sich die Masse einer Menge an Partikeln für alle Kontrollvolumina  $w(t)$  bezüglich der Zeit nicht verändert. Dies kann auch wie folgt formuliert werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \varrho(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{y}(t) = 0.$$

Dabei ist  $\varrho$  die Dichte des Materials.

Das Axiom der **Impulserhaltung** postuliert, dass die Änderung des Impulses bezüglich der Zeit gleich den angreifenden Kräften ist: Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \varrho(t, \mathbf{y}(t)) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{y}(t) = \int_{w(t)} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{y}(t) + \int_{\partial w(t)} \mathbf{t}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{n}) d\mu_{\mathbf{y}(t)}$$

für alle Kontrollvolumina  $w(t)$  mit dem zugehörigen Rand  $\partial w(t)$ .  $\varrho$  ist die Dichte,  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit und  $\mathbf{f}$  bzw.  $\mathbf{t}$  beschreiben die Volums- bzw. die Oberflächenkräfte. Weiters ist  $\mathbf{n}$  der normierte äußere Normalenvektor.

Das Axiom der **Drehimpulserhaltung** beschreibt die Änderung des Drehimpulses

bezüglich der Zeit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{w(t)} \mathbf{y}(t) \times \varrho(t, \mathbf{y}(t)) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{y}(t) &= \\ &= \int_{w(t)} \mathbf{y}(t) \times \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{y}(t) + \int_{\partial w(t)} \mathbf{y}(t) \times \mathbf{t}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{n}) d\mu_{\mathbf{y}(t)} \end{aligned}$$

für alle Kontrollvolumina  $w(t)$ .

Als Resultat der physikalischen Erhaltungsgesetze erhält man mit dem Reynoldschen Transporttheorem für hinreichend stetig differenzierbare Funktionen die Gleichgewichtsgleichungen

$$\varrho_s \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \varrho_s \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1.1)$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Lipschitz Gebiet und  $(0, T)$  das zugrunde liegende Zeitintervall ist.

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  beschreibt die Verschiebung,  
 $\varrho_s(\mathbf{x})$  beschreibt die Dichte zum Zeitpunkt  $t = 0$ ,  
 $\mathbf{T}$  beschreibt den Spannungstensor und  
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  beschreibt die Volumskräfte.

Weiters benötigt man ein Materialgesetz, um den Spannungstensor beschreiben zu können. In dieser Arbeit wird das **Hookesche Gesetz** verwendet:

$$\mathbf{T} = -p_0 \mathbf{I} + \sigma, \quad (1.2)$$

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{Itr} \varepsilon, \quad (1.3)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^\top \right).$$

$\mu$  und  $\lambda$  werden Lamé-Koeffizienten genannt und können durch den Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktion  $\nu$  wie folgt beschrieben werden:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Um ein Gespür für die Größenordnungen und Einheiten zu bekommen, werden in Tabelle 1.1 die Koeffizienten  $E$  und  $\nu$  für einige Materialien aufgelistet.<sup>1</sup> Zusätzlich zur

---

<sup>1</sup>Die Daten sind aus <http://en.wikipedia.org/wiki/Iron>, <http://en.wikipedia.org/wiki/Aluminium>, <http://de.wikipedia.org/wiki/Beton> und <http://en.wikipedia.org/wiki/Titanium> entnommen



Material	$E$ in $\text{GN/m}^2$	$\nu$	$\rho$ in $\text{kg/m}^3$
Eisen	211	0.29	7874
Aluminium	70	0.35	2700
Beton	26 – 37	0.15 – 0.25	2000 – 2600
Titan	116	0.32	4506

Tabelle 1.1: Stoffeigenschaften.

Differentialgleichung (1.1) werden noch Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Als Anfangsbedingungen werden die Anfangsverschiebung und die Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \text{ und} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Big|_{t=0} &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.4)$$

In dieser Arbeit werden zwei Randbedingungen betrachtet. Einerseits wird die Verschiebung am Rand durch Dirichletrandbedingungen vorgegeben, andererseits wird die auf die Oberfläche wirkende Kraft durch Neumannrandbedingungen vorgegeben. Dazu wird der Rand  $\Gamma$  von  $\Omega$  in zwei disjunkte Teile  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  aufgeteilt. Auf  $\Gamma_D$  werden Dirichletrandbedingungen vorgegeben und auf  $\Gamma_N$  Neumannrandbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}_D(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D, t \in (0, T) \text{ und} \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_N(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  den äußeren Normalenvektor bezeichnet.

Das bedeutet, dass bei gegebener Geometrie  $\Omega$ , gegebener Dichte  $\rho_s$ , gegebenen Elastizitätsmodul  $E$  und gegebener Querkontraktion  $\nu$  die drei Größen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{g}_D(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{g}_N(\mathbf{x}, t)$  ausschlaggebend für die Verformung sind. Im Weiteren werden für diese drei Größen zeitharmonische Anregungen betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \Re\left(e^{i\omega t} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\right), \\ \mathbf{g}_D(\mathbf{x}, t) &= \Re\left(e^{i\omega t} \hat{\mathbf{g}}_D(\mathbf{x})\right) \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{x}, t) = \Re\left(e^{i\omega t} \hat{\mathbf{g}}_N(\mathbf{x})\right),$$

bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega$ . Dies motiviert den Ansatz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Re\left(e^{i\omega t} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\right).$$

Um die Notation einfacher zu halten, werden die Funktionen  $\hat{\mathbf{f}}$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_D$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_N$  und  $\hat{\mathbf{u}}$  wieder mit  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}_D$ ,  $\mathbf{g}_N$  und  $\mathbf{u}$  bezeichnet. Wird dieser Ansatz in die Differentialgleichung (1.1) eingesetzt, erhält man folgende zeitunabhängige Differentialgleichung

$$-\rho_s \omega^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma = \rho_s \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.6)$$

mit dem Materialgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{I tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.7)$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_D(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_N(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Es sei hier noch erwähnt, dass es sich bei dem hier verwendeten Materialgesetz um ein sehr einfaches handelt. Für viele Materialien ist dieses Gesetz nicht geeignet und es müssen kompliziertere Gesetze verwendet werden. In [10, 15] werden zum Beispiel (nicht-lineare) Materialgesetze behandelt. Dies wirkt sich jedoch nicht auf die in dieser Arbeit behandelte Kopplung mit der Akustik aus.

### 1.2 Modell der linearen Akustik

Dieses Kapitel lehnt sich größtenteils an [6, 11] an.

Ähnlich wie im vorigen Kapitel ist die Grundlage für die Herleitung des Modells der linearen Akustik die **Masseerhaltung** und die **Impulserhaltung**. Darüber hinaus wird eine **Zustandsgleichung** benötigt.

Aus der Masseerhaltung erhält man die **Kontinuitätsgleichung**

$$\text{div}(\varrho \mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial t} \varrho. \quad (1.9)$$

Aus der Masse- und Impulserhaltung erhält man die **Eulergleichung** (hier ohne Volumskräfte)

$$\varrho \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (1.10)$$

Experimente zeigen, dass für das akustische Modell eine adiabatische Zustandsänderung vorliegt. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung kommt es zu keinem Wärmeaustausch mit der Umgebung, d.h. die Wärmeenergie bleibt in einem abgeschlossenen System erhalten. Hier gilt die **Zustandsgleichung**

$$pV^\kappa = \text{const}, \quad (1.11)$$

$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  ist der Adiabatenexponent,  $c_p$  ist die isobare Wärmekapazität und  $c_v$  die isochore Wärmekapazität.

Für eine detaillierte Herleitung dieser drei Gleichungen sei auf [8] verwiesen. In diesem Buch werden auch kompliziertere Modelle als das soeben beschriebene behandelt.

Aus der Zustandsgleichung (1.11) wird nun eine Beziehung zwischen dem Druck  $p$  und der Dichte  $\varrho$  hergestellt.  $V_0, p_0$  und  $\varrho_0$  seien das Volumen, der Druck und die Dichte eines ruhenden Fluids und  $V, p$  und  $\varrho$  seien das Volumen, der Druck und die Dichte eines Fluids, in dem sich eine akustische Welle ausbreitet. Mit (1.11) gilt

$$\left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa = \frac{p}{p_0},$$

bzw. unter Annahme einer konstanten Masse, d.h.  $m_0 = \varrho_0 V_0 = \varrho V$ , gilt

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\kappa = \frac{p}{p_0}.$$

Sei nun  $p = p_0 + \tilde{p}$  und  $\varrho = \varrho_0 + \tilde{\varrho}$ . Dann gilt für  $\tilde{\varrho} \ll \varrho_0$  unter Zuhilfenahme der Taylorentwicklung

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}.$$

Man erhält die lineare Zustandsgleichung

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\varrho}} \approx \kappa \frac{p_0}{\varrho_0} =: c^2, \tag{1.12}$$

da

$$1 + \frac{\tilde{p}}{p_0} = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}$$

gilt. Dies bedeutet, dass annähernd ein linearer Zusammenhang

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\varrho} \tag{1.13}$$

zwischen  $\tilde{p}$  und  $\tilde{\varrho}$  besteht.  $c$  wird Schallgeschwindigkeit genannt.

Im Folgenden werden auch die Eulergleichung (1.10) und die Kontinuitätsgleichung (1.9) vereinfacht. Aus der nichtlinearen Eulergleichung erhält man mit den beiden Annahmen

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}| \ll \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}\right| \text{ und } \varrho \approx \varrho_0$$

die lineare, vereinfachte Gleichung

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\nabla p. \tag{1.14}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung erhält man mit den beiden Annahmen

$$|\mathbf{v} \cdot \nabla \varrho| \ll |\varrho \operatorname{div} \mathbf{v}| \quad \text{und} \quad \varrho \approx \varrho_0$$

die vereinfachte Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t} \varrho = \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}$$

und daher auch

$$-\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho = \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}.$$

Als Resultat dieser Vereinfachungen erhält man

$$-\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho = -\frac{1}{\varrho_0} \operatorname{div} \nabla p.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$\Delta p = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho.$$

Mit der Zustandsgleichung (1.13) erhält man die Wellengleichung der Akustik

$$\Delta \tilde{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p}. \quad (1.15)$$

Diese Wellengleichung gilt es, in einem Gebiet  $\Omega$  zu lösen. Dieses Gebiet wird im Weiteren als unbeschränkt angenommen. Es werden die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \tilde{p}_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \tilde{p}_1(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

sowie die Randbedingungen

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = g_D(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D, t \in (0, T), \quad (1.16)$$

$$\nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = g_N(\mathbf{x}, t) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N, t \in (0, T) \quad (1.17)$$

verwendet.  $\Gamma$ , der Rand von  $\Omega$ , wird hierfür wieder in einen Dirichletrand  $\Gamma_D$  und einen Neumannrand  $\Gamma_N$  aufgeteilt.

Analog zum vorigen Kapitel werden **zeitharmonische Anregungen** betrachtet, d.h.

$$\mathbf{g}_D(\mathbf{x}, t) = \Re \left( e^{i\omega t} \hat{\mathbf{g}}_D(\mathbf{x}) \right),$$

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{x}, t) = \Re \left( e^{i\omega t} \hat{\mathbf{g}}_N(\mathbf{x}) \right).$$

Um die Notation zu vereinfachen wird wieder  $g_D$  und  $g_N$  anstatt  $\hat{g}_D$  und  $\hat{g}_N$  geschrieben.

Wie in der linearen Elastizitätstheorie wird der Ansatz

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \Re \left( \tilde{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \right) \quad (1.18)$$

verwendet.

Dieser Ansatz vereinfacht die Wellengleichung (1.15) und man erhält die **Helmholtzgleichung**

$$k^2 \tilde{p} + \Delta \tilde{p} = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.19)$$

mit der Wellenzahl  $k = \frac{\omega}{c}$  und den Randbedingungen

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (1.20)$$

$$\nabla \tilde{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N. \quad (1.21)$$

Es wird angenommen, dass  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{n}(\mathbf{x})$  gilt. Da bei zeitharmonischen Anregungen die Anfangsbedingungen fehlen (Es wird hier der Einschwingvorgang außer acht gelassen und nur der eingeschwingene Zustand betrachtet.), kann es passieren, dass Lösungen der Differentialgleichung auftreten, welche physikalisch nicht kausal sind. Sommerfeld hat in [21] daher eine zusätzliche Forderung an die Lösung gestellt. Die Lösung muss nun auch die **Sommerfeldsche Abstrahlbedingung** erfüllen:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|=r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} \tilde{p} - ik\tilde{p} \right) = 0. \quad (1.22)$$

Oftmals ist es ausreichend, eine schwächere Bedingung zu stellen:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|=r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} |\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} - ik\tilde{p}|^2 d\mu = 0. \quad (1.23)$$

Für eine Lösung  $\tilde{p}$  der Problemstellung (1.19) – (1.22) oder (1.23) kann für ein  $\mathbf{x} \in \Omega$  der Schalldruckpegel in dB definiert werden:

$$L_p := 20 \log_{10} \frac{p_{\text{rms}}}{p_{\text{ref}}}$$

mit  $p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}$  und

$$p_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T \tilde{p}(\mathbf{x}, t)^2 dt},$$

wobei  $T$  der Zeitperiode entspricht. Sei für ein fixes  $\mathbf{x}$  der Druck gegeben, das heißt  $\tilde{p}(\mathbf{x}) = c + id$ , dann gilt

$$p_{\text{rms}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Re \left( (c + id)e^{i\omega t} \right)^2 d\mathbf{x} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (c \cos \omega t - d \sin \omega t)^2 d\mathbf{x} = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{2}}.$$

Für die Werte  $c = d = 1$  erhält man zum Beispiel  $p_{\text{rms}} = 1$  und daher  $L_p \approx 94\text{dB}$ . In Grafik 1.1 ist die Funktion  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \Re(\tilde{p}(\mathbf{x})e^{i\omega t})$  dargestellt. In Tabelle 1.2 können

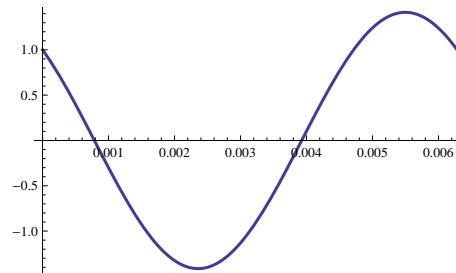


Abbildung 1.1:  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$  für  $c = d = 1, \omega = 1000$ .

gängige Werte für den Schalldruckpegel entnommen werden.

Hörschwelle	Stimme, 1.5m	Auto, 20m	laute Musik	Jet
0dB	60dB	80dB	100dB	120dB

Tabelle 1.2: Werte für den Schalldruckpegel in dB.  
Entnommen aus [11, Seite 109, Table 5.1.]

Um geeignete Transmissionsbedingungen zwischen Fluid und Solid setzen zu können, wird die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  genauer betrachtet. Aus der vereinfachten Eulergleichung (1.14) folgt:

$$\text{rot} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho_0} \nabla p \right) = 0.$$

Daher ist  $\text{rot} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$ . Vorausgesetzt das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  besitzt keine Rotation zum Zeitpunkt  $t = 0$ , dann gilt  $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  und daher kann  $\mathbf{v}$  als Gradientenfeld eines Potentials  $\Psi$  dargestellt werden,  $\mathbf{v} = -\nabla \Psi$ . Dies in die vereinfachte Eulergleichung (1.14) eingesetzt liefert

$$-\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi = -\nabla p.$$

Um bei dem gekoppelten Problem klar hervorzuheben, dass es sich bei der Variable  $\varrho_0$  um die Dichte des Fluids handelt, wird  $\varrho_f$  anstatt von  $\varrho_0$  geschrieben. Man erhält daher

$$\varrho_f \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi = \nabla p. \tag{1.24}$$

## 1.3 Kopplung der linearen Elastizitätstheorie mit der linearen Akustik

In diesem Kapitel werden zwei Bedingungen am Kopplungsrand  $\Gamma$ , die **Transmissionsbedingungen**, motiviert. Mit  $\mathbf{v}_s$  wird die Geschwindigkeit der elastischen Struktur bezeichnet und mit  $\mathbf{v}_f$  die Geschwindigkeit des Fluids.

Die **erste Transmissionsbedingung** besagt, dass die Geschwindigkeitsfelder in Normalenrichtung übereinstimmen müssen:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) = 0.$$

Daher gilt:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_f = -\mathbf{n} \cdot \nabla \Psi.$$

Diese Gleichung wird bezüglich der Zeit abgeleitet und (1.24) wird angewandt. Das Resultat lautet dann:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = -\mathbf{n} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{n} \cdot \nabla p.$$

Hier wurde angenommen, dass sich das Interface  $\Gamma$  während der Zeit nicht verändert und somit der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auch nicht von der Zeit abhängt. Die erste Transmissionsbedingung lautet daher:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_f} \mathbf{n} \cdot \nabla p.$$

Für zeitharmonische Anregungen gilt dann

$$\omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_f} \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{p},$$

bzw.

$$\rho_f \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{p}. \quad (1.25)$$

Die **zweite Transmissionsbedingung** fordert, dass sich die Kräfte wie folgt übertragen:

$$-p\mathbf{n} = \mathbf{T}\mathbf{n}.$$

Es gilt  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} - p_0\mathbf{I}$ ,  $p = p_0 + \tilde{p}$  und daher kann dies zu

$$-\tilde{p}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \quad (1.26)$$

vereinfacht werden.

## 1.4 Problemstellung

Es ist nun das Ziel, die in diesem Kapitel behandelten Modelle unter Zuhilfenahme der beiden Transmissionsbedingungen miteinander zu koppeln. Um die Notation einfacher zu halten, wird ab diesem Kapitel  $p$  für den variablen Teil  $\hat{p}$  geschrieben. Abbildung 1.2 soll einen ersten Überblick über die Problemstellung verschaffen.  $\Omega_f$  und  $\Omega_s$  sind die Gebiete, in denen die Differentialgleichung der linearen Akustik bzw. der linearen Elastizitätstheorie zu lösen sind.  $\Gamma_N$  ist der Neumannrand,  $\Gamma_D$  der Dirichletrand und  $\Gamma$  der Kopplungsrand, an dem die Transmissionsbedingungen (1.25) und (1.26) gelten. In dieser Arbeit wird, nicht wie in Abbildung 1.2 dargestellt,  $\Omega_f$  als ein unbeschränktes Gebiet angenommen.

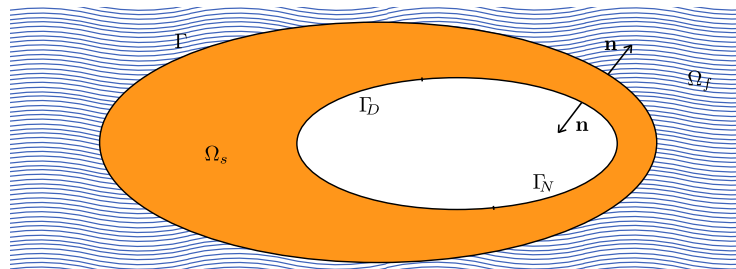


Abbildung 1.2: Skizze der Problemstellung.

Zusammengefasst erhält man folgende Problemstellung:

**Elastizitätstheorie:** Es gilt die Differentialgleichung

$$-\varrho_s \omega^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma = \varrho_s \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_s$$

mit dem Materialgesetz

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{Itr} \varepsilon$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_D(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_N(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{aligned}$$

zu lösen.

**Akustik:** Es gilt die Helmholtzgleichung

$$k^2 p + \Delta p = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_f$$



mit der Abstrahlbedingung

$$\lim_{\|x\|=r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} |\nabla p \cdot \mathbf{n} - ikp|^2 d\mu = 0$$

zu lösen.

**Transmissionsbedingungen:** Auf dem Kopplungsrand sind die beiden Transmissionsbedingungen

$$\rho_f \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla p \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

und

$$-p\mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

gegeben.



## 2 Analysis

Dieses Kapitel beginnt mit der Behandlung wichtiger funktionalanalytischer Hilfsmittel, sowie der Einführung der Sobolevräume. Anschließend werden die Probleme der linearen Elastizitätstheorie und der linearen Akustik auf (eindeutige) Lösbarkeit untersucht. Abschließend wird die Analysis des gekoppelten Systems behandelt.

### 2.1 Grundlagen

Elliptische Operatoren sind die Grundlage für die Analysis der in Kapitel 1 behandelten Modelle. Mit Hilfe des Lemmas von Lax und Milgram kann die eindeutige Lösbarkeit elliptischer Operatorgleichungen gewährleistet werden. Es wird sich jedoch herausstellen, dass bei zeitharmonischen Anregungen die Operatoren nicht mehr elliptisch, sondern koerziv sind. Für koerzive Operatoren kann man Existenzaussagen unter Zuhilfenahme der Fredholmschen Alternative angeben.

**Definition 2.1** (Elliptischer Operator). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $X'$  der Dualraum von  $X$  bezüglich dem Dualitätsprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ein linearer Operator  $A: X \rightarrow X'$  heißt  $X$ -elliptisch, wenn eine positive Konstante  $c_1^A$  existiert, sodass die Ungleichung*

$$\Re \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq c_1^A \|\mathbf{v}\|_X^2$$

für alle  $\mathbf{v} \in X$ , erfüllt ist.

**Satz 2.2** (Lemma von Lax und Milgram). *Sei  $X$  ein Hilbertraum. Weiters sei der Operator  $A: X \rightarrow X'$   $X$ -elliptisch und beschränkt. Dann besitzt die Gleichung*

$$Au = f$$

für jedes  $f \in X'$  eine eindeutige Lösung und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}.$$

Bewiesen wird dieser Satz zum Beispiel in [22], der Beweis muss lediglich auf den komplexwertigen Fall erweitert werden.

**Definition 2.3** (Kompakter Operator).

*Seien  $X$  und  $Y$  zwei Banachräume. Ein linearer Operator  $K: X \rightarrow Y$  heißt kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel in  $X$  relativ kompakt in  $Y$  ist. Eine Menge  $A$  heißt relativ kompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

**Bemerkung 2.4.** Da ein Banachraum ein metrischer Raum ist, ist der Begriff “relativ kompakt” äquivalent zu “jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge”.

**Definition 2.5** (Koerziver Operator). Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $X'$  der Dualraum von  $X$ . Ein linearer Operator  $A: X \rightarrow X'$  heißt koerziv, wenn es einen kompakten Operator  $C: X \rightarrow X'$  gibt, sodass der Operator  $A+C$  elliptisch ist, d.h. es existiert eine positive Konstante, sodass die Ungleichung

$$\Re\langle (A + C)v, v \rangle \geq c_1^A \|v\|_X^2$$

für alle  $v \in X$  erfüllt ist. Diese Ungleichung ist nach Lars Gårding benannt.

**Satz 2.6** (Fredholmsche Alternative). Sei  $X$  ein Hilbertraum. Weiters sei der Operator

$$K: X \rightarrow X$$

linear und kompakt. Dann gilt genau eine der beiden Aussagen:

- Die Gleichung

$$(I - K)u = 0$$

hat nur die triviale Lösung, d.h.  $I - K$  ist injektiv. In diesem Fall ist die inhomogene Gleichung

$$(I - K)u = g$$

für jedes  $g \in X$  eindeutig lösbar und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_X \leq c \|g\|_X \tag{2.1}$$

mit einer positiven Konstanten  $c$ .

- Die Gleichung

$$(I - K)u = 0$$

hat  $n = \dim \text{Ker}(I - K) < \infty$  linear unabhängige Lösungen. Die inhomogene Gleichung ist genau dann lösbar, wenn  $g \in (\text{Ker}(I - K))^\perp$  ist.

*Beweis.* Den Beweis, ohne die Abschätzung (2.1), findet man zum Beispiel in [12] oder [25]. Die Abschätzung (2.1) wird nun durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen:

Angenommen, es existiert keine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $u \in X$

$$\|u\|_X \leq c \|(I - K)u\|_X$$

gilt. Dann existiert eine Folge  $v_j \in X$ , welche die beiden Ungleichungen

$$\|v_j\|_X > j \|(I - K)v_j\|_X \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{j} > \left\| (I - K) \frac{v_j}{\|v_j\|_X} \right\|_X$$

erfüllt. Sei  $u_j := \frac{v_j}{\|v_j\|_X}$ , dann gilt  $\|u_j\|_X = 1$  sowie

$$\frac{1}{j} > \|(I - K)u_j\|_X.$$

Bezeichnet man  $f_j = Ku_j \in X$ , dann ist die Menge  $\{f_j\}$  präkompakt, da  $K$  kompakt ist. Das heißt, es existiert eine konvergente Teilfolge  $f_{j_k}$  von  $f_j$ .  $X$  ist abgeschlossen und daher existiert der Grenzwert  $f \in X$ ,

$$f = \lim_{j_k \rightarrow \infty} f_{j_k} = \lim_{j_k \rightarrow \infty} Ku_{j_k}.$$

Weiters folgt aus der Ungleichung  $\|(I - K)u_{j_k}\|_X < \frac{1}{j_k}$

$$\lim_{j_k \rightarrow \infty} u_{j_k} = \lim_{j_k \rightarrow \infty} (Ku_{j_k} + (I - K)u_{j_k}) = f,$$

$f$  ist daher normiert. Es gilt aber auch

$$(I - K)f = \lim_{j_k \rightarrow \infty} (I - K)f_{j_k} = \lim_{j_k \rightarrow \infty} (I - K)Ku_{j_k} = \lim_{j_k \rightarrow \infty} K(I - K)u_{j_k} = 0$$

und somit ist  $f \in \text{Ker}(I - K)$ . Andererseits ist  $\text{Ker}(I - K) = \{0\}$ , da  $I - K$  als injektiv angenommen wurde und daher ist  $f = 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $\|f\|_X = 1$  und der Annahme, dass keine Konstante  $c$  existiert, sodass die Ungleichung (2.1) gilt.  $\square$

**Korollar 2.7.** Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A: X \rightarrow X'$  ein beschränkter und koerziver Operator. Das heißt, der Operator  $A$  kann aufgeteilt werden in einen elliptischen Operator  $D$  und einen kompakten Operator  $C$ , sodass gilt  $A = D - C$ . Weiters sei  $A$  injektiv. Dann hat die Gleichung

$$Au = f$$

eine eindeutige Lösung  $u$  und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_X \leq c\|f\|_{X'}$$

mit einer positiven Konstanten  $c$ .

*Beweis.* Der Operator  $D: X \rightarrow X'$  ist elliptisch und beschränkt und daher existiert nach dem Satz von Lax und Milgram die stetige Inverse  $D^{-1}$ . Anstatt des Ausgangsproblems  $Au = f$  wird nun das äquivalente Problem

$$(I - D^{-1}C)u = D^{-1}f$$

beziehungsweise mit  $K = D^{-1}C$ ,  $\tilde{f} = D^{-1}f$

$$(I - K)u = \tilde{f}$$

betrachtet. Da der Operator  $C$  kompakt und der Operator  $D^{-1}$  stetig ist, ist der Operator  $K = D^{-1}C$  kompakt. Aus der Injektivität von  $A$  folgt, dass die triviale Lösung die einzige Lösung von  $(I - K)u = 0$  ist. Nach der Fredholmschen Alternative existiert eine eindeutige Lösung  $u$  von  $(I - K)u = \tilde{f}$  und es gilt die Abschätzung  $\|u\|_X \leq \tilde{c}\|\tilde{f}\|_X$ . Wegen der Elliptizität von  $D$  folgt die Behauptung.  $\square$

Bevor man das in Kapitel 1 hergeleitete System auf (eindeutige) Lösbarkeit untersucht, ist es notwendig, geeignete Funktionenräume für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  sowie für den Druck  $p$  zu finden. Es werden daher im Folgenden geeignete skalare sowie vektorwertige Funktionenräume eingeführt.

**Definition 2.8.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Für  $m \in \mathbb{N}$  werden dann folgende Räume definiert:

- $C^m(\Omega)$  ist der Raum der  $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$ ,
- $C_0^\infty(\Omega) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) := \overline{\{x: \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ kompakt ist} \right\}$ .

**Definition 2.9.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $f$  lokal integrierbar, wenn  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  bezüglich jeder kompakten Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  integrierbar ist. Die Menge der lokal integrierbaren Funktionen wird mit  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  bezeichnet.

**Definition 2.10 (Schwache Ableitung).** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, weiters sei  $\alpha$  ein Multiindex und  $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .  $g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  heißt schwache  $\alpha$ -te Ableitung von  $f$ , falls

$$\int_{\Omega} g \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \overline{D^\alpha \varphi} \, d\mathbf{x}$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt.

**Definition 2.11 (Sobolevräume).** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $m \in \mathbb{N}$ . Die Norm  $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$  ist definiert durch

$$\|v\|_{W_2^m(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Der Sobolevraum  $W_2^m(\Omega)$  ist definiert durch

$$W_2^m(\Omega) := \overline{\left\{ v \in C^\infty(\Omega) : \|v\|_{W_2^m(\Omega)} < \infty \right\}}^{\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}}.$$

Dass es sich bei diesem Sobolevraum um einen Hilbertraum handelt, kann in [1, Theorem 3.3] nachgelesen werden.

In [1, Theorem 3.17] wird gezeigt, dass der Raum  $W_2^m(\Omega)$  geschrieben werden kann als

$$W_2^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\}.$$

Um Sobolevräume mit Exponenten aus den positiven reellen Zahlen zu erhalten, wird die Sobolev-Slobodeckii-Norm eingeführt.

**Definition 2.12** (Sobolev-Slobodeckii-Norm). *Sei  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$  und gelte  $s = k + \kappa$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $\kappa \in (0, 1)$ . Dann wird die Sobolev-Slobodeckii-Norm wie folgt definiert:*

$$\|v\|_{W_2^s(\Omega)} := \left\{ \|v\|_{W_2^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+2\kappa}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

**Definition 2.13.** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$  und gelte  $s = k + \kappa$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sowie  $\kappa \in (0, 1)$ . Dann wird der Sobolevraum  $W_2^s(\Omega)$  wie folgt definiert:*

$$W_2^s(\Omega) := \overline{\left\{ v \in C^\infty(\Omega) : \|v\|_{W_2^s(\Omega)} < \infty \right\}}^{\|\cdot\|_{W_2^s(\Omega)}}.$$

Der Raum  $W_2^s(\Omega)$  ist daher ebenfalls ein Hilbertraum für  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ .

**Definition 2.14** (Lipschitzfunktion). *Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Lipschitzfunktion mit Konstante  $M$ , wenn die Ungleichung*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt.

**Definition 2.15** (Streng lokale Lipschitzbedingung). *Für eine allgemeine Definition sei hier auf [1, Definition 4.9] verwiesen. Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  lautet die Definition wie folgt: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, dann erfüllt  $\Omega$  die streng lokale Lipschitzbedingung genau dann, wenn der Rand von  $\Omega$  lokal Lipschitz ist. Der Rand von  $\Omega$  ist gegeben durch  $\Gamma = \bar{\Omega} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ . Dies bedeutet, dass es zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Gamma$  eine Umgebung  $U_{\mathbf{x}}$  gibt, sodass  $\Gamma \cap U_{\mathbf{x}}$  das Bild einer Lipschitz-stetigen Funktion ist.*

**Bemerkung 2.16.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt, dann ist  $\Gamma$  (der Rand von  $\Omega$ ) kompakt, da  $\Gamma$  abgeschlossen und beschränkt ist. Für alle  $\mathbf{x} \in \Gamma$  existiert eine Umgebung  $U_{\mathbf{x}}$ , sodass  $\Gamma \cap U_{\mathbf{x}}$  das Bild einer Lipschitz-stetigen Funktion ist. Die Mengen  $U_{\mathbf{x}}$  bilden eine Überdeckung von  $\Gamma$  und da  $\Gamma$  kompakt ist, existieren endlich viele Punkte  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ , sodass  $U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_p}$   $\Gamma$  überdecken. Daher kann  $\Gamma$  in  $\Gamma_1 = U_{\mathbf{x}_1} \cap \Gamma$  bis  $\Gamma_p = U_{\mathbf{x}_p} \cap \Gamma$  zerlegt werden, sodass  $\Gamma_i$  Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist. Da die  $U_{\mathbf{x}_i}$  offen sind, müssen sich die  $U_{\mathbf{x}_i}$  überlappen und daher überlappen sich auch die  $\Gamma_i$ .*

In [12, 22] wird unter anderem der Raum  $H^s(\Omega)$  über die Fouriertransformation eingeführt. Die Räume  $W_2^s(\Omega)$  und  $H^s(\Omega)$  können unter gewissen Bedingungen als gleich angesehen werden, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.17.** *Die Räume  $H^s(\Omega)$  und  $W_2^s(\Omega)$  sind für Lipschitz-Gebiete für alle  $s > 0$  gleich.*

Den Beweis findet man zum Beispiel in [12, Theorem 3.30]. Da diese beiden Funktionsräume für Lipschitz-Gebiete übereinstimmen, und im Weiteren  $\Omega$  als Lipschitz-Gebiet vorausgesetzt wird, wird im Weiteren die Notation  $H^s(\Omega)$  gewählt. Als Spezialfall erhält man den Raum  $H^1(\Omega)$  mit der Norm

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{H^1(\Omega)}^2, \quad |v|_{H^1(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}.$$

**Definition 2.18 (Distribution).** *Sei  $\mathcal{D} := C_0^\infty(\Omega)$ . Eine Distribution  $T$  ist eine stetige lineare Abbildung  $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ . Stetig bedeutet hier, dass für eine konvergente Folge  $\varphi_k \in \mathcal{D}$ , welche gegen  $\varphi \in \mathcal{D}$  konvergiert, auch  $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$  gilt. Die Gesamtheit aller Distributionen wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.*

**Definition 2.19.** *Der Raum  $H_{loc}^1(\Omega^c)$  ist definiert durch*

$$H_{loc}^1(\Omega^c) := \left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega) : T|_{\Omega^c \cap B_R} \in H^1(\Omega^c \cap B_R), \forall R > 0 : \bar{\Omega} \subset B_R \right\}.$$

Der nächste Satz ist ein Spezialfall des Satzes von Rellich und Kondrachov.

**Satz 2.20 (Satz von Rellich-Kondrachov).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen, zusammenhängend und erfülle die streng lokale Lipschitzbedingung. Dann ist die identische Einbettung von  $H^1(\Omega)$  nach  $L^2(\Omega)$  kompakt.*

Der Beweis kann zum Beispiel in [1, 2] nachgelesen werden. Diesen Spezialfall erhält man aus dem allgemeinen Satz von Rellich und Kondrachov, wenn man

$$n = 3, p = 2, m = 1, j = 0, k = 3 \quad \text{und} \quad \Omega_0 = \Omega_0^k = \Omega$$

wählt. Darüber hinaus muss die Kegelbedingung erfüllt sein. Diese ist jedoch erfüllt, da  $\Omega$  die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt, siehe dazu ebenfalls [1].

Da für die Differentialgleichungen aus Kapitel 1 auch Randbedingungen gefordert werden, werden im Weiteren Sobolevräume am Rand definiert. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt, dann existiert nach Bemerkung 2.16 eine Zerlegung  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  von  $\Gamma$ , sodass sich die  $\Gamma_i$  überlappen und  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i$  gilt. Die Zerlegung von  $\Gamma$  kann so gewählt werden, dass eine Parametrisierung  $\chi_i$  mit Parameterbereich  $\tau_i$  vorliegt und  $\chi_i$  Lipschitz-stetig ist, d.h.

$$\Gamma_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \chi_i(\boldsymbol{\xi}), \text{ für } \boldsymbol{\xi} \in \tau_i \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\}.$$



Weiters wird eine Partition der Eins wie folgt benötigt:

- $\varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,
- $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_i$ ,
- $\sum_{i=1}^p \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$  für  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Eine auf dem Rand  $\Gamma$  definierte Funktion kann somit zerlegt werden in

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p v_i(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

mit  $v_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x})v(\mathbf{x})$ . Für  $v_i$  gilt nun folgende Darstellung:

$$v_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \varphi_i(\chi_i(\boldsymbol{\xi}))v(\chi(\boldsymbol{\xi})) =: \tilde{v}_i(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \tau_i \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Auf  $\tau_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$  kann man jedoch die bereits definierten Sobolevräume  $H^m(\tau_i)$  verwenden.

**Bemerkung 2.21.** Soll  $\tilde{v}_i(\boldsymbol{\xi})$  in  $H^m(\tau_i)$  enthalten sein, so sind auf Grund der Kettenregel entsprechend reguläre Parametrisierungen  $\chi_i$  zu fordern. Sind keine zusätzlichen Bedingungen an  $\Gamma$  gestellt, so sind die  $\chi_i$  Lipschitz stetig. Lipschitz stetige Funktionen besitzen eine schwache Ableitung und daher kann der Raum  $H^s(\Gamma)$  für  $0 \leq s \leq 1$  definiert werden.

**Definition 2.22.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, welches die streng lokale Lipschitz Bedingung erfüllt. Der Sobolevraum  $H^s(\Gamma)$  mit  $0 \leq s \leq 1$  ist dann wie folgt definiert:

$$H^s(\Gamma) := \left\{ v : \|v\|_{s,\chi} < \infty \right\},$$

mit der Norm

$$\|v\|_{s,\chi} := \left\{ \sum_{i=1}^p \|\tilde{v}_i\|_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

**Lemma 2.23.** Die Norm  $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$  ist eine äquivalente Norm zu  $\|\cdot\|_{0,\chi}$  und die Norm  $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ , welche definiert ist durch

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \left\{ \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} d\mu_x d\mu_y \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ist eine äquivalente Norm zu  $\|\cdot\|_{1,\chi}$ .

Die Beweisidee kann zum Beispiel in [22, Lemma 2.2] nachgeschlagen werden. Weiters wird die Notation

$$|v|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} := \left\{ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} d\mu_x d\mu_y \right\}^{\frac{1}{2}}$$

gelegentlich verwendet.

**Definition 2.24.** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Sei weiters  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  eine Teilmenge des Randes und  $s \geq 0$ , dann ist der Raum  $\mathbf{H}^s(\Gamma_0)$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{H}^s(\Gamma_0) := \{v = \tilde{v}|_{\Gamma_0} : \tilde{v} \in \mathbf{H}^s(\Gamma)\},$$

mit der Norm

$$\|v\|_{\mathbf{H}^s(\Gamma_0)} := \inf_{\tilde{v} \in \mathbf{H}^s(\Gamma) : \tilde{v}|_{\Gamma_0} = v} \|\tilde{v}\|_{\mathbf{H}^s(\Gamma)}.$$

Ähnlich zu Satz 2.20 ist die Einbettung von  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  in  $L^2(\Gamma)$  kompakt.

**Satz 2.25.** Die Einbettung

$$\begin{aligned} \iota: \quad \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow L^2(\Gamma), \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \end{aligned}$$

ist kompakt.

Der Beweis kann zum Beispiel in [2] nachgeschlagen werden.

**Definition 2.26** (Spuroperator, Konormalenableitung). Sei  $\Omega$  ein Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt, dann definiert man die folgenden Operatoren:

- Innere Spur:

$$\gamma_0^{\text{int}} v(\mathbf{x}) := \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} v(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

- Äußere Spur:

$$\gamma_0^{\text{ext}} v(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} v(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für die Definition der Konormalenableitung wird ein allgemeiner Differentialoperator  $\mathcal{L}$  zweiter Ordnung betrachtet,

$$\mathcal{L}(v) := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ a_{j,i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) \right] + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})v(\mathbf{x}),$$

mit hinreichend glatten Koeffizienten  $a_{i,j}, b_i$  und  $c$ , sowie  $a_{i,j} = a_{j,i}$ . Für diesen Differentialoperator definiert man die beiden Operatoren wie folgt:

- *Innere Konormalenableitung:*

$$\gamma_1^{\text{int}} v(\mathbf{x}) := \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \sum_{i,j=1}^n n_j(\mathbf{x}) a_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} v(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

- *Äußere Konormalenableitung:*

$$\gamma_1^{\text{ext}} v(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \sum_{i,j=1}^n n_j(\mathbf{x}) a_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} v(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für die vektorwertige Problemstellung der linearen Elastizitätstheorie werden die innere Spur bzw. die innere Konormalenableitung benötigt und wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \left( \gamma_0^{\text{int}} v_1(\mathbf{x}), \gamma_0^{\text{int}} v_2(\mathbf{x}), \gamma_0^{\text{int}} v_3(\mathbf{x}) \right)^\top, \\ \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &:= \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \sigma(\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}})) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

für  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Eine Beziehung zwischen den Sobolevräumen auf  $\Omega$  und den Sobolevräumen auf  $\Gamma$  liefert der folgende Satz.

**Satz 2.27 (Spursatz).** *Sei  $\Omega$  ein Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Sei weiters  $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ , dann ist der Operator  $\gamma_0^{\text{int}}: \mathbf{H}^s(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  beziehungsweise der Operator  $\gamma_0^{\text{ext}}: \mathbf{H}^s(\Omega^c) \rightarrow \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  beschränkt und linear. Weiters existiert eine stetige Rechtsinverse.*

Den Beweis findet man zum Beispiel in [12, Theorem 3.37]. In den weiteren Kapiteln gilt  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\Omega) &:= \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top : v_i \in \mathbf{H}^1(\Omega), i \in \{1, 2, 3\} \right\}, \\ \mathbf{L}^2(\Omega) &:= \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top : v_i \in \mathbf{L}^2(\Omega), i \in \{1, 2, 3\} \right\}, \\ \mathbf{V} &:= \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ und } \gamma_0^{\text{int}} v_i = 0, \text{ für } \mathbf{x} \in \Gamma_D, i \in \{1, 2, 3\} \right\}, \\ \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &:= \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top : v_i \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), i \in \{1, 2, 3\} \right\}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Normen lauten:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} := \left( \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{\mathbf{X}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für  $\mathbf{X} = \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)$  oder  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  und  $X = \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)$  oder  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ .

Der Dualraum von  $\mathbf{V}$  wird mit  $\mathbf{V}'$ , der Dualraum von  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  mit  $\mathbf{H}^1(\Omega)'$ , der Dualraum von  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  mit  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  bzw. der Dualraum von  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  mit  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  bezeichnet.

In den kommenden Kapiteln ist es manchmal nützlich, eine verallgemeinerte Inverse angeben zu können. Diese verallgemeinerte Inverse wird Moore-Penrose Inverse, oder auch Pseudoinverse genannt.

**Definition 2.28** (Moore-Penrose Inverse, Pseudoinverse). *Sei  $A$  eine beschränkte und lineare Abbildung von  $X$  nach  $Y$ ,  $X$  und  $Y$  seien Hilberträume, dann ist die Moore-Penrose Inverse oder Pseudoinverse definiert durch*

$$\begin{aligned} A^\dagger: \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp \subset Y &\rightarrow X, \\ y &\mapsto \tilde{A}^{-1}P_{\mathcal{R}(A)}y. \end{aligned}$$

$P_{\mathcal{R}(A)}$  ist die Projektion auf  $\overline{\text{Im}A}$  und  $\tilde{A}^{-1}$  ist die Inverse von  $\tilde{A}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{A}: \text{Ker}A^\perp &\rightarrow \text{Im}A, \\ x &\mapsto \tilde{A}x = Ax. \end{aligned}$$

Falls  $\text{Im}A$  nicht abgeschlossen ist, dann ist  $\text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp \neq Y$  und daher ist die Moore-Penrose Inverse nur auf einer dichten Teilmenge von  $Y$  definiert. Für den Fall, dass  $A$  eine Inverse besitzt, kann gezeigt werden, dass die Operatoren  $A^{-1}$  und  $A^\dagger$  übereinstimmen. Es gilt folgendes wichtiges Lemma:

**Lemma 2.29.** *Sei  $A$  eine lineare Abbildung von  $X$  nach  $Y$ ,  $X$  und  $Y$  seien Hilberträume. Weiters sei  $y \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ , dann hat die Gleichung*

$$Ax = y$$

eine eindeutige Minimum-Norm-Solution  $x^\dagger$ , welche gegeben ist durch

$$x^\dagger = A^\dagger y.$$

Eine Minimum-Norm-Solution  $x^\dagger$  ist eine Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate (Least-Square-Solution) mit minimaler Norm. Die allgemeine Least-Square-Solution der Gleichung  $Ax = y$  erhält man durch

$$x = x^\dagger + x_0, \quad \text{mit } x_0 \in \text{Ker}A.$$

**Bemerkung 2.30.** *Ist  $y \in \text{Im}A$ , dann ist  $x^\dagger$  nicht nur eine Minimum-Norm-Solution, sondern auch eine Lösung von  $Ax = y$  im klassischen Sinne.*

## 2.2 Analysis der linearen Elastizitätstheorie

Ausgangssituation der Analysis für die lineare Elastizitätstheorie ist die Gleichung (1.6), d.h.

$$-\varrho_s \omega^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma = \varrho_s \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega$$

mit dem Materialgesetz (1.7)

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{Itr} \varepsilon$$

und den Randbedingungen (1.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_D(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad \text{und} \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_N(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Im Weiteren werden homogene Dirichletdaten vorausgesetzt, d.h.  $\mathbf{g}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} \in \Gamma_D$ . Die Variationsformulierung lautet: Gesucht ist  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , sodass

$$\begin{aligned} -\omega^2 \varrho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega_s} \operatorname{div} \mathbf{u} \overline{\operatorname{div} \mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{u}) : \overline{\varepsilon(\mathbf{v})} \, d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega_s} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \overline{\gamma_0^{\operatorname{int}} \mathbf{v}} \, d\mu \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  gilt.

Folgende Notation wird im Weiteren verwendet:

$$-\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\operatorname{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.2)$$

Die einzelnen Bilinearformen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \lambda \int_{\Omega_s} \operatorname{div} \mathbf{u} \overline{\operatorname{div} \mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{u}) : \overline{\varepsilon(\mathbf{v})} \, d\mathbf{x}, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

für  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Des Weiteren ist  $\mathbf{f}$  aus dem Raum  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)'$  und  $\mathbf{g}_N$  aus dem Raum  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  zu wählen. Die Variationsformulierung (2.2) kann auch in Operatorschreibweise formuliert werden. Die Operatoren

$$\mathbf{M}_s, \mathbf{A}_s : \mathbf{H}^1(\Omega_s) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_s)'$$

sind definiert durch

$$\begin{aligned}\langle M_s \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)}, \\ \langle A_s \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} &= a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

für  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  und  $F \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)'$  ist definiert durch

$$\langle F, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N}$$

für  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ . Man erhält daher eine äquivalente Formulierung von (2.2) durch die Operatorgleichung: Finde  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  als Lösung von

$$-\omega^2 \rho_s M_s \mathbf{u} + A_s \mathbf{u} = F. \quad (2.3)$$

**Lemma 2.31.** *Die Sesquilinearform  $a_s(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{C}$  ist beschränkt, d.h. es gilt*

$$|a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_2^A \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \quad (2.4)$$

für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ .

Den Beweis findet man zum Beispiel in [22, Lemma 4.5].

**Lemma 2.32.** *Der Operator  $A_s + M_s : \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$ -elliptisch, d.h.*

$$\Re \left( a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} \right) \geq c_1^A \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 \quad (2.5)$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ .

*Beweis.* Die Behauptung (2.5) ist eine Folgerung aus der Kornschen Ungleichung [5]:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{v}) : \overline{\varepsilon(\mathbf{v})} \, d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}^2 \geq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ . Mit dieser Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}\Re \left( a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} \right) &= \lambda \int_{\Omega_s} \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{v}) : \overline{\varepsilon(\mathbf{v})} \, d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}^2 \\ &\geq 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{v}) : \overline{\varepsilon(\mathbf{v})} \, d\mathbf{x} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}^2 \\ &\geq \min\{2\mu, 1\} c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 = c_1^A \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2\end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ . □

Der Operator  $A_s + M_s$  ist daher invertierbar und die Inverse  $(A_s + M_s)^{-1}$  ist stetig.

**Lemma 2.33.** *Der Operator  $M_s: \mathbf{H}^1(\Omega_s) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_s)'$  beziehungsweise  $(\omega^2 \varrho_s + 1)M_s$  ist kompakt.*

*Beweis.* Um dies zu zeigen, wird das Bild der Einheitskugel in  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  auf relative Kompaktheit überprüft, d.h. jede Folge im Bild der Einheitskugel muss eine konvergente Teilfolge besitzen. Sei  $B(0, 1)$  die Einheitskugel in  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  und  $Z$  das Bild von  $M_s$ , d.h.

$$Z = \{M_s \mathbf{u}: \mathbf{u} \in B(0, 1)\}.$$

Sei weiters  $z_n$  eine Folge in  $Z$ . Es ist zu zeigen, dass eine konvergente Teilfolge bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)'}$  existiert.  $z_n$  ist Element von  $Z$ , daher existieren  $\mathbf{u}_n \in B(0, 1): M_s \mathbf{u}_n = z_n$ . Da die Einbettung von  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  nach  $\mathbf{L}^2(\Omega_s)$  kompakt ist, siehe Kompaktheitssatz 2.20 von Rellich-Kondrachov, existiert eine  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$ -konvergente Teilfolge  $\mathbf{u}_{n'}$  mit Grenzwert  $\mathbf{u}$ . Die Folge  $z_{n'} := M_s \mathbf{u}_{n'}$  ist daher eine Teilfolge von  $z_n$ . Es ist noch zu zeigen, dass die Folge  $z_{n'}$  auch konvergent ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \|z_{n'} - z\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)'} &= \sup_{v \in \mathbf{H}^1(\Omega_s), v \neq 0} \frac{|\langle M_s(\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}), v \rangle|}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}} \\ &= \sup_{v \in \mathbf{H}^1(\Omega_s), v \neq 0} \frac{\left| \int_{\Omega_s} (\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}) v \, dx \right|}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}} \leq \|\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}. \end{aligned}$$

Für  $n' \rightarrow \infty$  geht daher  $\|z_{n'} - z\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)'}$  gegen 0 und somit ist der Operator  $M_s$ , beziehungsweise  $(\omega^2 \varrho_s + 1)M_s$ , kompakt.  $\square$

Der Operator aus der Operatorgleichung (2.3) ist koerziv, da er umgeschrieben werden kann zu

$$-\omega^2 \varrho_s M_s \mathbf{u} + A_s \mathbf{u} = (A_s + M_s) \mathbf{u} - (\omega^2 \varrho_s + 1)M_s \mathbf{u}.$$

Abschließend erhält man das folgende Resultat:

**Satz 2.34.** *Sei  $\omega$  kein Eigenwert, d.h. es existiert kein  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  mit*

$$A_s \mathbf{u} = \omega^2 \varrho_s M_s \mathbf{u},$$

*dann existiert genau eine Lösung  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  von (2.3), d.h.*

$$-\omega^2 \varrho_s M_s \mathbf{u} + A_s \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

*und es gilt die Abschätzung*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \leq c \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)'}. \quad (2.6)$$

*Beweis.* Der Operator  $A_s + M_s$  ist nach Lemma 2.32 elliptisch und nach Lemma 2.31 beschränkt und der Operator  $(\omega^2 \rho_s + 1)M_s$  ist nach Lemma 2.33 kompakt. Daher ist der Operator  $-\omega^2 \rho_s M_s + A_s = A_s + M_s - (\omega^2 \rho_s + 1)M_s$  beschränkt und koerziv. Da  $\omega$  kein Eigenwert der Gleichung  $A_s \mathbf{u} = \omega^2 \rho_s M_s \mathbf{u}$  ist, ist der Operator  $-\omega^2 \rho_s M_s + A_s$  injektiv. Somit kann Satz 2.7 angewandt werden und man erhält die eindeutige Lösbarkeit sowie die Abschätzung (2.6).  $\square$

**Bemerkung 2.35.** *Das Eigenwertproblem der Operatorgleichung, gesucht ist ein Eigenwert  $\omega$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  als Lösung von*

$$A_s \mathbf{u} = \omega^2 \rho_s M_s \mathbf{u},$$

*ist äquivalent zum Eigenwertproblem der Differentialgleichung*

$$-\rho_s \omega^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega$$

*mit den Randbedingungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad \text{und} \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

## 2.3 Analysis der linearen Akustik

Ausgangspunkt ist die Helmholtzgleichung (1.19)

$$k^2 p + \Delta p = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_f$$

und die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung (1.23)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} p - ikp \right) = 0.$$

Weiters werden Dirichlet-Randbedingungen

$$\gamma_0^{\text{ext}} p = g_D \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D$$

und Neumann-Randbedingungen

$$\gamma_1^{\text{ext}} p = g_N \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N$$

vorgegeben. Es gilt folgender wichtige Satz:

**Satz 2.36.** *Sei  $g_D \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , dann existiert eine eindeutige Lösung  $p \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^c)$ , welche die Helmholtzgleichung, die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung sowie die Randbedingungen erfüllt.*



Der Beweis kann zum Beispiel in [12] nachgeschlagen werden.

Für eine Lösung  $p$  der Helmholtzgleichung gilt die Darstellungsformel

$$p(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_1^{\text{ext}} p(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma_0^{\text{ext}} p(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}} \quad (2.7)$$

für  $\mathbf{x} \in \Omega_f$ . Dabei ist  $U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  die Fundamentallösung, gegeben durch

$$U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Eine Herleitung findet man zum Beispiel in [7, 17]. Um die Schreibweise abzukürzen, wird folgende Notation eingeführt:

$$p(\mathbf{x}) = - \left( \tilde{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p \right) (\mathbf{x}) + \left( W_k \gamma_0^{\text{ext}} p \right) (\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

$\tilde{V}_k$  wird als Einfachschichtpotential und  $W_k$  als Doppelschichtpotential bezeichnet. Die genaue Definition dieser beiden Potentiale ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{V}_k: \quad w \in H^{-1/2}(\Gamma) &\mapsto \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}}, \\ W_k: \quad v \in H^{1/2}(\Gamma) &\mapsto \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

In [12, Theorem 6.11] wird gezeigt, dass die beiden Potentiale für fixe Abschneidefunktionen  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  die folgenden Abbildungseigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \chi \tilde{V}_k: \quad H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^1(\mathbb{R}^n), \\ \chi W_k: \quad H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^1(\Omega), \\ \chi W_k: \quad H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^1(\Omega^c). \end{aligned}$$

Diese drei Abbildungen sind des Weiteren stetig und linear. Weiters wird zum Beispiel in [7, Lemma 2.23] bzw. [7, Lemma 2.24] gezeigt, dass diese beiden Potentiale die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllen.

Wendet man die äußeren Spuoperatoren auf das Einfachschichtpotential an, erhält man die beiden stetigen linearen Abbildungen  $V_k$  und  $\gamma_1^{\text{ext}} \tilde{V}_k$ :

$$\begin{aligned} V_k = \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}_k: \quad H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{V}_k: \quad H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit kann wieder in [12, Theorem 6.11] nachgeschlagen werden. Anstelle der äußeren Spuoperatoren können auch die inneren Spuoperatoren angewandt werden. Man erhält die beiden stetigen Operatoren

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}_k: \quad H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}_k: \quad H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

**Lemma 2.37.** Für das Einfachschichtpotential gelten die beiden Sprungbedingungen

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}_k w - \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}_k w &= 0, \\ \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}_k w - \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{V}_k w &= w.\end{aligned}$$

**Lemma 2.38.** Sei  $w \in L^\infty(\Gamma)$ , dann gilt die Darstellung

$$(V_k w)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, d\mu$$

für  $\mathbf{x} \in \Gamma$ . Dieses Integral ist als schwach singuläres Integral zu verstehen.

Die Beweise dieser beiden Lemmata findet man zum Beispiel in [7, Lemma 2.27, 2.28].

**Lemma 2.39.** Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\text{ext}} (\tilde{V}_k w) (\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} w(\mathbf{x}) + (K'_k w) (\mathbf{x}), \\ \gamma_1^{\text{int}} (\tilde{V}_k w) (\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} w(\mathbf{x}) + (K'_k w) (\mathbf{x})\end{aligned}$$

im Sinne von  $H^{-1/2}(\Gamma)$  mit

$$(K'_k w) (\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \varepsilon} \gamma_{1,\mathbf{x}}^{\text{int}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in [7, Lemma 2.29].

Spuroperatoren angewandt auf das Doppelschichtpotential liefern die beschränkten, linearen Operatoren

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{ext}} W_k: H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{und} \\ D_k := -\gamma_1^{\text{ext}} W_k: H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),\end{aligned}$$

wie in [12, Theorem 6.11] nachzulesen ist. Weiters definiert man die Operatoren

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{int}} W_k: H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{und} \\ \gamma_1^{\text{int}} W_k: H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).\end{aligned}$$

Es gelten folgende Sprungbedingungen (siehe [7, Lemma 2.31] für einen Beweis):

**Lemma 2.40.** Für das Doppelschichtpotential gelten die beiden Sprungbedingungen

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{int}} W_k w - \gamma_0^{\text{ext}} W_k w &= -w, \\ \gamma_1^{\text{int}} W_k w - \gamma_1^{\text{ext}} W_k w &= 0.\end{aligned}$$

**Lemma 2.41.** Für den Operator  $\gamma_0^{\text{ext}}W_k$  bzw.  $\gamma_0^{\text{int}}W_k$  gelten die Darstellungen

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{ext}}(W_k \mathbf{v})(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{x}) + (K_k \mathbf{v})(\mathbf{x}), \\ \gamma_0^{\text{int}}(W_k \mathbf{v})(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{x}) + (K_k \mathbf{v})(\mathbf{x})\end{aligned}$$

mit

$$(K_k \mathbf{v})(\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \varepsilon} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{int}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{y}) \, d\mu_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in [7, Lemma 2.32].

Wendet man die Operatoren  $\gamma_0^{\text{ext}}$  bzw.  $\gamma_1^{\text{ext}}$  auf die Darstellungsformel

$$p(\mathbf{x}) = -\left(\tilde{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x}) + \left(W_k \gamma_0^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x})$$

an, erhält man für  $\mathbf{x} \in \Gamma$  die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{ext}} p(\mathbf{x}) &= -\left(V_k \gamma_1^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x}) + \left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + K_k\right) \gamma_0^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x}), \\ \gamma_1^{\text{ext}} p(\mathbf{x}) &= \left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - K_k'\right) \gamma_1^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x}) - \left(D_k \gamma_0^{\text{ext}} p\right)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Man definiert den Calderon-Projektor der äußeren Helmholtzgleichung durch

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} + K_k & -V_k \\ -D_k & \frac{1}{2}\mathbf{I} - K_k' \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} p \\ \gamma_1^{\text{ext}} p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} + K_k & -V_k \\ -D_k & \frac{1}{2}\mathbf{I} - K_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} p \\ \gamma_1^{\text{ext}} p \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

**Bemerkung 2.42.** Der Operator  $K_{-k}'$  ist der adjungierte Operator von  $K_k$ , das heißt es gilt

$$\langle K_k \varphi, \psi \rangle_{\Gamma} = \langle \varphi, K_{-k}' \psi \rangle_{\Gamma}$$

für alle  $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

**Satz 2.43.** Die Operatoren  $D_k$  und  $\frac{1}{2}\mathbf{I} + K_k$  haben denselben Kern.

*Beweis.* Sei  $g \in \text{Ker} D_k$ , dann definiert man  $u := -Wg$ .  $u$  erfüllt die Helmholtzgleichung im Innenraum sowie im Außenraum. Wegen der Sprungbedingung  $\gamma_1^{\text{ext}}W_k =$

$\gamma_1^{\text{int}}W_k$  erfüllt  $u$  auf  $\Gamma$  die Neumannrandbedingungen  $\gamma_1^{\text{int}}u = D_k g = 0$  bzw.  $\gamma_1^{\text{ext}}u = D_k g = 0$ . Zusätzlich erfüllt  $u$  die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung und somit ist  $u$  die eindeutige Lösung des äußeren Neumann Randwertproblems. Da  $0$  ebenfalls eine Lösung des äußeren Randwertproblems ist, ist  $u = 0$  in  $\Omega^c$  und somit gilt  $\gamma_0^{\text{ext}}u = 0$ . Betrachtet man weiters die Sprungbedingung

$$\gamma_0^{\text{int}}u - \gamma_0^{\text{ext}}u = g,$$

dann erhält man wegen  $\gamma_0^{\text{int}}u = -\gamma_0^{\text{int}}W_k g = -\left(-\frac{1}{2}I + K_k\right)g$

$$\left(\frac{1}{2}I - K_k\right)g = g \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1}{2}I + K_k\right)g = 0.$$

Das bedeutet, dass  $g$  Element von  $\text{Ker}\left(\frac{1}{2}I + K_k\right)$  ist.

Die umgekehrte Richtung funktioniert ähnlich: Sei  $g$  ein Element von  $\text{Ker}\left(\frac{1}{2}I + K_k\right)$ , dann definiert man  $u := W_k g$ .  $u$  erfüllt wieder die Helmholtzgleichung im Innenraum und im Außenraum, sowie die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung. Weiters gilt

$$\gamma_0^{\text{ext}}u = \gamma_0^{\text{ext}}W_k g = \left(\frac{1}{2}I + K_k\right)g = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Außenraumproblems, Satz 2.36, gilt  $u = 0$  in  $\Omega^c$  und daher auch  $\gamma_1^{\text{ext}}u = 0$ . Wendet man die Sprungbedingung  $\gamma_1^{\text{ext}}W_k = \gamma_1^{\text{int}}W_k$  an, folgt

$$0 = \gamma_1^{\text{int}}u = \gamma_1^{\text{int}}W_k g = D_k g.$$

Somit ist  $g$  in  $\text{Ker}D_k$  enthalten. □

## 2.4 Analysis des gekoppelten Modells

### Variationsformulierung des gekoppelten Problems

Ausgangspunkt ist die Variationsformulierung (2.2) ( $\partial\Omega$ , der Rand von  $\Omega$ , ist in drei disjunkte Teile  $\Gamma$ ,  $\Gamma_N$  und  $\Gamma_D$  zerlegt.)

$$-\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N} + \langle \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u}, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Mit der zweiten Transmissionsbedingung (1.26) gilt auf dem Koppelungsrand  $\Gamma$

$$-\mathbf{n} \gamma_0^{\text{ext}} p = \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u}.$$

Dies eingesetzt ergibt

$$-\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{n} \gamma_0^{\text{ext}} p, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  bzw.

$$-\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \gamma_0^{\text{ext}} p, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Mit der ersten Randintegralgleichung von (2.9) gilt

$$\gamma_0^{\text{ext}} p = \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p - \mathbf{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p$$

und daher

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \\ & + \left\langle \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p - \mathbf{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_\Gamma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N} \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Unter Verwendung der ersten Transmissionsbedingung (1.25)

$$\omega^2 \varrho_f \mathbf{n} \cdot \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \gamma_1^{\text{ext}} p$$

für  $\mathbf{x} \in \Gamma$  erhält man

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \varrho_s \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_s)} + a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left\langle \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_\Gamma \\ & - \omega^2 \varrho_f \langle \mathbf{V}_k(\mathbf{n} \cdot \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} + \langle \mathbf{g}_N, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N} \end{aligned} \quad (2.10)$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Die zugehörige Operatorgleichung lautet

$$-\omega^2 \varrho_s \mathbf{M}_s \mathbf{u} + \mathbf{A}_s \mathbf{u} + \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p - \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

mit den bereits bekannten Operatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s &: \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow & \mathbf{H}^1(\Omega_s)', \\ \mathbf{A}_s &: \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow & \mathbf{H}^1(\Omega_s)', \\ \mathbf{V}_k &: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{K}_k &: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

und  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)'$ . Neu sind die Operatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &: \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow & \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{N}^* &: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{H}^1(\Omega_s)', \\ \iota &: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{L}^2(\Gamma), \\ \iota^* &: \mathbf{L}^2(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ \tilde{\mathbf{N}} &: \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow & \mathbf{L}^2(\Gamma), \\ \tilde{\mathbf{N}}^* &: \mathbf{L}^2(\Gamma) &\rightarrow & \mathbf{H}^1(\Omega_s)'. \end{aligned}$$

$N$  ist definiert durch  $N := \iota^* \tilde{N}$ , bzw.  $N^* := \tilde{N}^* \iota$  mit der Einbettung  $\iota$  von  $H^{1/2}(\Gamma)$  nach  $L^2(\Gamma)$  und dem Operator  $\tilde{N}$ , der definiert ist durch  $\tilde{N}\mathbf{u} := \mathbf{n} \cdot \gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u}$ .

**Lemma 2.44.** *Der Operator*

$$\begin{aligned} \tilde{N}: \quad \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow L^2(\Gamma), \\ \mathbf{u} &\mapsto \gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

ist beschränkt und linear – daher stetig.

*Beweis.* Sei  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{N}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \|\gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{\text{int}}u_i n_i|^2 \, d\mu \leq \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{\text{int}}u_i|^2 \sum_{i=1}^3 |n_i|^2 \, d\mu \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 |\gamma_0^{\text{int}}u_i|^2 \, d\mu = \|\gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|\gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Mit dem Spursatz gilt

$$\|\gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq c_T \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Daher ist der Operator  $\tilde{N}$  beschränkt,

$$\|\tilde{N}\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_T \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Da der Operator  $\tilde{N}$  linear ist, folgt sofort die Stetigkeit. □

**Korollar 2.45.** *Die Operatoren*

$$\begin{aligned} N: \quad \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{u} &\mapsto \iota^* \tilde{N}\mathbf{u} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N^*: \quad H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_s)' \\ \mathbf{u} &\mapsto \tilde{N}^* \iota \mathbf{u} \end{aligned}$$

sind kompakt.

*Beweis.* Nach dem Satz von Schauder (siehe [25, Satz 3.4.4]) ist  $\iota^*$  kompakt, da  $\iota$  kompakt ist. Weiters wurde in Lemma 2.44 gezeigt, dass die Abbildung  $\tilde{N}$  stetig ist. Da die Komposition von stetigen und kompakten Operatoren wieder kompakt ist (siehe [25, Satz 2.3.2]), ist der Operator  $N$  kompakt. Aus dem Satz von Schauder (siehe [25, Satz 3.4.4]) folgt daher die Kompaktheit von  $N^*$ . □

Die zweite Randintegralgleichung von (2.9) lautet

$$\gamma_1^{\text{ext}} p = -D_k \gamma_0^{\text{ext}} p + \left( \frac{1}{2} I - K'_k \right) \gamma_1^{\text{ext}} p$$

bzw.

$$D_k \gamma_0^{\text{ext}} p + \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) \gamma_1^{\text{ext}} p = 0.$$

Die zugehörige Variationsformulierung ist gegeben durch

$$\langle D_k \gamma_0^{\text{ext}} p, q \rangle_\Gamma + \left\langle \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) \gamma_1^{\text{ext}} p, q \right\rangle_\Gamma = 0$$

für alle  $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Setzt man wieder die erste Transmissionsbedingung (1.25) ein, dann erhält man

$$\langle D_k \gamma_0^{\text{ext}} p, q \rangle_\Gamma + \omega^2 \varrho_f \left\langle \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \right\rangle_\Gamma = 0 \quad (2.12)$$

für alle  $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Die zugehörige Operatorgleichung lautet

$$\frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \gamma_0^{\text{ext}} p + \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) N \mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

mit den bereits bekannten Operatoren

$$\begin{aligned} D_k: & H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ K'_k: & H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ N: & \mathbf{H}^1(\Omega_s) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man das System

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

mit  $\bar{p} := \gamma_0^{\text{ext}} p$ . Nach Satz 2.43 besitzen die beiden Operatoren  $D_k$  und  $\left( \frac{1}{2} I + K'_k \right)$  den gleichen Kern. Falls dieser nicht trivial ist, ist obiges System nicht eindeutig lösbar. Es wird daher die zusätzliche Forderung

$$\bar{p} \in \text{Ker} D_k^\perp$$

an  $\bar{p}$  gestellt.

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass das obige System mit der zusätzlichen Bedingung  $\gamma_0^{\text{ext}} p \in \text{Ker} D_k^\perp$  ein äquivalentes System zum ursprünglichen Problem darstellt.

### Äquivalenz zum Ursprungsproblem

Das ursprüngliche Problem besteht aus dem Akustik-Problem, das heißt der Helmholtzgleichung

$$k^2 p + \Delta p = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_f$$

mit der Abstrahlbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} |\nabla p \cdot \mathbf{n} - ikp|^2 d\mu = 0,$$

dem Problem der Elastizitätstheorie

$$-\varrho_s \omega^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma = \varrho_s \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_s$$

mit dem Materialgesetz

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_D(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_N(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

sowie den beiden Transmissionsbedingungen

$$\varrho_f \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla p \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

und

$$-p\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

In diesem Kapitel wird die Äquivalenz dieses Problems mit dem in 2.4 hergeleiteten Problem (2.14) – Gesucht  $(\mathbf{u}, \bar{p}) \in \mathbf{V} \times H^{1/2}(\Gamma)$  als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + K'_k \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$\bar{p} \in \operatorname{Ker} D_k^\perp$$

– untersucht. Da man bei der Herleitung von (2.14) vom ursprünglichen Problem ausgegangen ist, folgt, dass aus dem Ausgangsproblem das Problem (2.14) folgt. Die entscheidende Frage ist, ob auch die Umkehrung gilt. Wenn dies der Fall ist, sind



diese beiden Problemstellungen äquivalent und man kann mit (2.14) weiterarbeiten. Natürlich folgt daraus sofort, dass auch die Eigenfrequenzen beziehungsweise die Eigenlösungen der zwei verschiedenen Probleme übereinstimmen.

Betrachtet wird eine Lösung  $(\mathbf{u}, \bar{p}) \in \mathbf{V} \times \text{Ker}D_k^\perp$  von (2.14). Aus dieser Lösung soll ein  $p$  konstruiert werden, sodass  $(\mathbf{u}, p)$  das ursprüngliche Problem löst. Dazu spaltet man  $p$  auf in

$$p = p_1 + p_2.$$

$p_1$  erhält man als Lösung des eindeutig lösbaren Außenraumproblems

$$\begin{aligned} \Delta p_1 + k^2 p_1 &= 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_f, \\ \gamma_0^{\text{ext}} p_1 &= \bar{p} & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned}$$

mit der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung. Die zugehörigen Neumanndaten  $\gamma_1^{\text{ext}} p_1$  existieren daher und werden für die Konstruktion von  $p_2$  verwendet.  $p_2$  definiert man als eindeutige Lösung des Außenraumproblems

$$\begin{aligned} \Delta p_2 + k^2 p_2 &= 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_f, \\ \gamma_1^{\text{ext}} p_2 &= \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{ext}} p_1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned}$$

sowie der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung.

Die so konstruierte Lösung  $p$  erfüllt daher die Helmholtzgleichung und die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung. Es werden noch folgende drei Eigenschaften gezeigt:

- die Transmissionsbedingung (1.25) ist erfüllt, das heißt:  $\gamma_1^{\text{ext}} p = \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u}$ ,
- $\gamma_0^{\text{ext}} p_2$  ist Element von  $\text{Ker}D_k$ ,
- die Transmissionsbedingung (1.26) ist erfüllt, das heißt:  $-\mathbf{N}^* \gamma_0^{\text{ext}} p = \sigma \mathbf{n}$ .

Die Transmissionsbedingung (1.25) ist erfüllt, da

$$\gamma_1^{\text{ext}} p = \gamma_1^{\text{ext}} (p_1 + p_2) = \gamma_1^{\text{ext}} p_1 + \gamma_1^{\text{ext}} p_2 = \gamma_1^{\text{ext}} p_1 + \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{ext}} p_1 = \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u}.$$

Als nächstes wird gezeigt, dass  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2$  Element von  $\text{Ker}D_k$  ist. Betrachtet man die zweite Randintegralgleichung für  $p_2$ , dann erhält man

$$-D_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 + \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} - \mathbf{K}'_k \right) \gamma_1^{\text{ext}} p_2 = \gamma_1^{\text{ext}} p_2.$$

Formt man um und setzt man die Neumanndaten ein, erhält man

$$D_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = - \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \left( \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{ext}} p_1 \right).$$

Weiters betrachtet man die zweite Gleichung von (2.14) sowie die zweite Randintegralgleichung für  $p_1$ :

$$\begin{aligned} D_k \bar{p} &= -\omega^2 \varrho_f \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \mathbf{N} \mathbf{u}, \\ D_k \bar{p} &= - \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \gamma_1^{\text{ext}} p_1. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man

$$\left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \left( \omega^2 \varrho_f \mathbf{N} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{ext}} p_1 \right) = 0.$$

Das bedeutet, dass

$$D_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = - \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \left( \varrho_f \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{ext}} p_1 \right) = 0$$

gilt und somit ist  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2$  Element von  $\text{Ker} D_k$ .

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass die Transmissionsbedingung (1.26) erfüllt ist. Dazu betrachtet man die erste Gleichung der Operatorgleichung:

$$\left( -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \right) \mathbf{u} + \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \bar{p} = \mathbf{F}.$$

$\mathbf{u}$  löst daher die Differentialgleichung der Elastizitätstheorie und für die Neumanndaten erhält man

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n} &= \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \bar{p} \\ &= \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \left( \bar{p} + \gamma_0^{\text{ext}} p_2 \right) \\ &= \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p, \end{aligned}$$

da  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2$  Element von  $\text{Ker} D_k$  ist und somit auch Element von  $\text{Ker} \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right)$ . Die erste Randintegralgleichung für  $p$  lautet

$$\gamma_0^{\text{ext}} p = \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p - \mathbf{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p.$$

Für den Ausdruck  $\mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p$  erhält man mit der ersten Randintegralgleichung und der Transmissionsbedingung (1.25)

$$\mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p = \mathbf{N}^* \left( \gamma_0^{\text{ext}} p + \mathbf{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p \right) = \mathbf{N}^* \left( \gamma_0^{\text{ext}} p + \varrho_f \omega^2 \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} \right).$$

Man erhält daher

$$\sigma \mathbf{n} = \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \gamma_0^{\text{ext}} p = -\mathbf{N}^* \gamma_0^{\text{ext}} p.$$

Dies entspricht der Transmissionsbedingung (1.26).

Insgesamt löst  $(\mathbf{u}, p)$  das ursprüngliche System mit den beiden Transmissionsbedingungen und daher sind die beiden Problemstellungen äquivalent.

### Untersuchung auf (eindeutige) Lösbarkeit

Um die (eindeutige) Lösbarkeit vom System (2.14) zeigen zu können, wird der Operator

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s \mathbf{M}_s + \mathbf{A}_s - \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} & \mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \mathbf{N} & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} \mathbf{D}_k \end{pmatrix}$$

auf Koerzivität überprüft. Dazu wird die Aufspaltung

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}$$

mit den neuen Operatoren

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s + \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} \tilde{\mathbf{D}}_0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} (\omega^2 \varrho_s + 1) \mathbf{M}_s + \varrho_f \omega^2 \mathbf{N}^* \mathbf{V}_k \mathbf{N} & -\mathbf{N}^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_k \right) \\ -\left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}'_k \right) \mathbf{N} & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} \left( \tilde{\mathbf{D}}_0 - \mathbf{D}_k \right) \end{pmatrix}$$

vorgenommen. Der Operator  $\tilde{\mathbf{D}}_0: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  ist definiert durch

$$\langle \tilde{\mathbf{D}}_0 v, w \rangle_\Gamma := \langle \mathbf{D}_0 v, w \rangle_\Gamma + \langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \overline{\langle w, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)}}.$$

$\mathbf{D}_0: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  ist der hypersinguläre Operator der Laplacegleichung, siehe [22] für eine genauere Betrachtung. Weiters gelten die folgenden Lemmata:

**Lemma 2.46.** *Der Operator  $\tilde{\mathbf{D}}_0$  von  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  nach  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  ist linear, beschränkt und  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch.*

*Beweis.* Die Linearität und die Beschränktheit folgen sofort aus der Definition von  $\tilde{\mathbf{D}}_0$ . In [22, Folgerung 6.4] kann nachgelesen werden, dass der Operator  $\mathbf{D}_0$   $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ -semi-elliptisch ist, d.h. es gilt

$$\langle \tilde{\mathbf{D}}_0 v, v \rangle_\Gamma \geq \bar{c}_1^{\mathbf{D}} |v|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2$$

für alle  $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Weiters gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}_0 v, v \rangle_\Gamma &= \langle D_0 v, v \rangle_\Gamma + \langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \overline{\langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)}} \\ &\geq \bar{c}_1^D |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \left| \langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|^2 \\ &\geq \min\{\bar{c}_1^D, 1\} \left( |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \left| \langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Die Norm

$$\left\{ \left| \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|^2 + |\cdot|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

definiert eine äquivalente Norm zu  $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$  (siehe zum Beispiel [22, Seite 42]), daher gilt

$$\langle \tilde{D}_0 v, v \rangle_\Gamma \geq c_1^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

□

**Korollar 2.47.** *Der Operator  $D: \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_s)' \times H^{-1/2}(\Gamma)$  ist  $\mathbf{H}^1(\Omega_s) \times H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch.*

*Beweis.* Die Operatoren  $A_s + M_s$  und  $\tilde{D}_0$  sind  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$ - bzw.  $H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch (siehe Satz 2.32 und 2.46), daher ist alles bewiesen. □

**Lemma 2.48.** *Sei  $\Omega$  ein Gebiet, welches die streng lokale Lipschitzbedingung erfüllt, dann ist der Operator  $D_k - D_0$  von  $H^{1/2}(\Gamma)$  nach  $H^{-1/2}(\Gamma)$  kompakt.*

Den Beweis findet man zum Beispiel in [17, Lemma 3.9.8], man beachte jedoch die unterschiedliche Notation.

**Lemma 2.49.** *Der Operator  $\tilde{D}_0 - D_0: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  ist für Gebiete mit  $|\Gamma| < \infty$  kompakt.*

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass der Raum

$$Z := \left\{ z \in H^{-1/2}(\Gamma) : z = (\tilde{D}_0 - D_0) v, v \in B(0, 1) \subset H^{1/2}(\Gamma) \right\}$$

relativ kompakt ist. Dazu betrachtet man eine Folge  $z_i$  in  $Z$  und zeigt, dass sie eine konvergente Teilfolge hat. Nach Definition von  $Z$  existiert eine Folge  $v_i \in B(0, 1)$ , sodass  $z_i = (\tilde{D}_0 - D_0) v_i$  gilt. Da die Folge  $v_i$  beschränkt ist und die Einbettung  $\iota: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  kompakt ist (siehe Satz 2.25) existiert eine in  $L^2(\Gamma)$  konvergente Teilfolge  $v_{i'}$ . Weiters gilt:

$$\left| \int_\Gamma (v_{i'} - v_{j'}) \, d\mu \right| \leq |\Gamma|^{1/2} \|v_{i'} - v_{j'}\|_{L^2(\Gamma)}$$

sowie

$$\left| \int_{\Gamma} w \, d\mu \right| \leq |\Gamma|^{1/2} \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

für  $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Betrachtet man die Teilfolge  $z_{i'} = (\tilde{D}_0 - D_0) v_{i'}$  von  $z_i$  erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|z_{i'} - z_{j'}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \left\| (\tilde{D}_0 - D_0) (v_{i'} - v_{j'}) \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \\ &\sup_{w \in H^{1/2}(\Gamma), w \neq 0} \frac{|\langle v_{i'} - v_{j'}, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \langle w, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)}|}{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leq |\Gamma| \|v_{i'} - v_{j'}\|_{L^2(\Gamma)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Folge  $z_{i'}$  ist eine konvergente Teilfolge von  $z_i$  und daher ist der Operator  $\tilde{D}_0 - D_0$  kompakt.  $\square$

Weiters sind die Operatoren  $V_k, \left(\frac{1}{2}I + K_k\right)$  und  $\left(\frac{1}{2}I + K'_k\right)$  linear und beschränkt – also stetig. Die Operatoren  $N$  und  $N^*$  sind nach Korollar 2.45 kompakt. Aus diesen Eigenschaften erhält man folgendes Korollar.

**Korollar 2.50.** *Die Operatoren*

$$-(\omega^2 \varrho_s + 1) M_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N, \quad N^* \left(\frac{1}{2}I + K_k\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}I + K'_k\right) N$$

sind kompakt.

*Beweis.* Die Komposition von stetigen und kompakten Operatoren ist kompakt (siehe [25, Satz 2.3.2]). Ist ein Operator  $K$  kompakt, dann ist auch der Operator  $\lambda K$ , mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , kompakt. Seien  $K$  und  $L$  zwei kompakte Operatoren, dann ist auch  $K + L$  kompakt. Mit diesen drei Eigenschaften ist das Korollar gezeigt.  $\square$

**Korollar 2.51.** *Der Operator*

$$C = \begin{pmatrix} (\omega^2 \varrho_s + 1) M_s + \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & -N^* \left(\frac{1}{2}I + K_k\right) \\ -\left(\frac{1}{2}I + K'_k\right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} \tilde{D}_0 - D_k \end{pmatrix}$$

ist kompakt.

*Beweis.* Alle vier Einträge des gesamten Operators sind kompakte Operatoren und somit ist der gesamte Operator kompakt.  $\square$

**Satz 2.52.** Sei  $\omega$  so gewählt, dass der Operator

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix}$$

mit der Abbildungseigenschaft

$$\mathbf{V} \times \text{Ker} D_k^\perp \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_s)' \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

injektiv ist, dann existiert eine eindeutige Lösung von (2.14), d.h. es existiert ein  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  und ein  $\bar{p} \in \text{Ker} D_k^\perp \subset H^{1/2}(\Gamma)$ , sodass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} I + K'_k \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Weiters gilt die Abschätzung

$$\left( \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 + \|\bar{p}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s)}.$$

*Beweis.* Korollar 2.47 und 2.51 zeigen, dass der Operator koerziv ist. Weiters wurde die Injektivität explizit gefordert. Somit erhält man mit Satz 2.7 die eindeutige Lösbarkeit, sowie die gewünschte Abschätzung.  $\square$

### Punktauswertung

Für den Fall, dass man eine Lösung  $(\mathbf{u}, \bar{p}) \in \mathbf{V} \times \text{Ker} D_k^\perp$  gefunden hat, ist es sehr einfach, die Punktauswertung für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega_f$  unter Zuhilfenahme der Darstellungsformel (2.8) und der ersten Transmissionsbedingung (1.25) durchzuführen. In Kapitel 2.4 wurde gezeigt, dass man den Druck  $p$  aufspalten kann in  $p_1 + p_2$ , sodass  $\gamma_0^{\text{ext}} p_1 = \bar{p}$  und  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2$  in  $\text{Ker} D_k$  enthalten ist. Die Darstellungsformel ist gegeben durch

$$p(\mathbf{x}) = - \left( \tilde{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} p \right) (\mathbf{x}) + \left( W_k \gamma_0^{\text{ext}} p \right) (\mathbf{x})$$

mit dem Einfachschichtpotential  $\tilde{V}_k$  und dem Doppelschichtpotential  $W_k$ . Die erste Transmissionsbedingung lautet

$$\varrho_f \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla p = \gamma_1^{\text{ext}} p$$

für  $\mathbf{x} \in \Gamma$ . Setzt man diese Beziehung in die Darstellungsformel ein, erhält man

$$p(\mathbf{x}) = -\varrho_f \omega^2 \left( \tilde{V}_k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}) + \left( W_k \gamma_0^{\text{ext}} (p_1 + p_2) \right) (\mathbf{x}).$$

**Proposition 2.53.** Sei  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2 \in \text{Ker} D_k$ , dann gilt  $W_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = 0$ .

*Beweis.* Es gilt  $\gamma_0^{\text{ext}} p_2 \in \text{Ker} D_k$ . Man definiert die Funktion  $u := W_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2$ .  $u$  löst das äußere Randwertproblem der Helmholtzgleichung mit der Neumannrandbedingung

$$\gamma_1^{\text{ext}} u = \gamma_1^{\text{ext}} W_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = -D_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = 0.$$

Dieses äußere Randwertproblem ist nach Satz 2.36 eindeutig lösbar und daher gilt  $W_k \gamma_0^{\text{ext}} p_2 = u = 0$  für  $\mathbf{x} \in \Omega_f$ .  $\square$

**Proposition 2.54.** Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  erfüllt die Gleichung

$$\left( A_s - \omega^2 \varrho_s M_s - \omega^2 \varrho_f N^* \left( V_k + \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) D_k^\dagger \left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) \right) N \right) \mathbf{u} = F,$$

wobei  $D_k^\dagger$  die Pseudoinverse von  $D_k$  ist.

*Beweis.* Für  $(\mathbf{u}, \bar{p})$  gilt

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Gleichung kann nach  $\bar{p}$  aufgelöst werden, da  $\left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) N$  im Bild von  $D_k$  enthalten ist, siehe [7, Korollar 3.3]. Man erhält

$$\bar{p} = -\omega^2 \varrho_f D_k^\dagger \left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) N \mathbf{u} + \tilde{p}$$

mit  $\tilde{p} \in \text{Ker} D_k$ . Dies kann in die erste Gleichung eingesetzt werden und somit erhält man

$$\left( A_s - \omega^2 \varrho_s M_s - \omega^2 \varrho_f N^* \left( V_k + \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) D_k^\dagger \left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) \right) N \right) \mathbf{u} = F,$$

da  $\tilde{p}$  im Kern von  $D_k$  und somit auch im Kern von  $\frac{1}{2} I + K_k$  liegt.  $\square$

**Bemerkung 2.55.** Für die Punktauswertung und für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  macht es daher keinen Unterschied, ob man mit  $\gamma_0^{\text{ext}} p = \bar{p} + \gamma_0^{\text{ext}} p_2$  oder mit  $\bar{p}$  arbeitet. Die Darstellungsformel ist gegeben durch

$$p(\mathbf{x}) = -\varrho_f \omega^2 \left( \tilde{V}_k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \right)(\mathbf{x}) + (W_k \bar{p})(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$





### 3 Näherungsmethoden

Es wurde gezeigt, dass in der Analysis des Transmissionsproblems keine Probleme entstehen, wenn  $\text{Ker}D_k$  nicht trivial ist. Die zusätzliche Bedingung  $\bar{p} \in \text{Ker}D_k^\perp$  schließt die “falschen Eigenwerte“ aus und in Bemerkung 2.55 wurde erörtert, dass diese Einschränkung keine Auswirkungen auf die Punktauswertung bzw. auf die Verschiebung  $u$  hat.

Da man für den Fall eines nicht trivialen Kerns diesen im Allgemeinen nicht explizit kennt, ist es schwer, die Bedingung  $\bar{p} \in \text{Ker}D_k^\perp$  numerisch umzusetzen. In [18] wurde anstatt der Helmholtzgleichung die Laplacegleichung betrachtet. In diesem Fall ist der Kern von  $D_k$  bekannt und man kann den hypersingulären Operator stabilisieren, um die Bedingung  $\bar{p} \in \text{Ker}D_0^\perp$  gewährleisten zu können.

Die folgenden Fehlerabschätzungen werden nur für Frequenzen mit trivialem Kern  $\text{Ker}D_k$  gültig sein. Es wurden aber auch Simulationen mit nicht trivialem Kern durchgeführt und es stellte sich heraus, dass das Verfahren bei solchen Frequenzen stabil bleibt. Dies bedarf jedoch einer genaueren Untersuchung, auf welche in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird.

In dieser Arbeit wird das Galerkin-Bubnov-Verfahren betrachtet. Ziel ist es, die Lösung der Gleichung

$$Au = F,$$

mit  $A: X \rightarrow X'$  linear, beschränkt und koerziv und  $F \in X'$  näherungsweise zu berechnen. Um die eindeutige Lösbarkeit obiger Gleichung garantieren zu können, wird noch gefordert, dass  $A$  injektiv ist. Mit dem Korollar 2.7 zu Satz 2.6 erhält man eine eindeutige Lösung  $u \in X$ . Weiters gilt die Abschätzung

$$\|u\|_X \leq \|F\|_{X'}.$$

**Voraussetzung 3.1.** *Betrachtet wird eine Folge  $X_M$  endlichdimensionaler Ansatzräume. Diese Räume sollen so gewählt werden, dass  $X_{M_1} \subset X_{M_2}$  für  $M_1 < M_2$ ,  $X_M \subset X$  und die Folge  $X_M$  die Approximationseigenschaft besitzt, d.h. es gilt*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{v \in X} \inf_{v_M \in X_M} \|v - v_M\|_X = 0.$$

Als nächstes wird eine Folge von diskreten Problemen betrachtet: Finde  $u_M \in X_M$ , sodass die Gleichung

$$\langle Au_M, v_M \rangle = \langle F, v_M \rangle \tag{3.1}$$

für alle  $v_M \in X_M$  erfüllt ist.

**Satz 3.2 (Cea's Lemma).** *Der Operator  $A: X \rightarrow X'$  sei linear, beschränkt mit der Konstanten  $c_2^A$  und koerziv. Weiters gelte die diskrete inf-sup-Bedingung, d.h. es existiert eine positive Konstante  $c_s$ , sodass*

$$c_s \|u_M\|_X \leq \sup_{\substack{v_M \in X_M, \\ v_M \neq 0}} \frac{\langle Au_M, v_M \rangle}{\|v_M\|_X}$$

für alle  $u_M \in X_M$  gilt. Dann existiert genau eine Lösung  $u_M \in X_M$  von (3.1) und diese erfüllt die Stabilitätsabschätzung

$$\|u_M\|_X \leq \frac{1}{c_s} \|F\|_{X'}$$

und die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_M\|_X \leq \left(1 + \frac{c_2^A}{c_s}\right) \inf_{v_M \in X_M} \|u - v_M\|_X.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in [24, Theorem 8.10].

Die diskrete inf-sup-Bedingung steht im Mittelpunkt des nächsten Satzes.

**Satz 3.3.** *Der Operator  $A: X \rightarrow X'$  sei linear, beschränkt, koerziv und injektiv. Weiters liege eine Folge endlichdimensionaler Ansatzräume  $X_M$  vor, welche die Voraussetzung 3.1 erfüllt. Dann existiert ein  $M_0$ , sodass die diskrete inf-sup-Bedingung für alle  $M > M_0$  erfüllt ist.*

Der Beweis kann wiederum in [24, Theorem 8.11] nachgelesen werden. Die endlichdimensionalen Räume  $X_M$  mit der Dimension  $M$  können bezüglich einer Basis dargestellt werden:

$$X_M = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M.$$

Jedes Element  $v_M \in X_M$  hat die eindeutige Darstellung

$$v_M = \sum_{k=1}^M \hat{v}_M^k \varphi_k$$

mit dem Koeffizientenvektor  $\hat{v}_M$ . Das diskrete Problem (3.1) kann somit umgeschrieben werden zu

$$\sum_{k=1}^M \hat{u}_M^k \langle A\varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \langle F, \varphi_\ell \rangle, \quad \text{für alle } \ell = 1, \dots, M.$$

Dies entspricht aber genau dem linearen Gleichungssystem

$$A_M \hat{\mathbf{u}}_M = \mathbf{f}_M \quad (3.2)$$

mit den Einträgen  $A_M[\ell, k] := \langle A\varphi_k, \varphi_\ell \rangle$  und  $\mathbf{f}_M[\ell] := \langle f, \varphi_\ell \rangle$ . Die Lösung des Variationsproblems (3.1) kann nun mit der Lösung des linearen Gleichungssystems dargestellt werden:

$$u_M = \sum_{k=1}^M \hat{u}_M^k \varphi_k.$$

Sind für ein koerzives Problem die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt, dann ist das Gleichungssystem  $A_M \hat{\mathbf{u}}_M = \mathbf{f}_M$  eindeutig lösbar.

Um diese Theorie auf das gekoppelte System anwenden zu können, werden sowohl die Finite Elemente Methode als auch die Randelementmethode benötigt. In den nächsten beiden Kapiteln werden Finite Elemente bzw. Randelemente eingeführt, um eine Familie endlichdimensionaler Ansatzräume für  $\mathbf{u}$  bzw. für  $p$  zu erhalten.

### 3.1 Finite Elemente

Dieses Kapitel behandelt Finite Elemente für Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und lehnt sich größtenteils an [22, Kapitel 9] an.

Ziel ist es, einen endlichdimensionalen Ansatzraum für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  zu konstruieren. Da  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  enthalten ist, werden Ansatzräume betrachtet, welche Teilmengen von  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  sind und die Approximationseigenschaft erfüllen. Um dies bewerkstelligen zu können, wird eine Familie von Zerlegungen  $(\mathcal{T}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega_s$  betrachtet, genauer:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \tau \quad \text{für } N \in \mathbb{N}.$$

Die Elemente der Zerlegungen – die Finiten Elemente  $\tau$  – sind im einfachsten Fall offene Tetraeder. Diese Zerlegungen von  $\Omega_s$  sollen die Eigenschaft haben, dass keine hängenden Knoten existieren, das heißt, dass der Durchschnitt zweier verschiedener, abgeschlossener Elemente  $\bar{\tau}_{\ell_1} \in \mathcal{T}_N$  und  $\bar{\tau}_{\ell_2} \in \mathcal{T}_N$  entweder leer, ein gemeinsamer Knoten, eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Fläche ist. Ist diese Eigenschaft erfüllt, wird die Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  als **zulässig** bezeichnet. Für jedes Tetraeder  $\tau$  wird das Volumen  $\Delta_\tau$ , die lokale Maschenweite  $h_\tau$ , der Durchmesser  $d_\tau$  und der Radius  $r_\tau$  wie folgt definiert:

$$\Delta_\tau := \int_{\tau} d\mathbf{x}, \quad h_\tau := (\Delta_\tau)^{\frac{1}{3}}, \quad d_\tau := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tau} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

und  $r_\tau$  ist definiert als der Radius der größten in  $\tau$  enthaltenen Kugel. Im Weiteren sollen nur zulässige und **formreguläre Zerlegungen** betrachtet werden. Formregulär bedeutet, dass eine Konstante  $c_F$  unabhängig von  $N$  existiert, sodass

$$d_\tau \leq c_F r_\tau \quad \text{für alle } \tau \in \mathcal{T}_N, N \in \mathbb{N}$$

gilt. Aus der Ungleichung

$$\frac{4}{3}\pi r_\tau^3 \leq \Delta_\tau = h_\tau^3 \leq d_\tau^3 \leq c_F^3 r_\tau^3$$

können die **Äquivalenzungleichungen**

$$\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{3}} r_\tau \leq h_\tau \leq d_\tau \leq c_F r_\tau$$

hergeleitet werden. Für Konvergenzaussagen ist es noch sinnvoll, die Größen  $h_{\text{fem}}$  und  $h_{\text{min}}$

$$h_{\text{fem}} = h_{\text{max}} := \max_{\tau \in \mathcal{T}_N} h_\tau, \quad h_{\text{min}} := \min_{\tau \in \mathcal{T}_N} h_\tau$$

für jede Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  einzuführen. Eine weitere Eigenschaft von Zerlegungen wird an dieser Stelle noch angeführt: Eine Familie von Zerlegungen  $(\mathcal{T}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  heißt **global gleichmäßig**, falls die Ungleichung

$$\frac{h_{\text{max}}}{h_{\text{min}}} \leq c_G$$

mit einer von  $N$  unabhängigen Konstanten  $c_G$  erfüllt ist.

Unter Zuhilfenahme der Zerlegungen  $\mathcal{T}_N$  werden die Ansatzräume  $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_s)$  eingeführt. Der Ansatzraum  $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_s)$  ist definiert als alle stückweise linearen und global stetigen Funktionen auf  $\Omega_s$ . Um eine Basis angeben zu können, werden die Knoten der Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  durchnummeriert und mit  $\mathbf{x}_k, k \in \{1, \dots, M_\Omega\}$  bezeichnet. Für zulässige Unterteilungen ist eine Basis von  $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega_s)$  gegeben durch

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\ell \neq \mathbf{x}_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

In [22, Kapitel 9.3] findet man eine genauere Betrachtung dieses Ansatzraumes. Ein wichtiges Resultat ist die Approximationseigenschaft – siehe zum Beispiel [22, Satz 9.2] für einen Beweis.

**Satz 3.4.** *Sei  $u \in \mathbf{H}^s(\Omega_s), s \in [\sigma, 2]$  mit  $\sigma = 0$  oder  $\sigma = 1$ . Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Omega)} \|u - v_h\|_{\mathbf{H}^\sigma(\Omega_s)} \leq c h_{\text{fem}}^{s-\sigma} |u|_{\mathbf{H}^s(\Omega_s)}. \quad (3.3)$$

Da die Verschiebung  $\mathbf{u}$  eine vektorwertige Größe ist, werden auch vektorwertige Ansatzfunktionen benötigt. Diese erhält man, indem man die bereits bekannten Basisfunktionen  $\varphi_k$  zur Basis  $\varphi_k$  erweitert

$$\varphi_{3i+j} := \varphi_i \mathbf{e}_j, \quad \text{für } i \in \{1, \dots, M_\Omega\}, j \in \{1, 2, 3\}$$

mit den Vektoren  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^\top$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^\top$  und  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^\top$ . Man erhält mit  $\mathbf{V}_M := \text{span}\{\varphi_i\}$  eine Familie von Ansatzräumen, welche die Approximationseigenschaft erfüllen, und für eine Funktion  $\mathbf{v}_M \in \mathbf{V}_M$  gilt daher die Darstellung

$$\mathbf{v}_M(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_\Omega} \sum_{j=1}^3 \hat{v}_M^{3i+j} \varphi_{3i+j}(\mathbf{x}).$$

## 3.2 Randelemente

Dieses Kapitel lehnt sich größtenteils an [22, Kapitel 10] an.

Wie im Kapitel 3.1 ist  $\Omega$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  und der Rand von  $\Omega$  wird mit  $\Gamma$  bezeichnet.

Ziel ist es, einen endlichdimensionalen Ansatzraum für den Druck  $p$  zu konstruieren. Da  $p$  in  $H^{1/2}(\Gamma)$  enthalten ist, werden Ansatzräume betrachtet, welche Teilmengen von  $H^{1/2}(\Gamma)$  sind und die Approximationseigenschaft erfüllen. Die Vorgehensweise ist nun ähnlich wie im vorigen Kapitel. Es wird nicht  $\Omega_s$  unterteilt, sondern der Kopplungsrand  $\Gamma$ . Es bietet sich an, die Zerlegung von  $\Omega_s$ , wie im vorigen Kapitel beschrieben, zu verwenden. Diese Zerlegung  $(\mathcal{T}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  hat  $\Gamma$  in Dreiecke zerlegt. Diese Dreiecke – die **Randelemente** – werden mit  $\sigma$  bezeichnet. Es ist nicht notwendig, die gleiche Zerlegung von  $\Omega$  für die Finiten Elemente als auch für die Randelemente zu verwenden. Es kann durchaus vorteilhaft sein, verschiedene Zerlegungen für die Finiten Elemente und die Randelemente zu betrachten.

Da die Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  im Sinne von Finiten Elementen zulässig ist, ist diese Zerlegung im Sinne von Randelementen ebenso zulässig. Eine Zerlegung von  $\Gamma$  heißt **zulässig**, wenn der Durchschnitt zweier verschiedener abgeschlossener Randelemente  $\bar{\sigma}_{\ell_1} \in \mathcal{T}_N$  und  $\bar{\sigma}_{\ell_2} \in \mathcal{T}_N$  entweder leer, ein gemeinsamer Knoten oder eine gemeinsame Kante ist. Ebenso lassen sich die Eigenschaften **formregulär** und **global gleichmäßig** auf die Randelemente übertragen. Dafür wird für jedes Randelement  $\sigma$  das Volumen  $\Delta_\sigma$ , die lokale Maschenweite  $h_\sigma$ , der Durchmesser  $d_\sigma$  und der Radius  $r_\sigma$  benötigt, und ähnlich wie bei den Finiten Elementen, definiert:

$$\Delta_\sigma := \int_\sigma d\mathbf{x}, \quad h_\sigma := (\Delta_\sigma)^{\frac{1}{2}}, \quad d_\sigma := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

und  $r_\sigma$  ist definiert als der Radius des größten in  $\sigma$  enthaltenen Kreises. Natürlich werden auch die Größen  $h_{\text{bem}}$  und  $h_{\text{min}}$

$$h_{\text{bem}} = h_{\text{max}} := \max_{\sigma \in \mathcal{T}_N} h_\sigma, \quad h_{\text{min}} := \min_{\sigma \in \mathcal{T}_N} h_\sigma$$

für jede Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  definiert.

Mit diesen Zerlegungen  $\mathcal{T}_N$  von  $\Gamma$  werden die Ansatzräume  $\Pi_M := \mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_N, \Gamma)$  eingeführt. Der Ansatzraum  $\Pi_M$  ist definiert als alle stückweise linearen und global stetigen Funktionen auf  $\Gamma$ . Um eine Basis angeben zu können, wird eine neue Nummerierung der Knoten der Zerlegung  $\mathcal{T}_N$  verwendet. Betrachtet werden nur noch Knoten, welche in  $\Gamma$  enthalten sind. Eine Basis ist dann gegeben durch

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\ell \neq \mathbf{x}_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine Funktion  $q_M \in \Pi_M$  gilt demnach die Darstellung

$$q_M(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_\Gamma} \hat{q}_M^k \varphi_k(\mathbf{x}).$$

In [22, Kapitel 10.2] findet man eine genauere Betrachtung dieses Ansatzraumes. Ein wichtiges Resultat ist die Approximationseigenschaft, siehe zum Beispiel [22, Satz 10.3] für einen Beweis.

**Satz 3.5.** *Sei  $p \in H^s(\Gamma)$ ,  $s \in [\sigma, 2]$  mit  $\sigma \in [0, 1]$ . Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{q_M \in \Pi_M} \|p - q_M\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch_{\text{bem}}^{s-\sigma} |p|_{H^s(\Gamma)}. \quad (3.4)$$

### 3.3 Numerische Methode für das gekoppelte System

Es gilt, das System (2.14)

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} I + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} I + K_k' \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

numerisch zu lösen. Verwendet man für diesen Operator die Abkürzung  $A$ , dann vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die dazu äquivalente Variationsformulierung lautet

$$\langle A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} \rangle$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  und  $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

Für das Weitere werden die endlichdimensionalen Ansatzräume  $\mathbf{V}_M$  und  $\Pi_M$  anstatt der Räume  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$  und  $H^{1/2}(\Gamma)$  verwendet. Das daraus resultierende, diskrete Problem lautet daher: Finde  $\mathbf{u}_M \in \mathbf{V}_M$  und  $p_M \in \Pi_M$ , sodass

$$\langle A \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ p_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \rangle \quad (3.5)$$

für alle  $\mathbf{v}_M \in \mathbf{V}_M$  und  $q_M \in \Pi_M$  erfüllt ist.

**Korollar 3.6.** Sei  $\omega$  so gewählt, dass der Operator

$$A = \begin{pmatrix} -\omega^2 \varrho_s M_s + A_s - \varrho_f \omega^2 N^* V_k N & N^* \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + K_k \right) \\ \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + K'_k \right) N & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D_k \end{pmatrix}$$

injektiv ist, und werden die endlichdimensionalen Ansatzräume  $X_M = \mathbf{V}_M \times \Pi_M$  verwendet, dann existiert nach Satz 3.2 und Satz 3.3 eine eindeutige Lösung

$$(\mathbf{u}_M, p_M) \in X_M$$

des diskreten Problems (3.5)

$$\langle A \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ p_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M \\ q_M \end{pmatrix} \rangle$$

für alle  $\mathbf{v}_M \in \mathbf{V}_M$ ,  $q_M \in \Pi_M$ ,  $M \geq M_0$  und es gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\left( \|\mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 + \|p_M\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{c_s} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s)}$$

und die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 + \|\bar{p} - p_M\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left( \inf_{\mathbf{v}_M \in \mathbf{V}_M} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} + \inf_{q_M \in \Pi_M} \|\bar{p} - q_M\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) \\ & \leq \tilde{c} \left( h_{\text{fem}} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega_s)} + h_{\text{bem}}^{3/2} |\bar{p}|_{H^2(\Gamma)} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

falls  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega_s)$  und  $\bar{p} \in H^2(\Gamma)$  enthalten sind.

**Satz 3.7** (Aubin-Nitsche Trick). Sei  $\Omega$  glatt berandet oder konvex,  $\mathbf{f}$  Element von  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  und  $\mathbf{u}$  Element von  $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ . Weiters gelte die Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Für die Lösung  $\bar{p}$  gelte  $\bar{p} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$  und der Operator  $D_k: \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  sei stetig und bijektiv. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}^2 + \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left( h_{\text{fem}}^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + h_{\text{bem}}^{3/2} \|\bar{p}\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)} \right).$$

Der Aubin-Nitsche Trick wird in [22] genauer behandelt.

Um ein äquivalentes lineares Gleichungssystem zu erhalten, werden folgende Matrizen definiert:

$$\begin{aligned} A_s[i, j] &:= \langle A_s \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Omega = \lambda \int_{\Omega_s} \operatorname{div} \varphi_j \operatorname{div} \varphi_i \, d\mathbf{x} + 2\mu \int_{\Omega_s} \varepsilon(\varphi_j) : \varepsilon(\varphi_i) \, d\mathbf{x}, \\ M^{\text{FE}}[i, j] &:= \langle M_s \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_{\Omega_s} \varphi_j \cdot \varphi_i \, d\mathbf{x}, \\ V[i, j] &:= \langle N^* V_k N \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_{\Gamma} (V_k \gamma_0^{\text{int}} \varphi_j \cdot \mathbf{n}) (\gamma_0^{\text{int}} \varphi_i \cdot \mathbf{n}) \, d\mu, \\ M^{\text{BE}}[i, j] &:= \langle N^* \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_{\Gamma} \varphi_j \gamma_0^{\text{int}} \varphi_i \cdot \mathbf{n} \, d\mu, \\ K[i, j] &:= \langle N^* K_k \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_{\Gamma} K_k \varphi_j \gamma_0^{\text{int}} \varphi_i \cdot \mathbf{n} \, d\mu, \\ D[i, j] &:= \langle D_k \varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma} D_k \varphi_j \varphi_i \, d\mu. \end{aligned}$$

Sei  $n := \dim \mathbf{V}_M$  und  $m := \dim \Pi_M$ , dann besitzen die soeben definierten Matrizen die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} A_s &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & A_s^\top &= A_s, \\ M^{\text{FE}} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & M^{\text{FE}\top} &= M^{\text{FE}}, \\ V &\in \mathbb{C}^{n \times n}, & V^\top &= V, \\ M^{\text{BE}} &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ K &\in \mathbb{C}^{n \times m}, \\ D &\in \mathbb{C}^{m \times m}, & D^\top &= D. \end{aligned}$$

Ebenso definiert man den Vektor  $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbb{C}^n$

$$\hat{\mathbf{f}}[i] := \langle \mathbf{F}, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_{\Omega_s} \mathbf{f} \cdot \varphi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \gamma_0^{\text{int}} \varphi_i \, d\mu.$$



Das äquivalente lineare Gleichungssystem lautet daher

$$\begin{pmatrix} A_s - \omega^2 \varrho_s M^{\text{FE}} - \omega^2 \varrho_f V & \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K \\ \frac{1}{2} M^{\text{BE}\top} + K^\top & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Matrizen  $V, K, M^{\text{BE}}$  und  $D$  haben nur auf  $\Gamma$  Einträge ungleich Null, daher liegt es nahe, das Gleichungssystem in die Freiheitsgrade auf  $\Gamma$  und die restlichen Freiheitsgrade aufzuspalten. Das daraus resultierende Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} A_{I,I} - \omega^2 \varrho_s M_{I,I}^{\text{FE}} & A_{I,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{I,\Gamma}^{\text{FE}} & 0 \\ A_{\Gamma,I} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,I}^{\text{FE}} & A_{\Gamma,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,\Gamma}^{\text{FE}} - \omega^2 \varrho_f V & \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K \\ 0 & \frac{1}{2} M^{\text{BE}\top} + K^\top & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_\Gamma \\ \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I \\ \hat{\mathbf{f}}_\Gamma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad M^{\text{BE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{\text{BE}} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I \\ \hat{\mathbf{f}}_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen  $A_{I,I}, A_{I,\Gamma}, A_{\Gamma,I}$  und  $A_{\Gamma,\Gamma}$  haben für gewöhnlich die Größenordnung  $10^9$ , diese kommt von der Größenordnung des Elastizitätsmoduls. Um eine bessere Skalierung zu erhalten, wird rechts- bzw. linksseitig mit den Matrizen  $L$  und  $R$

$$L = R = \begin{pmatrix} 10^{-\frac{9}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-\frac{9}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{\frac{9}{2}} \end{pmatrix}$$

vorkonditioniert. Für mehr Information bezüglich Vorkonditionierung sei hier zum Beispiel auf [16] verwiesen.

Für den Fall, dass die hypersinguläre Matrix  $D$  invertierbar ist, kann das Schur Komplement  $S$  gebildet werden. Dazu wird die dritte Zeile auf  $\hat{\mathbf{p}}$  umgeformt

$$\hat{\mathbf{p}} = -\omega^2 \varrho_f D^{-1} \left( \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K^\top \right) \hat{\mathbf{u}}$$

und in der zweiten Zeile eingesetzt. Als Resultat erhält man

$$\begin{pmatrix} A_{I,I} - \omega^2 \varrho_s M_{I,I}^{\text{FE}} & A_{I,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{I,\Gamma}^{\text{FE}} \\ A_{\Gamma,I} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,I}^{\text{FE}} & A_{\Gamma,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,\Gamma}^{\text{FE}} - \omega^2 \varrho_f S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I \\ \hat{\mathbf{f}}_\Gamma \end{pmatrix}$$

mit dem Schur Komplement

$$S = V + \left( \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K \right) D^{-1} \left( \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K^\top \right).$$

Diese Gleichung wird aus den gleichen Gründen wie zuvor geeignet skaliert. Dies wird wieder mit einer rechts- bzw. linksseitigen Vorkonditionierung bewerkstelligt. Als Vorkonditionierung wählt man

$$L = R = \begin{pmatrix} 10^{-\frac{9}{2}} & 0 \\ 0 & 10^{-\frac{9}{2}} \end{pmatrix}.$$

Um diese Systeme zu lösen, bietet sich der GMRES-Algorithmus an, siehe [13, 23].

### 3.4 Eine Fehlerabschätzung für die Punktauswertung

Basierend auf die im vorigen Kapitel hergeleitete Fehlerabschätzung (3.6) für

$$\left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

soll eine Fehlerabschätzung für die Punktauswertung hergeleitet werden. Dabei wird die Auswertung wie in Kapitel 2.4 in einem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega_f$  betrachtet. Für die exakte Lösung gilt die Darstellung (2.15)

$$p(\mathbf{x}) = -\varrho_f \omega^2 \left( \tilde{\mathbf{V}}_k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}) + (\mathbf{W}_k \bar{p}) (\mathbf{x}).$$

Ebenso erhält man eine Approximation von  $p(\mathbf{x})$  durch

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = -\varrho_f \omega^2 \left( \tilde{\mathbf{V}}_k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_M) \right) (\mathbf{x}) + (\mathbf{W}_k p_M) (\mathbf{x}).$$

Der Fehler beträgt demnach

$$|p(\mathbf{x}) - \tilde{p}(\mathbf{x})| \leq \left| -\varrho_f \omega^2 \left( \tilde{\mathbf{V}}_k(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M)) \right) (\mathbf{x}) + (\mathbf{W}_k (\bar{p} - p_M)) (\mathbf{x}) \right|.$$

Verwendet man die Definition von  $\tilde{\mathbf{V}}_k$  und  $\mathbf{W}_k$  sowie die Dreiecksungleichung, dann erhält man die Abschätzung

$$|p(\mathbf{x}) - \tilde{p}(\mathbf{x})| \leq \varrho_f \omega^2 \left| \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) d\mu_y \right| + \left| \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\bar{p} - p_M) d\mu_y \right|.$$

Die Fundamentallösung  $U_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ist für  $\mathbf{x} \in \Omega_f$  und  $\mathbf{y} \in \Gamma$  unendlich oft differenzierbar und daher existieren die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$

$$c_1 := \left\| \gamma_0^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \cdot) \right\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad c_2 := \left\| \gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{ext}} U_k^*(\mathbf{x}, \cdot) \right\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} |p(\mathbf{x}) - \tilde{p}(\mathbf{x})| &\leq \varrho_f \omega^2 c_1 \|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M)\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + c_2 \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \varrho_f \omega^2 c_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + c_2 \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &= \varrho_f \omega^2 \tilde{c}_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} + c_2 \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq c \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2 + \|\bar{p} - p_M\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left( h_{\text{fem}} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega_s)} + h_{\text{bem}}^{3/2} |\bar{p}|_{\mathbf{H}^2(\Gamma)} \right), \end{aligned}$$

falls  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega_s)$  und  $\bar{p} \in \mathbf{H}^2(\Gamma)$  enthalten sind. Zu den Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  sei noch erwähnt, dass diese erheblich von  $\mathbf{x}$  abhängen. Desto weiter  $\mathbf{x}$  von der Polstelle der Fundamentallösung entfernt ist, umso kleiner werden diese beiden Konstanten und umso besser die Fehlerabschätzung für die Punktauswertung.

## 4 Simulationen

In diesem Kapitel werden zuerst die bewiesenen Resultate mit konkreten Simulationen verifiziert und anschließend wird versucht, eine zwar einfache, aber dennoch realistische Simulation eines Unterseebootes durchzuführen.

Da die Aussagen aus dem vorigen Kapitel lediglich für Frequenzen mit trivialem hypersingulären Kern gelten, wird in diesem Kapitel eine Simulation getätigt, welche überprüft, ob die hergeleitete Methode auch für “kritische” Frequenzen funktioniert.

### 4.1 Test mit analytischer Lösung, Anregung über Volumskräfte

Um die numerischen Verfahren, speziell die Konvergenzordnung, zu überprüfen, wird eine analytische Lösung des Systems benötigt.

Als Geometrie für die Struktur wird die Einheitskugel gewählt, aus welcher die Kugel mit Radius 0.8 ausgeschnitten wird. Das bedeutet

$$\Omega_s := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0.8 < \|\mathbf{x}\| < 1 \}.$$

Daher erhält man für  $\Omega_f$  das Gebiet

$$\Omega_f := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| > 1 \}.$$

Als Kopplungsrand bzw. als Dirichletrand erhält man demnach

$$\Gamma := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1 \} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_D := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 0.8 \}.$$

Es werden der Druck  $p$  und die Verschiebung  $\mathbf{u}$  wie folgt vorgegeben:

$$p(r) := \frac{e^{ikr}}{r},$$
$$\mathbf{u}(r) := (c_1 + c_2 r + c_3 r^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{r}$$

mit noch geeignet zu wählenden Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$ . Werden die Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$  definiert durch

$$c_1 := -\frac{4e^{ik} (8i(k+i)\lambda + 12i(k+i)\mu + \varrho_f \omega^2)}{\varrho_f \omega^2 (\lambda + 2\mu)},$$

$$c_2 := \frac{e^{ik} (68i(k+i)\lambda + 100i(k+i)\mu + 9\varrho_f \omega^2)}{\varrho_f \omega^2 (\lambda + 2\mu)},$$

$$c_3 := -\frac{5e^{ik} (7i(k+i)\lambda + 10i(k+i)\mu + \varrho_f \omega^2)}{\varrho_f \omega^2 (\lambda + 2\mu)},$$

dann sind die beiden Transmissionsbedingungen (1.25) und (1.26) auf dem Kopp-  
lungsrand  $\Gamma$  erfüllt, und  $\mathbf{u}$  besitzt homogene Dirichlet Daten auf dem Dirichletrand  
 $\Gamma_D$ . Weiters erfüllt  $p$  die Helmholtzgleichung in  $\Omega_f$ . Da  $\mathbf{u}$  die Gleichung der Elastizi-  
tätstheorie (1.6)-(1.7) nicht erfüllt, wird eine rechte Seite  $\mathbf{f}$  benötigt.  $\mathbf{f}$  erhält man  
durch Einsetzen der Verschiebung  $\mathbf{u}$  in die Differentialgleichungen (1.6)-(1.7). Aus  
Gründen der Übersichtlichkeit wird  $\mathbf{f}$  an dieser Stelle nicht angegeben.

Die konkreten Parameter für die Kreisfrequenz, die Schallgeschwindigkeit, die Dichten  
sowie für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktion können aus der Tabelle 4.1  
entnommen werden.

Parameter	$\omega$	$c$	$k = \frac{\omega}{c}$	$\varrho_s$	$\varrho_f$	$E$	$\nu$
Werte	1000	1484	$\approx 0.673854$	4500	1000	105	0.34

**Tabelle 4.1:** Parameter.

Zur Überprüfung der Konvergenzordnung werden drei verschieden feine Netze be-  
trachtet, welche mit Netgen, siehe [19], erzeugt wurden. Details zu den Netzen können  
aus der Tabelle 4.2 abgelesen werden.

Parameter	Netz 1	Netz 2	Netz 3
Anzahl der Elemente	1948	15584	124672
Anzahl der Knoten insgesamt	658	3916	26030
Anzahl der Knoten auf dem Dirichletrand	257	1022	4082
Anzahl der Knoten auf dem Kopplungsrand	401	1598	6386
Anzahl der Freiheitsgrade	1604	10280	72230

**Tabelle 4.2:** Details der Netze.

Tabelle 4.3 enthält die berechneten Fehler für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  in den Normen  
 $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$  und  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$ . Die erwartete Konvergenzordnung eoc (expected order of  
convergence) in der Norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$  ist linear.

Elemente	Faktor	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$	eoc	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$	eoc
1948		3,93E-10		6,38E-09	
15584	8	1,30E-10	1,60	4,20E-09	0,60
124672	8	3,90E-11	1,73	2,31E-09	0,86

Tabelle 4.3: Fehler der Verschiebung.

Der Fehler des Drucks  $p$  in der Norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$  kann aus der Tabelle 4.4 entnommen werden.

Elemente	Faktor	$\ p - p_M\ _{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$	eoc
1948		3,04E-1	
15584	8	8,60E-2	1,82
124672	8	2,33E-2	1,88

Tabelle 4.4: Fehler des Drucks.

Letztendlich wurde auch die Konvergenz der Punktauswertung überprüft. Diese kann aus der Tabelle 4.5 für verschiedene Punkte entnommen werden.

(2, 0, 0)	eoc	(3, 0, 0)	eoc	(4, 0, 0)	eoc	(5, 0, 0)	eoc	(6, 0, 0)	eoc
4,30E-2		2,86E-2		2,14E-2		1,71E-2		1,43E-2	
1,21E-2	1,83	8,05E-3	1,83	6,02E-3	1,83	4,81E-3	1,83	4,00E-3	1,83
3,32E-3	1,87	2,20E-3	1,87	1,65E-3	1,87	1,31E-3	1,87	1,09E-3	1,87
(7, 0, 0)	eoc	(8, 0, 0)	eoc	(9, 0, 0)	eoc	(10, 0, 0)	eoc		
1,22E-2		1,07E-2		9,49E-3		8,54E-3			
3,43E-3	1,83	3,00E-3	1,83	2,67E-3	1,83	2,40E-3	1,83		
9,36E-4	1,87	8,19E-4	1,87	7,27E-4	1,87	6,54E-4	1,87		

Tabelle 4.5: Fehler der Punktauswertung.

## 4.2 Test mit analytischer Lösung, Anregung über Neumann Randbedingungen

In diesem Test wird die Geometrie aus dem vorigen Beispiel mit einer leichten Modifikation übernommen. Anstatt des Dirichletrands  $\Gamma_D$  wird ein Neumannrand  $\Gamma_N$  betrachtet, auf welchem die Anregung stattfindet. Da die Anregung ausschließlich auf dem Neumannrand stattfinden soll, ist es notwendig, eine Lösung der beiden Dif-

ferentialgleichungen zu kennen. Im Appendix wurde folgende Lösung hergeleitet:

$$\begin{aligned}
 p(r) &:= \frac{e^{ikr}}{r} && \text{für } r > 1, \\
 \mathbf{u}(r) &:= (c_1 u_1(r) + c_2 u_2(r)) \mathbf{e}_r && \text{für } 0.8 < r < 1
 \end{aligned}$$

mit den skalaren Funktionen

$$\begin{aligned}
 u_1(r) &= -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{r\sqrt{\varrho_s\omega}}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)}{r\sqrt{\varrho_s\omega}} + \frac{(\lambda + 2\mu) \sin\left(\frac{r\sqrt{\varrho_s\omega}}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)}{r^2\varrho_s\omega^2}, \\
 u_2(r) &= -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} \sin\left(\frac{r\sqrt{\varrho_s\omega}}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)}{r\sqrt{\varrho_s\omega}} - \frac{(\lambda + 2\mu) \cos\left(\frac{r\sqrt{\varrho_s\omega}}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)}{r^2\varrho_s\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Wie im Appendix erwähnt, müssen die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so gewählt werden, dass die beiden Transmissionsbedingungen erfüllt sind. Auf dem Neumannrand erhält man die Anregung  $\mathbf{g}_N$  durch  $\mathbf{g}_N = \sigma(0.8)\mathbf{n}$ .

Es werden zwei Simulationen durchgeführt. Einerseits wird  $\omega = 1000$  gewählt und andererseits  $\omega = 1484\pi$ . Im Appendix wird gezeigt, dass für  $k = n\pi$  und somit auch für  $k = \pi$  der hypersinguläre Operator nicht injektiv ist. Die zweite Simulation soll daher testen, wie sich das numerische Verfahren bei nicht trivialem hypersingulären Kern verhält. Die wesentlichen Parameter für die Simulationen können aus der Tabelle 4.6 entnommen werden.

Parameter	$\omega$	$c$	$k = \frac{\omega}{c}$	$\varrho_s$	$\varrho_f$	$E$	$\nu$
Werte Simulation 1	1000	1484	$\approx 0.673854$	4500	1000	105	0.34
Werte Simulation 2	$1484\pi$	1484	$\pi$	4500	1000	105	0.34

**Tabelle 4.6:** Parameter.

Details zum Netz findet man in Tabelle 4.7.

Parameter	Netz 1	Netz 2	Netz 3
Anzahl der Elemente	1948	15584	124672
Anzahl der Knoten insgesamt	658	3916	26030
Anzahl der Knoten auf Kopplungsrand	401	1598	6386
Anzahl der Freiheitsgrade	2375	13346	84476

**Tabelle 4.7:** Parameter der Netze.

Die berechneten Fehler für die Verschiebung in den Normen  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$  und  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$  können aus der Tabelle 4.8 abgelesen werden.

Elemente	Faktor	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$	eoc	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$	eoc
1948		1,82E-10		1,19E-09	
15584	8	5,00E-11	1,86	6,75E-10	0,81
124672	8	1,37E-11	1,87	3,54E-10	0,93

Elemente	Faktor	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{L}^2(\Omega_s)}$	eoc	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_M\ _{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}$	eoc
1948		2,65E-11		1,43E-10	
15584	8	7,09E-12	1,90	7,89E-11	0,85
124672	8	1,85E-12	1,94	4,11E-11	0,94

**Tabelle 4.8:** Fehler der Verschiebung (oben  $\omega = 1000$ , unten  $\omega = 1484\pi$ ).

Elemente	Faktor	$\ p - p_M\ _{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$	eoc	$\ p - p_M\ _{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$	eoc
1948		3,62E-01		4,05E-01	
15584	8	1,01E-01	1,84	1,10E-01	1,89
124672	8	2,70E-02	1,90	2,86E-02	1,94

**Tabelle 4.9:** Fehler des Drucks für  $\omega = 1000$  und  $\omega = 1484\pi$ .

Die Fehler des Drucks in der Norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$  sind in Tabelle 4.9 angeführt. Es ist sehr deutlich zu erkennen, dass der Fehler für den Druck quadratisch abnimmt.

Die punktweisen Fehler für den Druck  $p$  sind in der Tabelle 4.10 für die erste Simulation zusammengefasst. Für die zweite Simulation sind die Fehlerabschätzungen ähnlich und werden deshalb nicht dargestellt.

(2, 0, 0)	eoc	(3, 0, 0)	eoc	(4, 0, 0)	eoc	(5, 0, 0)	eoc	(6, 0, 0)	eoc
5,09E-2		3,39E-2		2,54E-2		2,04E-2		1,70E-2	
1,42E-2	1,84	9,48E-3	1,84	7,12E-3	1,84	5,70E-3	1,84	4,75E-3	1,84
3,86E-3	1,88	2,57E-3	1,88	1,93E-3	1,88	1,55E-3	1,88	1,29E-3	1,88

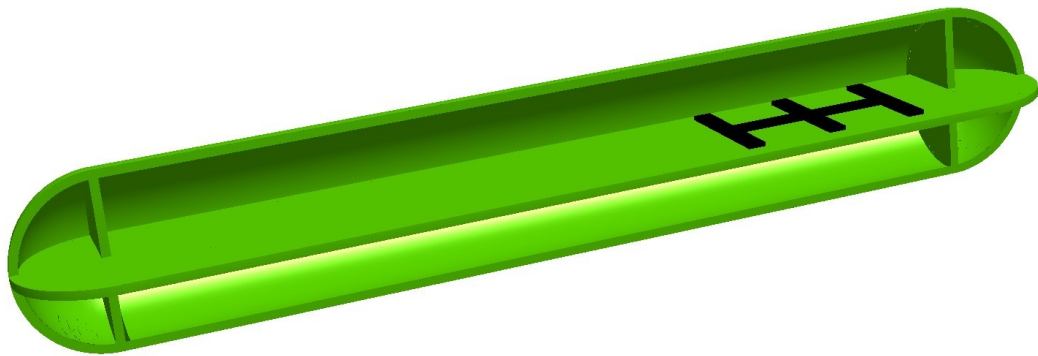
(7, 0, 0)	eoc	(8, 0, 0)	eoc	(9, 0, 0)	eoc	(10, 0, 0)	eoc
1,45E-2		1,27E-2		1,13E-2		1,02E-2	
4,07E-3	1,84	3,56E-3	1,84	3,17E-3	1,84	2,85E-3	1,84
1,11E-3	1,88	9,67E-4	1,88	8,60E-4	1,88	7,74E-4	1,88

**Tabelle 4.10:** Fehler der Punktauswertung für  $\omega = 1000$ .

### 4.3 Simulation der Akustik-Struktur-Interaktion in einem Unterseeboot

In den vorigen beiden Simulationen wurde sichergestellt, dass die numerische Umsetzung korrekt implementiert wurde. In dieser Simulation soll ein praktischeres Beispiel behandelt werden. Dieses Beispiel basiert auf dem in [3, Seite 126] behandelten Beispiel.

Gegeben sei ein sehr einfaches Unterseeboot, bestehend aus einem Zylinder und zwei Halbkugeln. Die beiden Halbkugeln werden auf den beiden Enden des Zylinders gesetzt. Dieses Unterseeboot ist hohl und besitzt eine Wandstärke von 0.1m. Der Innenraum des Bootes besteht aus zwei Wänden und einem Boden. In Abbildung 4.1 findet man eine Skizze des soeben beschriebenen Unterseebootes. Die Details dieser Geome-



**Abbildung 4.1:** Skizze des Unterseebootes.

trie können in Tabelle 4.11 nachgeschlagen werden. Der schwarz eingefärbte Teil des

Länge Zylinder	10m
Radius Zylinder	1m
Radius Halbkugel	1m
Wandstärke	0.1m
Bodenstärke	0.1m

**Tabelle 4.11:** Details des Unterseebootes.

Bodens stellt den Bereich der Anregung, welche über Volumskräfte eingebaut wird, dar. Die Unausgeglichenheit des Motors ist hauptsächlich für die Anregung verantwortlich. Insgesamt soll eine Kraft mit einem Betrag von 100N auf das Unterseeboot



wirken. Diese Kraft wirkt in  $y$ - und  $z$ -Richtung:

$$\mathbf{f}_{\text{ges}}(t) = 100 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = 100 \Re \left( e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

Um die Volumskraft  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  zu erhalten, wird die Kraft  $\mathbf{f}_{\text{ges}}$  durch das in Abbildung 4.1 skizzierte schwarze Volumen dividiert. Die genauen Daten des schwarzen Bereichs, bestehend aus 4 rechtwinkligen Prismen, können aus der Tabelle 4.12 entnommen werden. Ein Prisma wird durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte beschrieben. Das

Teilgebiet	Ecke 1	Ecke 2
Prisma 1	$(4, -0.75, -0.05)^\top$	$(4.2, 0.75, 0.05)^\top$
Prisma 2	$(3, -0.75, -0.05)^\top$	$(3.2, 0.75, 0.05)^\top$
Prisma 3	$(2, -0.75, -0.05)^\top$	$(2.2, 0.75, 0.05)^\top$
Prisma 4	$(2, -0.10, -0.05)^\top$	$(4.2, 0.10, 0.05)^\top$

**Tabelle 4.12:** Details des Bereiches der Anregung.

Volumen des schwarz eingefärbten Bereichs lautet

$$V = (0.2 \cdot 1.5 \cdot 0.1) \cdot 3 + (0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.1) \cdot 2 = 0.122.$$

Die Volumskraft ist somit gegeben durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{100}{0.122} \Re \left( e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right) = 819.67 \Re \left( e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

für  $\mathbf{x}$  aus dem schwarz eingefärbten Bereich. Dies entspricht einer zeitharmonischen Anregung und, um die bisher verwendete Notation beizubehalten, setzt man

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 819.67 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Alle Oberflächen, welche sich im Inneren des Unterseebootes befinden, stellen homogene Neumannränder dar und die restlichen Oberflächen, das heißt die Oberflächen auf der Außenseite des Unterseebootes, Kopplungsränder. Weitere für die Simulation wichtige Daten sind aus der Tabelle 4.13 zu entnehmen.

Parameter	$\omega$	$c$	$k = \frac{\omega}{c}$	$\varrho_s$	$\varrho_f$	$E$	$\nu$
Werte	$200\pi$	1484	$\approx 0.4234$	4500	1000	105	0.34

**Tabelle 4.13:** Parameter.

Dies soll die Materialeigenschaften von Titan widerspiegeln.  $\omega = 100 \cdot 2\pi$  bedeutet, dass eine Frequenz von 100Hz vorliegt.

Mit Netgen, siehe [19], wurde ein Netz mit den in Tabelle 4.14 enthaltenen Daten erstellt. Aus den Daten der Tabelle 4.14 können die Dimensionen der Matrizen des

Parameter	Werte
Anzahl der Elemente	120804
Anzahl der Knoten insgesamt	39131
Anzahl der Knoten auf dem Kopplungsrand	15538
Anzahl der Freiheitsgrade	132931

**Tabelle 4.14:** Details des Netzes.

Gleichungssystems

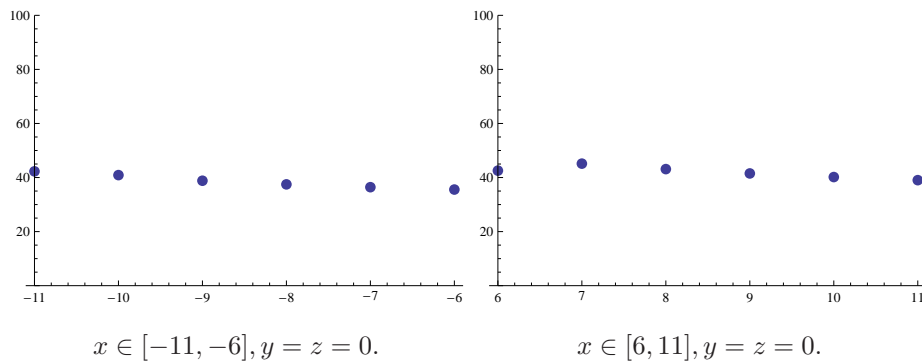
$$\begin{pmatrix} A_{I,I} - \omega^2 \varrho_s M_{I,I}^{\text{FE}} & A_{I,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{I,\Gamma}^{\text{FE}} & 0 \\ A_{\Gamma,I} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,I}^{\text{FE}} & A_{\Gamma,\Gamma} - \omega^2 \varrho_s M_{\Gamma,\Gamma}^{\text{FE}} - \omega^2 \varrho_f V & \frac{1}{2} M^{\text{BE}} + K \\ 0 & \frac{1}{2} M^{\text{BE}\top} + K^\top & \frac{1}{\omega^2 \varrho_f} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_I \\ \hat{u}_\Gamma \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_I \\ \hat{f}_\Gamma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A_{I,I}, M_{I,I}^{\text{FE}} &\in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \\ A_{I,\Gamma}, M_{I,\Gamma}^{\text{FE}} &\in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \\ A_{\Gamma,I}, M_{\Gamma,I}^{\text{FE}} &\in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}, \\ A_{\Gamma,\Gamma}, M_{\Gamma,\Gamma}^{\text{FE}} &\in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \quad \text{bzw.} \quad V \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}, \\ M^{\text{BE}} &\in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3} \quad \text{bzw.} \quad K \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_3}, \\ D &\in \mathbb{C}^{n_3 \times n_3} \end{aligned}$$

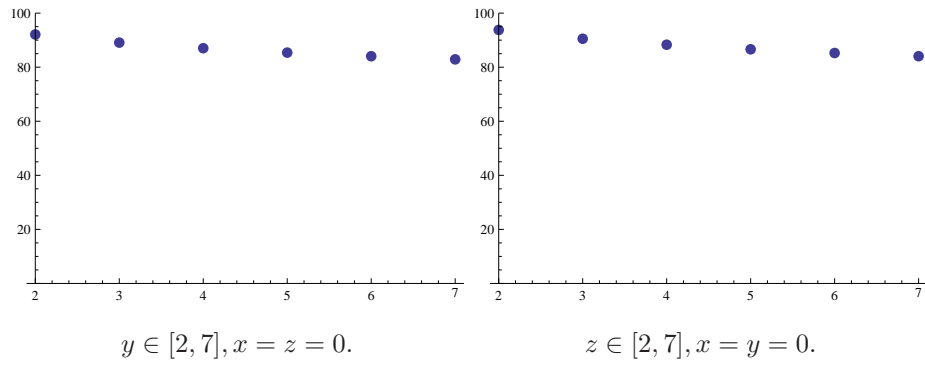
mit  $n_1 = 3 \cdot (39131 - 15538) = 70779$ ,  $n_2 = 3 \cdot 15538 = 46614$  und  $n_3 = 15538$ .

Als Resultat erhält man einerseits die Verschiebung  $\mathbf{u}$  für  $\mathbf{x} \in \Omega_s$  und andererseits den Druck  $p$  auf  $\Gamma$  sowie in einzelnen Punkten  $\mathbf{x} \in \Omega_f$ . In Abbildung 4.2 und 4.3 ist die Lautstärke in einzelnen Punkten geplottet.



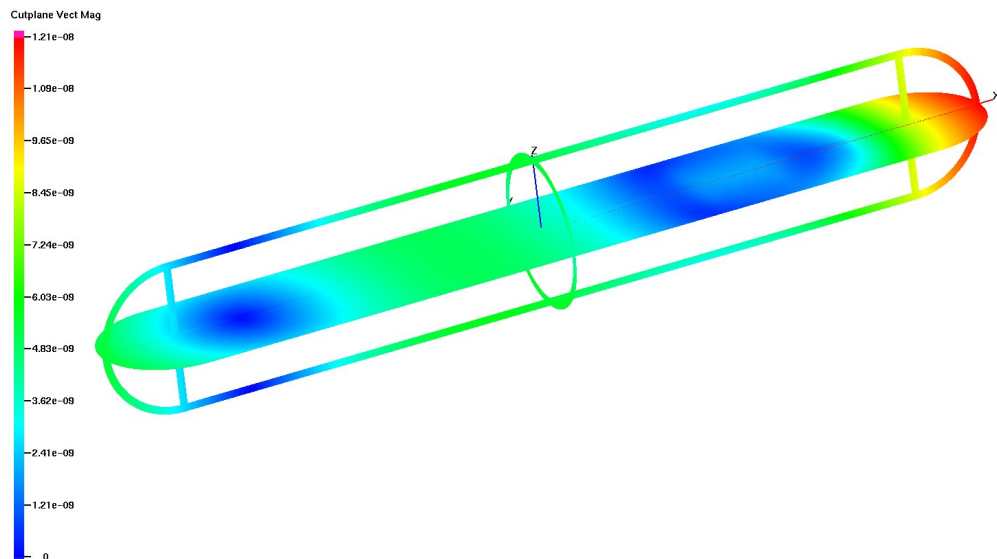
**Abbildung 4.2:** Lautstärke in dB in einzelnen Punkten  $(x, y, z)^\top$ .

### 4.3 Simulation der Akustik-Struktur-Interaktion in einem Unterseeboot



**Abbildung 4.3:** Lautstärke in dB in einzelnen Punkten  $(x, y, z)^T$ .

In Abbildung 4.4 ist der Realteil der Verschiebung unter Zuhilfenahme von GMV, siehe [9], dargestellt.



**Abbildung 4.4:** Realteil der Verschiebung.

Der Imaginärteil der Verschiebung ist in Abbildung 4.5 unter Zuhilfenahme von GMV, siehe [9], dargestellt.

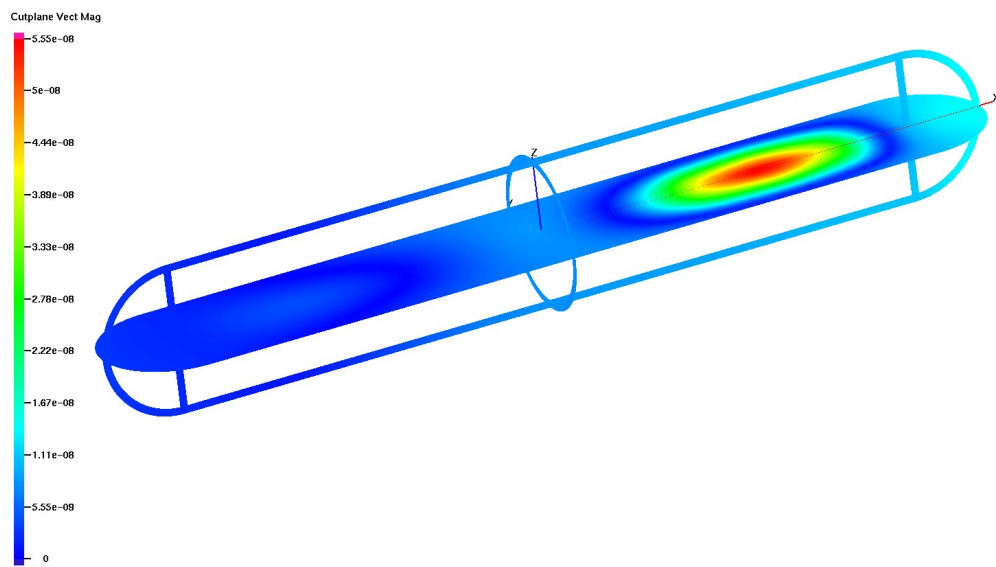


Abbildung 4.5: Imaginärteil der Verschiebung.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit wurde untergliedert in die Bereiche

- Modellierung,
- Analysis,
- Numerik und Simulation.

Im Kapitel “Modellierung” wurden die zwei wesentlichen Modelle vorgestellt - zum einen das Modell der linearen Elastizitätstheorie und zum anderen das Modell der linearen Akustik. Weiters wurden zeitharmonische Anregungen betrachtet. Da das Fluid unter Umständen Einfluss auf die Verformung haben kann, wurde eine starke Kopplung vorgenommen. Dazu waren zwei Kopplungsbedingungen notwendig. In Summe erhielt man ein System von Differentialgleichungen mit zwei Kopplungsbedingungen, Randbedingungen, sowie einer Abstrahlbedingung für den Druck.

Im Kapitel “Analysis” wurde das gesamte Problem auf (eindeutige) Lösbarkeit untersucht. Die Fredholmsche Alternative stellte sich dabei als sehr hilfreiches Hilfsmittel heraus. Für das akustische Problem wurden Randintegralgleichungen hergeleitet, welche zusammen mit den beiden Transmissionsbedingungen in die Variationsformulierung der Elastizität eingebaut wurden. Es konnte die Äquivalenz des resultierenden Systems zum ursprünglichen System gezeigt werden. Weiters stellte sich heraus, dass man bei einem nicht trivialen Kern des hypersingulären Operators keine Eindeutigkeit des hergeleiteten Systems erlangen kann. Um dieses Problem zu umgehen, wurde eine weitere Bedingung festgelegt. Mit dieser zusätzlichen Einschränkung konnte gezeigt werden, dass das System eine eindeutige Lösung besitzt, falls  $\omega$  keine Eigenfrequenz des hergeleiteten bzw. des ursprünglichen Systems war. Es konnte gezeigt werden, dass die Einschränkung für den Druck keine Auswirkung auf die Verschiebung bzw. auf die Darstellungsformel hat. Das bedeutet, dass solche nicht trivialen Kerne des hypersingulären Operators in der Analysis keine Probleme verursachen.

Als numerische Methoden wurden die Finite-Elemente-Methode sowie die Randelementmethode verwendet. Es stellte sich heraus, dass lediglich für einen trivialen Kern des hypersingulären Operators eine numerische Analysis angegeben werden kann. Anschließend wurden Simulationen durchgeführt, um die bewiesenen Aussagen zu überprüfen. Zusätzlich wurden Frequenzen gesucht, sodass der Kern des hypersingulären Operators nicht trivial ist. Simulationen mit diesen kritischen Frequenzen ließen vermuten, dass das numerische Verfahren stabil bezüglich solcher Frequenzen zu sein

scheint. Zum Abschluss wurde eine Simulation für ein Unterseeboot durchgeführt.

Eine numerische Analysis bei nicht trivialem Kern des hypersingulären Operators wurde nicht behandelt und sollte noch geklärt werden. Weiters könnte man die klassische Randelementmethode durch schnelle Randelementmethoden ersetzen. In [3] wurden die schnelle Multipol Methode sowie hierarchische Matrizen betrachtet. Geeignete Vorkonditionierungsstrategien wären ebenfalls von Vorteil, um schnellere Rechenzeiten zu erlangen. Da die Kopplung für sehr dünne Wände immer interessanter wird - der Einfluss des Fluids wächst bei abnehmender Wandstärke - wäre es auch interessant, Plattenmodelle einzubauen. Letztendlich könnte man sich auch für das zugehörige Eigenwertproblem interessieren, das heißt man ist an kritischen Frequenzen des gesamten Systems interessiert. Da die Frequenz in den Randintegraloperatoren auftaucht, ist dieses Problem nicht linear und stellt eine große Herausforderung dar.

# Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, Robert A.: *Sobolev Spaces*. New York, San Francisco, London : Academic Press, 1975
- [2] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006
- [3] BRUNNER, Dominik: *Fast Boundary Element Methods for Large-Scale Simulations of the Vibro-Acoustic Behavior of Ship-Like Structures*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2009
- [4] CIARLET, Philippe G.: *Mathematical Elasticity*. Amsterdam : North-Holland, 1988
- [5] DUVAUT, Georges ; LIONS, Jacques L.: *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlin : Springer, 1976
- [6] EHRENFRIED, Klaus: *Strömungsakustik I, Skript zur Vorlesung*. <http://vento.pi.tu-berlin.de/formB/nmain.pdf>. 2003
- [7] ENGLEDER, Sarah: *Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung*, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 2006
- [8] FEISTAUER, Miloslav ; FELCMAN, Jiří ; STRAŠKRABA, Ivan: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford : Clarendon Press, 2003
- [9] GMV: *General Mesh Viewer*. <http://www-xdiv.lanl.gov/XCM/gmv/GMVHome.html>
- [10] HOLZAPFEL, Gerhard A.: *Nonlinear Solid Mechanics*. Chichester : Wiley & Sons Ltd, 2000
- [11] KALTENBACHER, Manfred: *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Springer Berlin Heidelberg, 2004
- [12] MCLEAN, William: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000

- [13] MEISTER, Andreas: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Braunschweig Wiesbaden : Vieweg, 1999
- [14] OF, Günther ; STEINBACH, Olaf: Coupled FE/BE Formulations for the Fluid-Structure Interaction. In: HUANG, Y. (Hrsg.) ; KORNHUBER, R. (Hrsg.) ; WIDLUND, O. (Hrsg.) ; XU, J. (Hrsg.): *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering* Bd. 19. Heidelberg : Springer, 2011, S. 293–300
- [15] OGDEN, Reymond. W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola, New York : Dover Publications, Inc., 1984
- [16] QUARTERONI, Alfio ; SACCO, Riccardo ; SALERI, Fausto: *Numerical Mathematics*. Berlin : Springer, 2007
- [17] SAUTER, Stefan ; SCHWAB, Christoph: *Randelementmethoden*. Wiesbaden : Teubner, 2004
- [18] SCHREMPF, Konrad: *Gekoppelte Finite Elemente und Randelemente Formulierungen für Akustik Struktur Interaktionen*, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 2008
- [19] SCHÖBERL, Joachim: *Netgen*. <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>
- [20] SLAUGHTER, William S.: *The Linearized Theory of Elasticity*. Boston : Birkhäuser, 2002
- [21] SOMMERFELD, Arnold: *Vorlesung über Theoretische Physik Band 6 Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Thun : Harri Deutsch, 1978
- [22] STEINBACH, Olaf: *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden : Teubner, 2003
- [23] STEINBACH, Olaf: *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Algorithmen und Anwendungen*. Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden : Teubner, 2005
- [24] STEINBACH, Olaf: *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements*. New York : Springer, 2008
- [25] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007



# A Appendix

## A.1 Analytische Lösung des gekoppelten Systems

Um die numerischen Verfahren, speziell die Konvergenzordnung, zu überprüfen, ist es von Vorteil, eine analytische Lösung des Systems zu kennen. Als Geometrie für die Struktur wird die Einheitskugel gewählt, aus der die Kugel mit Radius 0.8 ausgeschnitten wird. Das bedeutet

$$\Omega_s := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0.8 < \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

Daher erhält man für  $\Omega_f$  das Gebiet

$$\Omega_f := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| > 1\}.$$

Als Kopplungsrand bzw. als Neumannrand erhält man demnach

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\} \quad \text{und} \quad \Gamma_N := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 0.8\}.$$

Um eine analytische Lösung zu bekommen wird wie folgt vorgegangen:

Es wird eine Lösung für  $p$  vorgegeben, welche die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung (1.22) und die Helmholtzgleichung (1.19) in  $\Omega_f$  erfüllt. Die radialsymmetrische Funktion

$$p(r) := \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{für} \quad r > 1 \quad (\text{A.1})$$

erfüllt die soeben erwähnten Voraussetzungen. Für  $\mathbf{u}$  wird der Ansatz  $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$  gewählt. Um für diesen Ansatz eine Lösung zu bekommen, wird die Differentialgleichung der linearen Elastizitätstheorie (1.6) mit dem Materialgesetz (1.7) in Kugelkoordinaten transformiert, siehe [20]. Man erhält für  $\mathbf{f} = 0$  mit dem rotationssymmetrischen Ansatz für die Komponente  $\mathbf{e}_r$

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) + \rho_s \omega^2 = 0,$$

mit  $\varepsilon_{rr} = u'(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u(r)}{r}$  und  $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} = 0$ , bzw.  $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}\varepsilon \mathbf{I}$ . Die Gleichungen für die Komponenten  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  sind automatisch erfüllt. Das bedeutet, dass lediglich eine skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen ist. Setzt man die Werte für  $\sigma$  ein, erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu u' + \lambda \left( u' + \frac{2u}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} &= \frac{2\mu u}{r} + \lambda \left( u' + \frac{2u}{r} \right) \end{aligned}$$

bzw. die Differentialgleichung

$$u''(2\mu + \lambda) + u' \left( \frac{4\mu}{r} + \frac{2\lambda}{r} \right) + u \left( \varrho_s \omega^2 - \frac{4\mu}{r^2} - \frac{2\lambda}{r^2} \right) = 0.$$

Als Lösung erhält man die beiden Funktionen

$$u_1(r) = -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} \cos \left( \frac{r\sqrt{\varrho_s \omega}}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \right)}{r\sqrt{\varrho_s \omega}} + \frac{(\lambda + 2\mu) \sin \left( \frac{r\sqrt{\varrho_s \omega}}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \right)}{r^2 \varrho_s \omega^2},$$

$$u_2(r) = -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} \sin \left( \frac{r\sqrt{\varrho_s \omega}}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \right)}{r\sqrt{\varrho_s \omega}} - \frac{(\lambda + 2\mu) \cos \left( \frac{r\sqrt{\varrho_s \omega}}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \right)}{r^2 \varrho_s \omega^2}.$$

Die Lösung  $u$  ist daher eine Linearkombination von  $u_1$  und  $u_2$ . Um die Koeffizienten zu bestimmen, werden die beiden Transmissionsbedingungen betrachtet.

Die erste Transmissionsbedingung lautet

$$\varrho_f \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(1) = \mathbf{n} \cdot \nabla p(1)$$

bzw. für diesen Spezialfall  $u(1)\varrho_f \omega^2 = p(1)'$ . Setzt man für  $p$  ein, erhält man die Gleichung

$$u(1) = \frac{e^{i\kappa} (i\kappa - 1)}{\varrho_f \omega^2}.$$

Die zweite Transmissionsbedingung lautet  $-p(1)\mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$  bzw.

$$-p(1)\mathbf{e}_r = (2\mu u' + \lambda(u' + 2u))\mathbf{e}_r.$$

Umgeformt erhält man für die Komponente  $\mathbf{e}_r$

$$u'(1) = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} (p(1) + 2\lambda u(1)) = \frac{-e^{i\kappa}}{\lambda + 2\mu} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\varrho_f \omega^2} (\kappa i - 1) \right).$$

Mit diesen beiden Gleichungen kann man die Faktoren  $c_1$  und  $c_2$  bestimmen und man erhält die Lösung

$$\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r = (c_1 u_1(r) + c_2 u_2(r))\mathbf{e}_r.$$

Die Neumanndaten erhält man, indem man

$$\sigma(0.8)\mathbf{n} = -\sigma(0.8)\mathbf{e}_r = -\sigma_{rr}\mathbf{e}_r$$

berechnet.

## A.2 Kritische Frequenzen für den hypersingulären Operator

Gesucht ist ein Element  $p$  aus  $H^{1/2}(\Gamma)$ , sodass  $D_k p = 0$  gilt. Diese Problemstellung ist abhängig von der Geometrie und von  $k$ . Um ein möglichst einfaches Beispiel zu finden, wird  $\Gamma$  wie folgt gewählt:

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Um für diese Geometrie die kritischen Frequenzen zu finden, betrachtet man das Hilfsproblem: Gesucht ist  $u \in H^1(\Omega)$  als Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \gamma_1^{\text{int}} u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

Betrachtet man den Calderon Projektor für das Innenraumproblem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}_k & \mathbf{V}_k \\ \mathbf{D}_k & \frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u \\ \gamma_1^{\text{int}} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}} u \\ \gamma_1^{\text{int}} u \end{pmatrix},$$

erhält man aus der zweiten Gleichung  $D_k \gamma_0^{\text{int}} u = 0$ . Wählt man  $p = \gamma_0^{\text{int}} u$ , dann erhält man das gewünschte Resultat  $D_k p = 0$ .

Um das Hilfsproblem zu lösen, wird  $u$  als Funktion vom Radius gewählt, d.h.  $u = u(r)$ . Es ist daher vorteilhaft die Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten auszudrücken, d.h.  $u$  soll die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} u(r) \right) + k^2 u(r) = 0$$

erfüllen. Betrachtet man die Hilfsfunktion  $v(r) = ru(r)$  bzw.  $u(r) = \frac{1}{r}v(r)$ , dann erhält man für die Ableitung

$$\frac{d}{dr} u(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v(r) - \frac{1}{r^2} v(r).$$

Dies in die obige Gleichung eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} v(r) - v(r) \right) + \frac{k^2}{r} v(r) = 0$$

bzw.

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{d}{dr} v(r) + r \frac{d^2}{dr^2} v(r) - \frac{d}{dr} v(r) \right) + \frac{k^2}{r} v(r) = 0.$$

Letztendlich erhält man die einfache Gleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}v(r) + k^2v(r) = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$v(r) = c_1 \cos(kr) + c_2 \sin(kr)$$

bzw.

$$u(r) = \frac{c_1 \cos(kr) + c_2 \sin(kr)}{r}.$$

Für  $\gamma_1^{\text{int}}u$  gilt

$$\gamma_1^{\text{int}}u = (-c_1 + c_2k) \cos(k) - (c_2 + c_1k) \sin(k).$$

Um spezielle Lösungen zu erhalten, werden zwei Fälle untersucht:

- $c_1 = c_2k$

Um die homogenen Neumannrandbedingungen zu erfüllen, muss daher

$$0 = (c_2 + c_2k^2) \sin(k)$$

gelten. Es folgt

$$k = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für  $c_1 = \pi, 2\pi, 3\pi, c_2 = 1$  und  $k = \pi, 2\pi, 3\pi$  sind  $u$  und  $\frac{\partial}{\partial n}u$  in Abbildung A.1 dargestellt.

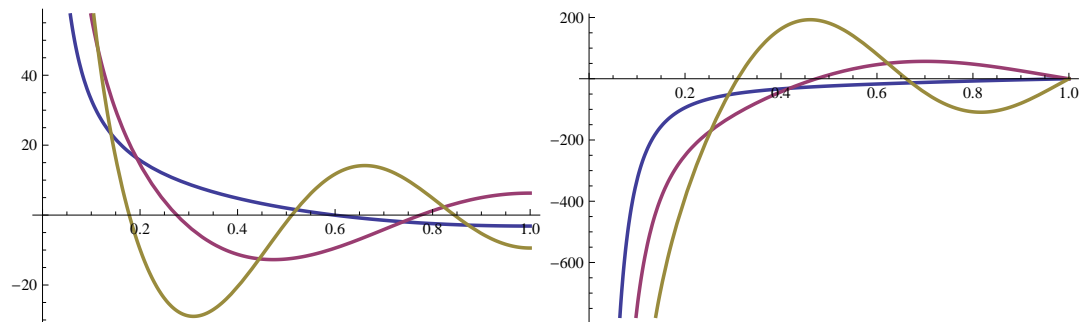


Abbildung A.1: Links:  $u$ , rechts:  $\frac{\partial}{\partial n}u$ .

- $c_2 = -c_1k$

Um die homogenen Neumannrandbedingungen zu erfüllen, muss daher

$$0 = (c_1 + c_1k^2) \cos(k)$$

gelten. Es folgt

$$k = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für  $c_1 = 1, c_2 = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$  und  $k = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$  sind  $u$  und  $\frac{\partial}{\partial n}u$  in Abbildung A.2 dargestellt.

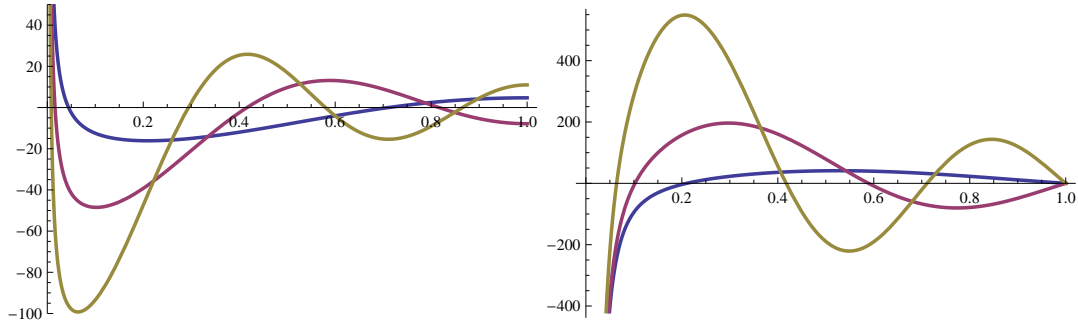


Abbildung A.2: Links:  $u$ , rechts:  $\frac{\partial}{\partial n}u$ .

Für die Frequenzen  $k = n\pi$  sowie  $k = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}$ , ist daher die konstante Funktion  $p = c$  im Kern des hypersingulären Operators  $D_k$  enthalten.