

Masterarbeit

Quasi-Linear Elliptic Filter - Design and Implementation

Daniel Reitz, BSc

Institut für Elektronik
Technische Universität Graz
Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Wolfgang Bösch



Betreuer: Dipl.-Ing. Dr. techn. Mario Auer

Graz, im Mai 2012

Abstract

Elliptic filters are commonly used in digital signal processing. The amplitude response has the fastest transition in gain between the passband and the stopband compared to all other filter types (Chebyshev, Butterworth, Bessel) of equal filter order. The main disadvantage of this type of filter, beside of the oscillating amplitude response, is mainly the non-linear phase response. Therefore group delay is not constant which may cause signal distortion or intersymbol interference.

For practical realization in integrated circuits lattice-wave digital filters are used, which can be implemented with minimum hardware effort compared to direct form IIR-filters and furthermore are less sensitive to non-linear effects (e.g. quantization of coefficients).

The work at hand shows different methods to achieve quasi-linear phase responses for elliptic filters (optimization algorithms, allpass filters, lattice-structure based linearization).

Different filters are implemented as channel filters in a Matlab-CPFSK receiver model to investigate whether a non-linear phase response has any negative impacts on signal demodulation and bit error rate.

Based on the results as well as cost-benefit ratio the best filter is selected.

Kurzfassung

Elliptische Filter werden in der digitalen Signalverarbeitung gerne eingesetzt, da sie das beste Übergangsverhalten im Amplitudengang bei gleicher Filterordnung gegenüber allen anderen Filtertypen besitzen (Chebyshev, Butterworth, Bessel). Der wesentliche Nachteil dieser Filter ist neben der oszillierenden Betragsfunktion aber vor allem im stark nichtlinearen Phasenverlauf zu sehen. Die Gruppenlaufzeit ist somit nicht konstant was zu Signalverzerrungen und Intersymbolinterferenzen führen kann.

Für die praktische Realisierung in integrierten Schaltkreisen werden sogenannte Lattice-Wellendigitalfilter verwendet, welche mit minimalem Hardwareaufwand realisierbar sind und verglichen mit Direktform-IIR-Filtern positive Eigenschaften, wie erhöhte Unempfindlichkeiten gegenüber nichtlinearen Effekten (Quantisierung der Koeffizienten), aufweisen.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Methoden angewendet, um einen quasi-linearen Phasenverlauf elliptischer Filter zu erreichen (Optimierungsalgorithmen, Allpass-Filter, Linearisierung auf Basis der Lattice-Struktur).

Die unterschiedlichen Filter werden als Kanalfilter in einem Modell eines Matlab-CPFSK-Empfängersystems eingesetzt und die Auswirkung des Phasenverlaufs auf die Demodulation bzw. Bitfehlerrate wird untersucht.

Anhand der Resultate und des Kosten/Nutzen-Verhältnisses wird der beste Filter ausgewählt.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ort

Datum

Unterschrift

Danksagung

Diese Masterarbeit wurde am Institut für Elektronik an der Technischen Universität Graz in Kooperation mit Infineon Technologies Austria AG in Graz (Abteilung Sense & Control - Concept Engineering) durchgeführt.

Als erstes möchte ich mich bei meinem primären Betreuer DI Robert Lobnik bedanken, der bei Fragen zur Thematik stets zur Verfügung stand und auch immer eine Antwort parat hatte.

Vielen Dank auch an DI Andreas Lessiak, der mir einige nachrichtentechnische Informationen zur Umsetzung gab und zudem regelmäßig für den passenden Humor sorgte. Danke außerdem für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ein weiteres Dankeschön an den Abteilungsleiter, DI Jakob Jongsma, der mir im speziellen für die Durchführung dieser Arbeit organisatorisch sehr entgegen kam.

Das Betriebsklima in der SC-CE-Abteilung war ausgezeichnet und es war eine schöne Zeit.

Danke auch an DI Dr.techn. Mario Auer für die Übernahme der Betreuung an der Universität.

Ein besonderer Dank auch meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung. Ich möchte sagen, dass ich froh bin, mich vor fünf Jahren dafür entschieden zu haben, meine studentische Ausbildung in Graz zu beginnen, andernfalls hätte ich wahrscheinlich nie das gemacht, was mich auch heute noch immer interessiert.

Graz, im Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.2	Gliederung der Arbeit	3
2	Literaturrecherche	4
2.1	Digitale Filter	6
2.1.1	Übertragungsfunktion	7
2.1.2	Elliptische Filter	9
2.1.3	Gruppenlaufzeit	11
2.1.4	Bilinear-Transformation	12
2.2	Wellendigitalfilter	13
2.2.1	Allgemeines	13
2.2.2	Beschreibung: Eintore/Zweitore	15
2.2.3	Grundelemente	17
2.2.4	Spezielle Abschlüsse	19
2.2.5	Zusammenschaltung von Toren: Adaptoren	21
2.2.6	Standard-WDF-Filterrealisierung: Ein kleines Beispiel	24
2.2.7	Lattice-Filter	25
2.2.8	Lattice-Wellendigitalfilter	32
2.3	Gruppenlaufzeitkorrektur	39
2.3.1	Allpass	39
2.3.2	Optimierungsverfahren	42
2.3.3	Lattice-Struktur: Verzögerungselemente	43
2.3.4	Hybrid-Optimierung von Betrags- und Phasengang	45
2.3.5	Methoden-Vergleich	48
2.4	Modulationsverfahren	49
2.4.1	FSK - Frequency Shift Keying	49
2.4.2	Rauschen	51
3	Ergebnisse	52
3.1	Koeffizienten-Berechnung eines elliptischen Filters	52
3.2	Allpass-Struktur	52
3.2.1	Pol-Platzierung mit nachfolgender Optimierung	54
3.2.2	Verwendung einer Matlab-Funktion	55

3.2.3	Vorgabe diskreter Phasen-Wunschwerte	58
3.3	Lattice-Wellendigitalfilter: Delay-Zweig	61
3.4	Heuristischer Algorithmus	61
3.4.1	Initialfilter ohne Gruppenlaufzeitkorrektur	61
3.4.2	Elliptischer Filter mit Gruppenlaufzeitkorrektur	62
3.5	LWDF mit Quadrupel-Nullstellenkonstellation	64
3.6	Referenzfilter: FIR und Butterworth	65
3.7	Filtervergleich	67
3.8	Polverteilung unterschiedlicher Filterrealisierungen	71
3.9	FSK-Modell	73
3.9.1	Allgemeines zum Aufbau	73
3.9.2	Beschreibung der erstellten Funktionen	74
3.9.3	Simulation	75
3.9.4	Augendiagramm	77
3.9.5	Betrachtung unterschiedlicher Modulationsindizes	80
3.10	Verwendete Entwicklungsumgebung	86
4	Zusammenfassung und Ausblick	87
	Symbolliste	89
	Abkürzungsverzeichnis	91
	Literaturverzeichnis	92

1 Einleitung

In der Signalverarbeitung spielen digitale Filter eine wichtige Rolle, da sie im Gegensatz zu analogen Filtern viele Vorteile besitzen (kein Temperaturdrift/keine Temperaturabhängigkeit, keine Bauteilalterung, exakte Übertragungsfunktion bei verschiedenen Systemen). Zudem benötigen analoge Bauteilkomponenten wie Widerstände, Kondensatoren und Spulen in integrierten Schaltkreisen einen erhöhten Platzbedarf und damit höhere Kosten. Digitale Filter bestehen hingegen nur aus Addierern, Multiplizierern und Speicherelementen.

Es existieren unterschiedliche Filtertypen wie Bessel, Butterworth, Chebyshev I/II und Elliptische (Cauer-Filter). Jede Filterart hat ihre Vor- und Nachteile was einerseits die Berechnung und den Ressourcenbedarf im Zielsystem (Umsetzung der Filterspezifikation), als auch andererseits den Verlauf der Übertragungsfunktion an sich betrifft.

In dieser Arbeit geht es speziell um elliptische Filter, die einen steilen Übergangsbereich vom Durchlass- in den Sperrbereich aufweisen. Dadurch ist es möglich, mit dem, verglichen mit allen anderen Arten von Filtern, geringsten (hardware-) technischen Aufwand die kleinste Übergangsbandsbreite bei gleicher Filterordnung zu erhalten. Der Betragsfrequenzgang weist jedoch nachteilig ein oszillierendes Verhalten (ripple) im Durchlass- wie auch im Sperr-Bereich auf, daher wird dieser Filtertyp auch Equiripple-Filter genannt.

Der wesentliche Nachteil besteht aber im nichtlinearen Phasenverlauf des Filters. Die negative Ableitung der Phase nach der Kreisfrequenz ω ergibt die Gruppenlaufzeit, die demnach auch nichtlinear ist. Der Effekt tritt insbesondere in der Nähe der Grenzfrequenz stark in Erscheinung, wo die Gruppenlaufzeit steil ansteigt, um anschließend nach der Grenzfrequenz schnell wieder abzuklingen. Durch diesen Umstand ergeben sich Nachteile im Signalverhalten. Daher ist es nötig, Möglichkeiten zu finden, um den störenden nichtlinearen Phasenverlauf zu linearisieren.

In der Arbeit werden unterschiedliche Konzepte der Linearisierung des Phasenverlaufs vorgestellt. Standardmäßig bedient man sich der Allpassfilter, die nach dem elliptischen Filter kaskadiert werden. Da die Betragsfunktion eines Allpassfilters konstant ist, ändert sich am Verlauf der Betragsfunktion des Gesamtsystems nichts. Der Phasenverlauf des Allpasses kann je nach Polplatzierung entsprechend verändert werden.

Generell gilt: Je höher die Ordnung des Allpass-Filters ist, umso präziser kann ein bestimmter Phasenverlauf nachgebildet werden.

Als weitere Methode sollen Optimierungsprobleme für die Gruppenlaufzeitkorrektur definiert und gelöst werden (z.B. mit Hilfe heuristischer Algorithmen, Gradientenverfahren).

1.1 Motivation

Man will den Vorteil des elliptischen Filters ausnutzen (steilster Verlauf vom Durchlass in den Sperrbereich bei gleicher Ordnung unter allen Filtertypen) und zugleich den größten Nachteil, nämlich den nichtlinearen Phasenverlauf, kompensieren. Es werden unterschiedliche Methoden zur Linearisierung des Phasenverlaufs untersucht.

Das phasen-linearisierte Filter soll einen bestehenden elliptischen Tiefpass-Kanalfilter (ausgeführt als Lattice-Wellendigitalfilter [LWDF]) für einen FSK-Empfänger ersetzen.

Realisiert wird dabei das Filter, das nach Kosten-/Nutzenaufwand das günstigste Verhältnis aufweist. Idealerweise sollte das mit möglichst wenig zusätzlichem Ressourcenaufwand erfolgen (Multiplizierer, Addierer, Speicherelemente, Bitbreite der Koeffizienten), um den gesamten Systemaufwand und vor allem die Kosten durch einen entstehenden zusätzlichen Platzbedarf nicht zu erhöhen.

Konkret geht es darum, die Auswirkungen der Nichtlinearität (bzw. der Linearität) eines Kanalfilters in einem CPFSK-Empfängersystem (Continuous Phase Frequency Shift Keying) anhand unterschiedlicher Filtertypen auf die Systembandbreite zu untersuchen. Als Bandbreite wird hier eine relative „Grenz-Bitfehlerrate“ von 10^{-3} definiert, also inwieweit die Mittenfrequenz eines CPFSK-Modulationssignals verschoben werden kann, ohne dass die BER merklich absinkt. Ein FIR-Filter wird dabei als Referenz verwendet, da dieses eine gänzlich lineare Phase aufweist.

Dazu wird ein einfaches CPFSK-Übertragungssystem mit IQ-Modulation und Phasen-Demodulation als Matlab-Code-Modell beschrieben, das etwas komplexer (im Sinne der kohärenten Demodulation mit PLL-Struktur) in einem IC verbaut ist.

Es sollen des weiteren Einflüsse der Quantisierung untersucht werden. Da digitale Systeme nur mit einer begrenzten Wortbreite arbeiten, müssen die generierten Koeffizienten gerundet werden, was eine nichtlineare Operation darstellt, die eventuell zu Problemen führen kann. Außerdem können Pol- und Nullstellen durch die Quantisierung nicht beliebig in der z -Ebene platziert werden.

1.2 Gliederung der Arbeit

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Thematik in Form einer Literaturrecherche. Dabei werden digitale Filter allgemein betrachtet sowie die unterschiedlichen Typen von Filtern mit ihren jeweiligen Eigenschaften. Auch grundsätzliche Begriffe wie Betragsgang, Phasengang, Gruppenlaufzeit sowie mögliche Realisierungsformen von Filtern werden erwähnt. In weiterer Folge wird der elliptische Filter näher beschrieben.

Als spezielle Form der Realisierung sind die Wellendigitalfilter angeführt wobei hier im Detail zunächst der Lattice-Filter näher beschrieben wird, da er den Ausgangspunkt für Lattice-Wellendigitalfilter darstellt. Dabei wurde darauf geachtet, möglichst alle Schritte verständlich zu erklären, um die Thematik der Wellendigitalfilter nachvollziehbar zu machen.

In weiterer Folge werden verschiedene Möglichkeiten der Phasen-Linearisierung vorgestellt. Angefangen bei der Kaskadierung eines Allpass-Filters, über heuristische Optimierungsalgorithmen bis hin zu speziellen Methoden, die die Vorteile von LWDF-Strukturen ausnützen.

Kapitel 3 zeigt die Vorgehensweise bei der Durchführung der Phasen-Linearisierung eines elliptischen Filters auf die in Kapitel 2 angegebenen Methodiken.

Des Weiteren sind Vor- und Nachteile der jeweiligen Ausführungsformen angeführt und es wird eine Charakterisierung des quasi-linearen Filters anhand eines praktischen Beispiels (Matlab CPFSK-Empfängermodell) vorgenommen. Dabei wird veranschaulicht, ob und wie sich ein nichtlinearer Phasenverlauf eines Kanalfilters auf die Demodulation auswirkt. Als Parameter dient hierbei die Bitfehlerrate.

Weitere Aussagen zur Auswirkung von Phasenverzerrungen auf das demodulierte Signal lassen sich aus Augendiagrammen ableiten.

Kapitel 4 gibt eine Zusammenfassung dieser Arbeit mit den Ergebnissen wieder und es werden etwaige Verbesserungsvorschläge angeführt.

2 Literaturrecherche

Am Beginn dieses Kapitels wird eine kurze Erklärung zu den einzelnen verwendeten Quellen angeführt.

Das Buch [Sch00] gibt einen Überblick zum Thema digitale Filter sowie dem Filterdesign und erklärt auch die auftretenden Effekte durch begrenzte Wortlängen näher.

Eine ausführliche Erklärung zur Theorie von Wellendigitalfiltern mit beispielhaften Ausführungsformen wird im Artikel [Fet86] vom Entwickler persönlich, Herrn Dr. Fettweis, vorgestellt. Artikel [FM75] beschäftigt sich vertiefend mit der Thematik von Adaptoren.

Gazsi zeigt in [Gaz85], wie man einen elliptischen Filter in Form eines Lattice - Wellendigitalfilters relativ einfach (ohne Verwendung elliptischer Funktionen) anhand einer gegebenen Filterspezifikation berechnet. Als Ergebnis erhält man die Filterkoeffizienten für die Adaptoren.

[Frö08] bietet einen Überblick zur praktischen Implementierung von Wellendigitalfiltern in SystemC bzw. VHDL. [Ste00] zeigt speziell die Auswirkungen von Quantisierungen in diesen Filterstrukturen.

[Arr03] ist eine Art von Formelsammlung, die zur Berechnung der Koeffizienten von Lattice-Wellendigitalfiltern anhand der Übertragungsfunktion herangezogen werden kann bzw. es ist auch gezeigt, wie man umgekehrt anhand gegebener Koeffizienten die Übertragungsfunktion rekonstruiert.

[RMV88] gibt einen kompakten Überblick über die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten eines Allpassfilters.

[LL94] zeigt, wie man einen Allpassfilter zur Phasenlinearisierung anhand der Methode der kleinsten Quadrate entwirft.

[PKdASR08] beschreibt die bei der Gruppenlaufzeitkorrektur zeitkontinuierlicher elliptischer Filter mit Allpassfiltern entstehende Verschlechterung im transienten Verhalten und zeigt einen entsprechenden Verbesserungsansatz.

In [MFQP04] wird bei gegebenen Polstellen eines Tiefpassfilters eine Polplatzierung für kaskadierte Allpass-Strukturen zweiter Ordnung zur Gruppenlaufzeitkorrektur vorgestellt.

[AA06] zeigt, wie man mit Hilfe eines genetischen Algorithmus eine Gruppenlaufzeit-Equalisierung erreicht.

Ebenso wird in [ZWcZ⁺10] versucht, die Performance eines ADC-Systems zu verbessern, indem der Anti-Aliasing-Tiefpassfilter mit einem linearen Phasenverlauf ausgestattet werden soll. Dafür bietet sich eine Methode der Gruppenlaufzeitanpassung unter Verwendung des genetischen Algorithmus der Matlab-Toolbox an.

[JW] und [Kun88] stellen eine Methode vor, die lineare Lattice-Wellendigitalfilter erzeugen soll, in dem ein Zweig der zwei Allpass-Strukturen durch reine Verzögerungselemente ersetzt wird.

[Lee91] zeigt, wie man Amplituden- und Phasenbedingungen eines Lattice - Wellendigitalfilters approximiert, indem man ein nicht-minimalphasiges System in ein minimalphasiges und in eine Allpass-Struktur zerlegt. In [SAS99] wird diese Thematik in Hinblick auf die mathematischen Zusammenhänge und Algorithmen noch genauer beschrieben.

[Bah90] beschreibt die grundsätzliche Problematik der gleichzeitigen Amplituden- und Phasenapproximation. [FOHS88] findet eine Lösung dieses Problems für IIR-Filter.

[Weg78] verwendet zur Reduzierung des Hardwareaufwandes von speziellen Typen von Wellendigitalfiltern kleine Koeffizientenwortlängen, ohne die Sensitivität im Sperrband merklich zu verändern.

[JS94] zeigt allgemein, wie man IIR-Filter linearisiert, die aus einer Parallelschaltung zweier Allpass-Strukturen bestehen, was der LWDF-Struktur entspricht. Das Prinzip wird auch anhand eines elliptischen Filters fünfter Ordnung erklärt.

Die Quelle für Informationen und zum Download der Matlab-Toolbox für Lattice-Wellendigitalfilter von der TU Delft: [lwdb], [lwda]

[YK02] gibt einen ausführlichen Überblick zur Optimierung digitaler Filter im praktischen Sinne für unterschiedliche Filtertypen (auch LWDF werden behandelt).

[Hue03] ist ein kompaktes Skript zur Nachrichtentechnik und zeigt unter anderem die verschiedenen Modulationsverfahren.

[AM08] beschreibt Auswirkungen von Gruppenlaufzeit-Änderungen am Übertragungskanal auf digitale Modulationsverfahren.

Anhand dieses kurzen Überblicks zu den einzelnen Quellen zur schnellen Orientierung werden im nächsten Kapitel die Themen behandelt, die für diese Arbeit im speziellen relevant sind.

Teilweise wurden von mir einzelne Herleitungen zum Lattice-Filter eigenständig erarbeitet, da sie entweder in der Literatur nicht zu finden sind bzw. wichtige Schritte zum Verständnis einfach übersprungen werden.

2.1 Digitale Filter

Digitale Filter bestehen aus Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen. Es werden damit zeit- und wertdiskrete Signale verarbeitet, wofür die meist analog vorliegenden Signale mittels Analog-zu-Digital-Wandler (engl.: ADC) digitalisiert werden müssen.

Hier eine kleine Übersicht zu den Vor- und Nachteilen digitaler Filter:

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none">• keine Schwankungen durch Bauteiltoleranzen• keine Bauteilalterung• kein Abgleich notwendig• mögliche Realisierung spezieller Filterfunktionen	<ul style="list-style-type: none">• begrenzter Frequenzbereich• begrenzter Wertebereich• nichtlineare Effekte (Quantisierungsrauschen)• evtl. AD-Wandler, DA-Wandler notwendig

Man unterscheidet prinzipiell zwei Klassen von Digitalfiltern:

- Nicht-rekursive Filter: Filter ohne Rückkopplung
- Rekursive Filter: Filter mit Rückkopplung

Eine weitere Unterscheidungsmöglichkeit lässt sich anhand der Impulsantwort¹ treffen:

- FIR-Filter: Filter mit endlicher Impulsantwort
- IIR-Filter: Filter mit unendlicher Impulsantwort

In dieser Arbeit wird insbesondere die Thematik der Wellendigitalfilter näher beschrieben. Dabei handelt es sich immer um IIR-Filter.

¹ Die Impulsantwort eines digitalen Systems wird durch die Antwort auf einen Einheitsimpuls $\delta[n] = 1$ bei $n = 0$ beschrieben.

2.1.1 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion stellt den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang eines Systems dar. Sie wird im digitalen Kontext mittels Z-Transformation² als Quotient zweier Polynome mit den Koeffizienten a_i und b_i angeschrieben:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}} \quad (2.1)$$

Die Koeffizienten sind meistens reell, was bedeutet, dass konjugiert komplexe Pol- und Nullstellen vorhanden sein müssen. Der Zählergrad muss kleiner oder gleich dem Nennergrad sein, da ansonsten unrealisierbare Differentiator-Elemente entstehen würden.

Die Nullstellen des Zählerpolynoms bilden die Nullstellen des Filters während die Nullstellen des Nennerpolynoms die Polstellen des Filters ergeben. Anschaulich lässt sich das im Pol-/Nullstellenplan darstellen.

Werden die Brüche durch Multiplizieren auf der linken und rechten Seite der Gleichung entfernt, führt das zu dieser Darstellung:

$$Y(z) \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad (2.2)$$

Man sieht nun, dass $Y(z)$ mit den Koeffizienten a_i verknüpft ist und $X(z)$ entsprechend mit den Koeffizienten b_i . Ein Ausgangswert $y[n]$ ist somit nicht nur vom Eingangswert $x[n]$ und evtl. vergangenen Werten $x[n-1]$, $x[n-2]$, usw., sondern auch von vergangenen Ausgangswerten $y[n-1]$, $y[n-2]$, usw. abhängig. Dieser Zusammenhang führt automatisch zu einem IIR-Filter, da der Ausgangswert immer wieder in die Filterstruktur zurückgekoppelt wird. Es kann damit, wie bei jeder Rückkopplung, zu Instabilitäten kommen, insbesondere wenn aus einer Gegenkopplung eine Mitkopplung wird.

Tritt der Sonderfall auf, dass alle Koeffizienten a_i null sind (mit Ausnahme von a_0 , da zumindest ein $y[n]$ benötigt wird), spricht man von einem FIR-Filter. FIR-Filter sind automatisch stabil, da keine Rückkopplung vorhanden ist.

Man kann die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems grundsätzlich in zwei Anteile zerlegen. Das ist zum einen ein Betrag und zum anderen eine Phase, man spricht in der Darstellung auch von Amplituden- und Phasengang.

² Die Z-Transformation wandelt ein zeitdiskretes Signal im Zeitbereich in den Frequenzbereich um:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

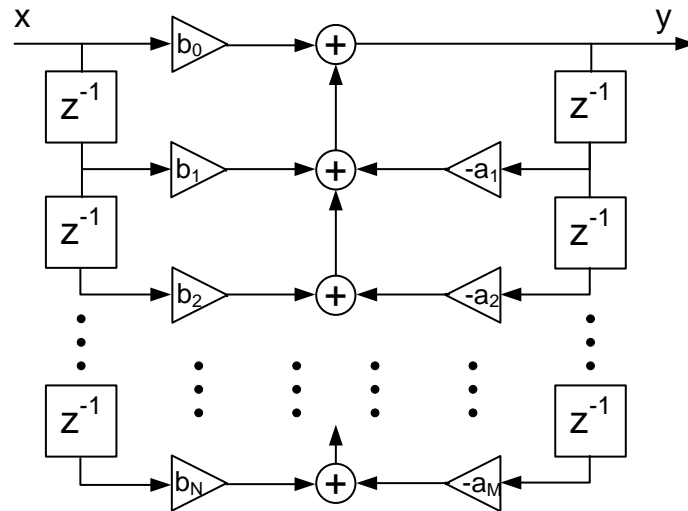


Abbildung 2.1: Grundstruktur eines Digitalfilters (Direktform I)

$$H(z) = |H(z)| \arg(H(z)) \quad (2.3)$$

Sowohl der Amplitudenverlauf als auch der Verlauf der Phase über die Frequenz sind charakteristisch für den jeweiligen Filtertyp.

FIR-Filter ermöglichen zum Beispiel die Realisierung einer gänzlich linearen Phase, wodurch es zu keinen Phasenverzerrungen kommt.

Ausgehend vom Pol-/Nullstellenplan kann auch der Betragsgang veranschaulicht werden. Er wird für $|z| = 1$ mit veränderlicher Frequenz gebildet. Dies entspricht einer Wanderung am Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn. Polstellen in der Nähe des Weges führen zu einer Betragsgang-Erhöhung, Nullstellen bewirken das Gegenteil. Unter der Voraussetzung des Vorhandenseins konjugiert komplexer Pol- und Nullstellen wiederholt sich das Spektrum 0 bis π zwischen π und 2π , allerdings ist es gespiegelt.

Stabilität

Um Stabilität eines digitalen LZI-Systems zu gewährleisten, muss folgendes gelten: Der Einheitskreis muss Teil der ROC (Region of Convergence) sein. Geht man von einem kausalen System aus, ist die ROC der Bereich außerhalb eines Kreises mit dem Radius der am weitesten vom Ursprung entfernten Polstelle.

Das bedeutet, dass alle Polstellen eines kausalen Systems innerhalb des Einheitskreises liegen müssen.

Bei FIR-Filtern ist die Stabilität automatisch gegeben, da sämtliche Polstellen im Ursprung des Einheitskreises ($|z| = 0$) liegen.

2.1.2 Elliptische Filter

Elliptische Filter (auch Cauer-Filter genannt) sind Filter, die bei gleicher Filterordnung den schnellsten Übergang vom Durchlassbereich in den Sperrbereich aufweisen. Sie besitzen eine oszillierende Betragsfunktion (Ripple), deren Amplitude individuell für Durchlass- und Sperrbereich definiert werden kann.

Ist der Ripple nur im Durchlassband vorhanden, so spricht man von einem Chebyshev Typ I - Filter, ist er nur im Sperrbereich zu sehen, ist es ein Chebyshev Typ II - Filter. Sind in beiden Bereichen keine Ripples vorhanden, handelt es sich um einen Butterworth - Filter.

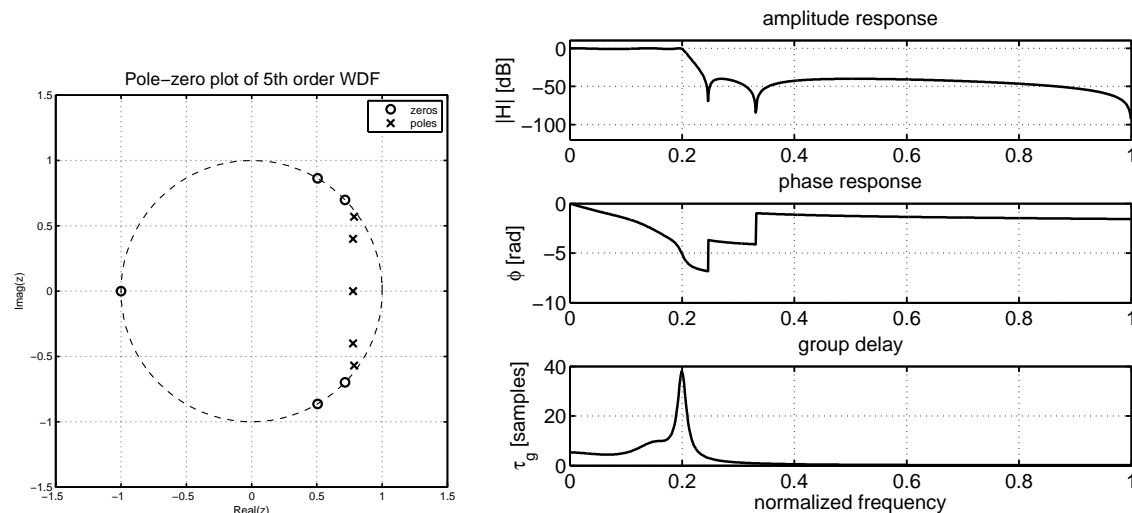


Abbildung 2.2: Digitaler elliptischer Filter (links: Pol-/Nullstellenplan; rechts: Amplituden-/Phasengang und Gruppenlaufzeit)

[ella]

Mathematische Grundlagen

Die Berechnung von elliptischen Filtern ist mitunter die schwierigste unter allen Filtertypen. Ausgangspunkt sind hier die “Rationalen elliptischen Funktionen”³ (siehe Gleichung 2.4 für gerade n).

³ Rationale Funktionen lassen sich als Quotient zweier Polynome darstellen.

$$R_n(\xi, x) = r_0 \frac{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}{\prod_{i=1}^n (x - x_{p_i})} \quad (2.4)$$

Die rationale elliptische Funktion schaut folgendermaßen aus:

$$R_n(\xi, x) = cd \left(n \frac{K(1/L_n)}{K(1/\xi)} cd^{-1}(x, 1/\xi), 1/L_n \right) \quad (2.5)$$

$$cd(z; k) = \frac{cn(z; k)}{dn(z; k)} \quad (2.6)$$

Eine bestimmte rationale elliptische Funktion wird durch die Ordnung n und einem Selektivfaktor ξ definiert.

$cd(\cdot)$ ist die abgeleitete Jacobische elliptische Funktion, $K(\cdot)$ ist ein elliptisches Integral erster Art, $L_n(\xi)$ ist der Diskriminierungsfaktor.

Im Folgenden werden nur einige Grundlagen angeführt, um in etwa zu verstehen, wie die Oszillationen zustandekommen. Genauere mathematische Beschreibungen sind der einschlägigen Literatur zu entnehmen.

Der Betragsgang eines Tiefpassfilters ist folgendermaßen definiert:

$$G_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\xi, \omega/\omega_0)}} \quad (2.7)$$

R_n ist die rationale elliptische Funktion, ε ist der Ripple-Faktor und ξ der Selektivfaktor. ω_0 definiert die Grenzfrequenz.

ε definiert den Ripple im Durchlassbereich, die Kombination aus ε und ξ bestimmen den Ripple im Sperrbereich.

Nun einige Eigenschaften:

- Im Durchlassbereich variiert die elliptische Funktion zwischen 0 und 1, daher ist der Betrag der Übertragungsfunktion zwischen 1 und $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$
- Im Sperrbereich variiert die elliptische Funktion zwischen unendlich und einem Diskriminierungsfaktor L_n . Der Betrag liegt daher zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 L_n^2}}$

Die Grenzfälle, die zur Abgrenzung anderer Filtertypen führen:

- $\xi \rightarrow \infty$: Chebyshev-Polynom: Chebyshev Typ I Filter mit Ripple-Faktor ε
- $\xi \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, damit $\varepsilon R_n(\xi, 1/\omega_0) = 1$: Butterworth-Filter

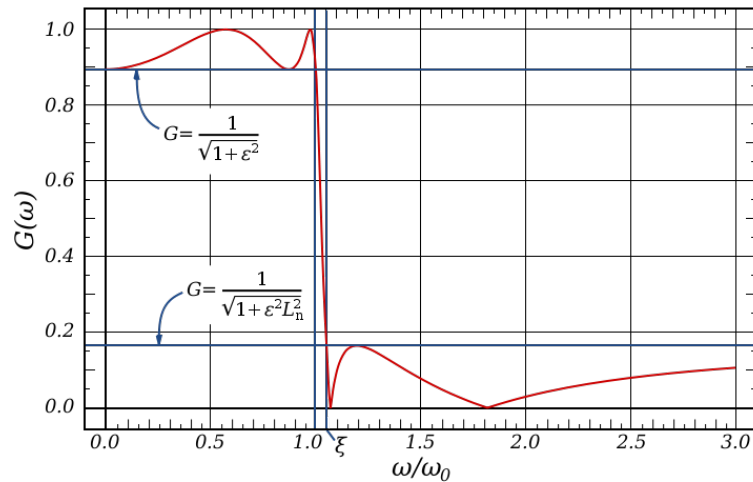


Abbildung 2.3: Amplitudengang: Elliptischer Tiefpassfilter ($\epsilon = 0.5$; $\xi = 1.05$)
 URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Elliptic_Filter_Response_\(4th_Order\).svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Elliptic_Filter_Response_(4th_Order).svg)

- $\xi \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, damit $\xi\omega_0 = 1$ und $\epsilon L_n = \alpha$: Chebyshev Typ II Filter

Für die Berechnung wird im vorliegenden Fall auf die Formelsammlung von Gazsi für elliptische Wellendigitalfilter zurückgegriffen.

[ellb]

2.1.3 Gruppenlaufzeit

Die Gruppenlaufzeit eines Filters ist definiert als die negative erste Ableitung des Phasenverlaufs nach der Kreisfrequenz ω .

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (2.8)$$

Sie gibt an, welche Laufzeit ein Signal durch das System hat. Hat das System einen linearen Phasenverlauf (z.B. FIR-Filter: $\phi(\omega) = -k\omega$), so ist die Gruppenlaufzeit konstant, d.h. alle Frequenzen haben dieselbe Durchlaufzeit.

[ptg]

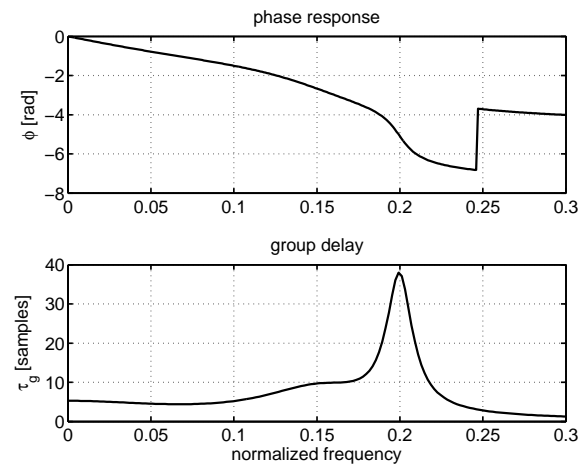


Abbildung 2.4: Phasenverlauf und Gruppenlaufzeit

2.1.4 Bilinear-Transformation

Die Transformation einer zeitkontinuierlichen Systemdarstellung in die zeitdiskrete Form erfolgt mittels Bilinear-Transformation⁴.

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \quad (2.9)$$

Wenn man den Exponentialausdruck in eine Taylor-Reihe entwickelt, erhält man:

$$z = 1 + \frac{sT}{1!} + \frac{(sT)^2}{2!} + \dots \quad (2.10)$$

Es werden nur die ersten zwei Terme verwendet⁵, was für z folgendes ergibt:

$$z = e^{sT} \cong \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}} \quad (2.11)$$

Umgeformt nach s :

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.12)$$

Wichtige Eigenschaften der Bilinear-Transformation sind:

⁴ Anmerkung: Es gibt natürlich auch noch andere Methoden (z.B. Impulsinvarianz), für die Thematik der Wellendigitalfilter ist aber nur die Bilinear-Transformation geeignet.

⁵ Genaugenommen wird durch diese Vereinfachung die Realität verfälscht, praktischerweise spielt das eine untergeordnete Rolle.

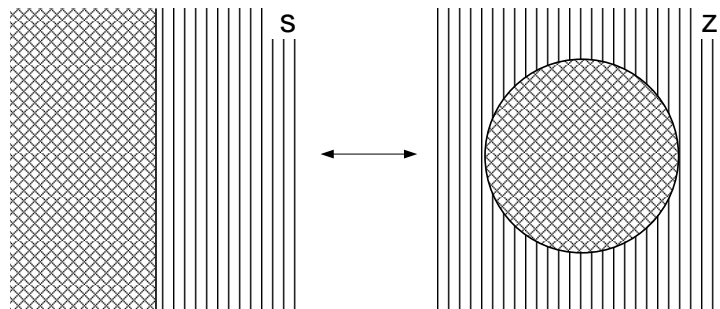


Abbildung 2.5: Bilinear-Transformation

- Die linke s -Ebene wird in der z -Ebene in den Einheitskreis transformiert (imaginäre Achse wird auf dem Einheitskreis abgebildet)
- Aus einem stabilen minimalphasigen kontinuierlichem System wird ein stabiles minimalphasiges diskretes System

In WDF-Strukturen wird die Variable s durch die dimensionslose komplexe Größe ψ ersetzt⁶:

$$\psi = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.13)$$

Kombiniert man Gleichung 2.12 und 2.13:

$$s = \frac{2}{T} \psi \quad (2.14)$$

[Fet86]

2.2 Wellendigitalfilter

2.2.1 Allgemeines

Wellendigitalfilter wurden erstmals 1970 von Alfred Fettweis beschrieben. Ihre Besonderheit beruht auf der Tatsache, dass sie von analogen Referenzfiltern hergeleitet werden. Man verwendet hier nicht Spannungs- bzw. Stromentitäten, sondern benutzt eine Beschreibung mittels Wellen (standardmäßig Spannungs- bzw. Stromwellen), wie sie auch bei der Tor-Beschreibung in der Hochfrequenztechnik Anwendung finden. Es handelt sich vom Typ her immer um IIR-Filter.

Sie sind generell komplexer in der Realisierung und Implementierung als "Standardfilter" (Direktform-Filter). Die Komplexität ist weniger das Problem der Umwandlung eines

⁶ Der Faktor $\frac{2}{T}$ ist in den Widerstandswerten zur Berechnung der Adaptor-Koeffizienten zu finden

gegebenen Filters in eine WDF-Struktur an sich, als vielmehr darin zu sehen, dass es viele unterschiedliche Realisierungsmöglichkeiten mit jeweiligen Vor- und Nachteilen gibt und es gilt, die passende Struktur für das jeweilige Problem zu finden.

Um einen digitalen Filter zu realisieren, müssen im wesentlichen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- KEINE verzögerungsfreien Schleifen dürfen vorhanden sein
- totale Verzögerung ist ein Vielfaches von T_s

Dieser im Grunde logische Umstand ist deshalb wichtig und wird hier erwähnt, da es beispielsweise bei der klassischen Beschreibung eines analogen Filters mit Spannungs- und Stromtitäten in Form von Differentialgleichungen und Diskretisierung derselben es genau zu solch unrealisierbaren verzögerungsfreien Schleifen kommt, weshalb zwingend auf die Wellenbeschreibung ausgewichen werden muss.

Ein Hauptvorteil dieser Filter liegt darin, dass die positiven Eigenschaften von analogen Filtern in die digitale Welt transferiert werden können. So ist zum Beispiel ein Bauteilwert in der analogen Welt mit einer entsprechenden Toleranz beaufschlagt, und kann somit vom gewünschten Wert mehr oder weniger stark abweichen, was sich aber nicht unbedingt störend auf den Verlauf der Übertragungsfunktion auswirken muss. In Analogie dazu werden in der digitalen Welt anstatt der Bauteilwerte Koeffizienten verwendet, die, bedingt durch eine begrenzte Anzahl an Bits zur Darstellung, quantisiert werden müssen. Wellendigitalfilter sind aus diesem Grund unempfindlicher als Direktform-IIR-Filter gegenüber einer Koeffizienten-Quantisierung.

WDF sind nachgewiesenermaßen stabil am Ausgang, d.h. sie haben weder “Small scale limit-cycles” (verursacht durch Quantisierung) noch “Large scale limit-cycles” (verursacht durch Überlauf), solange sie passiv sind. Praktischerweise wird das dadurch erreicht, dass die arithmetischen Operationen in den Adaptoren exakt ausgeführt werden und die Ausgänge dieser Strukturen vor einem Überlauf geschützt sind. [Fet86]

Beginnend mit der Wellenbeschreibung von Eintoren wird nachfolgend die Thematik der Wellendigitalfilter erörtert. Als spezielle Realisierungsform wird das Lattice-Wellendigitalfilter näher betrachtet, da es wahrscheinlich die beliebteste Variante der Implementierung in digitalen Schaltkreisen ist, da es bezogen auf Kosten/Ressourcenaufwand und Nutzen die besten Eigenschaften unter allen Filtertypen aufweist.

2.2.2 Beschreibung: Eintore/Zweitore

Eintore

Am Beginn ist ein einfaches Eintor angeführt, das in Form von Wellen mit Streuparametern beschrieben wird. Die nachfolgend dargestellten Gleichungen enthalten weitestgehend komplexe Größen.

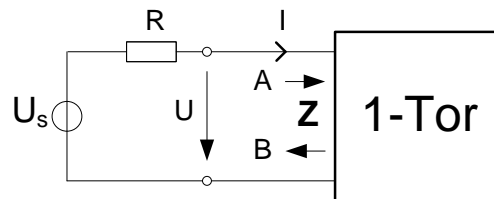


Abbildung 2.6: Eintor

Jedes Tor ist mit einem Torabschlusswiderstand R terminiert. Die Beschreibung erfolgt durch vor- und zurücklaufende Spannungswellen (Variablen A und B) im stationären Zustand⁷ mit folgenden Gleichungen:

$$A = U + RI = U_s \quad (2.15)$$

$$B = U - RI \quad (2.16)$$

Werden die Gleichungen 2.15 und 2.16 addiert bzw. subtrahiert, können folgende Zusammenhänge hergestellt werden:

$$U = \frac{A + B}{2} \quad (2.17)$$

$$I = \frac{A - B}{2R} \quad (2.18)$$

Anhand der Überlagerungen aus vor- und rücklaufender Welle lassen sich so die Spannung bzw. der Strom bestimmen.

Des weiteren kann ein Reflexionsfaktor angegeben werden, indem die rück- und vorlaufende Welle zueinander ins Verhältnis gesetzt werden:

$$S = \frac{B}{A} = \frac{U - RI}{U + RI} \quad (2.19)$$

⁷ Das System ist eingeschwungen für $s = -\sigma \pm j\omega$ mit $\sigma = 0$; Variablen werden mit Großbuchstaben bezeichnet

Als weitere Größe wird die sogenannte charakteristische Impedanz Z eingeführt, die die Eingangsimpedanz des Tors darstellt:

$$U = ZI \quad (2.20)$$

Die Gleichungen 2.19 und 2.20 können ineinander eingesetzt werden:

$$S = \frac{B}{A} = \frac{U - RI}{U + RI} = \frac{ZI - RI}{ZI + RI} = \frac{Z - R}{Z + R} \quad (2.21)$$

Der Reflexionsfaktor, der in diesem Fall zugleich Übertragungsfunktion ist, ist demnach von der charakteristischen Impedanz und vom Terminierungswiderstand abhängig.

Zweitore

Dieselbe Prozedur wird nun für ein Zweitor durchgeführt:

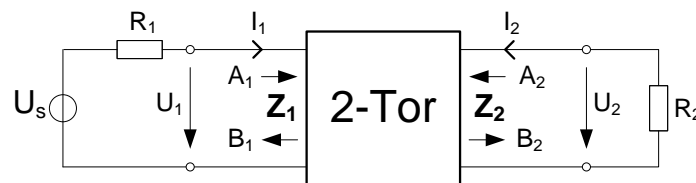


Abbildung 2.7: Zweitor

Für Zwei- oder Mehritore empfiehlt es sich, auf die Matrix-Schreibweise zu wechseln:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Die einzelnen Elemente der Streumatrix können in weiterer Folge definiert werden:

$$S_{11} = \left. \frac{B_1}{A_1} \right|_{A_2=0} \quad \text{Reflexionsfaktor am Tor 1}$$

$$S_{22} = \left. \frac{B_2}{A_2} \right|_{A_1=0} \quad \text{Reflexionsfaktor am Tor 2}$$

$$S_{12} = \left. \frac{B_1}{A_2} \right|_{A_1=0} \quad \text{Rückwirkungsfaktor von Tor 2 auf Tor 1}$$

$$S_{21} = \left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_2=0} \quad \text{Rückwirkungsfaktor von Tor 1 auf Tor 2}$$

Die Reflexionsfaktoren lassen sich nun mit Hilfe der Gleichungen 2.15, 2.16 und 2.20 anschreiben:

$$S_{11} = \left. \frac{B_1}{A_1} \right|_{A_2=0} = \frac{U_1 - R_1 I_1}{U_1 + R_1 I_1} = \frac{Z_1 I_1 - R_1 I_1}{Z_1 I_1 + R_1 I_1} = \frac{Z_1 - R_1}{Z_1 + R_1} \quad (2.23)$$

$$S_{22} = \left. \frac{B_2}{A_2} \right|_{A_1=0} = \frac{U_2 - R_2 I_2}{U_2 + R_2 I_2} = \frac{Z_2 I_2 - R_2 I_2}{Z_2 I_2 + R_2 I_2} = \frac{Z_2 - R_2}{Z_2 + R_2} \quad (2.24)$$

Ebenso die Rückwirkungs faktoren:

$$S_{12} = \left. \frac{B_1}{A_2} \right|_{A_1=0} = \frac{U_1 - R_1 I_1}{U_2 + R_2 I_2} = \frac{Z_1 I_1 - R_1 I_1}{Z_2 I_2 + R_2 I_2} \quad (2.25)$$

$$S_{21} = \left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_2=0} = \frac{U_2 - R_2 I_2}{U_1 + R_1 I_1} = \frac{Z_2 I_2 - R_2 I_2}{Z_1 I_1 + R_1 I_1} \quad (2.26)$$

Betrachtet man die Wirkleistung, die in das Zweitor fließt, so gilt unter Zuhilfenahme der Gleichungen 2.17 und 2.18 als Ausdruck von Spannungswellen:

$$P_W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{U_1 I_1^* + U_2 I_2^*\} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{R_1} (|A_1|^2 - |B_1|^2) + \frac{1}{R_2} (|A_2|^2 - |B_2|^2) \right] \quad (2.27)$$

[Fet86]; [Frö08]

2.2.3 Grundelemente

Da Wellendigitalfilter aus analogen Referenzfiltern hergeleitet werden, werden nun die drei wesentlichen Bauteile, die in analogen Filterstrukturen zu finden sind, beschrieben. Das sind der ohmsche Widerstand, die Spule und der Kondensator. Bei den vorgestellten Bauteilen handelt es sich um Zweipole (Eintore).

Ohmscher Widerstand

Der ohmsche Widerstand hat einen reellen Widerstand R_R .

$$X_R = R_R \quad (2.28)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.21 und dem Ersetzen der Torimpedanz Z durch den Widerstandswert X_R :

$$S = \frac{B}{A} = \frac{Z - R}{Z + R} = \left. \frac{X_R - R}{X_R + R} \right|_{R=R_R} = \frac{R_R - R_R}{R_R + R_R} = 0 \quad (2.29)$$

Sofern gewährleistet ist, dass die Torimpedanz gleich dem Terminierungswiderstand ist, ergibt sich für einen ohmschen Widerstand folgende Übertragungsfunktion:

$$S = 0 \quad (2.30)$$

Das bedeutet, ein ohmscher Widerstand verhält sich als Wellendigitalfilter wie ein reflexionsfreies Element, er entspricht einer Senke.

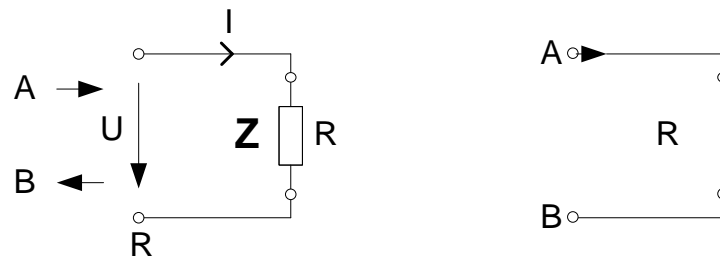


Abbildung 2.8: Ohmscher Widerstand als Wellenbeschreibung und digitale Realisierung

Die Spule (Induktivität)

$$X_L = sL = \psi R_L \quad (2.31)$$

Die Variable s wird durch die Gleichung der Bilinear-Transformation 2.14 ersetzt.

$$R_L = \frac{2L}{T_s} \quad (2.32)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.21 und 2.31:

$$S = \frac{B}{A} = \frac{Z - R}{Z + R} = \frac{X_L - R}{X_L + R} \Big|_{R=R_L} = \frac{\psi R_L - R_L}{\psi R_L + R_L} = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \Big|_{\psi = \frac{z-1}{z+1}} = -z^{-1} \quad (2.33)$$

Auch hier muss gewährleistet sein, dass die Torimpedanz gleich dem Terminierungswiderstand ist. Die digitale Übertragungsfunktion lautet:

$$S = -z^{-1} \quad (2.34)$$

In der Übertragungsfunktion selbst kommt der Wert des Wellenwiderstandes nicht vor. Das liegt an der Anpassung der Torimpedanz, wodurch sich die Widerstände in der Gleichung wegekürzen.

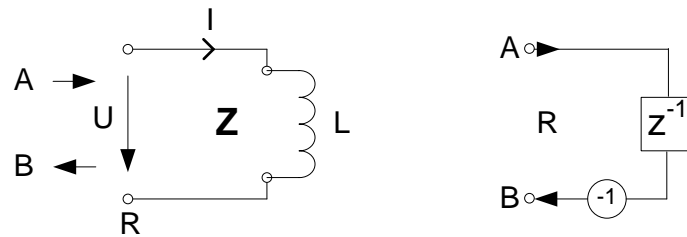


Abbildung 2.9: Induktivität als Wellenbeschreibung und digitale Realisierung

Der Kondensator (Kapazität)

$$X_C = \frac{1}{sC} = \frac{R_C}{\psi} \quad (2.35)$$

Die Variable s wird wieder durch die Gleichung der Bilinear-Transformation 2.14 ersetzt.

$$R_C = \frac{T_s}{2C} \quad (2.36)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.21 und 2.35:

$$S = \frac{B}{A} = \frac{Z - R}{Z + R} = \frac{X_C - R}{X_C + R} \Big|_{R=R_C} = \frac{\frac{R_C}{\psi} - R_C}{\frac{R_C}{\psi} + R_C} = \frac{1 - \psi}{1 + \psi} \Big|_{\psi = \frac{z-1}{z+1}} = z^{-1} \quad (2.37)$$

Übertragungsfunktion:

$$S = z^{-1} \quad (2.38)$$

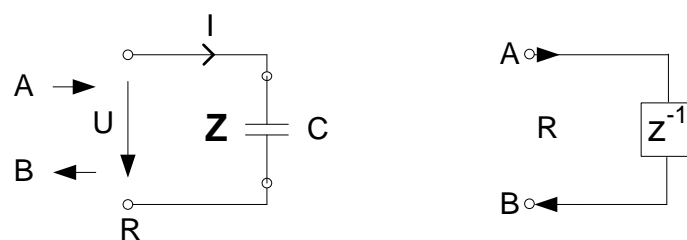


Abbildung 2.10: Kapazität als Wellenbeschreibung und digitale Realisierung

2.2.4 Spezielle Abschlüsse

Im Folgenden sei noch angeführt, wie sich offene bzw. geschlossene Pfade (Leerlauf bzw. Kurzschluss) auf die Übertragungsfunktion auswirken.

Leerlauf

Im Leerlauffall gilt:

$$I = 0$$

Gleichung 2.18 ist demnach:

$$I = \frac{A - B}{2R} = 0$$

Nach Umformung erhält man:

$$S = 1 \tag{2.39}$$

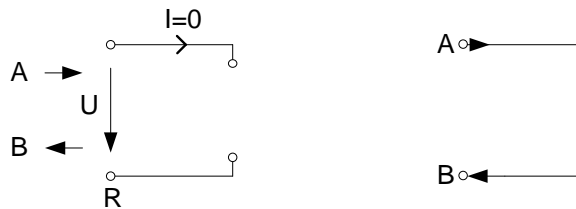


Abbildung 2.11: Leerlauf als Wellenbeschreibung und digitale Realisierung

Kurzschluss

Im Kurzschlussfall gilt:

$$U = 0$$

Gleichung 2.17 ist demnach:

$$U = \frac{A + B}{2} = 0$$

Nach Umformung erhält man:

$$S = -1 \tag{2.40}$$

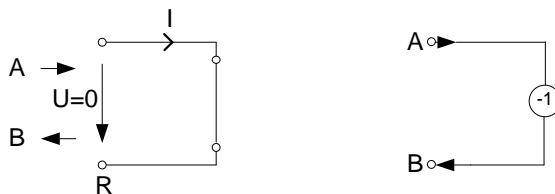


Abbildung 2.12: Kurzschluss als Wellenbeschreibung und digitale Realisierung

2.2.5 Zusammenschaltung von Toren: Adaptoren

Werden Tore miteinander verbunden (Parallel- oder Serienschaltung), benötigt man spezielle Strukturen, die aus Addierern und Multiplizierern bestehen, um die unterschiedlichen Torwiderstände aneinander anzupassen. Diese Strukturen werden Adaptoren genannt.

2-Tor-Parallel-Adaptor

Im vorliegenden Beispiel werden zwei Tore in Parallelschaltung miteinander verbunden. Es gibt selbstverständlich je nach Anzahl verschalteter Elemente beliebig höherwertige Adaptoren, in den gängigen WDF-Realisierungsformen werden aber maximal 3-Tor-Adaptoren verwendet.

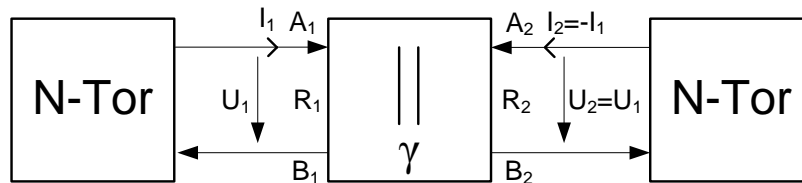


Abbildung 2.13: 2-Tor-Parallel-Adaptor

Wesentlich ist, dass beim Zusammenschalten die **Kirchhoffschen Gesetze** (Knoten- und Maschenregel) gültig sein müssen. Das bedeutet für die Parallelschaltung, dass die Spannung an allen Toren dieselbe sein muss und nach der Knotenregel die Summe aller zu- und abfließenden Ströme null ist:

$$U_1 = U_2 \quad (2.41)$$

$$I_1 = -I_2 \quad (2.42)$$

Gleichungen 2.17 und 2.18 eingesetzt, wobei die erste Gleichung mit $\frac{1}{R_1}$ erweitert und mit der zweiten Gleichung addiert wird:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \cdot \frac{1}{R_1} \quad (2.43)$$

$$\frac{A_1 - B_1}{R_1} = \frac{B_2 - A_2}{R_2} \quad (2.44)$$

Damit ist B_1 elimiert:

$$A_1 \frac{2}{R_1} = A_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + B_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.45)$$

Umformen der Gleichung nach B_2 und Ändern der Darstellung auf der rechten Seite für A_1 :

$$B_2 = \frac{A_1 \frac{2}{R_1} - A_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = A_1 \frac{2R_2}{R_1 + R_2} - A_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} = A_1 + cA_1 - A_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.46)$$

Der Faktor c wird berechnet:

$$c = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} - 1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.47)$$

Wird c eingesetzt, führt das zu folgendem Ausdruck:

$$B_2 = A_1 + A_1 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} - A_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.48)$$

Einführung des γ -Faktors (Koeffizienten):

$$\gamma = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.49)$$

Das führt letztlich zu der folgenden Darstellung:

$$B_2 = A_1 + \gamma(A_2 - A_1) \quad (2.50)$$

$$B_1 = A_2 + \gamma(A_2 - A_1) \quad (2.51)$$

Man erkennt, dass hier nur ein Faktor vorkommt (γ), der die Eingänge miteinander verknüpft. Im Koeffizienten selbst befinden sich die zwei Widerstände, die an dem jeweiligen Tor definiert sind. Für die Realisierung der oberen beiden Gleichungen werden ein Multiplizierer und drei Addierer benötigt.

Für eine übersichtliche Darstellung sei wieder die Matrix-Darstellung angeführt:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 + \gamma \\ 1 - \gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Werden N-Tore Adaptoren verwendet, sind zwei Dinge wesentlich:

- Wird ein sogenannter "abhängiger" Port eingeführt, kann der entsprechende Koeffizient eliminiert werden.

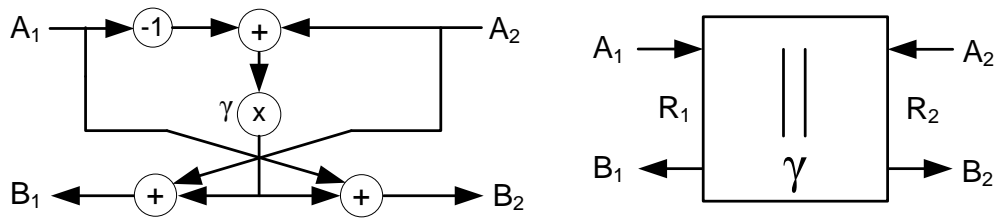


Abbildung 2.14: Signallaufplan eines 2-Tor-Parallel-Adaptors

- Meist ist es notwendig, dass zumindest ein Tor eines Adaptors reflexionsfrei ist, um keine verzögerungsfreien Schleifen zu erhalten. Man kann sich leicht vorstellen, dass es beim Zusammenschalten zweier Adaptoren zu einer solchen Schleifenbildung kommen kann, da Adaptoren nur aus Addierern und Multiplizierern bestehen, aber keine Verzögerungselemente beinhalten. Um eine Reflexionsfreiheit beim vorliegenden Beispiel zu erreichen, müsste der Koeffizient null sein. Wie man auch an den Gleichungen 2.50 und 2.51 sehen kann, wären im reflexionsfreien Fall ($\gamma = 0$) die jeweiligen Ausgänge von den dazugehörigen Eingängen unabhängig.⁸

Um den Rahmen durch ins Detail gehende Einzelheiten und etwaigen Besonderheiten hier nicht zu sprengen, sei für eine ausführliche Beschreibung von Adaptoren auf die Artikel von Fettweis verwiesen. Ebenso wird auf die Herleitung weiterer Adaptoren verzichtet, da diese in der LWDF-Struktur und damit in dieser Arbeit sowieso nicht verwendet werden.

Um allerdings das nachfolgende Beispiel zu verstehen, seien noch die Gleichungen für 3-Tor Adaptoren angeführt.

3-Tor-Parallel-Adaptor

Beschreibung mittels Streumatrix:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - 1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 - 1 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$\gamma_\nu = \frac{2G_\nu}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (2.54)$$

mit $G_\nu = \frac{1}{R_\nu}$ und $\nu = 1, 2, 3$

⁸ Im Fall eines Zweitors ist eine Reflexionsfreiheit eines Tors natürlich nicht sinnvoll, da das Signal einfach zum jeweils anderen Port durchgeleitet wird.

Bildet man die Summe aller Koeffizienten, so erhält man:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2$$

3-Tor-Seriell-Adaptor

Beschreibung mittels Streumatrix:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - 1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 - 1 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$\gamma_\nu = \frac{2R_\nu}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.56)$$

mit $R_\nu = \frac{1}{G_\nu}$ und $\nu = 1, 2, 3$

Summe aller Koeffizienten:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2$$

[Fet86]; [FM75]

2.2.6 Standard-WDF-Filterrealisierung: Ein kleines Beispiel

Anhand eines kurzen, einfachen Beispiels soll eine Standard-Realisierung einer WDF-Struktur ausgehend von einer analogen Schaltung gezeigt werden. Man betrachte den in Abbildung 2.15 dargestellten Filter.

Die einzelnen Reaktanzen werden durch die dazugehörige WDF-Übertragungsfunktion ersetzt (Verzögerungselement mit bzw. ohne Invertierung des Signals) und der jeweilige ohmsche Bauteilwiderstand wird berechnet (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5). Serienschaltungen werden durch einen Seriell-Adaptor verknüpft, Parallelschaltungen entsprechend durch einen Parallel-Adaptor. Die Widerstände zwischen den einzelnen Adaptoren ergeben sich aus den Bauteilwiderständen (Induktivität bzw. Kondensator) und den bekannten Regeln der Serien- und Parallelschaltung.

Die frei endenden Verbindungen im linken unteren Teil jedes Blocks zeigen die Reflexionsfreiheit des entsprechenden Tors an. Das ist, wie schon erwähnt, zur Verhinderung einer Schleifenbildung notwendig. Der zugehörige Tor-Koeffizient muss damit eins sein, was in den Matrizen der Gleichungen 2.53 und 2.55 kontrolliert werden kann.

Ein weiterer Koeffizient kann „verdeckt“ realisiert werden (er wird durch einen anderen Koeffizienten beschrieben), womit letztlich statt drei Koeffizienten nur mehr ein Koeffizient nötig ist (Annahme: Port 3 ist reflexionsfrei [$\gamma_3 = 1$]; γ_2 lässt sich durch γ_1 ausdrücken):

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1; \gamma_2 = 1 - \gamma_1$$

Wenn man nun für Port 3 z.B. die rücklaufende Spannungswelle anschreibt:

$$B_3 = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + 0 = \gamma_1 A_1 + (1 - \gamma_1) A_2 = A_2 - \gamma_1 (A_2 - A_1)$$

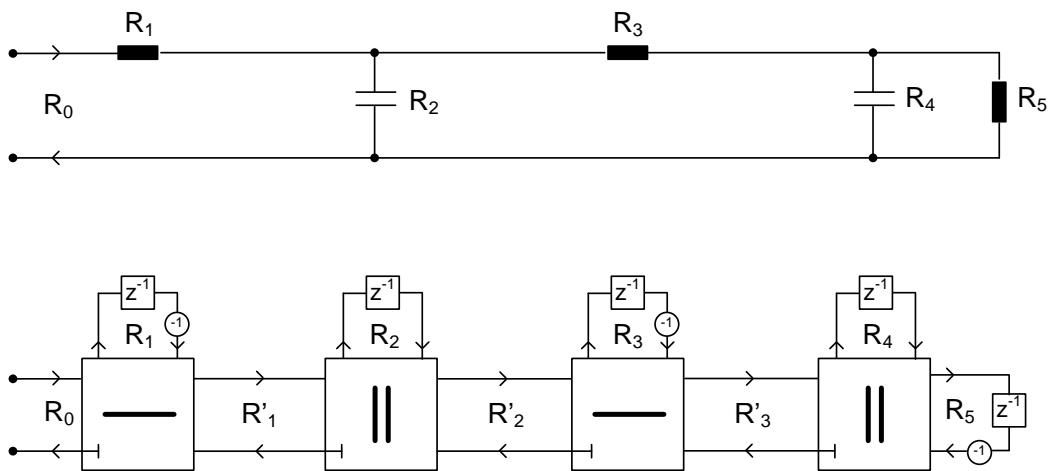


Abbildung 2.15: Filter-Beispiel (oben: analog; unten: WDF-Ladder-Netzwerk)

Bestimmung der Teilwiderstände:

$$R_3' = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}; R_2' = R_3 + R_3'; R_1' = \frac{R_2 R_2'}{R_2 + R_2'}; R_0 = R_1 + R_1'$$

Berechnung der Adaptor-Koeffizienten für die insgesamt vier 3-Tor-Adaptoren: (Annahme: Als abhängige Ports werden die oberen Tore definiert)

$$\gamma_4 = \frac{G_5}{G_4 + G_5} \text{ (ganz rechter 3-Tor-Parallel-Adaptor)}$$

$$\gamma_3 = \frac{R_3'}{R_3 + R_3'}$$

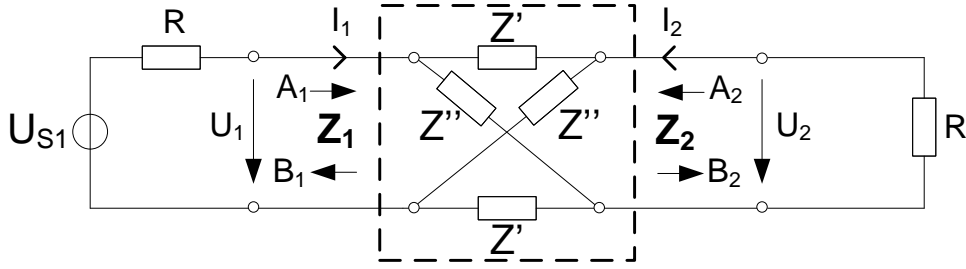
$$\gamma_2 = \frac{G_2'}{G_2 + G_2'}$$

$$\gamma_1 = \frac{R_1'}{R_1 + R_1'} \text{ (ganz linker 3-Tor-Seriell-Adaptor)}$$

[Fet86]; [FM75]

2.2.7 Lattice-Filter

Im Folgenden werden die Zusammenhänge eines **analogen** Lattice-Filters (Abbildung 2.16) erklärt. Er dient als Basis für den Lattice-Wellendigitalfilter.


Abbildung 2.16: Analoger Lattice-Filter

Die Lattice-Struktur (innerhalb des strichlierten Quadrats) hat einige Besonderheiten. Lattice-Filter sind verlustlose Filter, d.h. es wird keine Wirkleistung im Filter umgesetzt. Das bedeutet, der Filter selbst besteht nur aus Reaktanzen (Kapazität bzw. Induktivität) und beinhaltet keine ohmschen Anteile.

Die Terminierungswiderstände an den zwei Toren sind gleich groß: $R_1 = R_2 = R$
 Die zwei Tore sind zueinander symmetrisch, was bedeutet: $Z_{11} = Z_{22}$; $Z_{12} = Z_{21}$

Zunächst sind die Z-Parameter des Vierpols angeführt:

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{Z' + Z''}{2}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{\frac{I_2}{2} (Z'' - Z')}{I_2} = \frac{Z'' - Z'}{2}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z' + Z'' & Z'' - Z' \\ Z'' - Z' & Z' + Z'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Man erhält einfache Zusammenhänge zwischen den Z-Parametern und den Lattice-Impedanzen:

$$Z' = Z_{11} - Z_{12} \quad (2.58)$$

$$Z'' = Z_{11} + Z_{12} \quad (2.59)$$

Um auf die Übertragungsfunktion des Lattice-Filters zu kommen, werden folgende Ansätze auf Basis von Wirkleistungen gemacht:

$$P_2 = \frac{|U_2|^2}{R}$$

P_2 ist jene Leistung, die am Ausgang im ohmschen Widerstand R umgesetzt wird.

$$P_a = \frac{|U_{S1}|^2}{4R}$$

P_a stellt die maximale Leistung dar, die die Quelle liefern kann. In diesem Fall sind Eingangswiderstand (Innenwiderstand der Quelle) und Ausgangswiderstand gleich groß, was für eine Serienschaltung bedeutet, dass die maximale Leistung am Ausgangswiderstand umgesetzt wird. Diese Leistung ist aber nur halb so groß wie die Gesamtleistung, da im Innenwiderstand der Quelle die andere Hälfte der Leistung umgesetzt wird.

Setzt man die beiden Leistungen ins Verhältnis kommt man zu einer ersten Übertragungsfunktion:

$$\frac{P_2}{P_a} = 4 \frac{|U_2|^2}{|U_{S1}|^2} = t^2$$

$$t = 2 \frac{U_2}{U_{S1}} = 2H$$

H ist die Übertragungsfunktion, die Variable t ist mit Ausnahme des Faktors 2 dasselbe. Nachdem t niemals größer als eins werden kann, bedeutet das für die Übertragungsfunktion H :

$$|H|_{\max} = \frac{1}{2}$$

Der Reflexionsfaktor ist folgendermaßen definiert:

$$|\rho|^2 = \frac{P_a - P_2}{P_a} = 1 - |t|^2 \quad (2.60)$$

Dies führt zur sogenannten Feldtkeller-Gleichung⁹:

$$|\rho|^2 + |t|^2 = 1 \quad (2.61)$$

Der Z-Parameter Z_{21} wird nochmals etwas anders angeschrieben:

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_2}{U_{S1}} \frac{U_{S1}}{I_1} = \frac{t}{2} (R + Z_1) \quad (2.62)$$

Um Z_1 bzw. Z_{21} zu bestimmen, muss auch der Abschlusswiderstand $R_2 = R$ mitberücksichtigt werden. Ich betrachte dazu den Lattice-Filter und den Widerstand getrennt voneinander, bilde für die zwei Komponenten die Z-Matrix, transformiere sie jeweils in eine Kettenmatrix A , wobei die Matrizen anschließend miteinander multipliziert und wieder rücktransformiert werden.

$$Z_L = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}; \quad Z_R = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

⁹ Im Inneren eines Reaktanzfilters wird keine Wirkleistung umgesetzt, daher ist die einfallende Wirkleistung gleich der reflektierten Wirkleistung addiert mit der zum Verbraucher übertragenden Wirkleistung. [Ulb] S.329

Um aus einer Z -Matrix eine A -Matrix zu generieren, bieten sich Umrechnungstabellen an [zwe]:

$$Z \rightarrow A: A = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det(Z)}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$$

$$A = A_{LR} = A_L \cdot A_R = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\det(Z_L)}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} + \frac{\det(Z_L)}{Rz_{21}} & \frac{\det(Z_L)}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} + \frac{z_{22}}{Rz_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$Z_{LR} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det(A)}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Rz_{11} + \det(Z_L)}{R + z_{22}} & \cdots \\ \frac{Rz_{21}}{R + z_{22}} & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Nur die erste Spalte der Matrix Z_{LR} ist hier von Bedeutung. Somit können für t die bisher unbekanntenen Größen (Z_{21} und $Z_1 = Z_{11}$) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} t &= 2 \frac{Z_{21}}{R + Z_1} = 2 \frac{\frac{Rz_{21}}{R + z_{22}}}{R + \frac{Rz_{11} + \det(Z_L)}{R + z_{22}}} = \\ &= 2 \frac{Rz_{21}}{R(R + z_{22}) + Rz_{11} + \det(Z_L)} = 2 \frac{Rz_{21}}{R^2 + Rz_{22} + Rz_{11} + z_{11}^2 - z_{21}^2} \\ t &= 2 \frac{Rz_{21}}{(R + z_{11})(R + z_{11}) - z_{21}^2} = 2 \frac{Rz_{21}}{(R + z_{11} - z_{21})(R + z_{11} + z_{21})} \end{aligned}$$

Ersetzen von z_{11} und z_{21} durch die Lattice-Impedanzen Z' und Z'' mit den Gleichungen 2.58 und 2.59:

$$t = 2 \frac{R \frac{Z'' - Z'}{2}}{(R + Z')(R + Z'')}$$

Anwendung der Partialbruchzerlegung führt zu:

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{R - Z'}{R + Z'} - \frac{R - Z''}{R + Z''} \right] = \frac{1}{2} [A_1(s) - A_2(s)] \quad (2.65)$$

Bemerkenswert ist, dass in Gleichung 2.65 eine gegebene Übertragungsfunktion t durch eine Differenz zweier Allpassfunktionen $A_1(s)$ und $A_2(s)$ dargestellt werden kann. Wird anstatt von t der Reflexionsfaktor ρ verwendet, wird aus der Differenz eine Summe von zwei Allpassfunktionen (siehe Gleichung 2.66).

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{R - Z'}{R + Z'} + \frac{R - Z''}{R + Z''} \right] = \frac{1}{2} [A_1(s) + A_2(s)] \quad (2.66)$$

Im soeben erklärten Fall ist die Ordnung der zwei Allpassfunktionen jeweils eins, man spricht auch von einem Grundelement. Üblicherweise werden mehrere dieser Grundelemente kaskadiert, wodurch auch die Ordnung ansteigt.

[Sch00]

Streumatrix-Beschreibung

Grundsätzlich gibt es für die Beschreibung von Lattice-Wellendigitalfiltern zwei Typen von Streumatrizen. Eine ist auf Spannungswellen ausgerichtet (wie sie auch im Kapitel zu den Ein- bzw. Zweitoren verwendet wurde), die andere betrachtet Leistungszusammenhänge (also prinzipiell die quadrierten Spannungswellen). Wie sich allerdings mathematisch zeigen lässt, sind beide ineinander überführbar und tragen daher letztlich die selben Eigenschaften, sofern man gewisse Voraussetzungen erfüllt.

Im Kapitel der Beschreibung eines Zweitores wurde mit Spannungswellen die Gleichung zur im Filter umgesetzten Wirkleistung (Gleichung 2.27) angeschrieben. Da ein Lattice-Filter verlustlos ist, wird innerhalb des Filters keine Wirkleistung umgesetzt, man kann daher die entsprechende Gleichung null setzen und erhält unter der Voraussetzung, dass die Terminierungswiderstände gleich groß sind:

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = |B_1|^2 + |B_2|^2 \quad (2.67)$$

Wenn man des weiteren davon ausgeht, dass an Tor 2 keine Quelle wirkt ($A_2 = 0$), und die Gleichung durch $|A_1|^2$ dividiert, ergibt sich unter Zuhilfenahme der Streuparameter aus Gleichung 2.22:

$$1 = S_{11}^2 + S_{21}^2 \quad (2.68)$$

Das ist, wie schon in der Beschreibung des Lattice-Filters angeführt, wieder die Feldtkeller - Gleichung.

Die nachfolgende Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen der spannungsbezogenen und leistungsbezogenen Streumatrix (S' und S) dar, R ist eine Diagonalmatrix bestehend aus den Terminierungswiderständen R_1 und R_2 :

$$S = R^{-1/2} S' R^{1/2} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Letztlich folgt daraus, sofern R_1 und R_2 gleich groß sind:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Aufgrund der Symmetrie der zwei Tore ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$S_{11} = S_{22} \tag{2.71}$$

$$S_{21} = S_{12} \tag{2.72}$$

Gleichung 2.65 zeigt, dass die Übertragungsfunktion von Tor 1 auf Tor 2 (Übertragungs-Streuparameter S_{21}) durch eine Differenz zweier Allpassfunktionen (nachfolgend S' und S'' genannt) dargestellt wird, im Gegenzug wird die Reflexions-Übertragungsfunktion (entspricht dem Reflexions-Streuparameter S_{11}) durch eine Summe von zwei Allpassfunktionen realisiert. Das führt daher zu folgendem Zusammenhang:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{S' + S''}{2} \tag{2.73}$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{S'' - S'}{2} \tag{2.74}$$

Unter Verwendung von 2.73, 2.74 und den Streumatrixgleichung 2.22, ergibt das gleichungsmäßig bzw. wie in Abbildung 2.17 dargestellt:

$$2B_1 = S'(A_1 - A_2) + S''(A_1 + A_2) \tag{2.75}$$

$$2B_2 = S'(A_2 - A_1) + S''(A_1 + A_2) \tag{2.76}$$

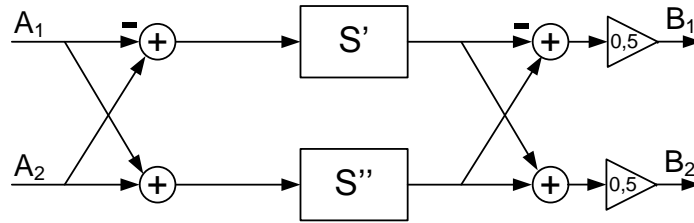


Abbildung 2.17: LWDF-Blockschaltbild

Wenn man des weiteren davon ausgeht, dass kein Signal an Tor 2 eingespeist wird ($A_2 = 0$), vereinfacht das den Ausdruck:

$$2B_1 = (S' + S'')A_1 \tag{2.77}$$

$$2B_2 = (S'' - S')A_1 \tag{2.78}$$

Formt man die Gleichung um lässt sich in weiterer Folge der Ausdruck mit den zwei Allpassfunktionen als Quotient zweier Polynome anschreiben:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{S' + S''}{2} = \frac{h(s)}{g(s)} \tag{2.79}$$

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{S'' - S'}{2} = \frac{f(s)}{g(s)} \tag{2.80}$$

S' und S'' sind Allpassfunktionen, daher können sie wie in Gleichung 2.81 und 2.82 angeschrieben werden.

$$S'(s) = \frac{g_1(-s)}{g_1(s)} \quad (2.81)$$

$$S''(s) = \frac{g_2(-s)}{g_2(s)} \quad (2.82)$$

Eine Filterfunktion kommt dadurch zustande, indem es durch Phasendifferenzen zwischen den beiden Teil-Ausgangssignalen der zwei Allpassfilter und nachfolgender Addition zu einer Dämpfung kommt. Die Ausgänge verhalten sich dabei zueinander invers. Das bedeutet, wenn B_1 Tiefpassverhalten aufweist, bildet B_2 einen Hochpass. Wird ein Ausgang in den Eingang der zweiten Teilfunktion rückgeführt (Kaskade beider Teilfunktionen), lässt sich ein Bandpassverhalten realisieren. Üblicherweise wird nur ein Ausgang verwendet.

Aus 2.79, 2.80, 2.81 und 2.82 kommt man zu folgenden Zusammenhängen:

$$g(s) = g_1(s)g_2(s) \quad (2.83)$$

$$h(s) = \frac{g_1(-s)g_2(s) + g_1(s)g_2(-s)}{2} \quad (2.84)$$

$$f(s) = \frac{g_1(s)g_2(-s) - g_1(-s)g_2(s)}{2} \quad (2.85)$$

$g(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom vom Grad N , was der Filterordnung entspricht. Von den Polynomen $h(s)$ und $f(s)$ muss im Falle eines Tiefpassfilters eines gerade und das andere ungerade sein, sodass in Summe eine ungerade Ordnung entsteht.

Werden die Gleichungen 2.79 und 2.80 mit 2.83, 2.84 und 2.85 erweitert:

$$\frac{h(s)}{g(s)} = \frac{S' + S''}{2} = \frac{g_1(-s)g_2(s) + g_1(s)g_2(-s)}{2g_1(s)g_2(s)} \quad (2.86)$$

$$\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{S'' - S'}{2} = \frac{g_1(s)g_2(-s) - g_1(-s)g_2(s)}{2g_1(s)g_2(s)} \quad (2.87)$$

Wird die Feldtkeller-Gleichung durch $|S_{21}(s)|^2$ dividiert, führt das zu:

$$|S_{11}(s)|^2 + |S_{21}(s)|^2 = 1$$

$$\frac{1}{|S_{21}(s)|^2} = 1 + \frac{|S_{11}(s)|^2}{|S_{21}(s)|^2}$$

Der Bruch auf der rechten Seite beinhaltet die sogenannte charakteristische Funktion:

$$C(s) = \frac{S_{11}(s)}{S_{21}(s)} = \frac{\frac{h(s)}{g(s)}}{\frac{f(s)}{g(s)}} = \frac{h(s)}{f(s)} = \frac{g_1(-s)g_2(s) + g_1(s)g_2(-s)}{g_1(s)g_2(-s) - g_1(-s)g_2(s)} = \frac{S' + S''}{S'' - S'} \quad (2.88)$$

$$\frac{1}{|S_{21}(s)|^2} = 1 + |C(s)|^2$$

Es lässt sich weiters eine Betriebsdämpfung definieren:

$$a(s) = -20 \log (|S_{21}(s)|) \quad (2.89)$$

$S_{21}(s)$ kann durch die charakteristische Funktion ersetzt werden:

$$a(s) = 10 \log (1 + |C(s)|^2)$$

Die Nullstellen des Polynoms $g(s)g(-s)$ entstehen, wenn $C^2(s) = 1$.

Als Lösung ergibt sich: $C(s) = \pm 1$

Daraus folgt für $C(s) = -1$ [$h(s) = -f(s)$], dass die Polynome $g_1(s)$ und $g_2(-s)$ konstruiert werden können und für $C(s) = 1$ [$h(s) = f(s)$] lassen sich die Polynome $g_2(s)$ und $g_1(-s)$ bestimmen.

[Fet86], [Gaz85]

2.2.8 Lattice-Wellendigitalfilter

Im vorherigen Kapitel wurde der Lattice-Filter durch Streuparameter beschrieben. Nun geht es eigentlich nur mehr darum, von der analogen Welt in die digitale Domäne zu wechseln (Stichwort: Bilinear-Transformation).

Zuvor wird aber noch ein Überblick zur LWDF-Struktur angeführt.

Lattice-Wellendigitalfilter haben den Vorteil einer effizienten Realisierung und Implementierung in digitalen Schaltkreisen. Pro Filterordnung kommt man mit einem Multiplizierer (entspricht einem Filterkoeffizienten) und einem Verzögerungselement aus. Praktischerweise ersetzt man zudem in integrierten Schaltkreisen (ICs) die Multiplizierer durch CSD¹⁰-formatierte Koeffizienten im Horner Schema (nur Schiebe- und Addier-Funktionen nötig), womit die Multiplizierer entfallen.

Bei den Adaptoren wählt man die auf den Koeffizientenwert optimierte Version aus. Der Wert eines Koeffizienten kann prinzipiell zwischen -1 und $+1$ liegen. Diesen Bereich

¹⁰Die CSD-Repräsentation kommt mit einer minimalen Anzahl an Einsen aus (kanonisch).

kann man in vier gleich große Intervalle aufteilen, wobei es für jeden Bereich eine spezielle Realisierungsform gibt, die es ermöglicht, dass die tatsächlich implementierten Koeffizienten letztlich nur einen Wert zwischen 0 und 0,5 aufweisen, außerdem findet damit eine optimale Skalierung für sinusförmige Signale statt. [Ste00]

Wesentlich für die LWDF-Struktur ist, dass man von einem **verlustlosen analogen Filter** ausgeht. Das bedeutet, dass der analoge Referenzfilter nur aus Reaktanzen besteht und in ihm keine Wirkleistung umgesetzt wird.

Um alle Spezifikationen einzuhalten, benötigt der Lattice-Wellendigitalfilter eine höhere Genauigkeit der Filterkoeffizienten als z.B. eine Ladder-Struktur bzw. andere WDF-Strukturen. Der Grund liegt im Sensitivitätsverhalten dieser Struktur. Während die Sensitivität im Durchlassbereich niedrig ist, ist sie im Sperrbereich verhältnismäßig hoch, wodurch die Sperrdämpfung durch niedrigere Koeffizientengenauigkeiten mitunter nicht mehr die Spezifikation einhält.

Dieser Nachteil wird durch den Vorteil, dass die Anzahl an Multiplizierern die Filterordnung nicht übersteigt, kompensiert. Auch die Anzahl an Addierern wird im LWDF erheblich reduziert. Ebenso bietet die Zweigstruktur eine hohe Modularität und die Möglichkeit der Parallelisierung in der digitalen Signalverarbeitung. [Fet86]

Die Realisierung erfolgt durch eine Kaskade aus Allpass-Funktionen erster und zweiter Ordnung. Da es sich um eine Lattice-Struktur handelt, welche im vorigen Teilkapitel hergeleitet wurde, wird die Übertragungsfunktion durch Addition bzw. Subtraktion zweier Allpass-Funktionen realisiert.

Ein Beispiel eines LWDF ist in Abbildung 2.18 dargestellt.

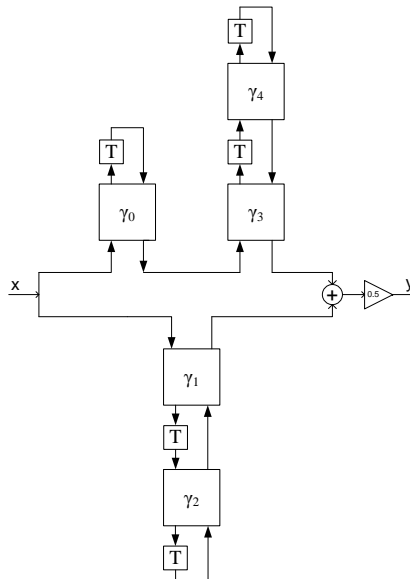


Abbildung 2.18: Lattice-WDF 5. Ordnung

Der obere Zweig in Abbildung 2.18 besteht aus einer Allpass-Struktur 1. Ordnung und einer Allpass-Struktur 2. Ordnung, während der untere Teil nur aus einer Allpass-Struktur 2. Ordnung besteht.

Es gibt einige Einschränkungen im Aufbau, die berücksichtigt werden müssen. So ist es unter der Annahme der Verwendung reeller Koeffizienten zum Beispiel bei Tiefpassfiltern (und auch bei Hochpassfiltern) nur möglich, ungerade Filterordnungen zu realisieren. Bei Verwendung von komplexen Koeffizienten sind auch gerade Filterordnungen möglich.

Wichtig ist, dass es einen Unterschied von eins gibt, was die Ordnung in den einzelnen Zweigen betrifft, um insbesondere im Sperrbereich eines Tiefpassfilters sicherzustellen, dass es keinen Spektralbereich gibt, in dem der Betragsgang wieder die Durchlassdämpfung erreichen könnte. Das schaut für Bandpass- und Bandstop-Filter entsprechend anders aus.

Allpass 1. Ordnung

Eine Allpassfunktion erster Ordnung schaut in der s -Darstellung so aus:

$$S(s) = \frac{-s + B_0}{s + B_0} \quad (2.90)$$

B_0 ist ein reeller Wert und bildet im s -Bereich die Nullstelle auf der positiven reellen Achse bzw. die Polstelle auf der negativen Achse, sofern man von einem stabilen System ausgeht ($B_0 > 0$).

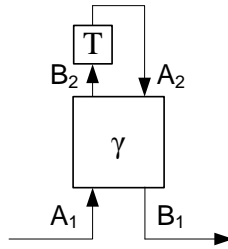
Die Variable s wird, wie in der Beschreibung der Bilinear-Transformation angegeben, bei Wellendigitalfilter durch die Variable ψ ersetzt, anschließend wird die Bilinear-Transformation durchgeführt ($\psi = \frac{z-1}{z+1}$)¹¹:

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{-\frac{z-1}{z+1} + B_0}{\frac{z-1}{z+1} + B_0} = \frac{-z + 1 + B_0(z + 1)}{z - 1 + B_0(z + 1)} = \frac{z(-1 + B_0) + (1 + B_0) \frac{z^{-1}}{(1+B_0)}}{z(1 + B_0) + (-1 + B_0) \frac{z^{-1}}{(1+B_0)}} = \\ &= \frac{-\frac{1-B_0}{1+B_0} + z^{-1}}{1 - \frac{1-B_0}{1+B_0} z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Im nächsten Schritt wird die Übertragungsfunktion für die WDF-Allpassfunktion gebildet.

Der rechteckige Block in Abbildung 2.19 ist nichts anderes, als der vorher beschriebene 2-Tor-Parallel-Adaptor, wobei nun das Tor 2 mit einem Verzögerungselement überbrückt

¹¹ Anmerkung: Der Faktor $\frac{2}{T}$ in der Bilinear-Transformation geht in den Widerstandswert ein, der wiederum für die Berechnung der Filterkoeffizienten in den Adaptoren benötigt wird.


Abbildung 2.19: Allpass-Struktur erster Ordnung

ist. Das entspricht, wie schon bei den Grundelementen erklärt, einem Kondensator in der analogen Welt.

Die zu Abbildung 2.19 gehörende Beschreibung lautet:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 + \gamma \\ 1 - \gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$A_2 = z^{-1}B_2$$

Nach einigen Umformungen erhält man die Übertragungsfunktion einer WDF-Allpass-Struktur erster Ordnung:

$$B_1 = -\gamma A_1 + (1 + \gamma) z^{-1} B_2$$

$$B_2 = (1 - \gamma) A_1 + \gamma z^{-1} B_2$$

$$B_2 = A_1 \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma z^{-1}}$$

$$B_1 = -\gamma A_1 + (1 + \gamma) z^{-1} A_1 \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma z^{-1}}$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-\gamma + z^{-1}}{1 - \gamma z^{-1}} \quad (2.93)$$

Die Gleichung 2.91 wird mit der Übertragungsfunktion gleichgesetzt:

$$\frac{-\frac{1-B_0}{1+B_0} + z^{-1}}{1 - \frac{1-B_0}{1+B_0} z^{-1}} = \frac{-\gamma + z^{-1}}{1 - \gamma z^{-1}}$$

Dies führt zu folgendem Ergebnis für den WDF-Adaptor-Koeffizienten:

$$\gamma = \frac{1 - B_0}{1 + B_0} \quad (2.94)$$

Allpass 2. Ordnung

Für eine Allpassfunktion zweiter Ordnung gilt dieser Ausdruck:

$$S(s) = \frac{s^2 - A_i s + B_i}{s^2 + A_i s + B_i} \quad (2.95)$$

Wie im vorigen Fall, wird auch hier wieder s durch ψ ersetzt und schließlich die Bilinear-Transformation angewendet, was zu folgendem Ausdruck führt:

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - A_i \frac{z-1}{z+1} + B_i}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + A_i \frac{z-1}{z+1} + B_i} \cdot \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2} = \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1 - A_i(z^2 - 1) + B_i(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 2z + 1 + A_i(z^2 - 1) + B_i(z^2 + 2z + 1)} = \\ &= \frac{z^2(1 - A_i + B_i) + z(-2 + 2B_i) + 1 + A_i + B_i}{z^2(1 + A_i + B_i) + z(-2 + 2B_i) + 1 - A_i + B_i} \cdot \frac{z^{-2} \frac{1}{(1+A_i+B_i)}}{z^{-2} \frac{1}{(1+A_i+B_i)}} = \\ &= \frac{\frac{1-A_i+B_i}{1+A_i+B_i} + z^{-1} \left(\frac{-2+2B_i}{1+A_i+B_i}\right) + z^{-2}}{1 + z^{-1} \left(\frac{-2+2B_i}{1+A_i+B_i}\right) + z^{-2} \left(\frac{1-A_i+B_i}{1+A_i+B_i}\right)} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Auch diesmal erfolgt wieder die Erstellung der Übertragungsfunktion für die WDF-Allpassfunktion.

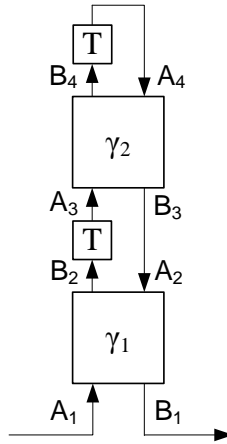


Abbildung 2.20: Allpass-Struktur zweiter Ordnung

Die zu Abbildung 2.20 gehörenden Beschreibungen:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & 1 + \gamma_1 \\ 1 - \gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_2 & 1 + \gamma_2 \\ 1 - \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$A_2 = B_3$$

$$A_3 = z^{-1}B_2$$

$$A_4 = z^{-1}B_4$$

Das führt zu folgender Übertragungsfunktion zweiter Ordnung:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-\gamma_1 - \gamma_2(1 - \gamma_1)z^{-1} + z^{-2}}{1 - \gamma_2(1 - \gamma_1)z^{-1} - \gamma_1z^{-2}} \quad (2.99)$$

Gleichsetzen von Gleichung 2.96 und der soeben erhaltenen Gleichung:

$$\frac{\frac{1-A_i+B_i}{1+A_i+B_i} + z^{-1} \left(\frac{-2+2B_i}{1+A_i+B_i} \right) + z^{-2}}{1 + z^{-1} \left(\frac{-2+2B_i}{1+A_i+B_i} \right) + z^{-2} \left(\frac{1-A_i+B_i}{1+A_i+B_i} \right)} = \frac{-\gamma_1 - \gamma_2(1 - \gamma_1)z^{-1} + z^{-2}}{1 - \gamma_2(1 - \gamma_1)z^{-1} - \gamma_1z^{-2}}$$

Der erste Koeffizient kann direkt abgelesen werden:

$$\gamma_1 = \frac{A_i - B_i - 1}{A_i + B_i + 1} \quad (2.100)$$

Den zweiten Koeffizienten erhalten wir über eine Umformung:

$$\begin{aligned} -\gamma_2(1 - \gamma_1) &= \frac{-2 + 2B_i}{1 + A_i + B_i} \\ \gamma_2 &= \frac{-2 + 2B_i}{1 + A_i + B_i} \frac{1}{\gamma_1 - 1} = 2 \frac{B_i - 1}{1 + A_i + B_i} \frac{1 + A_i + B_i}{-2 - 2B_i} \\ \gamma_2 &= \frac{1 - B_i}{1 + B_i} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Koeffizienten-Berechnung

Um die LWDF-Adaptor-Koeffizienten aus einer gegebenen Übertragungsfunktion eines Tiefpassfilters berechnen zu können, geht man wie folgt vor:

$$H(s) = \frac{h(s)}{f(s)} = \frac{\text{Zählerpolynom}}{(s - p_0) \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (s - p_i)(s - p_i^*)} \quad (2.102)$$

Durch Zusammenfassen von zueinander konjugiert komplexen Polstellen kommt man zu diesem Ausdruck:

$$\begin{aligned}(s - p_i) \cdot (s - p_i^*) &= s^2 - s(p_i + p_i^*) + p_i p_i^* = \\ &= s^2 - 2\operatorname{Re}(p_i)s + |p_i|^2 = s^2 + A_i s + B_i\end{aligned}$$

Hier nochmal die Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{\text{Zählerpolynom}}{(s - B_0) \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (s^2 + A_i s + B_i)}$$

Um zu gewährleisten, dass A_i positiv ist, müssen die Polstellen in der linken s -Ebene liegen, wonach für ein stabiles System gelten muss: $\operatorname{Re}(p_i) < 0$.

Die Polstelle p_0 liegt auf der reellen Achse und benötigt eine Allpass-Struktur erster Ordnung.

Die Berechnung der Adaptor-Koeffizienten für das LWDF-System anhand der Variablen A_i und B_i in der s -Übertragungsfunktion wurde im Abschnitt 2.2.8 erklärt und ist hier nochmals zusammengefasst.

$$B_0 = p_0 \tag{2.103}$$

Berechnung des ersten Koeffizienten:

$$\gamma_0 = \frac{1 - B_0}{1 + B_0} \tag{2.104}$$

Berechnung der weiteren Koeffizienten:

$$A_i = 2 |\operatorname{Re}(p_i)| \tag{2.105}$$

$$B_i = |\operatorname{Re}(p_i)|^2 + |\operatorname{Im}(p_i)|^2 = |p_i|^2 \tag{2.106}$$

$$\gamma_{2i-1} = \frac{A_i - B_i - 1}{A_i + B_i + 1} \tag{2.107}$$

$$\gamma_{2i} = \frac{1 - B_i}{1 + B_i} \tag{2.108}$$

Die Pol-Paare werden abwechselnd in den oberen und unteren Zweig der Allpass-Filterstruktur aufgeteilt. Der Grund für diese alternierende Platzierung liegt in der Lösung der charakteristischen Funktion im Zusammenhang mit der rationalen elliptischen Funktion.

[Arr03]; [Gaz85]

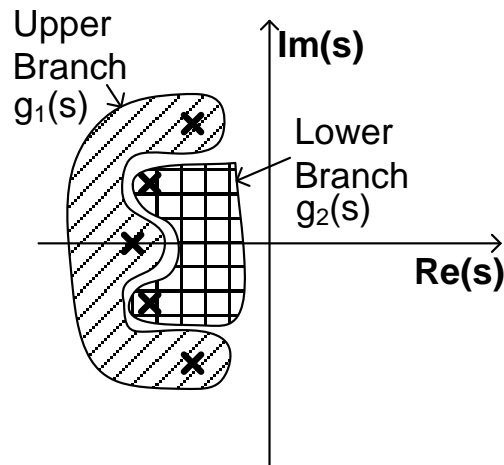


Abbildung 2.21: Polaufteilung für LWDF 5. Ordnung

2.3 Gruppenlaufzeitkorrektur

Zunächst ist es wichtig zu definieren, in welchen Bereich eine Linearisierung des Phasenverlaufs vorgenommen werden soll. Meistens wird versucht, eine lineare Phase bis zur Grenzfrequenz anzustreben, es gibt aber auch Publikationen, die sich beispielsweise auf die erste Hälfte des Durchlassbereichs beschränken. Insbesondere die elliptischen Filter haben die störende Eigenschaft, dass die Gruppenlaufzeit vor dem Erreichen der Grenzfrequenz besonders stark ansteigt.

Es werden nun unterschiedliche Konzepte zur Linearisierung des Phasenverlaufs vorgestellt.

Wichtig zu erwähnen ist, dass es **keine geschlossene Lösung** für das Design linearphasiger Lattice-Wellendigitalfilter gibt. Man ist somit immer in irgendeiner Weise auf numerische Optimierungsverfahren angewiesen. [JW]

2.3.1 Allpass

Das gängige Verfahren zur Phasenkorrektur besteht in der Verwendung eines Allpassfilters, der nach dem elliptischen Filter platziert wird. Da die Betragsfunktion eines Allpassfilters konstant ist, ändert sich am Verlauf der Betragsfunktion des Gesamtsystems nichts. Der Phasenverlauf des Allpasses kann je nach Polplatzierung entsprechend verändert werden.

Generell gilt:

Je höher die Ordnung des Allpass-Filters ist, umso präziser kann ein bestimmter Phasenverlauf nachgebildet werden.

Allgemeine Übertragungsfunktion eines digitalen Allpasses:

$$H_A(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-(N-i)}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (2.109)$$

Zähler und Nenner bestehen aus je einem Polynom, wobei die Polynome zueinander gespiegelt sind.

Wird z^{-N} aus dem Zähler herausgehoben:

$$H_A(z) = \frac{z^{-N} \sum_{i=0}^N a_i z^{+i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (2.110)$$

Das Nennerpolynom wird nun als $D(z)$ bezeichnet:

$$D(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \quad (2.111)$$

Nun kann die Übertragungsfunktion des Allpasses kompakt angeschrieben werden:

$$H_A(z) = \frac{z^{-N} D\left(\frac{1}{z}\right)}{D(z)} \quad (2.112)$$

Um ein stabiles System zu erhalten, müssen sämtliche Polstellen innerhalb des Einheitskreises in der z -Ebene liegen. Das bedeutet für das gespiegelte Polynom automatisch, dass sämtliche Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen.

In Abbildung 2.22 sind beispielhaft die Pol- und Nullstellen eines Allpasses dargestellt.

Der Phasenverlauf des Zählers ist folgendermaßen definiert:

$$b_N(\omega) = N\omega T - b_D(\omega) \quad (2.113)$$

Betrachtet man den Allpassfilter im Gesamten:

$$b_A(\omega) = b_N(\omega) - b_D(\omega) \quad (2.114)$$

$$b_A(\omega) = N\omega T - 2b_D(\omega) \quad (2.115)$$

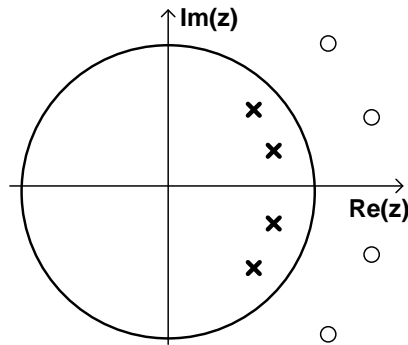


Abbildung 2.22: Pol-/Nullstellenplan eines Allpass-Filters

Die Phasenantwort eines stabilen Allpasssystems ist eine monoton abnehmende Funktion von ω . Damit ist die Gruppenlaufzeit τ_g immer positiv.

$$\int_0^{\pi} \tau_g(\omega) d\omega = N\pi \quad (2.116)$$

Gleichung 2.116 zeigt, dass die Phasenänderung der Allpassfunktion für ω zwischen 0 und π genau $-N\pi$ beträgt.

Beträgt der Phasenwinkel am Ende eines Durchlaufs von 0 bis π weniger als der vorgegebene Wert, kann man davon ausgehen, dass auch Polstellen außerhalb des Einheitskreises liegen und das System damit instabil ist.

$$b_A(\omega) = N\omega T - 2 \arctan \frac{\sum_{i=0}^N a_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^N a_i \cos(i\omega T)} \quad (2.117)$$

Die Differenzierung des Phasenverlaufs führt schließlich zur Gruppenlaufzeit:

$$\tau_{gA}(\omega) = NT - 2\tau_{gD}(\omega) \quad (2.118)$$

[Sch00], [RMV88]

Prinzipiell kann man hier auf zwei Arten einen Allpassfilter erstellen. Einerseits ist es möglich, die Stützstellen eines gewünschten Phasenverlaufs anzugeben und die Allpasskoeffizienten zu berechnen. Eventuell bietet es sich nach dieser Prozedur an, das Ergebnis weiter zu optimieren. Andererseits kann man von Beginn an mittels Optimierungsverfahren versuchen, das Problem zu lösen bzw. eine Vorgabe von platzierten Polstellen für einen nachfolgenden Algorithmus machen.

Allpass: Pol-Platzierung

In [MFQP04] wird bei gegebenen Polstellen eines Tiefpassfilters eine Polplatzierung für kaskadierte Allpass-Strukturen zweiter Ordnung zur Gruppenlaufzeitkorrektur vorgestellt. Im vorliegenden Fall wird eine konstante Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich angestrebt, die sich an das Gruppenlaufzeit-Maximum des gegebenen Filters richtet.

Die Vorgehensweise ist dabei, grob beschrieben, folgendermaßen:

1. Vorgabe einer Allpassfilter-Ordnung (Vielfache von zwei)
2. Übergabe der zwei Pole des Tiefpassfilters, deren Winkel, gemessen von der reellen Achse, am größten ist
3. Der Bereich zwischen diesen zwei Polen (und eventuell ein kleiner Offset darüber hinaus, je nach Strategie) wird entsprechend der vorgegebenen Allpassfilter-Ordnung für die Polplatzierung des Allpasses in äquidistante Abschnitte aufgeteilt - damit sind die Polwinkel definiert
4. Nach einer Abfrage, bei der das Gruppenlaufzeitmaximum eine Rolle spielt, wird evtl. eine zweite Strategie für die Platzierung ausgewählt, und die erste verworfen
5. Der Polbetrag wird anhand einer angegebenen Formel berechnet

Anschließend wird empfohlen, einen Optimierungsalgorithmus zu durchlaufen, welcher auf der Suche nach einem lokalem Minimum ist, und das Ergebnis im Sinne eines linearen Phasenverlaufs noch weiter optimieren soll. Insbesondere sollen Oszillationen im Phasengang möglichst reduziert werden.

2.3.2 Optimierungsverfahren

Als weitere Methode sollen Optimierungsprobleme im Sinne einer Suche nach globalen Minimas für die Gruppenlaufzeitkorrektur definiert und gelöst werden (z.B. mit Hilfe heuristischer Algorithmen [genetischer Algorithmus]).

Genetischer Algorithmus

Verfahren, die auf dem genetischen Algorithmus basieren, nutzen Evolutionsmechanismen, die auch in den einzelnen Chromosomen einer Spezies in Form von zufälligen, genetischen Veränderungen stattfinden.

Grundsätzlich werden im genetischen Zyklus durch Zufallsmechanismen wie Mutationen oder Crossover aus einer Chromosomenpopulation (das kann zum Beispiel wie im vorliegenden Fall ein Koeffizientenvektor eines digitalen Filters sein) neue Generationen generiert.

Anschließend wird eine Kostenfunktion für jedes einzelne neue Chromosom berechnet und diejenigen, die einen niedrigeren Wert als die vorangegangenen Chromosomen in der Vorgeneration ergeben, werden für die nächste Generation selektiert (analog zu Charles Darwin: “surviving of the fittest“). Ein kleinerer Anteil an Chromosomen der Neugeneration wird komplett zufällig neu generiert.

Der Algorithmus ist zu Ende, wenn eine bestimmte vorgegebene Anzahl an Populationen erreicht wird bzw. eine Serienanzahl unproduktiver Populationen überschritten wird. Das beste Chromosom wird als Lösung ausgegeben.

Wichtig ist, dass man darauf achtet und die Eingaben so macht, dass der Algorithmus konvergiert bevor er beendet ist.

Die verwendeten genetischen Veränderungsoperationen werden mit einer Wahrscheinlichkeit angegeben (z.B. wie wahrscheinlich ist es, dass eine Mutation in der nächsten Generation eintritt). Klassischerweise werden zudem während der Algorithmuslaufzeit sogenannte Kontrollfaktoren für die maximale Parameteränderung neuer Generationen immer kleiner gewichtet. So kann ein Kontrollfaktor zum Beispiel exponentiell abklingen, wodurch man den Effekt erhält, dass zu Beginn grob nach einem Optimum gesucht und mit fortgeschrittener Zeit die Lösung immer mehr verfeinert wird, sodass am Ende letztlich ein möglichst genauer Wert vorliegt.

Diese Art der Optimierung liefert an sich immer die beste Lösung, hat aber den Nachteil, dass der Berechnungsaufwand exponentiell mit der Anzahl an Parametern zunimmt. Wenn man beim Beispiel der digitalen Filter bleibt, so bedeutet das, dass die Filterordnung nicht beliebig hoch gemacht werden kann, sofern man in einem vertretbaren Zeitraum ein Ergebnis erhalten will bzw. überhaupt die Möglichkeit besteht, dass der Algorithmus konvergiert. [AA06]

2.3.3 Lattice-Struktur: Verzögerungselemente

[JW], [Kun88] und [Sch00] beschreiben eine weitere Methode der Linearisierung.

In Abbildung 2.23 ist das Prinzip der Phasen-Linearisierung dargestellt, in dem ein Zweig der Allpass-Struktur durch reine Verzögerungselemente ersetzt wird.

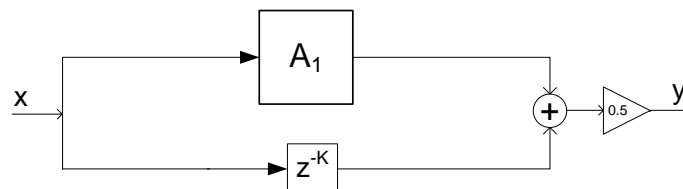


Abbildung 2.23: Phasen-Linearisierung mit Verzögerungselementen

$$H(z) = \frac{A_1(z) + A_2(z)}{2} \quad (2.119)$$

$$A_2(z) = z^{-K} \quad (2.120)$$

In diesem Fall geht es darum, ein um K Samples verzögertes Signal mit dem Ausgang eines Allpass-Filters $A_1(z)$ N . Ordnung zu addieren/subtrahieren. Das Prinzip besteht darin, den Allpass-Zweig so zu entwerfen, dass zwischen den zwei Ausgängen ein Phasenunterschied von $2k\pi$ im Durchlassbereich (konstruktive Überlagerung) und $(2k + 1)\pi$ im Sperrbereich entsteht (destruktive Überlagerung bedingt durch 180° Phasenunterschied).

Wenn man den Phasenverlauf nun anschreibt:

$$\begin{aligned} H_{A1}(\omega) &= |H_{A1}(\omega)| e^{-j\varphi_1(\omega)} = e^{-jb_1(\omega)} \\ H_{A2}(\omega) &= |H_{A2}(\omega)| e^{-j\varphi_2(\omega)} = e^{-jb_2(\omega)} \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$H_A(\omega) = e^{-jb_1(\omega)} \pm e^{-jb_2(\omega)} \quad (2.122)$$

$$H_A(\omega) = \cos(b_1(\omega)) \pm \cos(b_2(\omega)) - j(\sin(b_1(\omega)) \pm \sin(b_2(\omega))) \quad (2.123)$$

$$b_{\pm}(\omega) = -\arctan\left(-\frac{\sin(b_1(\omega)) \pm \sin(b_2(\omega))}{\cos(b_1(\omega)) \pm \cos(b_2(\omega))}\right) \quad (2.124)$$

$$b_+(\omega) = \arctan \tan\left(\frac{b_1(\omega) + b_2(\omega)}{2}\right) = \frac{b_1(\omega) + b_2(\omega)}{2} \quad (2.125)$$

$$b_-(\omega) = -\arctan \cot\left(\frac{b_1(\omega) + b_2(\omega)}{2}\right) = \frac{b_1(\omega) + b_2(\omega)}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (2.126)$$

$$b_A(\omega) = N\omega T - 2 \arctan \frac{\sum_{i=0}^N a_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^N a_i \cos(i\omega T)} \quad (2.127)$$

Der erste Term repräsentiert eine Verzögerung von N Samples, während der zweite (Allpass-)Term eine periodische Funktion zeigt, deren Verlauf nur durch die Koeffizienten a_i bestimmt wird.

Um einen Tiefpass bzw. Hochpass zu entwerfen, ist es notwendig, dass sich die Faktoren N und K um eins unterscheiden. Laut [JW] ist es am besten, wenn $N = K + 1$ gesetzt wird.

In weiterer Folge kann eine Fehlerfunktion eingeführt werden, die sich aus der Differenz des Phasenverlaufs des Allpasses $b_A(\omega)$ und eines vorgegebenen Phasenverlaufs $b_d(\omega)$ zusammensetzt.

$$\varepsilon(\omega) = b_A(\omega) - b_d(\omega) = N\omega T - 2 \arctan \frac{\sum_{i=0}^N a_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^N a_i \cos(i\omega T)} - b_d(\omega) \quad (2.128)$$

Für den gewünschten Phasenverlauf $b_d(\omega)$ wird folgendes eingesetzt:

$$b_d(\omega) = \begin{cases} K\omega T & \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ K\omega T + \pi & \text{für } \omega_s \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (2.129)$$

Wird als Optimierungsmethode der maximale Fehler minimiert, so erhält man eine Equiripple-Fehlerfunktion:

$$\min_{a_i} \max |\varepsilon(\omega)| \quad (2.130)$$

Um eine möglichst geringe Veränderung der Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich zu erreichen, muss das Ripple im Durchlassbereich niedrig sein. Insbesondere bei schmalen Übergangsbereichen ist es nur mit einer hohen Filterordnung möglich, ein gutes Ergebnis im Phasenverlauf zu erhalten. Jedenfalls kann mit einem erheblich reduzierten Aufwand gegenüber FIR-Filtern gerechnet werden.

[Sch00]

2.3.4 Hybrid-Optimierung von Betrags- und Phasengang

Der wesentliche Nachteil beim Kaskadieren eines Allpassfilters zur Linearisierung des Phasenverlaufs besteht darin, dass insbesondere bei stark nicht linearen Filtern (Elliptische) hohe Ordnungen zur Phasenkorrektur nötig sind.

[SAS99] und [Lee91] zeigen ein Verfahren, das auf dem Grundgedanken beruht, einen Filter mit annähernd linearer Phase direkt zu synthetisieren ohne einen separaten Allpassfilter zu entwerfen, der kaskadiert wird. Um das aber erreichen zu können, ist es nötig, dass Nullstellen außerhalb des Einheitskreises platziert werden.

Das Prinzip besteht, wie in den Abbildungen 2.24 und 2.25 dargestellt, darin, dass man ein nicht-minimalphasiges System (mit Nullstellen auch außerhalb des Einheitskreises) in zwei Substrukturen aufteilen kann. Eine Struktur ist dabei minimalphasig und eine zweite Struktur bildet einen Allpass.

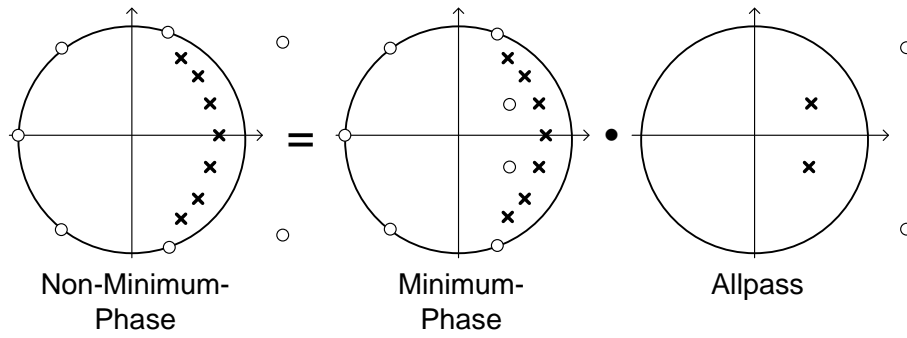


Abbildung 2.24: Aufteilung eines nicht-minimalphasigen Systems: Kaskadenstruktur

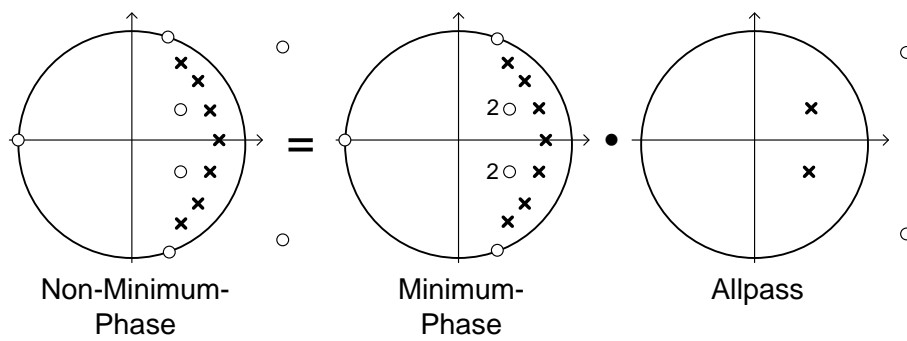


Abbildung 2.25: Aufteilung eines nicht-minimalphasigen Systems: LWDF-Struktur

Das kommt der Kaskadenstruktur wie in 2.3.1 beschrieben schon recht nahe und wird auch so in einer ähnlichen Form beschrieben.

Entscheidend ist nun aber folgendes:

Wird diese Methode für eine Lattice-WDF-Struktur angewendet, kann auf intelligente Weise die Ordnung des gesamten Filtersystems reduziert werden, in dem doppelte Nullstellen innerhalb des Einheitskreises im minimalphasigen System durch Polstellen des Allpasses eliminiert werden.

Die zwei Teile der Übertragungsfunktion (minimalphasiges System und Allpass) sind nicht unabhängig, daher ist ein iterativer Prozess für die Realisierung notwendig. Das zu lösende Problem ist nichtlinear, daher werden Optimierungsmethoden benötigt, die darauf angewendet werden können um zumindest ein lokales Optimum zu erreichen. Entsprechende Algorithmen sind in der Publikation angeführt (z.B. von Dutta und Vidyasagar).

Bei der Verwendung einer gewöhnlichen Kaskadenstruktur mit Filter-Realisierung in Direktform genügen einfache Nullstellen, die im minimalphasigen Teilsystem hinzugefügt werden.

Für eine nicht-minimalphasige Übertragungsfunktion $S_{12}(s)$ können die Nullstellen auf der imaginären Achse liegen, sowie auch in Form von konjugiert-komplexen oder realen Paaren symmetrisch zur imaginären Achse.

$$S_{12}(s) = \frac{f_I(s)f_H(s)f_H(-s)}{g(s)} \quad (2.131)$$

$f_I(s)$ und $f_H(s)$ beinhalten Nullstellen auf der imaginären Achse bzw. in der linksseitigen s -Halbebene. $f_H(s)$ und $f_H(-s)$ sind Hurwitz-/Anti-Hurwitz-Polynome¹².

2.131 wird nun in ein minimalphasiges System und ein Allpass-System aufgeteilt:

$$S_{12}(s) = S_M(s) (S_A(s)) = \frac{f_I(s)f_H(s)^2}{g(s)} \left(\frac{f_H(-s)}{f_H(s)} \right) \quad (2.132)$$

In 2.132 erkennt man, dass das im Zähler stehende Polynom $f_H(s)$ aufgrund der Quadrierung doppelte Nullstellen besitzen muss. Nachdem es sich um ein Hurwitz-Polynom handelt, sind die Realteile aller Nullstellen kleiner als Null, was bedeutet, dass alle Nullstellen in der z -Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen. Da der Allpass dasselbe Polynom $f_H(s)$ im Nenner hat (hier sind es daher Polstellen), überdecken sich die doppelten Nullstellen mit einfachen Polstellen und es kommt zur Elimination derselben.

¹²Ein Hurwitz-Polynom ist ein reelles Polynom, dessen Nullstellen alle einen negativen Realteil besitzen. Dementsprechend haben die Nullstellen eines Anti-Hurwitz-Polynoms alle einen positiven Realteil.

Vorgehensweise zur Erstellung eines initialen Filters

1. Im ersten Schritt geht es darum, einen minimalphasigen Filter anhand der vorgegebenen Spezifikation (gewünschter Amplitudengang, Filterordnung) zu entwerfen.
2. Danach wird der entworfene Filter mit einem stabilen Allpass-Filter kaskadiert. Die Polstellen des Allpass-Filters werden solange verändert, bis die Abweichungen vom linearen Phasenverlauf im Durchlassbereich minimiert sind.
3. Im nächsten Schritt wird wieder ein minimalphasiger Filter mit der um den Allpassfilter erhöhten Ordnung¹³, welche die zusätzlichen einfachen Nullstellen bei Verwendung einer Kaskadenstruktur (bzw. doppelten Nullstellen im Falle der LWDF-Struktur) im Einheitskreis darstellen, realisiert. Durch das Einbringen dieser Nullstellen verändert sich zwangsläufig der Amplitudengang, weshalb ein Optimierungsverfahren notwendig ist, um die anfängliche Spezifikation einzuhalten.
4. Darauf folgend wird der Filter wieder mit einer Allpassfunktion kaskadiert, wobei der maximale Fehler vom linearen Phasenverlauf erneut minimiert wird.
5. Letztlich wird ein Fehlerparameter eingeführt, der anzeigt, ob die Abbruchbedingung erfüllt ist. Um das zu überprüfen, wird für jede Polstelle des Allpassfilters der Absolutwert der Differenz aus der Position der Polstelle des Allpasses und der Position der zugehörigen Nullstelle des minimalphasigen Filters gebildet. Wenn der Fehler für jede Pol/Nullstellendifferenz einen Grenzwert unterschreitet, ist das Problem gelöst, andernfalls springt der Algorithmus zu Punkt 3 zurück.

2.3.5 Methoden-Vergleich

Zum Ende dieses Kapitels sei zusammenfassend das kurze, aber wie ich finde sehr aussagekräftige Paper von Jaworski & Saramaki [JS94] erwähnt, in dem die drei wichtigsten Methoden (Phasen-Linearisierung eines bestehenden elliptischen Filters mittels Optimierung; Verwendung eines Allpass-Filters kaskadiert nach dem zu linearisierenden Filter; Ersetzen eines Zweiges der zwei Allpass-Strukturen [LWDF-Struktur] durch reine Verzögerungselemente) miteinander verglichen werden.

Es zeigt sich bei der Optimierungsmethode, dass mit Erhöhung der Filterordnung um vier (ursprünglich ein Filter 5. Ordnung) und minimal vergrößerter Übergangsbandbreite sehr gute Ergebnisse erzielt werden, was die Linearität des Phasenverlauf im Durchlassbereich betrifft (Filterordnung: 9). Im Gegensatz dazu wird für dieselbe

¹³Bzw. der doppelten Allpass-Filterordnung bei der Implementierung von doppelten Nullstellen im Fall der LWDF-Struktur

Spezifikation ein FIR-Filter 108. Ordnung benötigt (unter Ausnutzung der Koeffizientensymmetrie benötigt man 55 Multiplizierer). Bei Verwendung eines FIR-Filters korreliert die Übergangsbandsbreite streng monoton mit der Filterordnung. In einem Beispiel ist für eine Reduzierung der Übergangsbandsbreite um den Faktor fünf eine Erhöhung der Filterordnung um denselben Faktor angegeben. Für die Implementierung des FIR-Filters wären dann schon 270 Multiplizierer notwendig. Beim linearisierten elliptischen Filter ändert sich allerdings an der Filterordnung nichts.

Es findet des weiteren ein Vergleich mit einer kaskadierten Version eines Allpassfilters statt. Ein elliptischer Filter fünfter Ordnung wird um einen Allpass vierter Ordnung erweitert. Daraus ergibt sich als wesentlicher Nachteil, dass die Gesamtverzögerung um den Faktor zwei ansteigt (Filter ist langsamer).

Ein dritter Vergleich besteht in der Ersetzung eines Allpass-Zweiges durch reine Verzögerungselemente. Unter der Voraussetzung, dass die Amplitudenverlaufs-Spezifikationen eingehalten werden, benötigt man eine Verzögerung von $K = 22$ Samples (Anzahl an Speicherelementen) um dieselben Resultate im Phasenverlauf zu erreichen. Die Allpass-Struktur hat damit eine Ordnung von $K + 1 = 23$.

Schlussfolgernd kommt man zum Ergebnis, dass man bei der Verwendung von steilflankigen IIR-Filtern (relativ gesehen kleine Übergangsbandsbreite) der Methode der Phasen-Linearisierung über Optimierung gegenüber den anderen Methoden den Vorzug geben sollte. Ebenso ist die Verwendung nicht-rekursiver FIR-Filter aufgrund der überproportional steigenden Komplexität nicht angezeigt, es sei denn, man ist aufgrund des Anwendungsfalles unbedingt auf eine absolut lineare Phase angewiesen.

2.4 Modulationsverfahren

2.4.1 FSK - Frequency Shift Keying

Da das Filter als Kanalfilter in einer FSK-Empfängerstruktur eingesetzt wird, werden hier kurz zusammengefasst einige Informationen zum FSK-Modulationsverfahren angeführt.

FSK ist ein digitales Modulationsverfahren, bei dem das Trägersignal zwischen zwei oder mehreren Frequenzen entsprechend einem Datensignal umgeschaltet wird. Man muss zunächst unterscheiden, ob es zu einer "harten" oder "weichen" Umschaltung kommt. Im ersten Fall ist die Phase diskontinuierlich, es kommt meistens zu Phasensprüngen an den Umschaltzeitpunkten und damit zu ungünstigen Spektraleigenschaften. Im Fall der weichen Umastung wird die aktuelle Phasenlage beim Umschalten beibehalten, man nennt diesen Fall auch "Continuous Phase FSK". Die letztere Art wird hier verwendet.

In dieser Arbeit wird ein IQ-Modulator verwendet. Dieser erzeugt zwei orthogonale Signale (Multiplikation mit einer Sinus- bzw. Cosinusfunktion), die miteinander addiert und übertragen, und im Empfänger wieder demoduliert werden.

Im Folgenden ist die Formel für den Modulationsindex angeführt:

$$\eta = 2f_H T = \frac{2f_H}{f_{mod}} \quad (2.133)$$

Damit der Frequenzhub bei gegebenem Modulationsindex und gegebener Bitrate bestimmt werden kann, wird Gleichung 2.133 umgeformt:

$$f_H = \frac{\eta f_{mod}}{2} = \frac{\eta}{2T_{bit}} = \frac{\eta f_{bit}}{2} \quad (2.134)$$

Der Modulationsindex ist definiert als doppelter Frequenzhub multipliziert mit der Symboldauer bzw. als Quotient des doppelten Frequenzhubs zur Modulationsfrequenz. Er ist proportional zur Phasenänderung während einer Symboldauer. Der minimale Modulationsindex beträgt 0,5 was einer Phasenänderung von $90^\circ = \pi/2$ entspricht (MSK...Minimum Shift Keying).

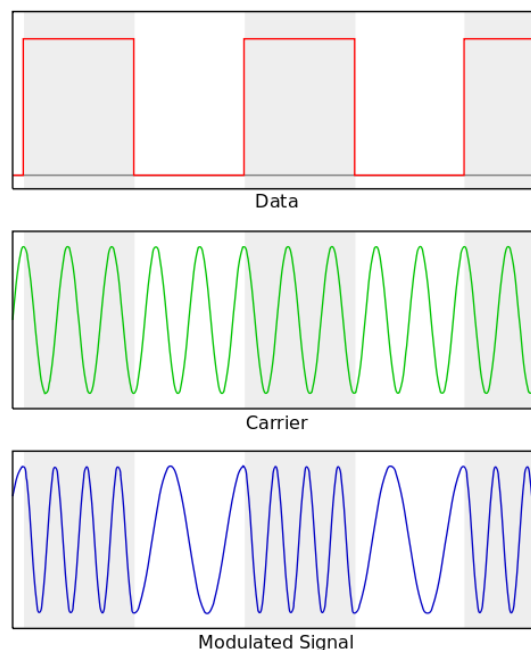


Abbildung 2.26: Prinzip der CPFSK-Modulation

URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fsk.svg>

2.4.2 Rauschen

Das übertragene Nutzsignal wird auf der Übertragungstrecke mit AWGN-Rauschen beaufschlagt.

Insbesondere für die integrierte Matlab-Funktion, mit der das Rauschen hinzugefügt wird, sind die Zusammenhänge zwischen SNR (Signal-/Rausch-Verhältnis), die auf ein Symbol bzw. ein Bit bezogenen Rauschleistungen $\frac{E_s}{N_0}$ und $\frac{E_b}{N_0}$ wichtig und daher nachfolgend angeführt. k ist die Anzahl der Bits pro Symbol.

$$\begin{aligned}\frac{E_s}{N_0} &= 10 \log \left(\frac{T_{SYM}}{T_S} \right) + SNR[dB] \\ SNR[dB] &= \frac{E_s}{N_0} - 10 \log \left(\frac{T_{SYM}}{T_S} \right) \\ SNR[dB] &= \frac{E_b}{N_0} + 10 \log(k) - 10 \log \left(\frac{T_{SYM}}{T_S} \right)\end{aligned}$$

Bei einem übertragenden Bit pro Symbol ist $k = 1$ und folglich $\log(k) = 0$, somit ergibt sich:

$$SNR[dB] = \frac{E_b}{N_0} - 10 \log \left(\frac{T_{SYM}}{T_S} \right) \quad (2.135)$$

3 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden zunächst unterschiedliche Prinzipien der Phasen - Linearisierung mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen vorgestellt.

Im zweiten Teil wird anhand eines Matlab FSK-Modells die Auswirkung der Gruppenlaufzeit auf die Demodulation untersucht.

Letztlich geht es darum, herauszufinden, ob und inwieweit sich ein nichtlinearer Phasenverlauf eines Kanalfilters auf die Bit Error Rate auswirkt um in weiterer Folge ein entsprechendes Filter zu entwerfen, das nach Kosten-/Nutzenrechnung das dafür geeignetste ist.

Die standardmäßige Implementierung von digitalen elliptischen Filtern in integrierten Schaltkreisen erfolgt mittels Lattice-Wellendigitalfilter. Der aktuell implementierte Filter besitzt eine Ordnung von fünf, das entspricht auch der Anzahl an Koeffizienten.

3.1 Koeffizienten-Berechnung eines elliptischen Filters

In der Matlab-Datei `lwdf_gazsi_calculation.m` wird bei vorgegebener Spezifikation ein elliptischer LWDF anhand der Formelsammlung von Gazsi schrittweise berechnet. Am Ende erhält man die Filterkoeffizienten für die Lattice-Struktur.

In Abbildung 3.1 ist die Auswirkung der Koeffizienten-Bitbreite auf Amplitudengang und Verlauf der Gruppenlaufzeit dargestellt. Sinkt die Anzahl der Bits so führt das dazu, dass die Spezifikation des Amplitudenganges insbesondere im Sperrbereich nicht mehr exakt eingehalten werden kann. Auf den Verlauf der Gruppenlaufzeit hat das keine nennenswerten Einflüsse. Damit ist die erhöhte Sensitivität im Sperrbereich durch die Quantisierung der Koeffizienten bewiesen.

3.2 Allpass-Struktur

Die erste Möglichkeit der Linearisierung des Phasenverlaufs ist die Verwendung eines Allpass-Filters nach dem zu linearisierenden Filter.

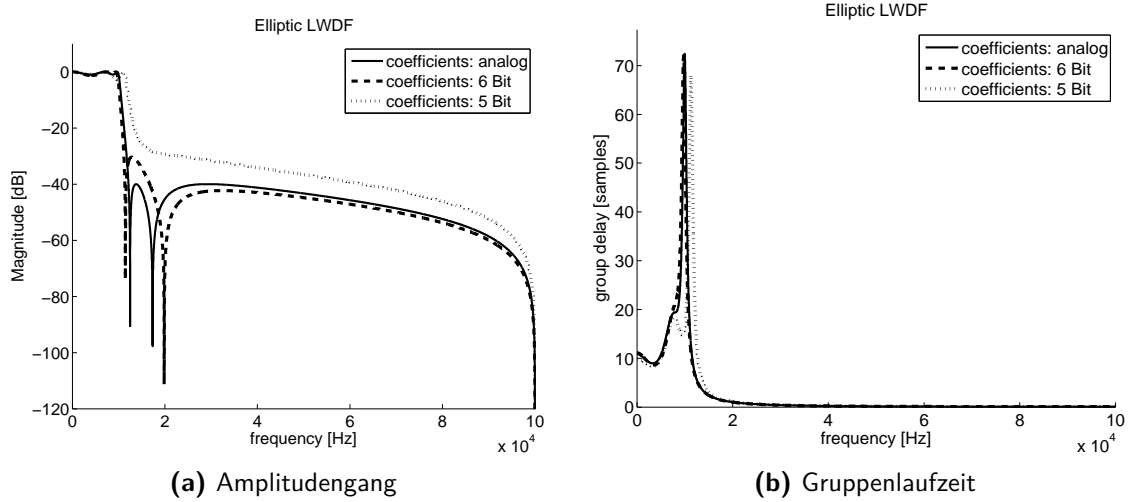


Abbildung 3.1: Sensitivität bei unterschiedlichen Koeffizientenbitbreiten

Der Allpass hat eine Betragsfunktion, die, über das Spektrum betrachtet, konstant ist (üblicherweise besitzt sie den Wert eins). Der Phasenverlauf des Allpasses soll die Nichtlinearität des elliptischen Filters kompensieren, um in Summe einen linearen Filter zu erhalten.

Da man die Gruppenlaufzeit bei kausalen Systemen¹ nur erhöhen, nicht aber erniedrigen kann, muss die Summe der Gruppenlaufzeit von Filter und kaskadiertem Allpass immer größer sein als vom Filter alleine.

Die Linearisierung wird hier in etwa in einem Bereich bis zur Grenzfrequenz vorgenommen. Wenn man sich den Gruppenlaufzeitverlauf vor Augen führt, erkennt man, dass es einen Ripple im Durchlassbereich gibt, und unmittelbar im Bereich der Grenzfrequenz kommt es zu einem steilen Abfall.

Hier ist nochmals die Übertragungsfunktion eines Allpassfilters:

$$H_A(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-(N-i)}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (3.1)$$

Es kommen konjugiert komplexe Pol-/Nullstellen vor, daher kann man für Allpässe zweiter Ordnung diese Zusammenhänge anschreiben:

$$(z - z_p) \cdot (z - z_p^*) = z^2 - z(z_p + z_p^*) + z_p z_p^* = z^2 - z c_1 + c_2 \quad (3.2)$$

¹ Bei einem kausalen linearen zeitinvarianten digitalen System liegen sämtlichen Polstellen innerhalb des Einheitskreises (=stabil).

$$z_p = |r| e^{j\varphi} = a + jb \quad (3.3)$$

$$z_p^* = |r| e^{-j\varphi} = a - jb \quad (3.4)$$

$$c_1 = z_p + z_p^* = |r| (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = 2|r| \cos(\varphi) \quad (3.5)$$

mit: $-2 < c_1 < 2$

$$c_2 = z_p z_p^* = |r|^2 \quad (3.6)$$

mit: $c_2 < 1$

Konkret bieten sich für die Umsetzung, wie im folgenden erklärt, einige Möglichkeiten an.

3.2.1 Pol-Platzierung mit nachfolgender Optimierung

Dateien: `allpass_design_1.m` mit `allpass_setpoles.m`

Diese Funktion verwendet als Parameter die Anzahl der Allpassstufen zweiter Ordnung (Vielfache von 2), sowie die Koeffizientenvektoren der Filter-Übertragungsfunktion (hier: `b_lwdf` und `a_lwdf`) und die normierte Grenzfrequenz des Filters.

Die Vorgehensweise für die grobe Polplatzierung des Allpassfilters wurde in 2.3.1 beschrieben.

Anschließend wird ein lokales Optimierungsverfahren mit einer Kostenfunktion angewendet, um das Ergebnis entsprechend zu verbessern.

In Abbildung 3.2 ist dargestellt, wie sich mit zunehmender Anzahl an Allpassfilter-Strukturen zweiter Ordnung die Änderung der Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich des Systems entsprechend reduziert.

Hier die wichtigsten Ausschnitte aus der Datei:

```
%Matlab-file: allpass_design_1.m

%start from LWDF transfer function coefficients
[z,p,k]=tf2zp(b_lwdf,a_lwdf);

%startup allpass pole setting
[eq_z, eq_p, strategy]=allpass_setpoles(z,p,allpass_stages_2);

%calculate startup coefficients
eq_p_start=eq_p(1:size(eq_p)/2);
```

```

coeff_equalizer_start=zeros(2*allpass_stages_2,1);
for i=1:allpass_stages_2
    coeff_equalizer_start(2*i-1)=abs(eq_p_start(i)).^2;
    coeff_equalizer_start(2*i)=2*cos(angle(eq_p_start(i)));
end

%pole setting restricted to filter outer pole angle
%added: + offset tolerance (pi/10)
phi=abs(angle(p));
phimax_filter_poles=max(phi);
c2_ub=2*cos(phimax_filter_poles+pi/10);

%define border values
coeff_min(1:2:end)=0.01;
coeff_min(2:2:end)=-1.99;
coeff_max(1:2:end)=0.95;
coeff_max(2:2:end)=c2_ub;

%function myfun_fmincon contains cost function
myfun=@(x) myfun_fmincon(x,w_to_fit,tg_to_fit,allpass_stages_2);

%optimize part
[sec_order_coeff_out,fval,exitflag,output]=fmincon(myfun,
    coeff_equalizer_start,[],[],[],[],coeff_min,coeff_max,[],options);

%build second-order sections and transform them into a transfer function
%...

```

Man erkennt, dass mit zunehmender Ordnung der Ripple im Durchlassbereich amplitudenmäßig abnimmt, allerdings steigt die Gesamtverzögerung an.

Matlab bietet für nichtlineare Optimierungen die Funktion `fmincon` an, die dafür auch verwendet wurde.

Kostenfunktionsterm:

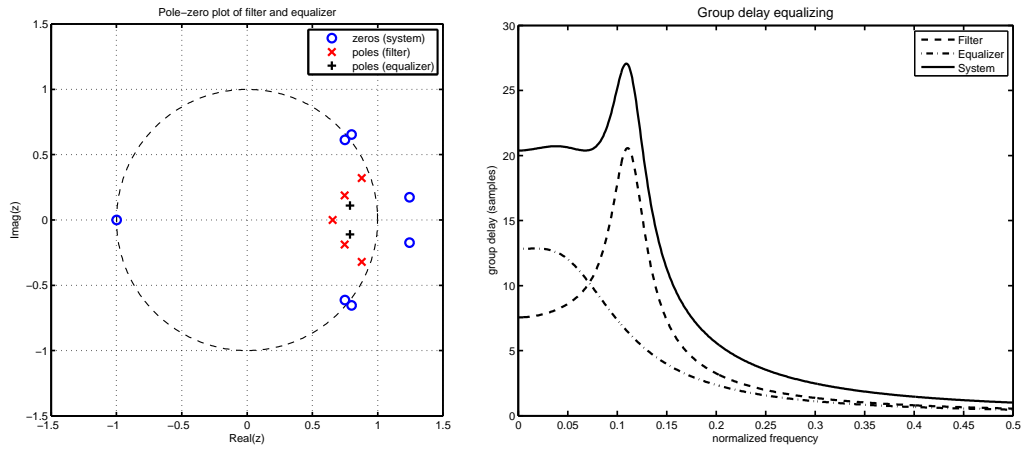
$$Q = \frac{\tau_{g_{\max}} - \tau_{g_{\min}}}{\tau_{g_{\max}} + \tau_{g_{\min}}} \quad (3.7)$$

Das Verfahren liefert ein gutes Ergebnis. Es hängt aber insbesondere sehr davon ab, wo die Initialwerte der Pole liegen.

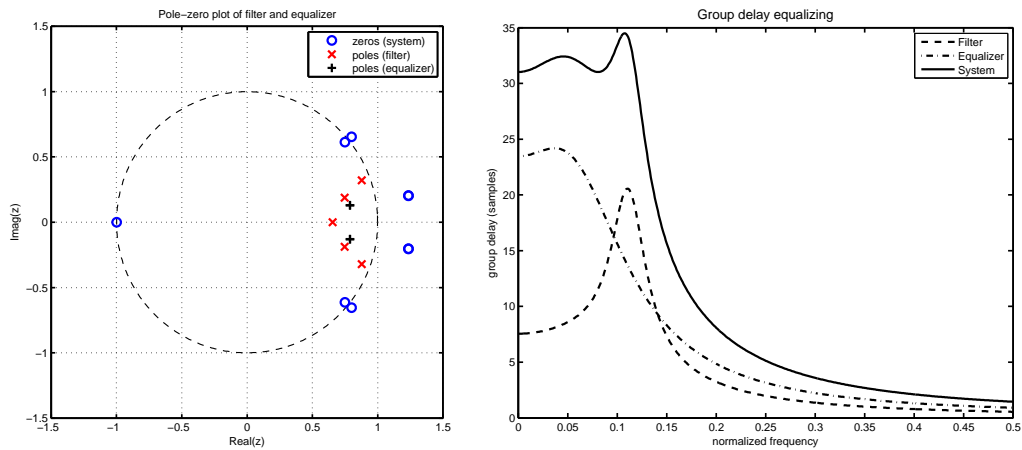
3.2.2 Verwendung einer Matlab-Funktion

Datei `allpass_design_2.m` mit `iirgrpdelay.m`

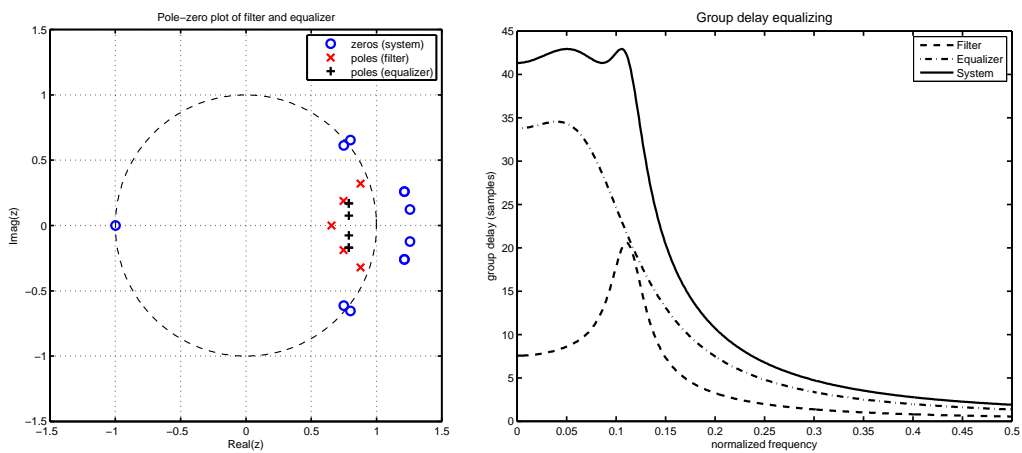
Diese Methode stützt sich auf die Matlab-basierende Funktion `iirgrpdelay.m`. Die Funktion wendet ein abgewandeltes Newton-Verfahren zum Ausgleich der Gruppenlauf-



(a) 2



(b) 4



(c) 6

Abbildung 3.2: Ergebnisse für unterschiedliche Allpass-Filter-Ordnung

zeit eines minimalphasigen Systems an.

Man hat die Möglichkeit, die Ordnung für den Allpassfilter und einen bestimmten Verlauf der Gruppenlaufzeit innerhalb eines gewünschten spektralen Intervalls vorzugeben. Es lässt sich auch eine Beschränkung der Polradien definieren. Der Algorithmus liefert daraufhin die Koeffizienten für den Allpassfilter.

Hier die wichtigsten Ausschnitte aus der Datei:

```
%Matlab-file: allpass_design_2.m

%generate elliptic filter in digital domain
[z,p,k]=ellip(filter_order,pb_ripple,atten_s,fg_to_fs_2,'low');

%convert to transfer function format
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
h1=20*log10(freqz(b,a,w));
phase1=phasez(b,a,w);
tg1=grpdelay(b,a,w);

f=linspace(0,fg_to_fs_2,points)';
g=grpdelay(b,a,f*pi);
a=max(g)-g;
%order of allpass-filter: x times 2
[eq_b,eq_a]=iirgrpdelay(2*allpass_stages_2,f,[0 fg_to_fs_2],a);
[eq_z,eq_p,eq_k]=tf2zp(eq_b,eq_a);
```

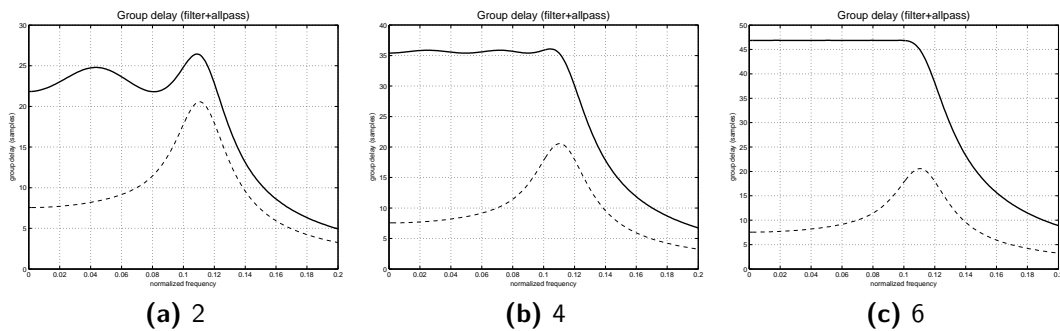


Abbildung 3.3: Allpass-Filter Ordnung (Funktion: iirgrpdelay)

Das Ergebnis ist sehr gut. Es muss aber beachtet werden, sofern man die konstante Gruppenlaufzeit an das Gruppenlaufzeitmaximum des Filters anpassen will, dass dieses Maximum ohne weiteres um den Faktor 2 höher sein kann und man dann dementsprechend eine hohe Ordnung des Allpasses benötigt.

3.2.3 Vorgabe diskreter Phasen-Wunschwerte

Datei `allpass_design_3.m`

In dieser Datei sind weitere Beispiele angeführt, die im Buch „Digitale Signalverarbeitung 2“ [SS09] zu finden sind. Darin sind einerseits die mathematischen Herleitungen für den Entwurf von Allpässen zu finden, andererseits findet man dazugehörige Matlab-Codebeispiele.

Die einzelnen Ansätze und Beispiele sind mit zunehmender Komplexität behaftet. Im einfachsten Fall geht es nur um die Lösung eines linearen Gleichungssystems, um die Allpasskoeffizienten zu berechnen. Die Anzahl der Stützstellen entspricht der Anzahl der Koeffizienten (c_n ist immer 1).

Ausgangspunkt ist Gleichung 2.117:

$$b_A(\omega) = N\omega T - 2 \arctan \frac{\sum_{i=0}^N a_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^N a_i \cos(i\omega T)}$$

Es wird ein Interpolationsproblem definiert, das die diskreten Wunschwerte $b_w(\Omega_i)$ berücksichtigt. Dazu müssen einige Bedingungen erfüllt sein, wie ein streng monotoner Verlauf der Wunschwerte sowie eine obere Grenze von $N\pi$.

$$b_w(\Omega_i) = -N\Omega_i + 2 \arctan \frac{\sum_{\nu=0}^N c_\nu \sin(\nu\Omega_i)}{\sum_{\nu=0}^N c_\nu \cos(\nu\Omega_i)} \quad (3.8)$$

$$\arctan \frac{\sum_{\nu=0}^N c_\nu \sin(\nu\Omega_i)}{\sum_{\nu=0}^N c_\nu \cos(\nu\Omega_i)} = 0.5 [N\Omega_i + b_w(\Omega_i)] = \beta_i \quad (3.9)$$

Unter der Annahme $c_N = 1$ folgt nach einigen Umformungen unter Zuhilfenahme der Sumsensätze für trigonometrische Funktionen:

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} c_\nu \sin(\nu\Omega_i - \beta_i) = -\sin(N\Omega_i - \beta_i) \quad (3.10)$$

Darausfolgend kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, woraus der gesuchte Lösungsvektor c' bestimmt werden kann:

$$A \cdot c' = b \quad (3.11)$$

mit: $c' = [c_{N-1}, c_{N-2}, \dots, c_0]^T$
 $\nu = (n-1) : -1 : 0$

Lösung:

$$c' = A^{-1}b \quad (3.12)$$

Geht man einen Schritt weiter, wählt man eine L_2 -Norm (also die Minimierung des quadratischen Summationsfehlers) für ein überbestimmtes Gleichungssystem. Überbestimmt ist es deshalb, da die Anzahl der Stützstellen höher ist als die Anzahl der Filterkoeffizienten ($M > n$).

Definition des Fehlers ε :

$$A \cdot c' - b = \varepsilon \quad (3.13)$$

Summe der Quadrate der Gleichungsfehler minimieren:

$$\varepsilon^T \varepsilon = c'^T A^T A c' - 2c' A^T b + b^T b \quad (3.14)$$

Lösung:

$$c' = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (3.15)$$

Man kann auch eine frequenzabhängige Gewichtung des Gleichungsfehlers mit einer Diagonalmatrix G_D vornehmen:

$$G_D A \cdot c' - G_D b = \varepsilon \quad (3.16)$$

Lösung:

$$c' = (A^T G_D^2 A)^{-1} A^T G_D^2 b \quad (3.17)$$

Geht man noch einen Schritt weiter, kommt man zum Gebrauch eines Approximationsverfahrens, wobei die Approximation im Tschebyscheffschen Sinn erfolgt. Dazu wird der Remez-Algorithmus verwendet, ein iteratives Verfahren zur Lösung des Problems. Der Algorithmus versucht, ein Polynom zu finden, das im Sinne der Minimierung des maximalen Fehlers am besten ist.

$$\|\Delta b(\Omega)\| = \max_{\Omega \in B} \{|\Delta b(\Omega)|\} = \max_{\Omega \in B} \{|b_A(\Omega) - b_w(\Omega)| G(e^{j\Omega})\} \quad (3.18)$$

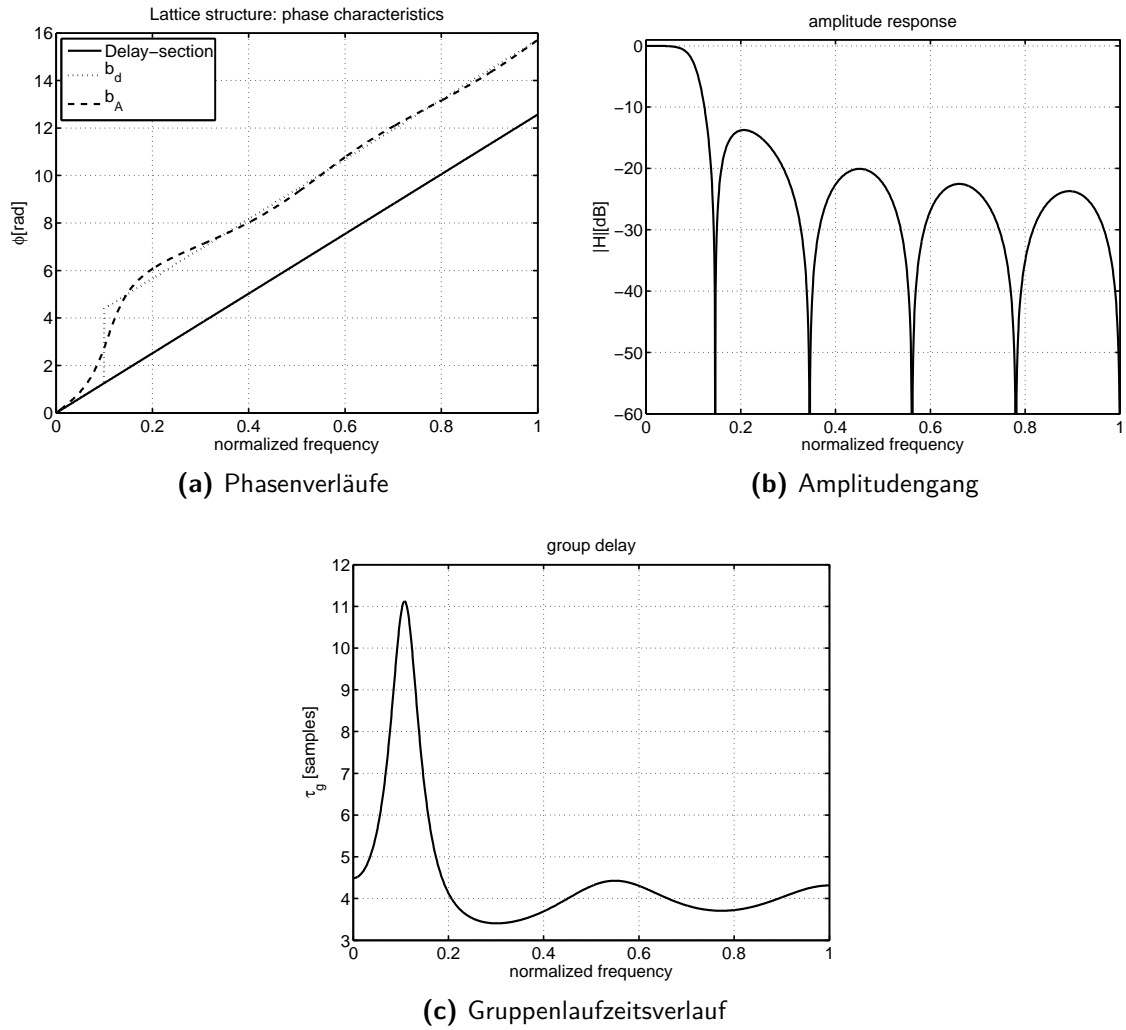


Abbildung 3.4: Lattice-Wellendigitalfilter mit Delay-Zweig ($K = 4$)

3.3 Lattice-Wellendigitalfilter: Delay-Zweig

Datei `lattice_linear_ga.m`

Mit dieser Methode wird ein linearer Phasenverlauf erreicht, indem ein Lattice-Zweig durch reine Verzögerungselemente ersetzt wird (siehe Abbildung 2.23). Vorgegeben wird dabei eine Verzögerungsordnung K sowie der gewünschte Phasenverlauf b_d .

Je nach Optimierungsmethode (z.B. minmax, Least Square Error) kommt es zu einem unterschiedlichen Verhalten im Verlauf des Amplitudengangs.

Ein Equiripple-Filter (Elliptischer/Cauer Filter) entsteht beim Optimieren mit der „minmax“-Methode. Die LSE-Optimierung führt eher zu einem Chebyshev Typ II - Filter.

Diese Methode benötigt eine wesentlich höhere Ordnung, um ein gutes Ergebnis zu erhalten. Um eine ausreichend hohe Sperrdämpfung zu gewährleisten, muss die Amplitude der Oszillation um die lineare Phase entsprechend gering gehalten werden, was die hohe Ordnung erfordert.

Beispielhaft sind die Phasenverläufe sowie der Amplitudengang und die Gruppenlaufzeit eines Filters neunter Ordnung in Abbildung 3.4 dargestellt.

In der Nähe der Grenzfrequenz kommt es bei dieser Methode zu einem steilen Anstieg der Gruppenlaufzeit, die Linearität der Phase beschränkt sich daher eher auf die ersten zwei Drittel des Durchlassbereiches.

Als Optimierungsmethode wird hier ein heuristisches Verfahren verwendet.

3.4 Heuristischer Algorithmus

Im vorliegenden Fall wird ein Algorithmus verwendet, der sich „Differentielle Evolution“² nennt und von Storn und Price entwickelt wurde.³

3.4.1 Initialfilter ohne Gruppenlaufzeitkorrektur

Tabelle 3.1 zeigt die Parameter für den elliptischen Filter.

² Quelle: [ber]

³ Allgemeines zum genetischen Algorithmus: [de-]

Filtertyp	Elliptisch, TP
Ordnung N	5
$f_{pb}/(f_s/2)$	0.1
$f_{sb}/(f_s/2)$	0.12
A_{pb}	1 dB
A_{sb}	40 dB

Tabelle 3.1: Filterspezifikation LWDF

Nach Durchlaufen des Algorithmus mit der Vorgabe einer Koeffizienten-Bitbreite von fünf ergeben sich für die Koeffizienten des Lattice - Wellendigitalfilters in Tabelle 3.2 folgende Werte:

γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
0.65625	-0.59375	0.9375	-0.8750	0.9375

Tabelle 3.2: Filterkoeffizienten (Elliptischer LWDF 5. Ordnung)

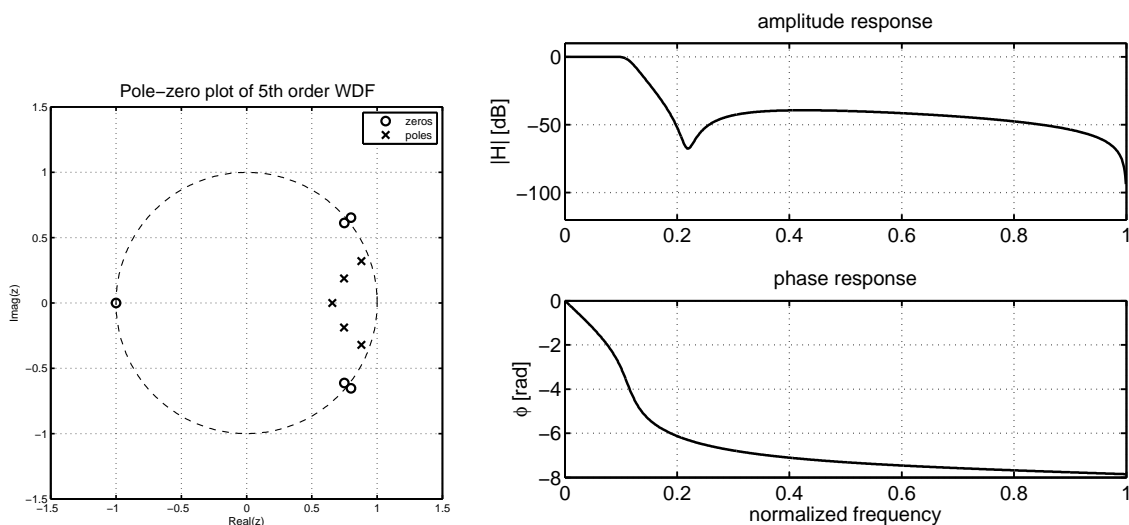


Abbildung 3.5: Filter (links: Pol-/Nullstellenplan; rechts: Amplituden- und Phasengang)

3.4.2 Elliptischer Filter mit Gruppenlaufzeitkorrektur

Zunächst erfolgt die Erweiterung der Kostenfunktion c um die zu optimierende Gruppenlaufzeit. Dabei wird einerseits der sogenannte Q-Faktor 3.19 und andererseits ein einfacher Ausdruck für die Minimierung der Gruppenlaufzeit-Änderung herangezogen.

Je nach Gewichtung der einzelnen Terme der Kostenfunktion kann den einzelnen Parametern (Durchlassband-Grenzfrequenz, untere Sperrbandfrequenz, Veränderung der Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich) für die Optimierung eine höhere oder niedrigere Priorität zugemessen werden. Somit kann man eigenständig definieren, welche Parameter beim Optimieren besonders berücksichtigt werden sollen, und welche weniger.

Das Problem ist, dass der steile Übergangsbereich des elliptischen Filters und der gewünschte lineare Phasenverlauf einander entgegenwirken, d.h. man muss sich dafür entscheiden, welche Vorgabe Priorität hat.

Kostenfunktionsterm:

$$Q = \frac{\tau_{g_{\max}} - \tau_{g_{\min}}}{\tau_{g_{\max}} + \tau_{g_{\min}}} \quad (3.19)$$

Ein zweiter Kostenfunktionsterm:

$$c = |\tau_{g_{\max}} - \tau_{g_{\min}}| \quad (3.20)$$

Die Kostenfunktion c ist in der Matlab-Funktion `libwdf_design_cost(g,p)` zu finden. Diese wird um den Term `delta_tg_cost` erweitert.

Hier sind die wichtigsten Codezeilen aufgelistet:

```
%Matlab-file: libwdf_design_cost(g,p).m
delta_tg=abs(max(tg)-min(tg));
delta_tg_cost=200*delta_tg; %weight factor
...
%constraints for passband and stopband
c_constr_low=sum(p.h_low_dB(ind)-h_low_dB(ind))*10000;
c_constr_up=sum(h_up_dB(ind)-p.h_up_dB(ind))*10;
...
%cost function
c = c_constr_low + c_constr_up+sum(c_add) + delta_tg_cost;
```

In Tabelle 3.3 stehen die Koeffizienten, die mit der erweiterten Kostenfunktion für die Gruppenlaufzeitkorrektur ermittelt wurden.

Entscheidend für das Ergebnis ist, wie man die einzelnen Terme letztlich in der Kostenfunktion gewichtet. Die Gewichtung für den Beginn des unteren Stoppbandes wird beispielsweise von ehemals 1000 auf 10 reduziert. Das gibt dem Algorithmus mehr Spielraum für diesen Parameter abseits der Vorgabe im Vergleich zu anderen Termen. Der "Gruppenlaufzeit-Term" wird mit dem Faktor 200 multipliziert.

Es zeigen sich große Unterschiede, wenn man hierfür andere Werte einsetzt. Je größer der Wert ist, umso besser verhält sich der Filter mit der Phasenlinearität im Durchlassbereich, aber umso breiter wird im Gegenzug der Übergangsbereich.

Hier zeigt sich, dass ein Koeffizient null ist, was aber damit nicht bedeutet, dass die Filterordnung um eins reduziert wurde, da das Verzögerungselement noch immer

γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
-0.03125	0	0.71875	-0.78125	0.9375

Tabelle 3.3: Filterkoeffizienten (Elliptischer LWDF 5. Ordnung optimiert)

vorhanden ist. Der zugehörige Adaptor ist aufgrunddessen, dass der Multiplizierer durch den Nullwert wegfällt, nicht mehr nötig, da das Signal geradewegs ohne Änderung vom Ein- zum Ausgang durchgeleitet wird.

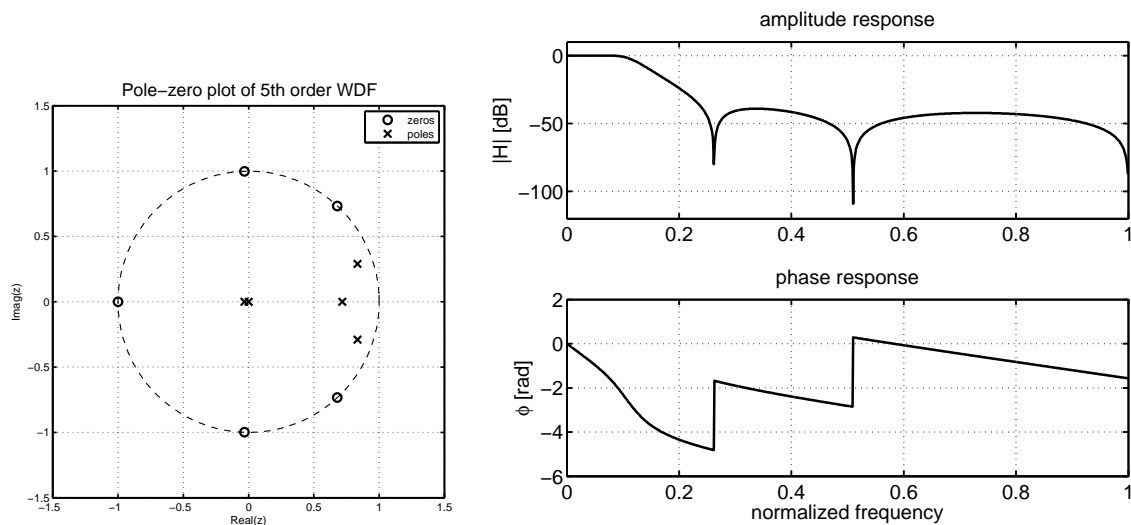


Abbildung 3.6: Optimierter Filter (links: P/N-Plan; rechts: Bodediagramm)

3.5 LWDF mit Quadrupel-Nullstellenkonstellation

Datei: `lwdf_linear_hybrid.m`

Diese Methode beruht vom Grundprinzip her auf dem Hybridansatz, der in Kapitel 2.3.4 erläutert wurde. Dadurch, dass Nullstellen außerhalb des Einheitskreises platziert werden, erhält man einen annähernd linearen Phasenverlauf.

In diesem Beispiel wird eine Filterordnung von 9 verwendet.

Es erfolgt zunächst eine Aufteilung der Polstellen in oberen (4 + 1 [ein reeller Pol]) und unteren (4) Lattice-Zweig.

Als Optimierungsfunktion wird die Matlab-Funktion `fmincon` verwendet.

Der zu optimierende Parametervektor beinhaltet die Amplituden und Winkel der Polstellen, die Positionen der Nullstellen hängen direkt mit den Polstellen zusammen.

Für die Position der Nullstellen in Lattice-Wellendigitalfiltern gibt es drei Möglichkeiten:

- am Einheitskreis
- komplexe Quadrupel um den Einheitskreis
- als Nullstellenpaar bei Platzierung auf reeller Achse

Insbesondere der zweite Punkt ist für die Realisierung einer linearen Phase wichtig.

Nachfolgend ein kleiner Ausschnitt aus der Optimierungsfunktion für den Parametervektor x :

```
%Matlab-file: lwdf_linear_hybrid_order9_2_fct.m

%upper branch (odd)
pa=[x(1);x(2:3).*exp(-1i*x(4:5));x(2:3).*exp(+1i*x(4:5))];

%lower branch (even)
pb=[x(6:7).*exp(-1i*x(8:end));x(6:7).*exp(+1i*x(8:end))];

%build transfer functions
[ba,aa]=zp2tf([],pa,1);
[bb,ab]=zp2tf([],pb,1);

%lwdf polynomial generation
num=0.5*(conv(aa,flipr(ab))+conv(ab,flipr(aa)));
den=conv(aa,ab);

%transfer function of lwdf filter
H=freqz(num,den,w);

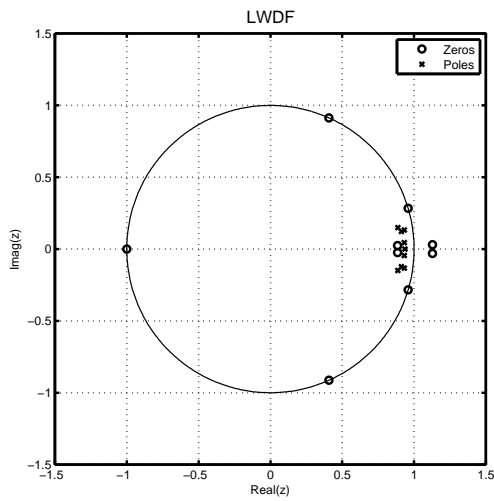
%...
```

In Abbildung 3.7 ist der Pol-/Nullstellenplan sowie Amplituden- und Phasengang der LWDF-Optimierung für unterschiedliche Filterordnungen und Gewichtungen der Optimierungsparameter dargestellt.

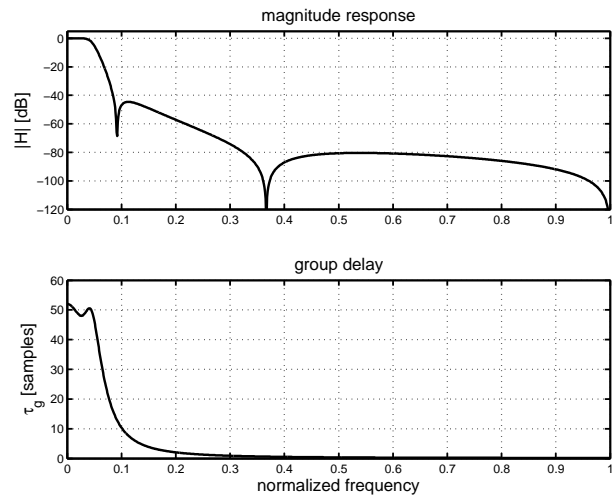
Wie man erkennen kann, ist die Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich annähernd konstant.

3.6 Referenzfilter: FIR und Butterworth

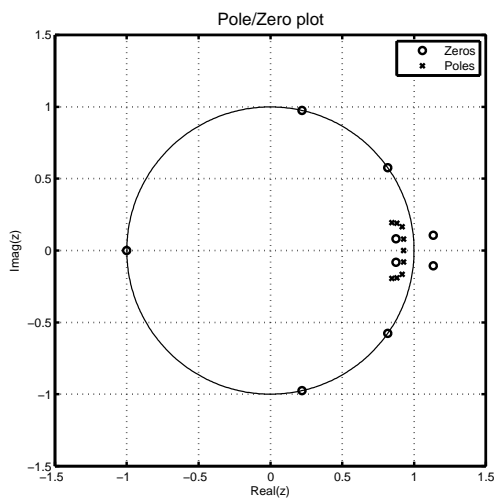
Der FIR-Filter wird mit Hilfe von integrierten MATLAB-Funktionen anhand der vorgegebenen Spezifikation erstellt, ebenso der Butterworth-Filter. Die Werte der normierten



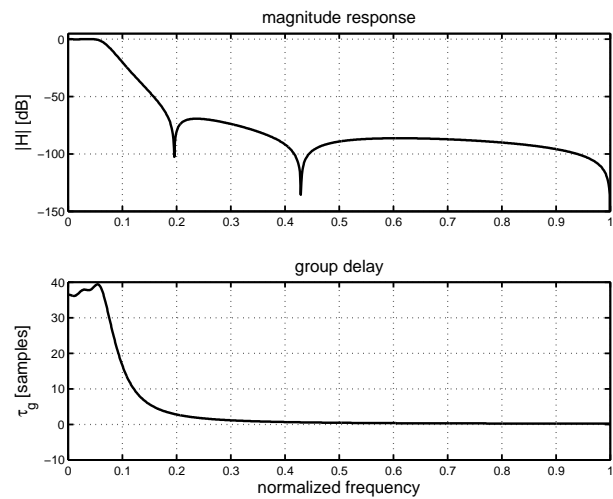
(a) Pol-/Nullstellenplan (Ordnung:9)



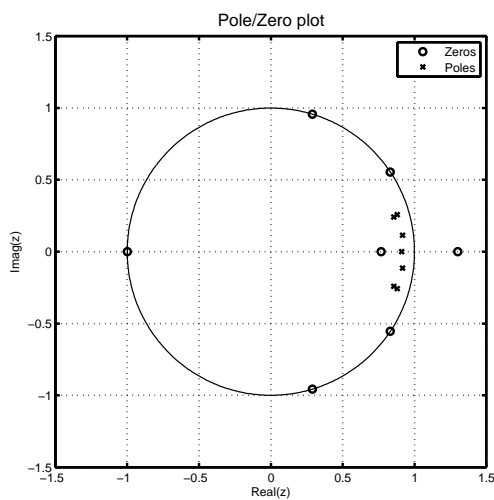
(b) Amplitudengang und Gruppenlaufzeit



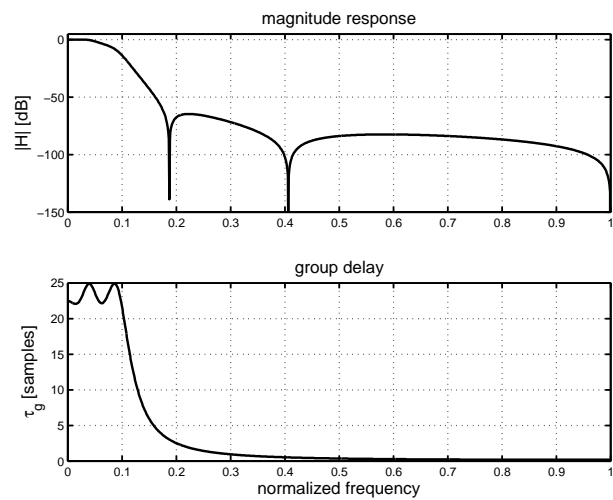
(c) Pol-/Nullstellenplan (Ordnung:9)



(d) Amplitudengang und Gruppenlaufzeit



(e) Pol-/Nullstellenplan (Ordnung:7)



(f) Amplitudengang und Gruppenlaufzeit

Abbildung 3.7: LWDF mit annähernd linearer Phase (=konstante Gruppenlaufzeit)

Frequenz des oberen Durchlassbereichs Fp sowie der Beginn des Sperrbereichs Fst wurden anhand der Überprüfung des Amplitudengangs iterativ an die anderen Filtertypen angepasst.

Im Folgenden sind die Funktionen aufgelistet, die zum Erstellen der Filter verwendet wurden:

```
%Matlab-file: fsk_show_all_filters_3.m

%FIR filter design:
f = fdesign.lowpass('Fp,Fst,Ap,Ast',0.08,0.18,0.1,40);
FIR = design(f,'equiripple');

%Butterworth filter design:
[b_butter,a_butter]=butter(5,0.115);
```

Die Filterordnung für den FIR-Filter beträgt 44 (45 Filterkoeffizienten).

3.7 Filtervergleich

Die Abbildungen in 3.8 zeigen die Amplituden- und Gruppenlaufzeitsverläufe der unterschiedlichen Filter. Als Basis dient die Matlab-Datei `fsk_show_all_filters.m`.

Die zu vergleichenden Filtertypen haben eine normierte Grenzfrequenz von etwa 0,11. Dies entspricht bei einer Abtastrate von $f_s = 1MHz$ etwa $0,11 \cdot f_s/2 = 55kHz$.

Der verwendete Allpassfilter hat eine Ordnung von 4.

Der Amplitudengang für den elliptischen Filter mit bzw. ohne kaskadiertem Allpassfilter ist derselbe, da die Betragsfunktion des Allpasses über das gesamte Spektrum konstant 1 (entspricht: $0dB$) ist.

Bei Betrachtung des Betragsgangs fällt auf, dass der elliptische Filter gegenüber den anderen Filtertypen kurz vor der Grenzfrequenz um maximal etwa $0.6dB$ weniger dämpft, um anschließend steil abzufallen. Das ist auch typisch für einen elliptischen Filter, und zeigt, dass er dem idealen Verhalten eines Tiefpasses im Betragsgang am nächsten kommt.

Der Filtertypen-Vergleich in Tabelle 3.4 lässt folgende Schlussfolgerungen zu:

- Alle Filter haben in etwa dieselbe Grenzfrequenz
- FIR-Filter und Elliptischer Filter (mit bzw. ohne Allpass [$|H_{AP}| = 1$]) unterscheiden sich, was den Übergangsbereich betrifft, fast nicht
- Der optimierte elliptische Filter hat die doppelte Übergangsbandsbreite als der FIR-Filter und benötigt um 20% weniger Bandbreite als der Butterworth-Filter

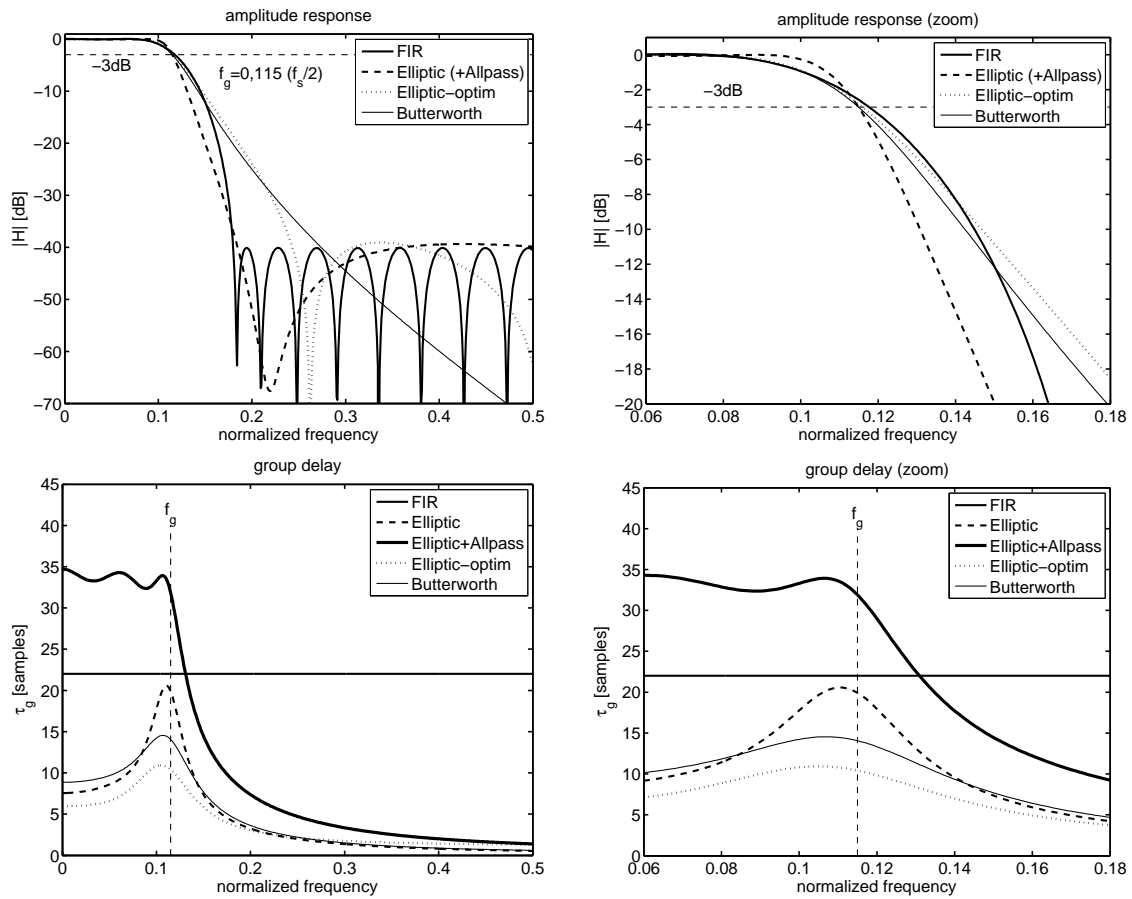


Abbildung 3.8: Amplituden/Gruppenlaufzeit-Verlauf von unterschiedlichen Filtertypen

Filtertyp	f_{pb}	f_{sb}	$\Delta f = f_{sb} - f_{pb}$	$\Delta\tau_g$ [samples]
FIR	0,1181	0,1802	0,0621	0,000
Elliptic	0,1151	0,1852	0,0701	13,013
Elliptic+Allpass	0,1151	0,1852	0,0701	2,804
Elliptic-optim	0,1161	0,2432	0,1271	4,966
Butterworth	0,1151	0,2743	0,1592	5,687

Tabelle 3.4: Vergleich: normalisierte Übergangsbreite und Gruppenlaufzeitänderung

Tabelle 3.4 zeigt des weiteren die Änderung der Gruppenlaufzeit der einzelnen Filter in einem Frequenzbereich von null bis zur Grenzfrequenz.

Der FIR-Filter hat über das gesamte Spektrum eine konstante Gruppenlaufzeit, daher ist die Änderung null. Die für die Gruppenlaufzeit mit heuristischer Optimierung erhaltene Version eines Chebyshev Typ II - Filters ist in etwa mit dem Butterworth-Filter vergleichbar, das zeigt sich auch im Verlauf des Phasengangs. Alles in allem ist die optimierte Version etwas besser. Ebenfalls darf nicht vergessen werden, dass durch den Null-Koeffizienten im optimierten elliptischen Filter eine 2-Tor-Parallel-Adaptoreinheit (ein Multiplizierer und drei Addierer) in der LWDF-Struktur weniger nötig ist, was bezogen auf den Ressourcenaufwand einen zusätzlichen Vorteil mit sich bringt.

Wie man in Abbildung 3.8 erkennen kann, ist der maximale Peak der Gruppenlaufzeit des elliptischen Filters von ehemals ca. 20 Samples (maximales $\Delta\tau_g$ im Durchlassbereich: 13 Samples) auf 10 Samples ($\Delta\tau_g$: 5 Samples) in der optimierten Version reduziert worden. Der Filtertyp nähert sich damit einen Chebyshev Typ II an, er bleibt aber beim Typ "Elliptisch" (Cauer), da er sowohl im Durchlass- als auch im Sperr-Bereich eine Oszillation (Ripple) aufweist. Der wesentliche Nachteil besteht in der merklichen Vergrößerung der Übergangsbandbreite.

Wie schon im Kapitel 2.3 beschrieben, sind Phasenlinearität und Übergangsbandbreite bei gleicher Filterordnung eines elliptischen Filters zwei Parameter, die einander entgegenwirken. Das bedeutet, je besser das eine ist umso schlechter ist das andere.

Inwieweit eine entscheidende Vergrößerung der Übergangsbandbreite für die Anwendung des Filters problematisch sein könnte, hängt individuell von der Verwendung ab und muss entsprechend geklärt werden.

In Tabelle 3.5 ist der Ressourcenaufwand der unterschiedlichen Filtertypen bzw. Realisierungsformen dargestellt.

	Ordnung	Addierer	Multiplizierer	Delays
FIR*	44	44	45	44
Elliptic	5	15+1	5 (+1)**	5
Elliptic+Allpass***	5+4	16+5	5+8	5+8
Elliptic-optim	5	12+1	4 (+1)**	5
Butterworth***	5	6	10	10
WDF-Allpass-Element	1	3	1	1

* Realisierung in Normalform

** Multiplikation mit 0.5 (=Schiebeoperation nach rechts)

*** Realisierung in Direktform I

Tabelle 3.5: Aufwandsabschätzung der unterschiedlichen Filtertypen

Weitere Erkenntnis bei Erhöhung der Filterordnung

Wird die Ordnung des Filters um zwei erhöht, und derselbe Algorithmus durchlaufen, kommt es zu keiner Verbesserung gegenüber des linearisierten Filters mit der niedrigeren Ordnung.

Dies führt zwangsläufig zur Erkenntnis, dass eine alleinige Polstellenplatzierung für die Erstellung eines steilflankigen Filters die Gruppenlaufzeit immer stark verändern wird (und damit auch den Phasenverlauf). Das Problem besteht darin, dass der Algorithmus die Nullstellen in der LWDF-Struktur primär alle am Einheitskreis platziert und nicht etwa als Quadrupel um den Einheitskreis.

3.8 Polverteilung unterschiedlicher Filterrealisierungen

Datei: test_quant_lwdf.m

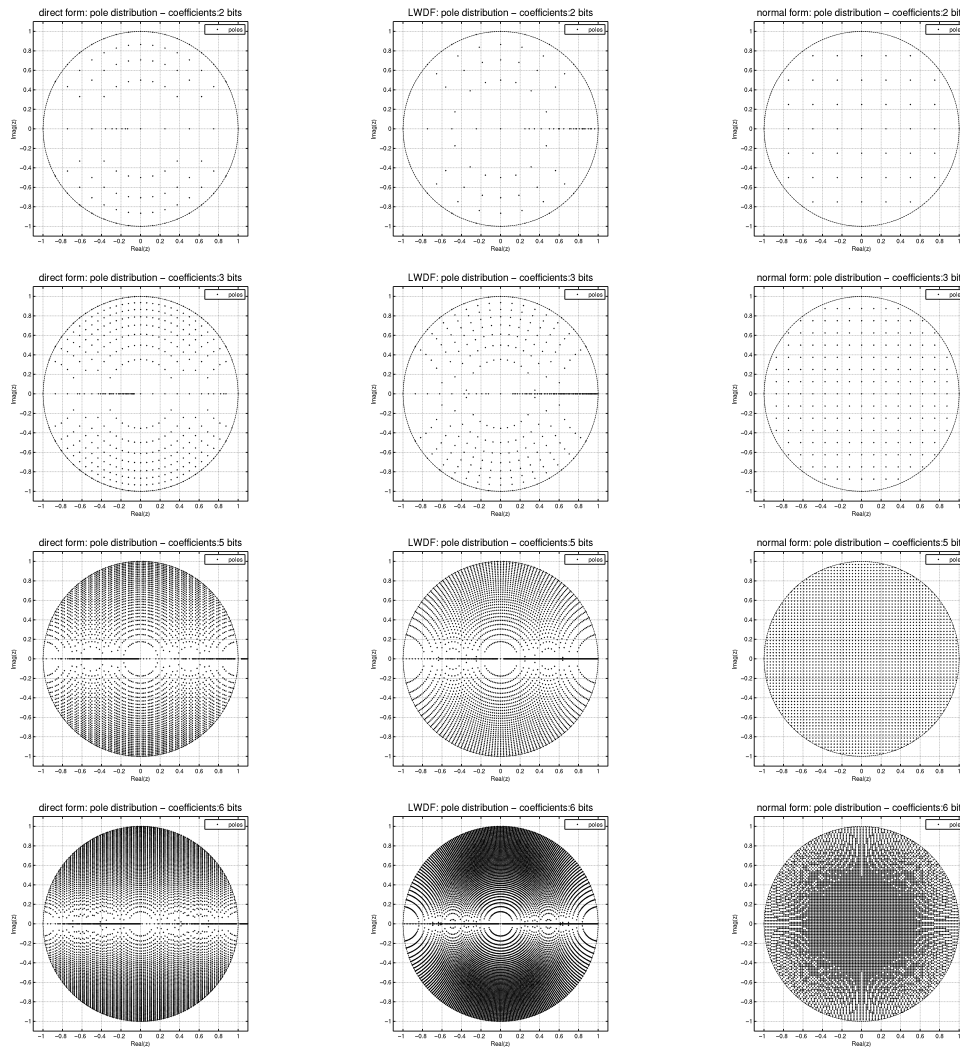


Abbildung 3.9: Polverteilung (links: Direktform; mittig: LWDF; rechts: Normalform)

Wird die Bitbreite der Koeffizienten verringert, wird die Anzahl der möglichen Positionen der Polstellen des Filters im Einheitskreis eingeschränkt (das Quantisierungsintervall wird größer und damit der Abstand zu benachbarten Polstellen).

Das Bild der möglichen Polverteilungen im Einheitskreis bei Wellendigitalfiltern (WDF) sieht nicht wesentlich anders aus als bei einem Direktform-Filter zweiter Ordnung. Die Poldichte ist insbesondere bei sehr niedrigen und sehr hohen Frequenzen niedrig.

Als Vergleich kommt es bei Normalform-Filtern zu einer Gleichverteilung der Polstellen über die gesamte Kreisfläche. Dadurch ist auch bei niedrigen und hohen Frequenzen eine Polplatzierung möglich, was zum Beispiel in der Audio-Technik Anwendung findet.[Sch00, S.423 ff.]⁴

Natürlich können mit sinkender Bitbreite Filterspezifikationsvorgaben immer weniger exakt eingehalten werden.

Nachfolgend sind die prinzipiellen Gleichungen mit den verwendeten Koeffizienten zu den Realisierungsformen angeführt. Interessant ist jeweils nur der Nenner, da es um die Polstellen geht.

Direktform zweiter Ordnung

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}$$

$$a = 2\operatorname{Re}(p_i)$$

$$b = |p_i|^2$$

$$p_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

WDF zweiter Ordnung

$$H(z) = \frac{1}{1 + (\gamma_1 + \gamma_2)z^{-1} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2)z^{-2}}$$

Normalform

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2)z^{-2}}$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} = -\alpha \pm j\beta$$

⁴ Es werden hier auch spezielle Filtertypen bzw. Filterdesigns erklärt, mit denen eine Art von Polverteilungs-Verzerrung zu niedrigen Frequenzen hin möglich ist, das sei hier aber nur nebenbei erwähnt.

3.9 FSK-Modell

3.9.1 Allgemeines zum Aufbau

Das FSK-Sender/Empfängermodell in 3.10 ist in Matlab realisiert und besteht aus einem Zufalls-Bitgenerator, einem einfachen IQ-Modulator, einem Übertragungskanal, auf dem das Signal mit Rauschen beaufschlagt wird (AWGN), sowie einem **Kanalfilter** und IQ-Phasendemodulator inklusive Differenzierer zur Frequenzbestimmung mit nachgeschaltetem Matched Filter (MF).

Der Kanalfilter spielt im vorliegenden Fall die zentrale Rolle.

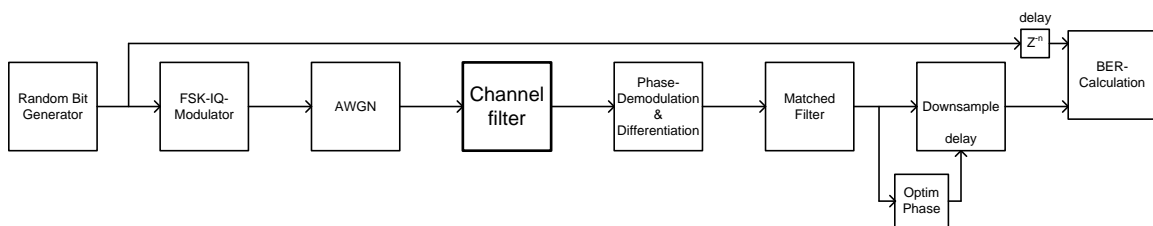


Abbildung 3.10: FSK-Übertragungsmodell

Die zufällig generierten übertragenen Bits werden mit den empfangenen Bits verglichen woraus die Bit Error Rate (BER) bestimmt werden kann. Dabei müssen der Abtastzeitpunkt fürs “Downsampling” und auftretende Verzögerungen für jeden Filter und jede neue Einstellung angepasst werden.

Es gilt, die Systembandbreite des Modells zu bestimmen. Die Frage ist, wie weit die Mittenfrequenz verschoben werden kann, bis die auf ein Bit bezogene Rauschleistung um $-3dB$ absinkt. Dazu wird eine “Grenz-BER“ von 10^{-3} definiert (d.h. ein Bit von 1000 gesendeten Bits ist fehlerhaft). Um eine statistisch valide Aussage zu erhalten, werden insgesamt 100000 Bits über die Übertragungsstrecke geschickt und ausgewertet.

Damit die Systembandbreite bestimmt werden kann, wird für jeden Filtertyp die Prozedur bei unterschiedlichen Mittenfrequenzen f_c und unterschiedlichen Signal-Rauschverhältnissen durchlaufen und die jeweilige BER berechnet. Zur Bestimmung des SNR bei einer BER von 10^{-3} für eine bestimmte Mittenfrequenz, muss eine Interpolation vorgenommen werden, da andernfalls der Rechenaufwand zu groß werden würde. Man müsste nämlich ansonsten das SNR solange verändern und immer wieder die Prozedur durchlaufen, bis man in die Nähe der gewünschten BER kommt.

So werden im vorliegenden Fall ca. 10 bis 20 SNR-Werte und ebensoviele Mittenfrequenz-Werte definiert und die BER bestimmt. Ein beispielhaftes Ergebnis ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

Dasselbe wird zusätzlich für unterschiedliche Modulationsindizes η und Datenraten f_{bit} vorgenommen um zu sehen, ob und wie sich diese Parameter auf das Ergebnis auswirken.

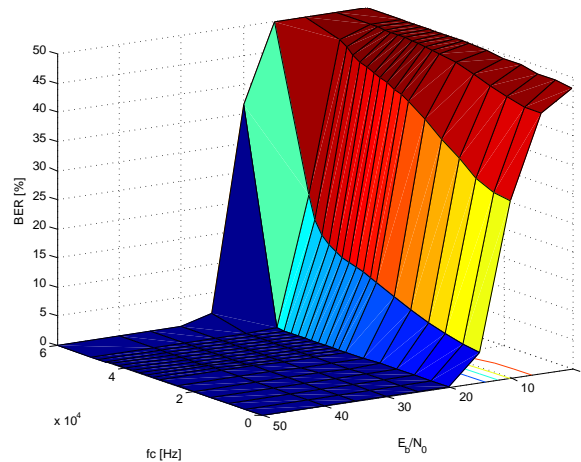


Abbildung 3.11: Bitfehlerrate bei Verwendung des elliptischen Kanalfilters

3.9.2 Beschreibung der erstellten Funktionen

Datei: fsk_model_iq_cpfsk.m

In dieser Funktion wird anhand von vorgegebenen Parametern für die Modulation (Datenrate, Mittenfrequenz, Modulationsindex) sowie der Angabe des Kanalfilters und der Rauschamplitude das Übertragungssystem simuliert. Als Ergebnis können die zeitlichen Verläufe und Spektren betrachtet werden und die erreichte BER (Bit Error Rate) wird ausgegeben.

Ein paar kurze Ausschnitte aus der Datei:

```
%CPFSK-Modulation:
for i=1:bits
    i_mod(1+(i-1)*length(t):i*length(t))=cos(2*pi*fvector(i)*t+
        phase_remem);
    q_mod(1+(i-1)*length(t):i*length(t))=-sin(2*pi*fvector(i)*t+
        phase_remem);
    phase_remem=2*pi*fvector(i)*T+phase_remem; %remember last phase
end

%fsk signal
fsk_mod=i_mod+1i*q_mod;

%add noise
```

```

fsk_mod_noise=awgn(fsk_mod,EbNo-10*log10(T*Fs),'measured',[],'dB');

%channel filter
msg_filter=0.5*filter(b_lwdf,a_lwdf,fsk_mod_noise);

%demodulation:
phase_out=unwrap(atan2(imag(msg_filter),real(msg_filter)));
%differentiate -> frequency
frequency_out=diff(phase_out)/(2*pi*Ts);

```

Mit der Funktion `fsk_model_iq_eye.m` kann das entsprechende Augendiagramm des MF-Ausgangssignals betrachtet werden.

Datei: `fsk_model_iq_finddelay.m`

Die Funktion hat die Aufgabe, den optimalen Abtastpunkt für den vorgegebenen Kanal-Filtertyp und die Mittenfrequenz zu finden.

Prinzipiell ist sie vergleichbar mit der Funktion `fsk_model_iq_cpfsk.m`, im Unterschied dazu wird hier aber nur ein kurzer, vorgegebener Bitstream durch das Modell geschickt ohne zusätzlichem Rauschen. Nach dem Matched-Filter wird ein bestimmter Bereich nach einem Maximum durchsucht, worauf man anhand der Position dieses Extremums den Verschiebungsvektor zum Nullpunkt berechnen kann. Dieser *delay*-Wert wird in weiterer Folge der Matlab-Funktion `downsample(x,ds,delay)` übergeben.

Um zu gewährleisten, dass der gesendete und empfangene Bitstream für die Berechnung der BER korrekt in Phase liegen, wird die Matlab-Funktion `finddelay(x,y)` benötigt, um die Verschiebung der Vektoren mittels Kreuzkorrelation festzustellen.

3.9.3 Simulation

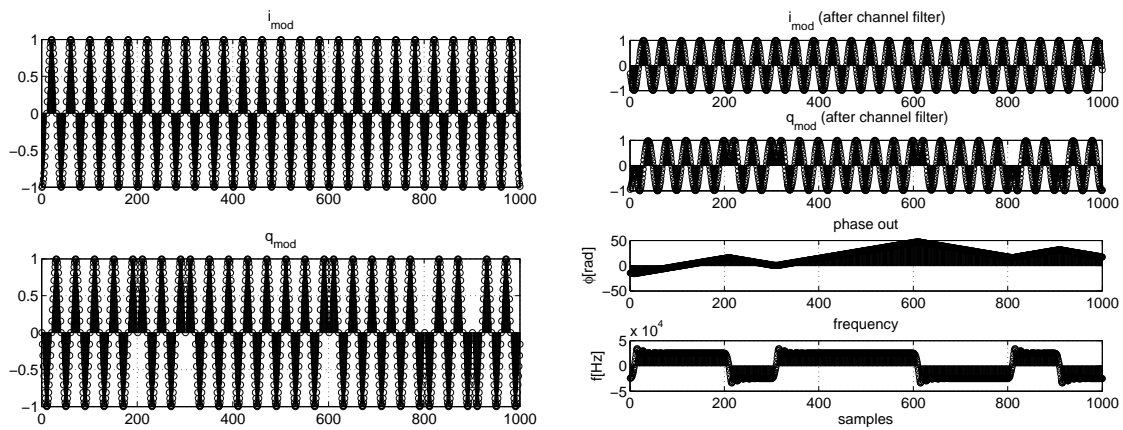
Das 2-FSK-Signal ist durch Amplitude, Mittenfrequenz, Frequenzhub, Symboldauer und Abtastfrequenz bestimmt.

Die Tabellen 3.6 und 3.7 zeigen als Beispiel verschiedene Einstellungen für das Matlab-CPFSK-Modell und die Abbildungen 3.12 und 3.15 stellen die dazugehörigen zeitlichen Signalverläufe bzw. Spektren dar. Als Kanalfilter wird der elliptische Filter verwendet. f_H wird aus Gleichung 2.134 bestimmt.

Der strichlierte Verlauf in den einzelnen Spektren stellt den Amplitudengang des Filters dar.

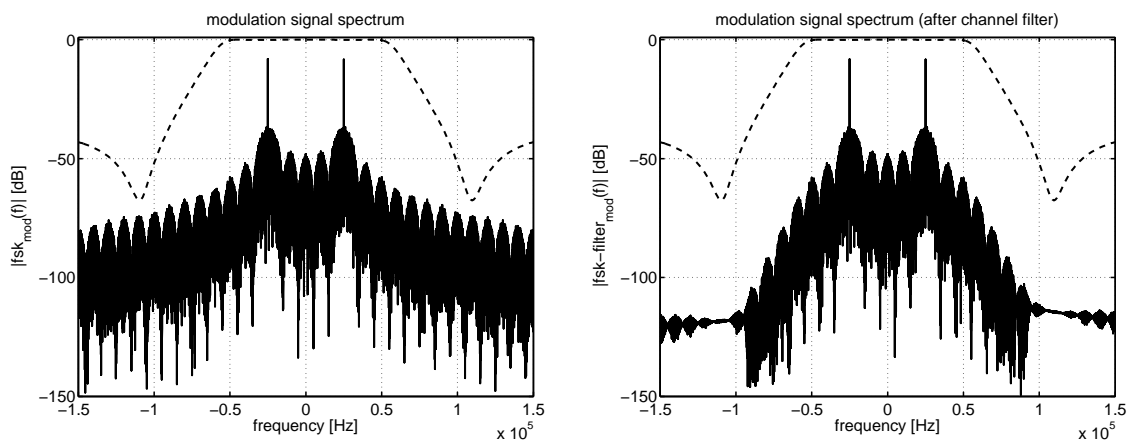
Bits	1,00E+05
η	5
f_s [Hz]	1,00E+06
f_{bit} [Hz]	1,00E+04
f_c [Hz]	0
E_b/N_0 [dB]	∞

Tabelle 3.6: Parameter für CPFSK-Modell



(a) IQ-Signal nach Modulator

(b) IQ-Signal nach Kanalfilter und demoduliertes Phasensignal sowie erste Ableitung (=Frequenz)



(c) IQ-Signalspektrum ohne Rauschen

(d) IQ-Signalspektrum nach Kanalfilter

Abbildung 3.12: IQ-Modulationssignal vor und nach Kanalfilter mit Spektrum

3.9.4 Augendiagramm

Wenn man das Augendiagramm für unterschiedliche Datenraten betrachtet, ist sofort erkennbar, dass mit zunehmender Bitrate die Auswirkungen der nichtlinearen Phase des Kanalfilters merkbar werden. In Abbildung 3.13 ist der Ausgang des Matched Filters für den ursprünglichen elliptischen Kanalfilter bei einem Modulationsindex von $\eta = 0,5$ für unterschiedliche Datenraten dargestellt.

Während es bei einer Datenrate von 10kbps zu einem nahezu idealen (dreieckförmigen) Verlauf kommt, sieht man bei 50kbps eine zunehmende Signalverzerrung und insbesondere bei 100kbps eine merkliche Verschlechterung was die Augenöffnung betrifft (Augenhöhe und Augenweite sind merklich reduziert). Der Grund liegt einerseits an den Amplitudenverzerrungen, die dadurch auftreten, da die Signalbandbreite die Filterbandbreite übersteigt, und damit Signalanteile gedämpft werden. Zum anderen entstehen Phasenverzerrungen durch den nichtlinearen Phasenverlauf des elliptischen Filters.

In Abbildung 3.14 wird der elliptische Filter bei der Datenrate von 100kbps mit dem kaskadierten Allpassfilter, dem optimierten Filter sowie dem FIR(-Referenz)-Filter verglichen.

Bei Verwendung eines Allpasses kommt es zu einer deutlichen Verbesserung der Signaleigenschaften. Gegenüber dem optimierten Filter ist der Allpass-Filter betreffend des Phasenjitters nicht besser, obwohl das Allpass-Diagramm eindeutig dem idealen FIR-Filter näherkommt. Der FIR-Referenzfilter liefert basierend auf dem idealen Phasenverlauf das beste Ergebnis.

Zur Beschreibung wurde der K-Faktor eingeführt. Das entspricht dem Verhältnis von der Symbolzeit zum Abtastintervall. Je kleiner der K-Faktor wird, umso größer wird der Einfluss der Phasen-Nichtlinearität.

Es wurde während der Bearbeitung dieser Arbeit eine Art „Faustformel“ für den entstehenden Phasenjitter, der auch im Augendiagramm sichtbar ist und eine horizontale Einengung des Auges bewirkt, erstellt.

Dabei geht man von der Bandbreite des CPFSK-Signals aus und betrachtet die Phasenlaufzeiten des Kanalfilters im dazugehörigen Spektralbereich. Wenn man nun die Differenz von höchster zu niedrigster Phasenlaufzeit bildet und den Wert mit der Symbolrate multipliziert, kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$E = SR \cdot \Delta\tau_{PD} = f_{Bit} \cdot \Delta N \cdot T_S = \Delta N \cdot \frac{T_S}{T_{Bit}} = \frac{\Delta N}{K} \quad (3.21)$$

Der erhaltene Wert kommt dem tatsächlichen Wert der Simulation schon recht nahe.

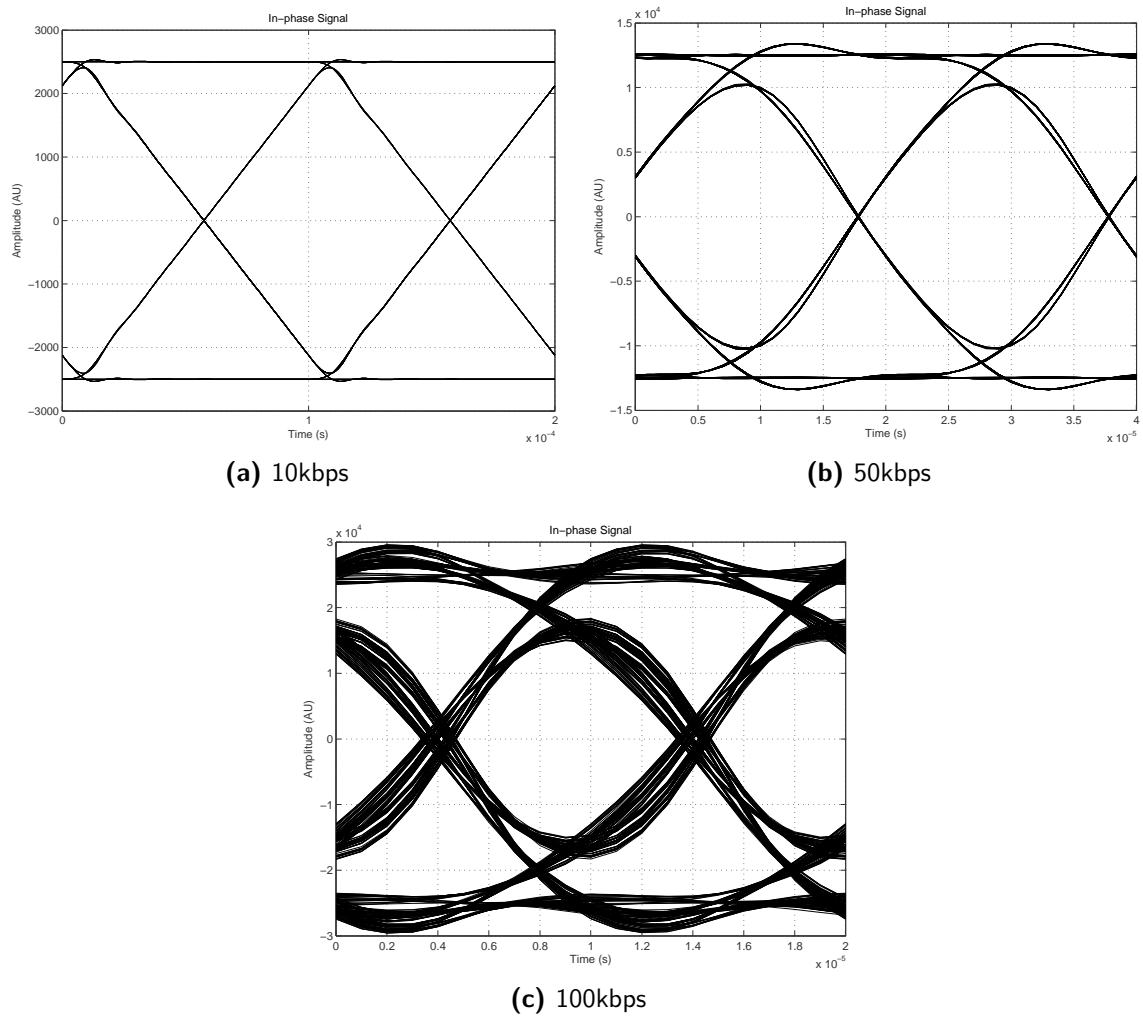


Abbildung 3.13: Augendiagramm (MF-Ausgangssignal) für unterschiedliche Datenraten bei $\eta = 0,5$ (Elliptischer Filter)

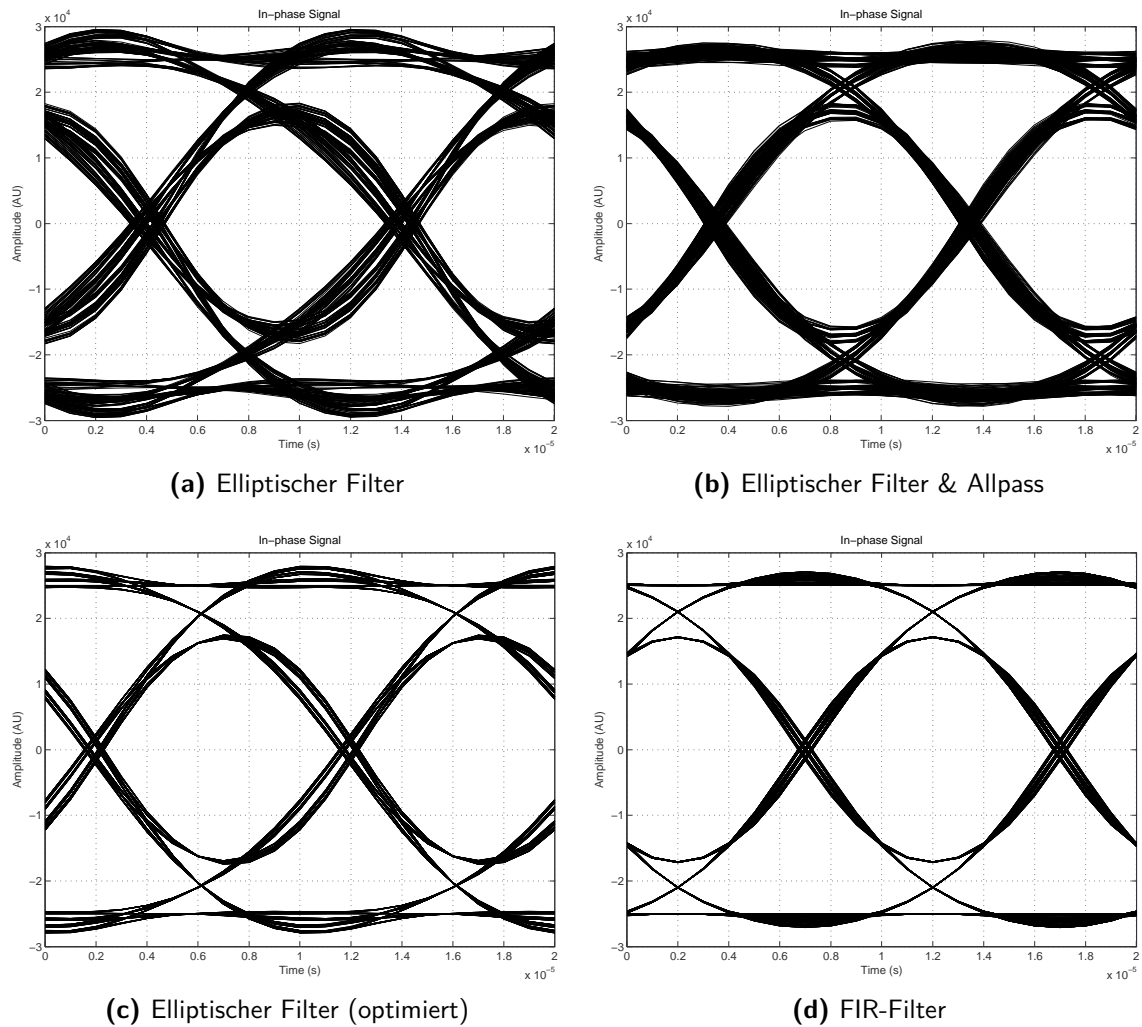


Abbildung 3.14: Augendiagramm (MF-Ausgangssignal) bei 100kbps für unterschiedliche Kanalfilter bei $\eta = 0,5$

Ein anderes Beispiel mit derselben Datenrate aber jetzt mit hinzugefügtem AWGN und einer veränderten Mittenfrequenz ist in Tabelle 3.7 und Abbildung 3.15 dargestellt.

Bits	1,00E+05
η	5
$f_s [Hz]$	1,00E+06
$f_{bit} [Hz]$	1,00E+04
$f_c [Hz]$	1,30E+04
$E_b/N_0 [dB]$	20

Tabelle 3.7: Parameter für CPFSK-Modell mit Rauschen

3.9.5 Betrachtung unterschiedlicher Modulationsindizes

Im Folgenden wird anhand von drei unterschiedlichen Modulationsindizes die Sensitivität bestimmt.

Verwendete Funktionen:

`fsk_model_iq_all_datarates_(1-3).m`

bestimmt für jeden Filtertyp anhand der vorgegebenen Parameter (Filterparameter, Modulationsparameter) unter Verwendung der Funktion `fsk_model_iq.m` die Bitfehlerraten.

`fsk_model_iq_analyze_all_datarates.m`

stellt die Sensitivitätsverläufe für jeden Filter dar.

Die System-Grenzfrequenz wird bestimmt, in dem der E_b/N_0 -Wert bei einer Mittenfrequenz von $f_c = 0$ berechnet wird und als Grenzfrequenz ein Abfall um $-3dB$ festgestellt wird.

Normalerweise führt die Verwendung eines FIR-Filters zur höchsten Systembandbreite, andere Filtertypen erreichen meist eine geringere Bandbreite, es kommt damit sozusagen zu einer Bandbreiten-Degradierung. Der Grund kann einerseits im Betrags- als auch andererseits im Phasengang des Filters liegen.

Die SNR-Degradierung wird bei einer Mittenfrequenz von $f_c = 0$ bestimmt. Auch hier wird wieder der FIR-Filter als Referenz hergenommen.

Modulationsindex: $\eta = 0,5$

Die unterschiedlichen Filtertypen verhalten sich bei niedrigen Datenraten in etwa gleich, man erkennt generell eine deutliche Verbesserung des Sensitivitätsverlaufes beim

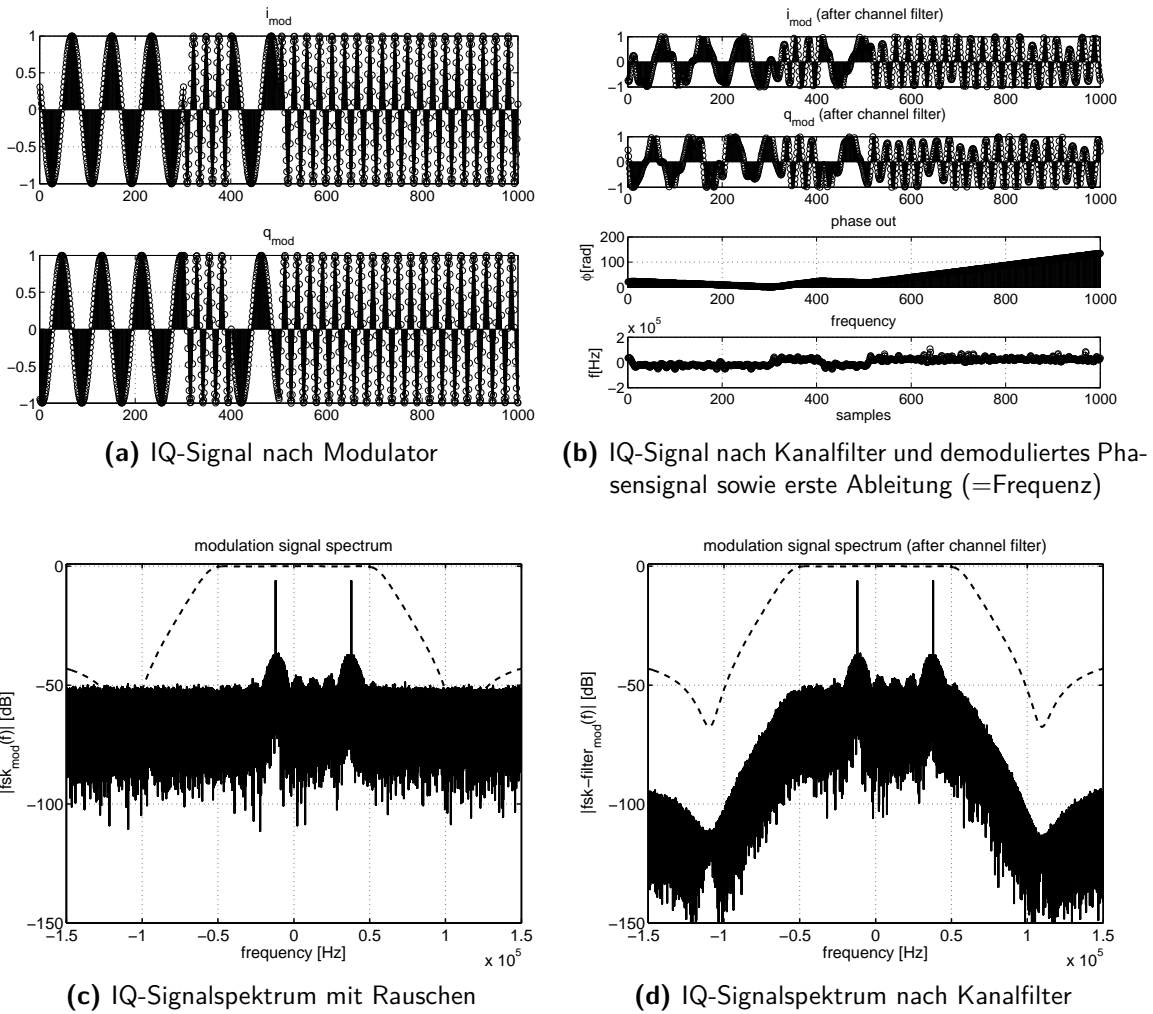


Abbildung 3.15: Verrauschtes IQ-Modulationssignal vor und nach Kanalfilter mit Spektrum

η	0,5
$f_{bit}[bps]$	[10 20 40 50 100]*1e3
$f_c[Hz]$	[0 5 10 15 20 25 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50]*1e3
$E_b/N_0[dB]$	[0.1 5 10 15 20 25 30 35 40 50]

Tabelle 3.8: FSK-Parameter für $\eta = 0,5$

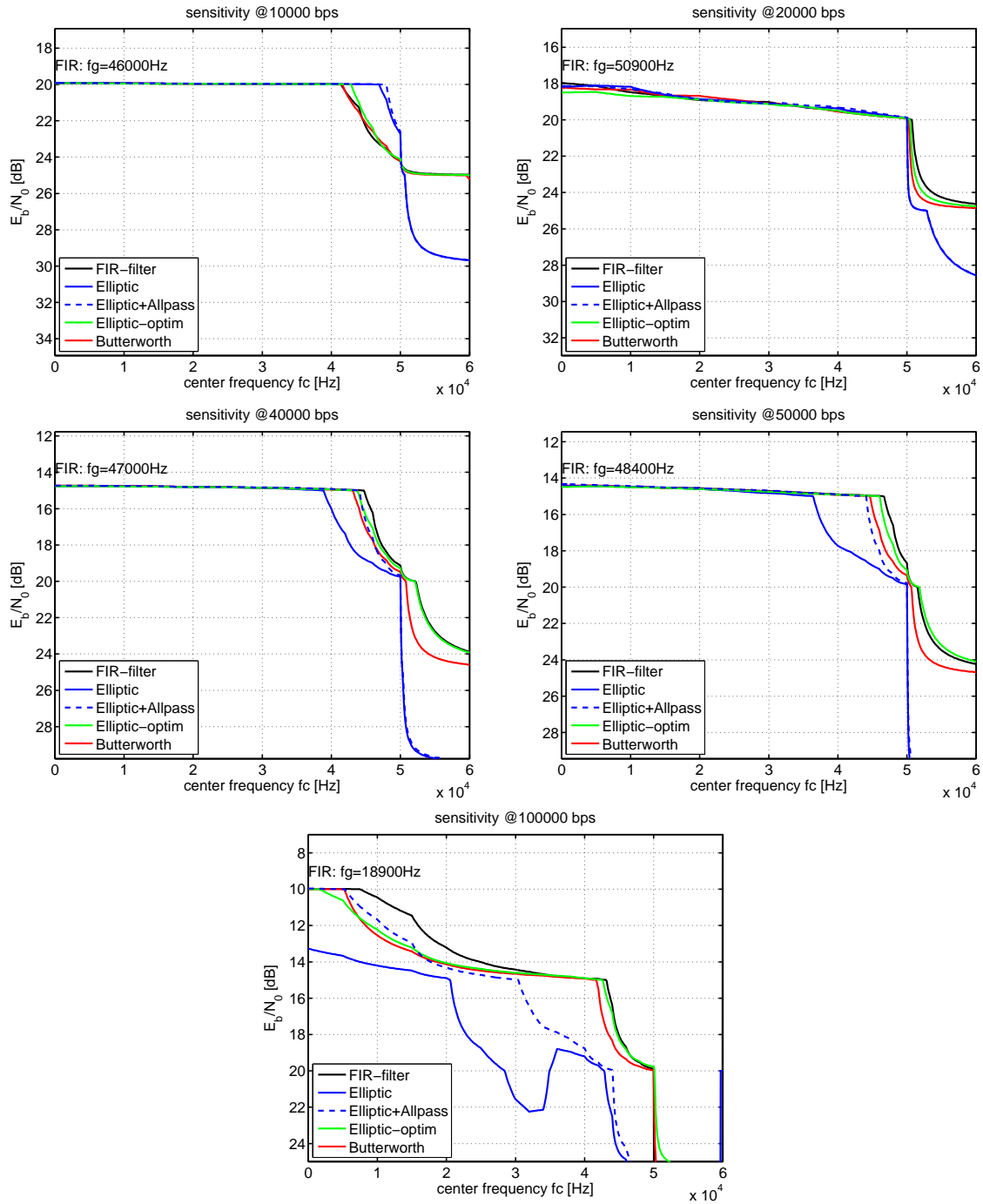


Abbildung 3.16: Modulationsindex: $\eta = 0,5$

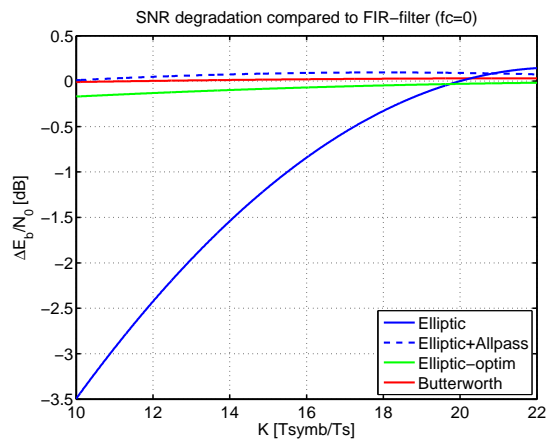


Abbildung 3.17: SNR-Degradierung bei $\eta = 0,5$

Hinzufügen eines Allpassfilters. Allerdings ist der kaskadierte Allpass nur bei höheren Datenraten rentabel, da erst hier Unterschiede von einigen dB erkennbar sind.

Mit der höchsten für die Simulation verwendeten Datenrate von 100kbps übersteigt die Signalbandbreite die Bandbreite der Filter. Eine höhere Datenrate ist für die vorliegende Spezifikation nicht möglich. Im Sensitivitätsdiagramm würde sich das dadurch bemerkbar machen, dass die Kurven aller Filter bei noch kleiner werdendem K -Faktor konvergieren würden.

Modulationsindex: $\eta = 1$

η	1
$f_{bit}[bps]$	[20 40 50 100]*1e3
$f_c[Hz]$	[0 5 10 15 20 25 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 60]*1e3
$E_b/N_0[dB]$	[0.1 5 10 15 20 25 30 35 40 50]

Tabelle 3.9: FSK-Parameter für $\eta = 1$

Modulationsindex: $\eta = 5$

Die Unterschiede zwischen den einzelnen Filtertypen fallen erst bei höheren Datenraten auf.

Es ist zu erkennen, dass die System-Grenzfrequenz (als Basis dient der FIR-Filter) mit steigender Datenrate immer kleiner wird. Das ist zu erwarten, da die Bandbreite

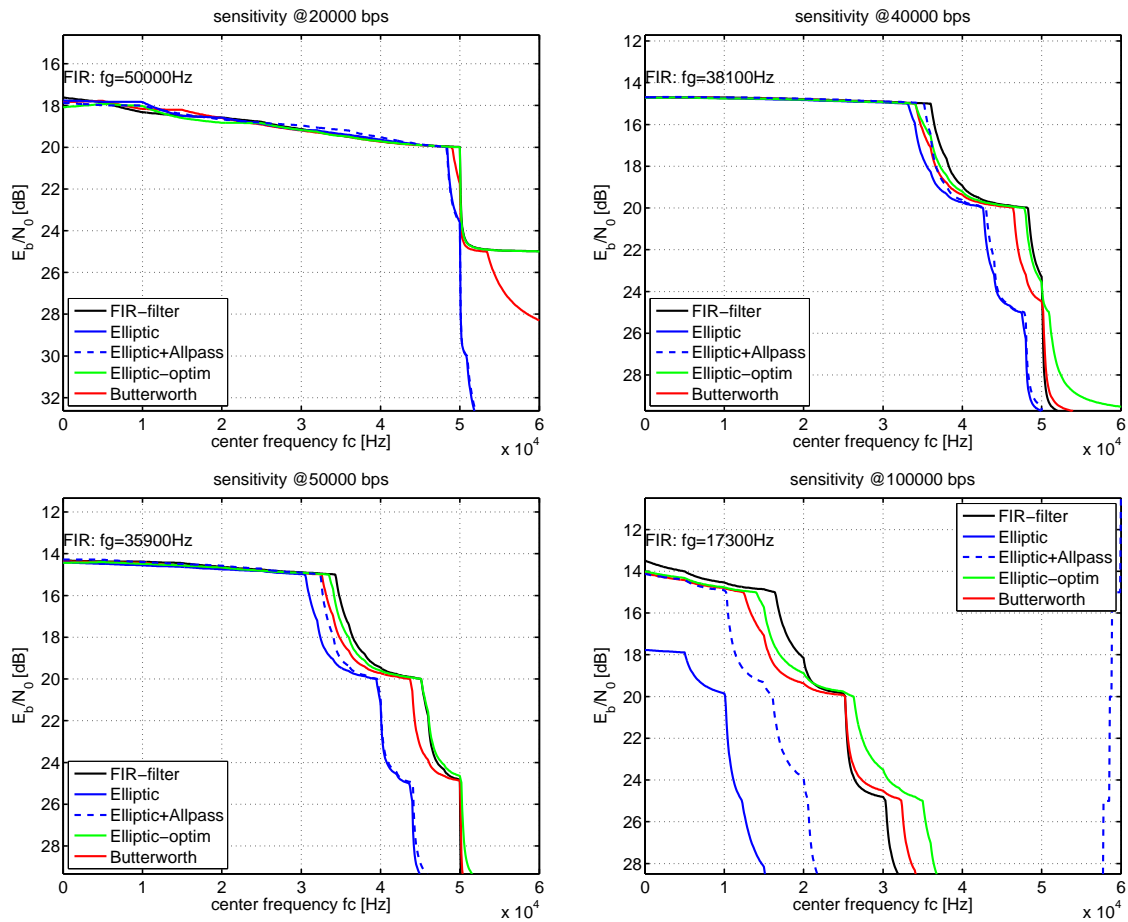


Abbildung 3.18: Modulationsindex: $\eta = 1$

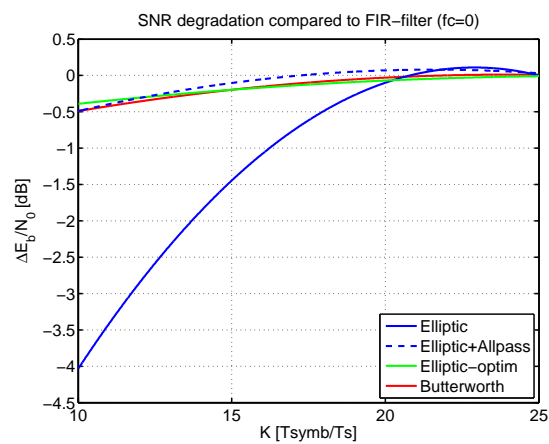


Abbildung 3.19: SNR-Degradierung bei $\eta = 1$

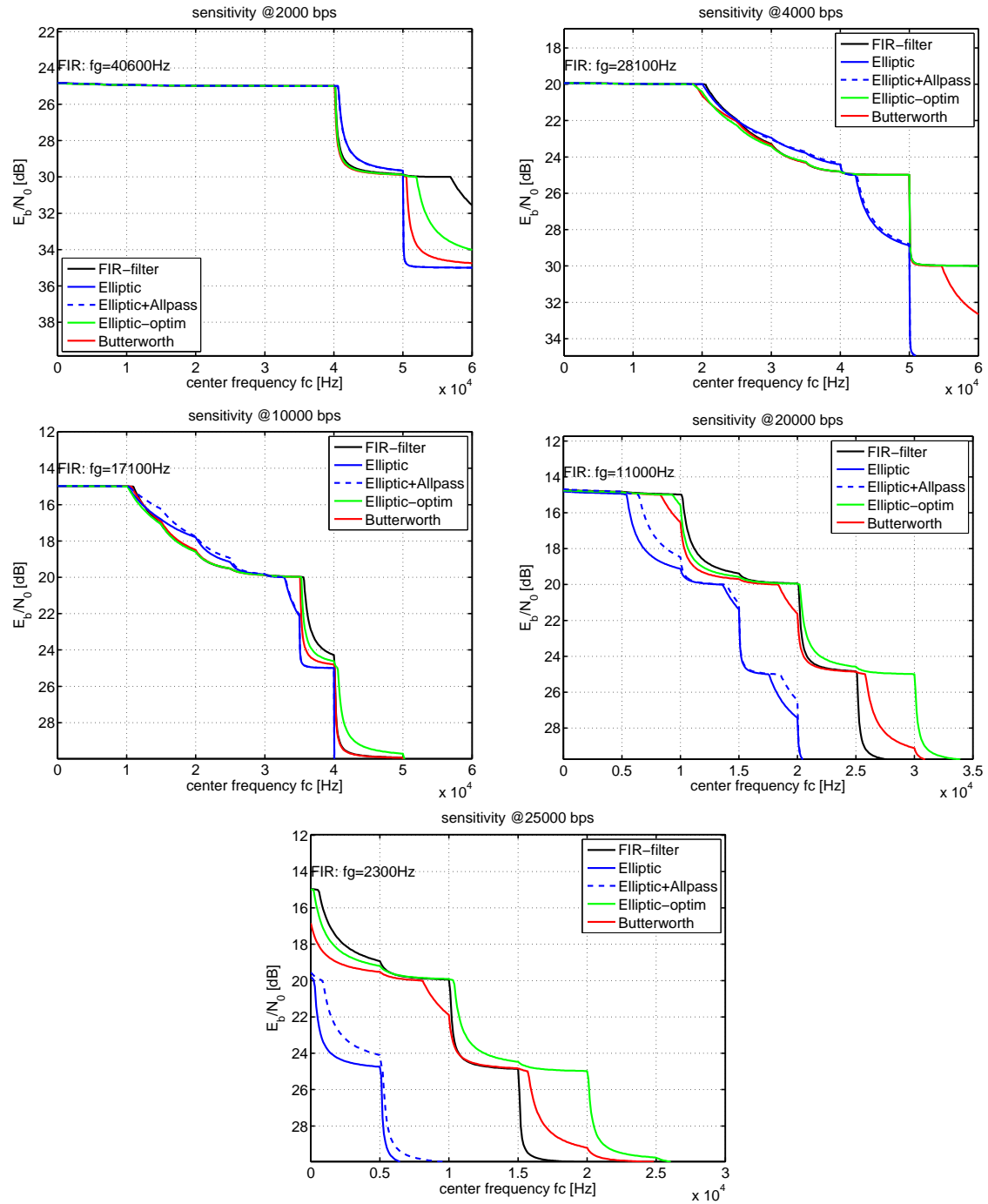
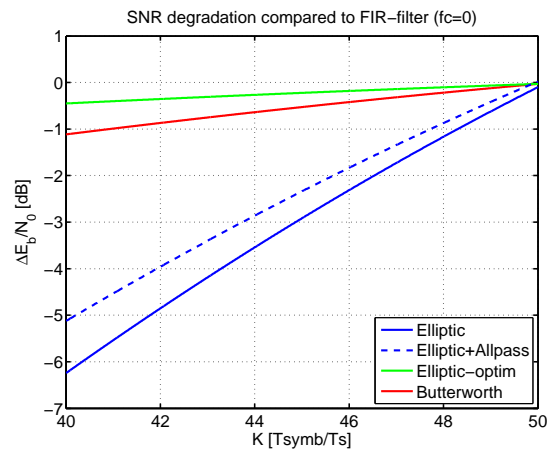


Abbildung 3.20: Modulationsindex: $\eta = 5$

η	5
$f_{bit}[bps]$	[2 4 10 20 25]*1e3
$f_c[Hz]$	[0 5 10 15 20 25 30 35 40 50 60]*1e3
$E_b/N_0[dB]$	[0.1 5 10 15 20 25 30 35 40 50]

Tabelle 3.10: FSK-Parameter für $\eta = 5$

Abbildung 3.21: SNR-Degradierung bei $\eta = 5$

des Modulationssignals bei höherer Datenrate auch größer wird, die Bandbreite des Kanalfilters bleibt aber gleich. Dasselbe passiert mit der SNR-Degradierung.

Die Plateaus in den Kurvenverläufen entstehen aufgrund der Verwendung einer linearen Interpolationsmethode. Andere Interpolationsmethoden sind bei der vorgegebenen relativen Bitfehlerrate nicht zielführend gewesen.

Um einen besseren Vergleich herzustellen, wurde ein Faktor eingeführt, der das Verhältnis von T_{symb} zum Abtastintervall T_s darstellt. Wird der K-Faktor kleiner, kommt es in einem nichtlinearen Zusammenhang zu einer Verschlechterung des Signal-Rauschabstandes. Genau gesagt ist ein höheres SNR nötig, um dieselbe BER zu erhalten.

3.10 Verwendete Entwicklungsumgebung

- Mathworks Matlab 7.6.0 (R2008a) und Version 7.9.0 (R2009b)

4 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden verschiedene Möglichkeiten der Linearisierung des Phasenverlaufs präsentiert. Von der Standardmethode des Allpasses, über Optimierungsverfahren bis hin zu speziellen Methoden, die auf die LWDF-Struktur abgestimmt sind.

Das Matlab-CPFSK-Modell einer Übertragungsstrecke zeigt, dass die sogenannte "Group Delay Distortion" durch den elliptischen Kanalfilter für die im Einsatz befindenden FSK-Empfänger und Datenraten keinen nennenswerten Einfluss auf die Demodulation hat. Erst bei höheren Datenraten spielt der nichtlineare Phasenverlauf bzw. die nicht konstante Gruppenaufzeit der Filter eine Rolle und es kommt zu merkbaren Unterschieden zwischen den einzelnen Filtertypen.

Vergleicht man die unterschiedlichen Typen von Filtern, so fällt auf, dass der reine, elliptische Filter das schlechteste Ergebnis bezüglich des Phasengangs liefert. Mit der Kaskadierung einer Allpass-Struktur kann das Verhalten im Durchlassbereich gut verbessert werden. Die nach dem FIR-Filter besten Ergebnisse bietet der Butterworth-Filter bzw. die durch den Optimierungsalgorithmus erhaltene Variante eines Chebyshev Typ II - Filters mit Einsparung eines 2-Tor-Parallel-Adaptors gegenüber der ursprünglichen Version des elliptischen Filters. Der optimierte Filter hatte annähernd denselben Phasengang wie der Butterworth-Filter, war in Summe aber etwas schneller. Im Gegenzug erhöhte sich die Übergangsbandsbreite merklich.

Der FIR-Filter wäre vom Phasengang her ideal, ist aber aufgrund seines ressourcenintensiven Aufwandes unrentabel.

Im vorliegenden Fall wurde ein Faktor eingeführt, der als das Verhältnis von Symboldauer T_{symb} zu Abtastintervall T_s definiert ist (K-Faktor). Man kann erkennen, dass das SNR mit kleiner werdendem K-Faktor größer werden muss, um dieselbe BER zu erhalten. Das Augendiagramm zeigt sehr schön die auftretenden Phasenverzerrungen und deren Unterschiede bei Verwendung unterschiedlicher Kanalfilter bei kleineren K-Werten.

Eine logische Erkenntnis ist, dass mit steigendem Modulationsindex die BER generell zunimmt. Das muss deshalb so sein, da die Bandbreite des Datensignals proportional zum Modulationsindex ansteigt aber die Filterparameter unverändert bleiben.

Wichtig ist, zu beachten, dass im vorliegenden Fall ein FSK-Empfänger mit optimalem Abtastzeitpunkt verwendet wurde. Realerweise sind in den Empfängerstrukturen

weitere Elemente wie zum Beispiel PLL-Strukturen implementiert, die Frequenz und Phasenlage rekonstruieren. (Die Daten sind dann Manchester-codiert, wodurch eine Frequenzrekonstruktion möglich ist)

Da eine durch den Kanalfilter verursachte nicht konstante Gruppenlaufzeit im Band des Modulationssignals immer zu einem horizontalen Schluss des Auges führt (zeitlicher Jitter), kann dies in besagten Strukturen mitunter zu Problemen führen. Daher lässt sich zusammenfassend sagen, dass sich der nichtlineare Phasenverlauf nicht merklich auf die Demodulation an sich auswirkt, aber sehr wohl auf die Toleranz der zeitlichen Unsicherheit des Abtastzeitpunkts. Das muss in realen Systemen, wo der Abtastzeitpunkt erst durch den Einsatz von Phasenregelschleifen bestimmt wird, entsprechend berücksichtigt werden.

Die Entscheidung, welche Filterkonstellation als Kanalfilter geeignet ist, hängt davon ab, welches Ergebnis man betrachtet und welchen zusätzlichen Aufwand man betreiben will. Die SNR-Degradierung zeigt eindeutig, dass der elliptische Filter das schlechteste Ergebnis bei höheren Datenraten liefert, zwischen den anderen Filtertypen ist mit Ausnahme des FIR-Filters kein wesentlicher Unterschied zu erkennen, daher bietet sich das Filter mit dem niedrigsten Ressourcenaufwand an (Elliptisches Filter mit Optimierung der Gruppenlaufzeit).

Beim Vergleich der Augendiagramme zeigt sich eine wesentliche Verbesserung des Phasenjitters bei Verwendung der Kaskade aus Elliptischen Filter und Allpass.

Zur speziell auf die LWDF-Struktur ausgelegten Methode der Phasenlinearisierung durch entsprechende Nullstellenplatzierungen (Hybrid-Ansatz) ist noch zu sagen, dass diese Variante besser ist, als die Verwendung eines elliptischen Filters mit Allpass. Zwar wäre für ein akzeptables Ergebnis die Ordnung in beiden Fällen gleich, allerdings ist der Hybrid-Ansatz insofern von Vorteil, da damit höhere Sperrdämpfungen möglich sind. Der Grund liegt darin, dass die zusätzlichen Polstellen durch Erhöhung der Filterordnung auf Amplituden- und Phasengang einen Einfluss haben, während ein kaskadierter Allpass mit entsprechender Ordnung nur mehr den Phasengang verändern kann, aber zu keiner Veränderung des Amplitudengangs führt.

Außerdem liegt die Vermutung nahe, dass durch den strukturellen Unterschied mit der Hybrid-Methode eine Verbesserung im Rauschverhalten gegenüber einer Filter-Allpass-Kaskade zu erwarten ist.

Symbolliste

a_i, b_i, c_i	Filterkoeffizienten
f	Frequenz
f_{Bit}	Bitrate
f_c	Mittenfrequenz
f_h	Hubfrequenz
f_s	Abtastfrequenz
s	komplexe Kreisfrequenz: $s = -\sigma \pm j\omega$
z	$e^{j\omega T_s}$
A	Kettenmatrix; vorlaufende Spannungswelle; Dämpfungsparameter
B	rücklaufende Spannungswelle
C	Kapazität; charakteristische Funktion
G	Leitwert
H	Übertragungsfunktion
I	Strom
L	Induktivität
N	Filterordnung
P	Leistung
R	ohmscher Widerstand
S	Streumatrix; S-Parameter; Übertragungsfunktion (Wellendigitalfilter)
T_s	Abtastperiode
T_{symb}	Symboldauer
U	Spannung
Z	Impedanzmatrix; Impedanz

γ	Adaptorkoeffizient
ε	Fehlerfunktion
η	Modulationsindex
π	mathematische Konstante: 3,1415
ρ	Reflexionsfaktor
τ_g	Gruppenlaufzeit
φ	Phasenverlauf
ω	Kreisfrequenz: $2\pi f$

Abkürzungsverzeichnis

ADC	Analog-to-Digital-Converter
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BER	Bit Error Rate
CSD	Canonic Signed Digit
CPFSK	Continuous Phase Frequency Shift Keying
FIR	Finite Impulse Response
FSK	Frequency Shift Keying
IC	Integrated Circuit
IIR	Infinite Impulse Response
LWDF	Lattice - Wave Digital Filter
LZI	linear zeitinvariant
PLL	Phase Locked Loop
ROC	Region of Convergence
SNR	Signal to Noise Ratio
WDF	Wave Digital Filter

Literaturverzeichnis

- [AA06] Sabbir U. Ahmad and Andreas Antoniou. A genetic-algorithm based approach for the design of delay equalizers. In *Proc. Canadian Conf. Electrical and Computer Engineering CCECE '06*, pages 763–766, 2006.
- [AM08] A. Azizzadeh and L. Mohammadi. Degradation of BER by Group Delay in Digital Phase Modulation. In *Proc. Fourth Advanced Int. Conf. Telecommunications AICT '08*, pages 350–354, 2008.
- [Arr03] H.J. Lincklaen Arriëns. Calculation of the Coefficients of a Lattice Wave Digital Filter. TU Delft, June/October 2003.
- [Bah90] H. Baher. The simultaneous amplitude and phase approximation problem [linear phase filters]. In *Proc. IEEE Int Circuits and Systems Symp*, pages 2057–2060, 1990.
- [ber] URL: <http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html>.
- [de-] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_evolution. Abgerufen am 10.02.2012.
- [ella] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_filter. Abgerufen am 02.10.2011.
- [ellb] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_rational_functions. Abgerufen am 02.10.2011.
- [Fet86] A. Fettweis. Wave digital filters: Theory and practice. 74(2):270–327, 1986.
- [FM75] A. Fettweis and K. Meerkotter. On adaptors for wave digital filters. 23(6):516–525, 1975.
- [FOHS88] J. Foldvari-Orosz, T. Henk, and E. Simonyi. Simultaneous amplitude and phase approximation for lumped and IIR-filters. In *Proc. IEEE Int Circuits and Systems Symp*, pages 2501–2504, 1988.
- [Frö08] H. Fröhlich. Wellendigitalfilter WDF - Von der Idee zur Implementierung. Bachelor's thesis, 2008.

- [Gaz85] L. Gazsi. Explicit formulas for lattice wave digital filters. 32(1):68–88, 1985.
- [Hue03] M. Huemer. Nachrichtentechnik, 1. Auflage. Hardware / Software Systems Engineering, Fachhochschule Hagenberg, 2002/2003.
- [JS94] B. Jaworski and T. Saramaki. Linear phase IIR filters composed of two parallel allpass sections. In *Proc. IEEE Int Circuits and Systems ISCAS '94. Symp*, volume 2, pages 537–540, 1994.
- [JW] Hakan Johansson and Lars Wanhammar. Design of linear-phase lattice wave digital filters. In *Department of Electrical Engineering, Linköping University*.
- [Kun88] I. Kunold. Linear phase realization of wave digital lattice filters. In *Proc. Int Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP-88. Conf*, pages 1455–1458, 1988.
- [Lee91] F. Leeb. Lattice wave digital filters with simultaneous conditions on amplitude and phase. In *Proc. Int Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP-91. Conf*, pages 1645–1648, 1991.
- [LL94] M. Lang and T. I. Laakso. Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion. 41(1):40–48, 1994.
- [lwda] URL: http://ens.ewi.tudelft.nl/~huib/free/wdf_tbx_v1_0_1.zip.
- [lwdb] URL: http://ens.ewi.tudelft.nl/~huib/mtbx/more_wdfs.php.
- [MFQP04] A. Petraglia M. F. Quelhas and M. R. Petraglia. Efficient group delay equalization of discrete-time IIR filters. In *Program of Electrical Engineering, COPPE, EE - Federal University of Rio de Janeiro*, 2004.
- [PKdASR08] J. Piskorowski, R. Kaszynski, M. de Anda, and A. Sarmiento-Reyes. Group delay compensation and settling time minimization in continuous-time elliptic filters. In *Proc. 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conf. MELECON 2008*, pages 12–16, 2008.
- [ptg] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Group_delay_and_phase_delay. Abgerufen am 10.02.2012.
- [RMV88] P. A. Regalia, S. K. Mitra, and P. P. Vaidyanathan. The digital all-pass filter: a versatile signal processing building block. 76(1):19–37, 1988.
- [SAS99] K. Surma-Aho and T. Saramaki. A systematic technique for designing approximately linear phase recursive digital filters. 46(7):956–963, 1999.

- [Sch00] D. Schlichthärle. *Digital Filters: Basics and Design, 2nd Edition*. Signal processing. Springer, 2000.
- [SS09] H.W. Schabler and H.W. Schüßler. *Digitale Signalverarbeitung 2: Entwurf Diskreter Systeme*. Number Bd. 2. Springer, 2009.
- [Ste00] Mario Steinert. Implementierung und Anwendung einer Filterverifikationsmethodik für den Entwurf von Digitalfiltern zur Untersuchung von Quantisierungseffekten. Master's thesis, Hochschule Mittweida (FH), 2000.
- [Ul1b] G. Ulbricht. *Grundgebiete der Elektrotechnik*. epubli.
- [Weg78] W. Wegener. On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range. 25(12):1091–1098, 1978.
- [YK02] Juha Yli-Kaakinen. *Optimization of Digital Filters for Practical Implementations*. PhD thesis, Tampere University of Technology, 2002.
- [ZWcZ⁺10] Lei Zhao, Peng Wang, Zhen chong Zhang, Jian ping Wang, Guo jun Zhang, and Zhe ying Li. Design and simulation of a group delay equalizer circuit. In *Proc. First Int Pervasive Computing Signal Processing and Applications (PCSPA) Conf*, pages 1302–1305, 2010.
- [zwe] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Zweiter>. Abgerufen am 14.02.2011.