

Masterarbeit

# Entwurf und Realisierung von Mehrgrößenregelungskonzepten am Beispiel des 4-Tank-Systems

Markus Seebacher  
markus.seebacher@student.tugraz.at

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik  
Technische Universität Graz

2011

## Zusammenfassung

Ein Mehrgrößensystem bestehend aus vier miteinander verbundenen Tanks und zwei Pumpen wird vorgestellt.

Am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz wird ein bereits bestehender Laboraufbau eines 3-Tank-Systems zu dem in dieser Arbeit vorgestellten 4-Tank-System erweitert. Die Parameter der Tanks dieses Versuchsaufbaus werden durch Auslaufversuche ermittelt, Kennlinien für Pumpen und Sensoren experimentell bestimmt. Die Parameter des Labormodells werden für alle Berechnungen herangezogen.

Ein nichtlineares mathematisches Modell dieses Mehrgrößensystems wird abgeleitet und validiert. Dieses wird anschließend um einen Arbeitspunkt linearisiert. Wesentliche Systemeigenschaften werden analysiert, die Hauptursachen für Abweichungen des Modells vom Versuchsaufbau werden aufgezeigt.

Durch die Änderung zweier Ventilstellungen kann eine Nullstelle der Übertragungsmatrix des Gesamtsystems von der linken in die rechte komplexe Halbebene verschoben werden, wodurch aus einem minimalphasigen System ein nicht-minimalphasiges wird. Für beide Fälle werden Regelungskonzepte entworfen, simuliert und am Labormodell realisiert. Im minimalphasigen Fall wird eine entkoppelte Eingrößenregelung implementiert, im nicht-minimalphasigen Fall werden eine 2-Tank Kaskadenregelung, ein integrierender Zustandsregler und eine  $H_\infty$ -Regelung miteinander verglichen.

## Abstract

A multivariable system consisting of four interconnected tanks and two pumps is introduced. An existing 3-tank-system at the Institute of Automation and Control of the Graz University of Technology is extended to the 4-tank-system introduced in this thesis. Parameters from the tanks are evaluated using runout experiments, as well as characteristic curves for pumps and sensors. These data are used for all calculations throughout this thesis.

A nonlinear mathematical model for this system is derived and validated. An operating point is determined and a linearized model is calculated. Fundamental characteristics are analyzed and main reasons for deviations between the mathematical model and the real 4-tank-system are highlighted: By changing a valve, one may move a multivariable zero of the transfer matrix of the system from the left to the right complex half-plane, which results in changing the behaviour of the system from minimum to nonminimum phase. For both cases control strategies are developed, simulated and implemented on the laboratory model. For the minimum phase system, a decoupled SISO controller is introduced, in the non-minimum case, a 2-tank cascaded control, a state-space controller with integral behaviour and a  $H_\infty$  controller are compared.

Deutsche Fassung:  
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008  
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

## EIDESSTÄTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....  
(Unterschrift)

Englische Fassung:

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....  
date

.....  
(signature)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>3</b>
2.1	Physikalisches Modell . . . . .	4
2.2	Arbeitspunkt . . . . .	13
2.3	Linearisierung . . . . .	15
2.4	Systemanalyse . . . . .	17
2.5	Validierung des linearisierten Modells . . . . .	24
2.6	Labora Aufbau . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Regelungskonzepte</b>	<b>32</b>
3.1	Linearisierung, Arbeitspunkt . . . . .	32
3.2	Minimalphasiges System . . . . .	33
3.2.1	Entkoppelte Eingrößenregelung: integrierender Zustandsregler	35
3.3	Nicht minimalphasiges System . . . . .	41
3.3.1	Eingrößenregelung: 2-Tank Kaskadenregelung . . . . .	42
3.3.2	Mehrgrößenregelung: integrierender Zustandsregler . . . . .	46
3.3.3	Mehrgrößenregelung: $H_\infty$ Regelung . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>58</b>
	<b>Literatur</b>	<b>60</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>61</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>63</b>

# 1 Einleitung

Viele regelungstechnische Systeme sind mit mehreren Aktuatoren ausgestattet, die das statische und dynamische Verhalten derselben beeinflussen können. Oft sind zusätzlich mehrere Messgrößen vorhanden, die mittels Rückkopplung zur Regelung des Gesamtverhaltens herangezogen werden. Systeme mit mehreren Eingangsgrößen und mehreren Ausgangsgrößen werden als Mehrgrößensysteme oder Multi-Input-Multi-Output (MIMO) Systeme bezeichnet. Sie besitzen Eigenschaften und zeigen Verhalten, welche in Eingrößensystemen (SISO) nicht vorkommen. Beispielsweise kann das Gesamtsystem nicht-minimalphasig sein, obwohl jedes Teilsystem minimalphasig<sup>1</sup> ist. Oft ist es nur mit Mehrgrößenregelungskonzepten möglich, den speziellen Herausforderungen von Mehrgrößensystemen gegenüberzutreten zu können und den Anforderungen, die an das Gesamtsystemverhalten gestellt werden, gerecht zu werden.

Diese Diplomarbeit beschreibt ein *4-Tank-System*, ein Mehrgrößensystem mit variablen Nullstellen, dargestellt in Abbildung 1, welches im Zuge dieser Arbeit am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz realisiert wurde und die Ansätze von (K. Johansson & Nunes, 1998) verwendet.

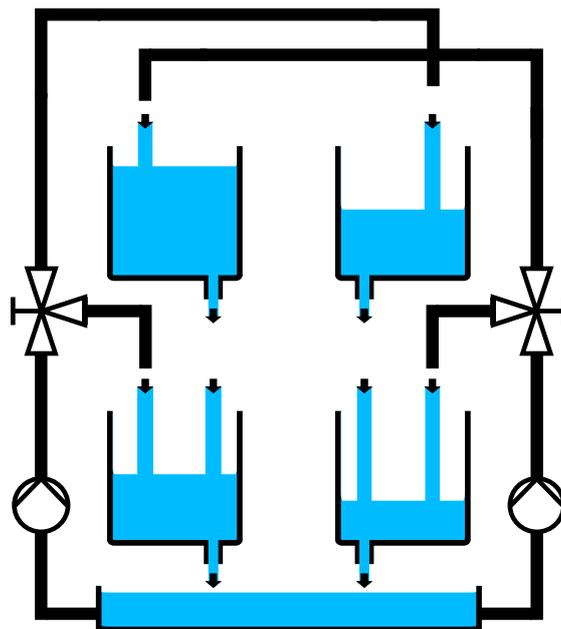


Abbildung 1: 4-Tank-System

---

<sup>1</sup>In der Regelungstechnik wird ein System mit gebrochener rationaler Übertragungsfunktion als minimalphasig bezeichnet, wenn es ausschließlich Pole und Nullstellen mit negativem Realteil besitzt, siehe (Lunze, 2008, Kapitel 6.7.6).

Es besteht aus vier Tanks, von denen je zwei übereinander angeordnet sind, und zwei Pumpen. Die Eingangsgrößen des Systems sind die Pumpenspannungen, und die Pegelstände in den zwei unteren Tanks werden als Ausgangsgrößen aufgefasst. Der Pegelstand in einem unteren Tank hängt von beiden Eingangsgrößen ab. Über einstellbare Ventile kann das Verhältnis der Zuflüsse in die jeweiligen Tanks vorgegeben werden. Wie sich zeigen wird, sind allein die Ventilstellungen für eine wesentliche Systemeigenschaft verantwortlich: Wird in Summe mehr Wasser in die unteren beiden Tanks gepumpt, ist das System minimalphasig. Werden die Ventilstellungen derart verändert, dass in Summe mehr Wasser in die oberen Tanks gepumpt wird, wandert eine Nullstelle in die rechte komplexe Halbebene und das System ist nicht mehr minimalphasig.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: In Kapitel 2 wird die Modellbildung behandelt. Aus den physikalischen Eigenschaften der einzelnen Teilkomponenten Tank und Pumpe wird das nichtlineare Gesamtmodell abgeleitet und durch Experimente am Laboraufbau validiert. Ein Arbeitspunkt wird ermittelt und eine Linearisierung um diesen durchgeführt. Wesentliche Eigenschaften des resultierenden linearen Modells werden untersucht. Eine Validierung des linearisierten Modells zeigt auf, durch welche Faktoren hauptsächlich Modellungenauigkeiten auftreten werden.

Kapitel 3 beschreibt die entworfenen und realisierten Regelungskonzepte, für den minimalphasigen und den nicht-minimalphasigen Fall, wobei bei letzterem die Vorteile von Mehrgrößenregelungskonzepten untersucht werden sollen. Für das minimalphasige System wird eine entkoppelte Eingrößenregelung implementiert, es kann hiermit sehr gut geregelt werden. Für das nicht-minimalphasige System wird eine 2-Tank Kaskadenregelung entwickelt. Dieses Eingrößenregelungskonzept wird mit zwei Mehrgrößenregelungskonzepten verglichen. Diese sind: Ein integrierender Zustandsregler und eine  $H_\infty$ -Regelung. Bei ersterem ist die Lösung des zugrundeliegenden Polvorgabeproblems im Mehrgrößenfall nur eindeutig, wenn gleich viel Eingangsgrößen wie Zustände existieren. Die bei dieser Aufgabenstellung auftretende Mehrdeutigkeit wird verwendet, um die Regelung bezüglich der Robustheit der vorgegebenen Pole gegenüber Störungen zu optimieren. Bei der  $H_\infty$ -Regelung ist man bestrebt, die Energieverstärkung der Störgrößen auf die Ausgangsgrößen unter Berücksichtigung von Systembeschränkungen und Vorgaben zu minimieren.

Mit jedem Regelungskonzept werden Versuche durchgeführt, um die Sinnhaftigkeit und die Leistungsfähigkeit der untersuchten Methode den anderen gegenüberstellen zu können.

Abschließend werden die Ergebnisse zusammengefasst und Vorschläge für weiterführende Arbeiten gegeben.

## 2 Modellbildung

Dieses Kapitel beschreibt die Entwicklung eines linearen, zeitinvarianten Modells für das *4-Tank-System*. Zuerst werden physikalische Modelle für einen einzelnen Tank und eine Pumpe erstellt. Hierbei werden Ergebnisse von dem in (Horn & Dourdoumas, 2004, Kapitel 14.2) und (Fruhmann, 1992) beschriebenen 3-Tank-System herangezogen, da die selben Tanks und Pumpen zum Einsatz kommen. Diese Grundelemente werden anschließend zu einem 4-Tank-Modell zusammengefügt und validiert.

Wie wir sehen werden, ist das mathematische Modell nichtlinear und soll daher einer Linearisierung unterzogen werden. Dafür wird zuerst ein *Arbeitspunkt* für den stationären Betrieb gesucht. Ist dieser gefunden, so wird mittels Taylorreihenentwicklung eine *Linearisierung* für kleine Auslenkungen um diesen Arbeitspunkt durchgeführt. Das resultierende (um einen Arbeitspunkt) lineare, zeitinvariante System wird abschließend in eine allgemein übliche Matrizendarstellung übergeführt.

Eine *Systemanalyse* des gewonnen Systems soll aufzeigen, mit welchen Herausforderungen aufgrund der Eigenheiten des Modells zu rechnen ist und welche Eigenschaften keiner tieferen Analyse bedürfen.

Im letzten Unterkapitel der Modellbildung wird das gefundene mathematische Modell mit dem realen Labormodell verglichen. Wie sich zeigen wird, gibt es einige Effekte, die den Versuchsaufbau vom gefundenen Modell abweichen lassen. Als Hauptursache der Ungenauigkeit werden die verwendeten Pumpen mit ihren nicht nachvollziehbaren Kennlinienabweichungen erkannt und beschrieben.

Trotz der teilweisen Differenz des mathematischen Modells vom realen Laboraufbau kann davon ausgegangen werden, dass die wesentlichen Eigenschaften des 4-Tank-Systems berücksichtigt sind. Eine Verwendung des berechneten Modells als Grundlage für die Anwendung der darauf aufbauenden Regelungskonzepte ist gerechtfertigt, sinnvolle Regelungen sollten erstellt werden können.

## 2.1 Physikalisches Modell

Um das mathematische Modell erstellen zu können, werden zuerst die beiden Grundelemente Tank und Pumpe getrennt voneinander betrachtet. Aus diesen wird das Gesamtmodell zusammengesetzt.

### Modell eines einzelnen Tanks

Das physikalische Modell eines einzelnen Tanks ist in Abbildung 2 dargestellt. Ein rechteckiger Tank mit Querschnitt  $A_b$  besitzt einen Auslaufstutzen mit dem Querschnitt  $A_a$  und der Höhe  $h_0$ . Der Zufluss  $q_z$  und der Abfluss  $q_a$  beschreiben die pro Zeiteinheit zu- bzw. abfließende Wassermenge. Die Gesamthöhe  $\lambda$  setzt sich aus der konstanten Höhe des Auslaufstutzens  $h_0$  und dem variierenden Füllstand  $h$  im Behälter zusammen:

$$\lambda := h + h_0 \quad (2.1)$$

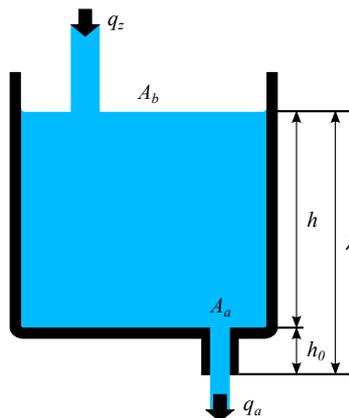


Abbildung 2: Physikalisches Modell eines einzelnen Tanks

Die Änderung des Flüssigkeitsvolumens im Tank wird durch die Massenbilanzgleichung (Tipler, 2000) vorgegeben:

$$\frac{dV}{dt} = -q_a + q_z \quad (2.2)$$

und da  $A_b$  und  $h_0$  konstant sind:

$$A_b \frac{d\lambda}{dt} = -q_a + q_z \quad (2.3)$$

Der Ausfluss  $q_a$  aus dem Behälter hängt linear von der Ausflussgeschwindigkeit  $v_a$  ab:

$$q_a = A_a v_a \quad (2.4)$$

Die Geschwindigkeit  $v_a$  berechnet sich nach dem *Theorem von Torricelli* (Tipler, 2000) zu:

$$v_a = \mu v = \mu \sqrt{2 g \lambda} \quad (2.5)$$

Hierbei repräsentiert die *Ausflusszahl*  $\mu$  einen Korrekturfaktor, der die Flüssigkeitsreibung sowie die Einschnürung des Wasserstrahls beim Austreten aus dem Ausflusstutzen berücksichtigt. Die Ausflusszahl ist für unterschiedliche Öffnungen anhand von Auslaufversuchen experimentell ermittelbar. Dabei wird der Tank bei geschlossenem Ausflussventil mit Wasser befüllt. Danach wird der Ausfluss geöffnet und der zeitliche Verlauf des Füllstandes gemessen. Beziehung (2.3) ergibt sich unter Verwendung von (2.4) und (2.5) zu:

$$A_b \frac{d\lambda}{dt} = -\mu A_a \sqrt{2 g \lambda} + q_z \quad (2.6)$$

Die Differentialgleichung zur Beschreibung der Füllhöhe in einem einzelnen Tank lautet somit:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\mu \frac{A_a}{A_b} \sqrt{2 g \lambda} + \frac{q_z}{A_b} \quad (2.7)$$

Durch Zusammenfassung der konstanten Größen  $A_a$ ,  $A_b$ ,  $\mu$  und  $g$  zu einer Konstante

$$\delta = \mu \frac{A_a}{A_b} \sqrt{2 g} \quad (2.8)$$

kann Differentialgleichung (2.7) kompakt dargestellt werden:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\delta \sqrt{\lambda} + \frac{q_z}{A_b} \quad (2.9)$$

## Modell der Pumpe

Die beiden Pumpen, welche in diesem System zum Einsatz kommen, wurden bereits in der Arbeit von (Fruhmann, 1992) unter annähernd gleichen Bedingungen verwendet, sodass auf die dortigen Ergebnisse aufgebaut wird.

Die Pumpen erzeugen einen von der Eingangsspannung  $u_p$  nichtlinear abhängigen Ausgangsfluss  $q$ . Die experimentell ermittelte Pumpenkennlinie kann, wenn der Parameter  $\alpha$  positiv ist, wie in der oben erwähnten Arbeit durch folgende nichtlineare Funktion approximiert werden:

$$f(u_p) = \begin{cases} \alpha + \sqrt{\beta + \kappa u_p} & \beta + \kappa u_p > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.10)$$

Falls der Parameter  $\alpha$  jedoch negativ ist, muss die Fallunterscheidung derart abgeändert werden, dass auch hier die Kennlinie immer positiv ist:

$$f(u_p) = \begin{cases} \alpha + \sqrt{\beta + \kappa u_p} & \beta + \kappa u_p > \alpha^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

In beiden Fällen wird bereits der auf den Behälterquerschnitt  $A_b$  normierte Fluss  $q$  angegeben:

$$f(u_p) = \frac{q}{A_b} \quad (2.12)$$

Die Normierung ist aus zwei Gründen sinnvoll: Zum einen beschreibt die Kennlinie anstatt der abstrakteren Volumsänderung die einfach ablesbare Füllhöhenänderung pro Zeiteinheit. Zum anderen kann Differentialgleichung (2.9) zur Beschreibung der Füllhöhe in einem Tank noch weiter vereinfacht werden, wenn der Zufluss mittels einer der hier beschriebenen Pumpen erfolgt:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\delta \sqrt{\lambda} + f(u_p) \quad (2.13)$$

Da in dem 4-Tank-System keine direkte Messung des Flusses  $q$  vorgesehen ist, werden die zu bestimmenden Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\kappa$  folgendermaßen ermittelt: An eine Pumpe wird eine niedrige Spannungen derart angelegt, dass der Zufluss in den jeweiligen Tank so gering ist, dass sich noch kein ablesbarer Pegelstand einstellt. Anschließend wird die Spannung in kleinen Schritten (hier: 0,1 Volt) erhöht und die korrespondierende stationäre Höhe aufgezeichnet. Nach der Durchführung mehrerer Messreihen werden die Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\kappa$  für eine Kennlinie nach Gleichung (2.10) solange variiert, bis die Summe der Quadrate aller einzelnen Abweichungen zwischen Messdaten und Kurve minimiert ist.

		$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$f_i$
Pumpe 1	Tank 1	-1,3992	-5,5023	8,6723	$f_1$
	Tank 4	0,4357	-4,3457	2,6901	$f_4$
Pumpe 2	Tank 2	0,6570	-2,9977	2,0471	$f_2$
	Tank 3	-1,0912	-5,5518	7,7701	$f_3$

Tabelle 1: Parameter der Pumpenkennlinie

Das beschriebene Experiment wird für jede Pumpe und jeden Tank einzeln durchgeführt. Die so ermittelten Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\kappa$  können Tabelle 1 entnommen werden und die daraus resultierenden Kennlinien  $f_1, \dots, f_4$  sind in Abbildung 3 angeführt.

Auf der Abszisse ist die Pumpenspannung in ihrem zulässigen Bereich angegeben. Die Ordinate beschreibt den auf den Behälterquerschnitt  $A_b$  normierten Pumpenfluss.

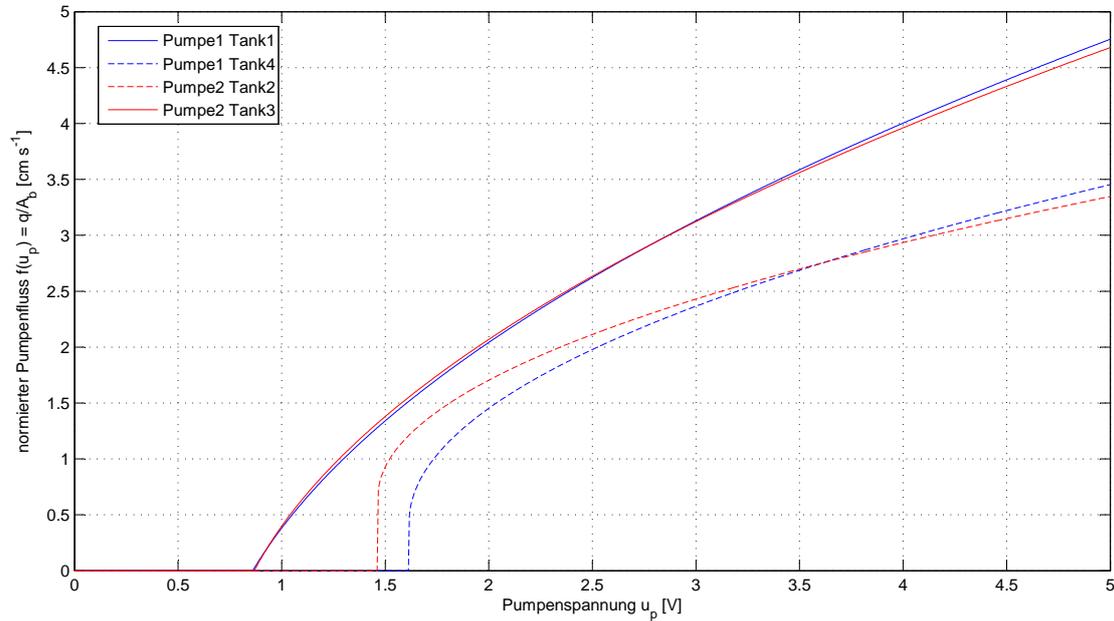


Abbildung 3: Pumpenkennlinie: Spannung zu normiertem Fluss

Das Anführen von Koeffizienten für jeden der vier Tanks, obwohl es nur zwei Pumpen gibt, mag verwirrend erscheinen. Dies ist ein Resultat der Erweiterung des bereits bestehenden 3-Tank-Labormodells zum 4-Tank-Versuchsaufbau. Es wurde darauf geachtet, beim Umbau Bauteile gleicher Dimension zu verarbeiten. Wie man in obiger Abbildung unschwer erkennen kann, unterscheiden sich die Kennlinien für die Flüsse in die neuen Tanks (unterbrochene Linie) jedoch deutlich von jenen für die bereits vorhandenen Tanks (durchgezogenen Linie).

Eine derart detaillierte Erfassung der unterschiedlichen Kennlinien ist vonnöten, da das Gesamtverhalten des Systems wesentlich von Pumpenflüssen, den einzigen Eingangsgrößen des Systems, beeinflusst wird. Wie bereits oben erwähnt, ist dieser Fluss jedoch nicht direkt messbar, sondern muss aus der vorgebbaren Spannung bestmöglich ermittelt werden.

Für die Pumpenspannung  $u_p$  gilt ein zulässiger Bereich von

$$0 \leq u_p \leq 5 \quad (2.14)$$

Volt.

## Modell des 4-Tank-Systems

Aus den oben beschriebenen Grundkomponenten wird nun das physikalische Modell des 4-Tank-Systems zusammengesetzt. Abbildung 4 zeigt das Gesamtsystem.

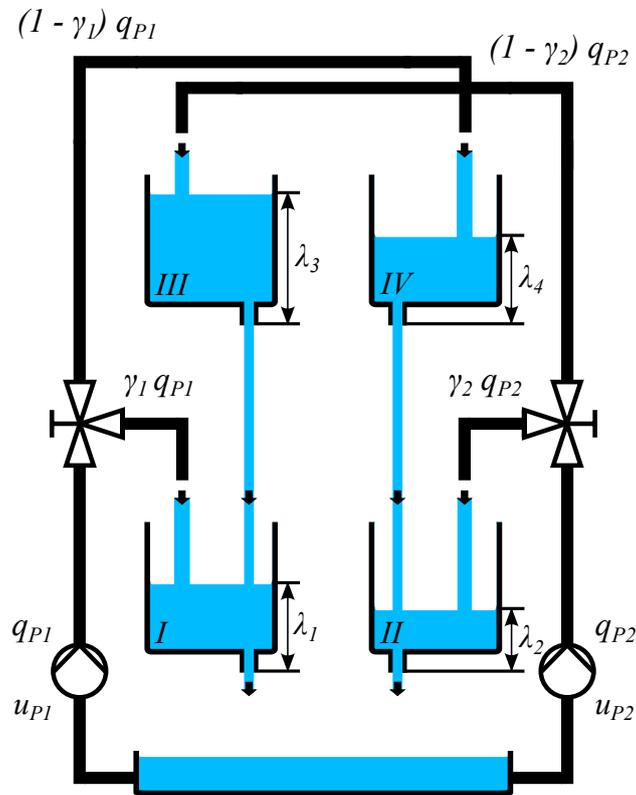


Abbildung 4: 4-Tank-System

Jeweils zwei Tanks (*I* und *III* sowie *II* und *IV*) sind derart übereinander angeordnet, dass der Ausfluss des oberen Tanks in den darunterliegenden mündet. Die beiden unteren Tanks entleeren ihr Wasser in ein Ausgleichsbecken. Aus diesem werden zwei Pumpen gespeist, die jeweils einen von den Eingangsspannungen  $u_{P1}$  und  $u_{P2}$  abhängigen Fluss  $q_{P1}$  und  $q_{P2}$  erzeugen. Über verstellbare Dreiwegeventile wird der Fluss  $q_{P1}$  auf die Tanks *I* und *IV* und der Fluss  $q_{P2}$  auf die Tanks *II* und *III* aufgeteilt. Das jeweilige Verhältnis der Aufteilung kann über den Parameter  $\gamma$  angegeben werden:

$$q_p = \gamma q_p + (1 - \gamma) q_p \quad (2.15)$$

wobei  $\gamma q_p$  den Pumpenfluss in den unteren Behälter und  $(1 - \gamma) q_p$  jenen in den oberen bezeichnet.

Der Gesamtfluss in den jeweiligen unteren Tank setzt sich aus dem Pumpenzufluss und dem Ausfluss aus dem darüber liegenden Tank zusammen.

Die Eingangsgrößen des Systems sind die beiden Spannungen  $u_{P1}$  und  $u_{P2}$  der Pumpen. Die gemessenen Ausgangsgrößen sind die Pegelstände  $h_1$  und  $h_2$  der unteren Tanks. Fasst man alle Teilkomponenten und die obigen Betrachtungen zusammen lautet das mathematische Modell für das 4-Tank-System mit zwei Eingangsgrößen und zwei Ausgangsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\delta_1 \sqrt{\lambda_1} + \delta_3 \sqrt{\lambda_3} + \gamma_1 f_1(u_{P1}) \\
 \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\delta_2 \sqrt{\lambda_2} + \delta_4 \sqrt{\lambda_4} + \gamma_2 f_2(u_{P2}) \\
 \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\delta_3 \sqrt{\lambda_3} + (1 - \gamma_2) f_3(u_{P2}) \\
 \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\delta_4 \sqrt{\lambda_4} + (1 - \gamma_1) f_4(u_{P1})
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Eingangsgrößen:} & & u_{P1} \\
 & & u_{P2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ausgangsgrößen:} & & h_1 = \lambda_1 - h_{0,1} \\
 & & h_2 = \lambda_2 - h_{0,2}
 \end{aligned}$$

Diese kompakte Darstellung ergibt sich durch die Konstante  $\delta_i$  und die ihr zugrundeliegenden Parameter  $A_a$ ,  $A_b$ ,  $h_0$  und  $\mu$ . Die Modellparameter sind in Tabelle 2 aufgelistet. Wie man erkennen kann variieren die Parameter für den Querschnitt  $A_{a,i}$  und

Parameter	Wert
$A_{a,i}$	$[0,770 \ 0,810 \ 0,770 \ 0,810] [cm^2]$
$A_b$	$69,68 [cm^2]$
$h_{0,i}$	$[10,1 \ 8,1 \ 10,1 \ 8,1] [cm]$
$h_{max}$	$30 [cm]$
$u_{max}$	$5 [V]$
$\mu$	$0,7735$
$g$	$981 \frac{[kg \ cm]}{s^2}$

Tabelle 2: Modellparameter für das 4-Tank-System

die Höhe  $h_{0,i}$  des Auslaufstutzens, da unterschiedliche Tanks verwendet wurden. Die

Verhältnisse  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ergeben sich aus der Ventilstellung und werden (für die Dauer eines Experiments) ebenfalls als konstant angenommen. Wie sich zeigen wird, ist die Summe der Ventilparameter ausschlaggebend dafür, ob das System eine Nullstelle in der rechten komplexen Halbebene besitzt, wodurch sich die Regelung erheblich schwieriger gestalten wird.

### Validierung des nichtlinearen Modells

Das 4-Tank-System wird mit dem nichtlinearen Modell mithilfe von Experimenten verglichen. Die Aufteilung der Zuflüsse wurde so gewählt, dass wesentlich mehr Wasser in die beiden oberen Tanks fließt. System und Modell werden zeitgleich mit Eingangsspannungen beschickt. Die Füllhöhen von Modell und System werden erfasst und grafisch dargestellt<sup>2</sup>.

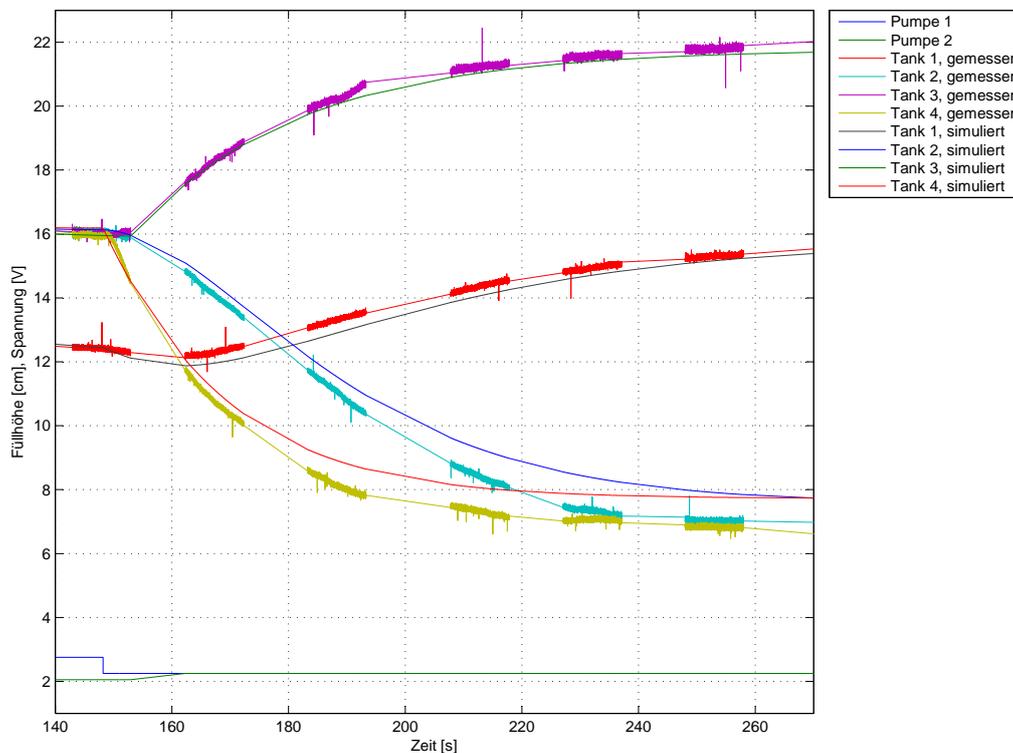


Abbildung 5: Validierung des nichtlinearen Modells, stationär

<sup>2</sup>Die unterbrochene Darstellung der Messdaten ist auf Speicherprobleme bei der Aufzeichnung des Experiments zurückzuführen.

Im ersten Experiment, dessen Ergebnis in Abbildung 5 dargestellt ist, wird das System, welches sich in einem annähernd stationären Zustand befindet, mit einer Spannungsänderung an beiden Pumpen versehen. Bei den daraus resultierenden Füllhöhenänderungen stimmen Simulations- und Versuchsergebnis für Tank 1 und Tank 3 sehr gut überein. Jene für Tank 2 und 4 driften bis zu einer Differenz von rund einem Zentimeter auseinander.

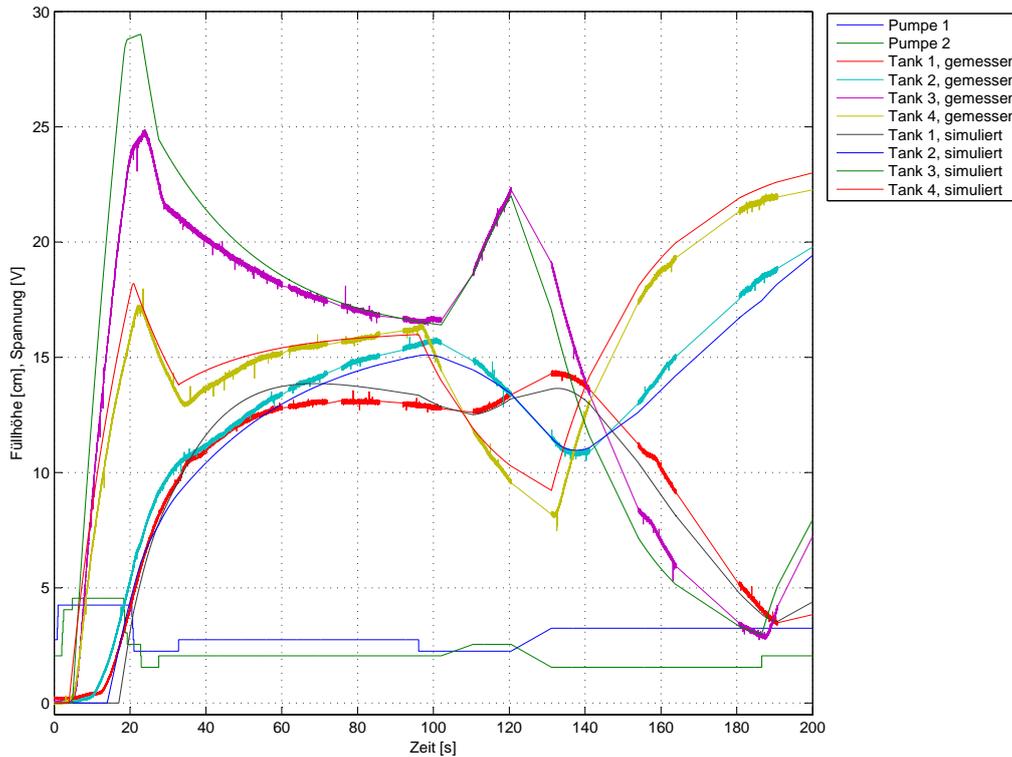


Abbildung 6: Validierung des nichtlinearen Modells, instationär

Im zweiten Experiment, dessen Ergebnis in Abbildung 6 dargestellt ist, wird die Übereinstimmung von Modell und Laboraufbau in einem größeren Bereich untersucht. Das ruhende System wird zu Beginn mit beinahe maximalen, nach 20 Sekunden mit mittleren Eingangsspannungen beaufschlagt (der zulässige Spannungsbereich liegt zwischen 0 und 5 Volt). Abgesehen von einer deutlichen Überhöhung des Simulationsergebnisses für Tank 3 zu Beginn des Experiments im Zeitintervall zwischen  $t = 15$  und  $t = 40$  sind die Abweichungen von Simulations- und Versuchsergebnis zufriedenstellend gering. Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass für die Erreichung einer so guten Übereinstimmung der Parameter  $h_0$  variiert werden musste. Die Ursache hierfür liegt zum einen in der stationären Drift der Pumpen. Diese wird in einem späteren Kapitel,

2.5, betrachtet. Zum anderen kann die Einstellung der Ventilparameter nicht genau ermittelt werden.

### Messung der Ausgangsgrößen

Ausgangsgrößen des Systems sind die Füllhöhen  $h_1$  und  $h_2$ . Diese werden mittels kapazitiver Pegelsensoren erfasst, welche einen der Füllstandshöhe proportionalen Strom liefern. Die Wahl dieser Sensoren ist in einer früheren Arbeit (Seebacher, 2009) zum 3-Tank-System am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik empfohlen worden. Hierin wird auch beschrieben, wie der Messstrom in eine Spannung umgewandelt werden kann, da an den Eingängen der verwendeten Messkarte Spannungen, nicht Ströme, verlangt werden. Die Sensoren sollten über den gesamten Messbereich lineares Verhalten aufweisen. Wie man aus Abbildung 7 erkennen kann, tun sie dies jedoch nicht.

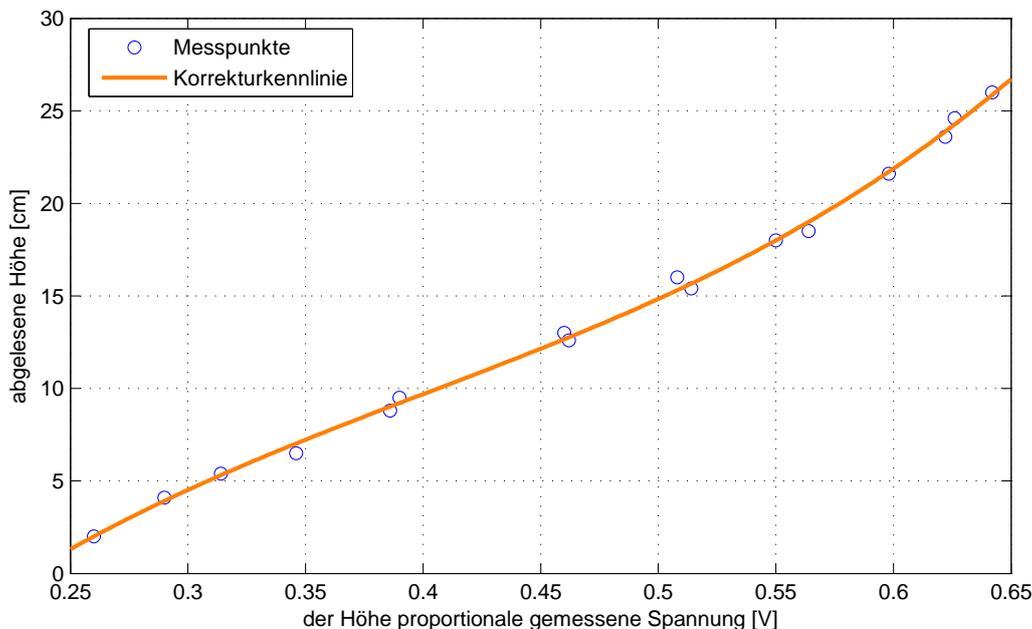


Abbildung 7: Korrekturkennlinie für die Pegelsensoren

Um die Genauigkeit der Messung zu verbessern, wird in einer Messreihe an unterschiedlichen Sensoren der Zusammenhang zwischen abgelesener Höhe und Messwert analysiert. Auf der x-Achse ist die gemessene Spannung, welche der gemessenen Höhe beziehungsweise dem Messstrom proportional ist, aufgetragen. Auf der y-Achse wird die an den Behältern abgelesene Höhe eingezeichnet.

Die eingezeichnete Korrekturkennlinie ist ein Polynom dritten Grades, wie es in Gleichung (2.17) angegeben ist. Dessen Koeffizienten werden ermittelt, indem die Summe der Quadrate aller Abweichungen zwischen Messdaten und Kennlinie minimiert wird. Sie sind in Tabelle 3 angegeben und können mit guter Näherung für alle vier Sensoren verwendet werden.

$$y(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.17)$$

$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
322.0	-388.1	204.3	-30.5

Tabelle 3: Parameter der Sensorkennlinie

## 2.2 Arbeitspunkt

Bei dem System aus (2.16) handelt es sich um ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Analyse des Systems sowie der Entwurf von Regelungskonzepten gestaltet sich für nichtlineare Systeme wesentlich aufwändiger als für lineare Modelle. Es ist daher erstrebenswert, eine *lineare* Näherungsbetrachtung zu erstellen. Diese Approximation kann nur in einem bestimmten Bereich um einen *Arbeitspunkt* gültig sein. Dieser soll in diesem Kapitel gefunden und die resultierenden Systemeigenschaften betrachtet werden.

In einem *stationären* Arbeitspunkt stellen sich für *konstante* Eingangsgrößen  $u_{1,R}$  und  $u_{2,R}$  *konstante* Füllstände  $\lambda_{i,R}$  ein, daraus folgt:

$$\frac{d\lambda_{i,R}}{dt} = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.18)$$

Die nichtlinearen Differentialgleichungen für die oberen beiden Tanks reduzieren sich somit zu:

$$\begin{aligned} \delta_3 \sqrt{\lambda_{3,R}} &= (1 - \gamma_2) f_3(u_{2,R}) \\ \delta_4 \sqrt{\lambda_{4,R}} &= (1 - \gamma_1) f_4(u_{1,R}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichungen für die unteren Tanks ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta_1 \sqrt{\lambda_{1,R}} &= (1 - \gamma_2) f_3(u_{2,R}) + \gamma_1 f_1(u_{1,R}) \\ \delta_2 \sqrt{\lambda_{2,R}} &= (1 - \gamma_1) f_4(u_{1,R}) + \gamma_2 f_2(u_{2,R})\end{aligned}\quad (2.20)$$

Damit können nun bei vorgegebenen konstanten Eingangsgrößen  $u_{1,R}$  und  $u_{2,R}$  die Ausgangsgrößen  $\lambda_{1,R}$  und  $\lambda_{2,R}$  angegeben werden:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_{1,R}} &= \frac{\gamma_1}{\delta_1} f_1(u_{1,R}) + \frac{(1 - \gamma_2)}{\delta_1} f_3(u_{2,R}) \\ \sqrt{\lambda_{2,R}} &= \frac{(1 - \gamma_1)}{\delta_2} f_2(u_{1,R}) + \frac{\gamma_2}{\delta_2} f_4(u_{2,R})\end{aligned}\quad (2.21)$$

beziehungsweise in Vektordarstellung mit  $\lambda_R = (\lambda_{1,R} \quad \lambda_{2,R})^T$  und  $u_R = (u_{1,R} \quad u_{2,R})^T$  und den Annahmen  $\frac{1}{\delta_1} = \frac{1}{\delta_2} = \frac{1}{\delta}$  sowie  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$ :

$$\sqrt{\lambda_R} = \frac{1}{\delta} M F(u_R) \quad F(u_R) = \begin{pmatrix} f(u_{1,R}) \\ f(u_{2,R}) \end{pmatrix}\quad (2.22)$$

wobei die Matrix  $M$  folgendermaßen bestimmt ist:

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & (1 - \gamma_2) \\ (1 - \gamma_1) & \gamma_2 \end{pmatrix}\quad (2.23)$$

### Singularität von $M$

Die Bestimmung der benötigten Eingangsspannung  $u_R$  an den Pumpen für vorgegebene Füllstandshöhe  $\lambda_R$  ist nur dann möglich, wenn  $M$  nicht singular ist. Daraus ergibt sich die Forderung:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1\quad (2.24)$$

Die Singularität ist physikalisch gut nachvollziehbar und soll hier qualitativ anhand von Abbildung 4 und Gleichung (2.22) erläutert werden. Unter Verwendung der Annahme  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  berechnen sich die Zuflüsse  $q_{T1}$  und  $q_{T2}$  zu Tank I und Tank II aus den Pumpenflüssen  $q_{P1}$  und  $q_{P2}$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}q_{T1} &= \gamma_1(q_{P1} + q_{P2}) \\ q_{T2} &= (1 - \gamma_1)(q_{P1} + q_{P2})\end{aligned}\quad (2.25)$$

Bildet man die Differenz der Zuflüsse, erkennt man aus

$$\frac{q_{T1}}{q_{T2}} = \frac{\gamma_1}{(1 - \gamma_1)} \quad (2.26)$$

dass das Verhältnis der Zuflüsse und somit die Füllhöhe einzig und allein von der Ventilstellung festgelegt wird. Physikalisch gesehen wird exakt gleich viel Wasser in die unteren und oberen Tanks gepumpt. Dadurch ist eine Wunschvorgabe stationärer Füllhöhen nicht mehr möglich, ganz zu schweigen von einer Regelung.

### 2.3 Linearisierung

Für das nichtlineare Modell aus (2.16) wurden im vorigen Abschnitt Gleichungen für einen Arbeitspunkt gefunden (2.21). Um diesen soll nun das Systemverhalten bei kleinen Auslenkungen untersucht werden. Dazu werden Größen eingeführt, welche die Abweichung der Füllstände vom stationären Zustand  $\lambda_{i,R}$  beschreiben, sowie die Abweichung der Pumpenspannungen von den konstanten Eingangsspannungen  $u_{i,R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 - \lambda_{1,R} \\ x_2 &= \lambda_2 - \lambda_{2,R} \\ x_3 &= \lambda_3 - \lambda_{3,R} \\ x_4 &= \lambda_4 - \lambda_{4,R} \\ u_1 &= u_{P1} - u_{1,R} \\ u_2 &= u_{P2} - u_{2,R} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Eingesetzt in (2.16) erhält man die Systembeschreibung für die Abweichung vom Arbeitspunkt unter der Annahme  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\delta_1 \sqrt{\lambda_{1,R} + x_1} + \delta_3 \sqrt{\lambda_{3,R} + x_3} + \gamma_1 f(u_{1,R} + u_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\delta_2 \sqrt{\lambda_{2,R} + x_2} + \delta_4 \sqrt{\lambda_{4,R} + x_4} + \gamma_2 f(u_{2,R} + u_2) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\delta_3 \sqrt{\lambda_{3,R} + x_3} + (1 - \gamma_2) f(u_{2,R} + u_2) \\ \frac{dx_4}{dt} &= -\delta_4 \sqrt{\lambda_{4,R} + x_4} + (1 - \gamma_1) f(u_{1,R} + u_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Unter der Annahme geringer Abweichungen kann das nichtlineare System linear approximiert werden. Hierfür wird die rechte Seite von (2.28) in eine *Taylor*-Reihe entwickelt, die man nach dem linearen Glied abbricht:

$$g(\lambda_{i,R} + x_i) \approx g(\lambda_{i,R}) + \left. \frac{dg(\lambda_i)}{d\lambda_i} \right|_{\lambda_{i,R}} x_i \quad (2.29)$$

und somit lautet die Systembeschreibung um den Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\delta_1 \left( \sqrt{\lambda_{1,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{1,R}}} x_1 \right) + \delta_3 \left( \sqrt{\lambda_{3,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} x_3 \right) \\
&\quad + \gamma_1 \left( f(u_{1,R}) + \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} u_1 \right) \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\delta_2 \left( \sqrt{\lambda_{2,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{2,R}}} x_2 \right) + \delta_4 \left( \sqrt{\lambda_{4,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} x_4 \right) \\
&\quad + \gamma_2 \left( f(u_{2,R}) + \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} u_2 \right) \\
\frac{dx_3}{dt} &= -\delta_3 \left( \sqrt{\lambda_{3,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} x_3 \right) + (1 - \gamma_2) \left( f(u_{2,R}) + \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} u_2 \right) \\
\frac{dx_4}{dt} &= -\delta_4 \left( \sqrt{\lambda_{4,R}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} x_4 \right) + (1 - \gamma_1) \left( f(u_{1,R}) + \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} u_1 \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Berücksichtigt man Gleichungen (2.19) und (2.20) vereinfacht sich (2.30) zum *linearen* Modell:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\delta_1}{2\sqrt{\lambda_{1,R}}} x_1 + \frac{\delta_3}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} x_3 + \gamma_1 \left( \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} u_1 \right) \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\delta_2}{2\sqrt{\lambda_{2,R}}} x_2 + \frac{\delta_4}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} x_4 + \gamma_2 \left( \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} u_2 \right) \\
\frac{dx_3}{dt} &= -\frac{\delta_3}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} x_3 + (1 - \gamma_2) \left( \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} u_2 \right) \\
\frac{dx_4}{dt} &= -\frac{\delta_4}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} x_4 + (1 - \gamma_1) \left( \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} u_1 \right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Durch diese Vorgangsweise kann für das physikalische Modell des 4-Tank-Systems eine *lineare* Beschreibung um einen Arbeitspunkt erzeugt werden. In kompakter Matrizen-schreibweise kann das System nun vollständig zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A x + B u \\
y &= C x + D u
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Dabei sind die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  sowie die Vektoren  $x$  und  $u$  folgend be-

stimmt:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -\frac{\delta_1}{2\sqrt{\lambda_{1,R}}} & 0 & \frac{\delta_3}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta_2}{2\sqrt{\lambda_{2,R}}} & 0 & \frac{\delta_4}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} \\ 0 & 0 & -\frac{\delta_3}{2\sqrt{\lambda_{3,R}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta_4}{2\sqrt{\lambda_{4,R}}} \end{pmatrix} & x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} & & & 0 \\ & 0 & & \gamma_2 \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} \\ & 0 & & (1-\gamma_2) \frac{df(u_{P2})}{du_{P2}} \Big|_{u_{2,R}} \\ (1-\gamma_1) \frac{df(u_{P1})}{du_{P1}} \Big|_{u_{1,R}} & & & 0 \end{pmatrix} & u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Für die weiteren Untersuchungen ist es zweckmäßig, folgende Konstanten einzuführen:

$$\begin{aligned}
 T_i &= \frac{2\sqrt{\lambda_{i,R}}}{\delta_i} & i &= 1, \dots, 4 \\
 k_{ui} &= \frac{df(u_{Pi})}{du_{Pi}} \Big|_{u_{i,R}} = \frac{\gamma_i}{2\sqrt{\beta_i + \gamma_i u_{i,R}}} & i &= 1, 2
 \end{aligned}$$

Das Gesamtsystem lautet somit:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{1}{T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \gamma_1 k_{u1} & 0 \\ 0 & \gamma_2 k_{u2} \\ 0 & (1-\gamma_2) k_{u2} \\ (1-\gamma_1) k_{u1} & 0 \end{pmatrix} u & (2.33) \\
 y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x
 \end{aligned}$$

## 2.4 Systemanalyse

Das im vorigen Kapitel linearisierte Gleichungssystem soll hier einer Analyse unterzogen werden. Dabei sollen die dem System innewohnenden Eigenheiten durchleuchtet

werden. Die daraus resultierenden Beschränkungen für die Regelbarkeit des Gesamtsystems werden hervorgehoben.

Als Grundlage für die folgenden Untersuchungen gelten, aufbauend auf der Analyse von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems, die Empfehlungen zur Analyse der *Eingangs- Ausgangs Steuerbarkeit (Input- Output Controllability)* welche in (Skogestad & Postlethwaite, 1997) und (Wolf, Skogestad, Hovd & Mathisen, 1992) angeführt sind. Sie wird folgendermaßen definiert

Input- Output Controllability is the ability to achieve acceptable control performance; that is, to keep the outputs ( $y$ ) within specified bounds or displacements from their references ( $r$ ), in spite of unknown but bounded variations, such as disturbances ( $d$ ) and plant changes, using available inputs ( $u$ ) and available measurements ( $y_m$ )<sup>3</sup>

### Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit eines Systems kann, wie im Eingrößenfall, nach dem Kriterium von Kalman ermittelt werden, indem die *Steuerbarkeitsmatrix*

$$S = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (2.34)$$

untersucht wird. Ein System ist genau dann steuerbar, wenn  $S$  vollen Rang hat. Wie man leicht zeigen kann, hängt beim 4-Tank-System die Steuerbarkeit rein von den Parametern  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  der Eingangsmatrix  $B$ , welche die Ventilstellung beschreiben, ab. Nur wenn einer dieser Parameter den Wert 1 annimmt, verliert die Steuerbarkeitsmatrix ihren vollen Rang. Eine physikalische Interpretation ist einfach nachvollziehbar. Wird aufgrund der vorgegebenen Ventilstellung in einen der oberen Tanks überhaupt kein Wasser gepumpt, kann dessen Zustand auch von keiner Eingangsgröße beeinflusst werden.

### Beobachtbarkeit

Zur Analyse der Beobachtbarkeit kann ebenfalls das Kriterium von Kalman herangezogen werden. Es besagt, dass ein System genau dann beobachtbar ist, wenn seine

---

<sup>3</sup>Definition 5.1 in (Skogestad & Postlethwaite, 1997).

Beobachtbarkeitsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

vollen Rang hat. Beim 4-Tank-System gibt es, im Gegensatz zur Steuerbarkeit, keinen Parameter der durch spezielle Vorgabe einen Rangverlust der Beobachtbarkeitsmatrix hervorrufen könnte. Das System ist somit immer beobachtbar.

### Übertragungsmatrix

Anders als im SISO Fall wird bei Berechnung der Übertragungsfunktion nach

$$G^*(s) = C(s I - A)^{-1} B \quad (2.36)$$

eine Matrix erzeugt, welche die Übertragung der einzelnen Eingänge auf die jeweiligen Ausgänge frequenzabhängig beschreibt. Die Übertragungsmatrix für unser lineares System (2.33) lautet

$$G^*(s) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 k_{u1}}{(s + \frac{1}{T_1})} & \frac{(1-\gamma_2) k_{u2} \frac{1}{T_3}}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_3})} \\ \frac{(1-\gamma_1) k_{u1} \frac{1}{T_4}}{(s + \frac{1}{T_2})(s + \frac{1}{T_4})} & \frac{\gamma_2 k_{u1}}{(s + \frac{1}{T_2})} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

und mit den Zusammenfassungen  $c_1 = k_{u1} T_1$  und  $c_2 = k_{u2} T_2$  in kompakter Form:

$$G^*(s) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{(s T_1 + 1)} & \frac{(1-\gamma_2) c_1}{(s T_1 + 1)(s T_3 + 1)} \\ \frac{(1-\gamma_1) c_2}{(s T_2 + 1)(s T_4 + 1)} & \frac{\gamma_2 c_2}{(s T_2 + 1)} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

### Skalierung

Es ist sinnvoll, eine Skalierung der Übertragungsfunktion durchzuführen. Vor allem für die im späteren Kapitel vorgestellte Regelung mittels  $H_\infty$ -Norm wird dies wichtig sein, auch im Allgemeinen ist eine bessere Vergleichbarkeit, beispielsweise mit anderen Systemen, gegeben. Diese Skalierung ist derart durchzuführen, dass alle Ein- und Ausgangsgrößen des Systems den Wert 1 betragsmäßig nicht überschreiten. Hierzu

werden die Größen  $u$  und  $y$  durch ihre Maxima dividiert. In Tabelle 2 sind die Parameter bereits angeführt. Die skalierte Übertragungsfunktion  $G$  kann somit über die beiden Skalierungsmatrizen  $D_u$  und  $D_y$  berechnet werden:

$$D_u = \begin{pmatrix} h_{max} & 0 \\ 0 & h_{max} \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} u_{max} & 0 \\ 0 & u_{max} \end{pmatrix}$$

$$G(s) = D_y^{-1} G(s)^* D_u \quad (2.39)$$

### Funktionale Steuerbarkeit

Wenn ein System nicht funktional steuerbar ist, gibt es Ausgänge bzw. Ausgangsrichtungen, die nicht beeinflussbar sind, beispielsweise wenn kein Eingang  $u_i$  sich auf Ausgang  $y_i$  auswirkt oder wenn es weniger Eingänge als Ausgänge gibt. Laut (Rosenbrock, 1970) ist ein quadratisches MIMO System dann und nur dann nicht funktional steuerbar, wenn  $\det G(s) \equiv 0$ . Dies ist offensichtlich hier nicht der Fall und das 4-Tank-System ist funktional steuerbar.

### Pol- und Nullstellen in Mehrgrößensystemen

Im Gegensatz zu Eingrößensystemen, wo Pol- und Nullstellen eines linearen, zeitinvarianten Systems als Nullstellen des Nenner- beziehungsweise Zählerpolynoms seiner Übertragungsfunktion definiert sind, existiert für Mehrgrößensysteme eine Vielzahl von Pol- und Nullstellendefinitionen. Die wichtigsten sind laut (Roppenecker & Preuß, 1982) *Übertragungsnullstellen* und *Übertragungspole*, welche, angelehnt an den Eingrößenfall, anhand der Übertragungsmatrix  $G(s)$  des Mehrgrößensystems definiert sind, sowie die *Invarianten Nullstellen* und die *Systempole*, welche über das Zustandsraummodell des selbigen definiert sind.

Wird die quadratische Übertragungsmatrix  $G(s)$  eines Mehrgrößensystems (welches gleich viele Ein- wie Ausgänge besitzt) in die Smith-McMillan-Form<sup>4</sup> übergeführt, bildet die Gesamtheit aller Nullstellen der resultierenden Zählerpolynome die *Übertragungsnullstellen* und die Gesamtheit aller Nullstellen der resultierenden Nennerpolynome die *Übertragungspole*.

---

<sup>4</sup>Smith- und Smith-McMillan-Form sind Normalformen zur Zerlegung einer Polynommatrix beziehungsweise einer Matrix mit gebrochen rationalen Elementen, siehe beispielsweise (Rosenbrock, 1970).

Bildet man die sogenannte Systemmatrix der Form

$$P(s) = \begin{pmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

so sind die *Invarianten Nullstellen* des Systems bei gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen als die Nullstellen der Gleichung

$$\det(P(s)) = 0$$

definiert. Die *Systempole* sind als die Nullstellen der Gleichung

$$\det(A - sI) = 0$$

definiert, fallen also mit den Eigenwerten des Systems zusammen.

Laut (Roppenecker & Preuß, 1982) sind die Übertragungsnullstellen im Allgemeinen eine Teilmenge der Invarianten Nullstellen. Dies wird erkennbar, wenn man beachtet, dass die Übertragungsnullstellen anhand der Übertragungsmatrix  $G(s)$  des Systems definiert sind, welche nur den vollständig steuer- und beobachtbaren Teil des Gesamtsystems beschreibt, die Invarianten Nullstellen jedoch anhand der Systemmatrix  $P(s)$  definiert werden, welche auch den nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Teil beinhaltet.

Dieser Zusammenhang gilt auch für die Pole, wobei die Übertragungspole eine Teilmenge der Systempole sind, welche sich durch die nicht steuerbaren und nicht beobachtbaren Eigenwerte unterscheiden.

Zwischen den Übertragungsnullstellen und den Nullstellen der Elemente der Übertragungsmatrix  $G(s)$  besteht im Allgemeinen kein Zusammenhang. Darüber hinaus können beide Nullstellenarten durch Ausgangs- oder Zustandsvektorrückführung nicht verändert werden, mit Ausnahme der Veränderung der Anzahl der Übertragungsnullstellen durch Zustandsvektorrückkopplung.

Für jede Invariante Nullstelle  $z$  existiert ein zugehöriger, von Null verschiedener Vektor  $u_z$  für den gilt:

$$G(z)u_z = 0 \quad (2.41)$$

Dieser Vektor wird als *Eingangs-Nullstellenrichtung* bezeichnet. Wird an ein asymptotisch stabiles System eine konstante oder aufklingende Eingangsgröße in dieser speziellen Nullstellenrichtung angelegt

$$u(t) = u_z e^{zt} \sigma(t), \quad (2.42)$$

geht die Systemantwort auf Null zurück.

Wie bereits in obigem Abschnitt gezeigt, ist das 4-Tank-System, abgesehen von drei möglichen Ventilstellungen immer vollständig steuerbar. Bei der nachfolgenden Analyse der Pole und Nullstellen des Systems sollen diese drei Fälle ausgeklammert werden, da hierbei mindestens einer der oberen Tanks überhaupt nicht befüllt wird.

Somit fallen für das 4-Tank-System die Übertragungs- und Systempole sowie Übertragungsnullstellen und Invariante Nullstellen zusammen.

## Pole

In MIMO Systemen gelten die gleichen Zusammenhänge zwischen den (System-)Polen eines linearen Systems und der Stabilität<sup>5</sup> welche besagen, dass ein lineares System dann und nur dann asymptotisch stabil ist, wenn alle Pole in der offenen linken komplexen Halbebene (LHP) liegen. Die (System-)Pole können wie im SISO-Fall über die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\phi(s) \triangleq \det(sI - A) = 0 \quad (2.43)$$

gefunden werden. Das charakteristische Polynom kann direkt aus (2.33) abgelesen werden und lautet:

$$\phi(s) = \left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)\left(s + \frac{1}{T_3}\right)\left(s + \frac{1}{T_4}\right) \quad (2.44)$$

Da die Zeitkonstanten  $T_i$  immer positiv sind, befinden sich alle (System-)Pole in der LHP womit das lineare Modell die Stabilitätseigenschaft besitzt.

## Nullstellen

Die Berechnung der Übertragungsnullstellen quadratischer Systeme mit Übertragungsmatrix  $G(s)$  kann gegenüber der oben angeführten Berechnung vereinfacht werden, indem nur die Nullstellen von  $\det(G(s))$  berechnet werden müssen, unter der Voraussetzung, dass Übertragungspole und -nullstellen an gleicher Stelle, jedoch mit unterschiedlicher Richtung sich bei der Determinantenbildung nicht kürzen. Im vorliegenden Fall tritt keine Kürzung auf und es gilt:

$$\det(G(s)) = \frac{c_1 c_2}{\phi(s)} [(s T_3 + 1)(s T_4 + 1)\gamma_1 \gamma_2 - (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)] \quad (2.45)$$

<sup>5</sup>siehe: Theorem 4.1 aus (Skogestad & Postlethwaite, 1997).

woraus man folgende Gleichung für die Berechnung der Nullstellen erhält:

$$(s T_3 + 1)(s T_4 + 1) - \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} = 0 \quad (2.46)$$

Mit einem Parameter  $\eta \in (0, \infty)$  der das Verhältnis der Ventilstellungen zueinander beschreibt

$$\eta := \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \quad (2.47)$$

können die Lösungen der Gleichung (2.46) folgendermaßen angegeben werden:

$$s_{1,2} = \frac{-(T_3 + T_4) \pm \sqrt{(T_3 + T_4)^2 - 4 T_3 T_4 (1 - \eta)}}{2 T_3 T_4} \quad (2.48)$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung hängen vom Parameter  $\eta$  und somit nur von den Ventilstellungen ab:

- sind die Ventilstellungen groß ( $\eta$  nahe 0), so liegen die Nullstellen nahe bei  $s_1 = -\frac{1}{T_3}$  und  $s_2 = -\frac{1}{T_4}$ .
- werden die Ventilstellung bis auf  $\eta = 1$  verringert ( $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ), wandert eine Nullstelle weiter in negativer Richtung zu  $s_1 = -\frac{T_3+T_4}{(T_3 T_4)}$  und die zweite in positiver Richtung zum Ursprung  $s_2 = 0$ .
- werden die Ventile weiter geschlossen ( $\eta \rightarrow \infty$ ) so verschiebt sich die Nullstelle  $s_2$  in die rechte, positive komplexe Halbebene.

Diese drei möglichen Lagen der Nullstellen sind charakteristisch für das Systemverhalten und beeinflussen wesentlich die Qualität der nachfolgenden Regelung.

Sind beide Ventile so eingestellt, dass von den Pumpen mehr Wasser in die unteren Tanks gepumpt wird, befinden sich beide Nullstellen in der linken komplexen Halbebene und das System ist minimalphasig. Dies entspricht den Ventilstellungen  $(\gamma_1 + \gamma_2) > 1$ . Dadurch entstehen keine Beschränkungen (beispielsweise der Bandbreite) durch die Strecke. Ebenfalls werden wir nicht mit regelungstechnischen Komplikationen rechnen müssen, da die zu befüllenden, unteren Tanks größtenteils von je einer Pumpe gesteuert werden können.

Bei Ventilstellungen  $(\gamma_1 + \gamma_2) < 1$  wird physikalisch betrachtet mehr Wasser in die oberen anstelle der unteren Tanks gefüllt. Eine Nullstelle befindet sich in der positiven komplexen Halbebene, das System ist *nicht mehr minimalphasig*. Dadurch entstehen erhebliche Einschränkungen, die den Erfolg beim Regelkreisentwurf - gleichgültig nach welcher Methode - begrenzen, wie wir im Kapitel zum Reglerentwurf sehen werden.

Fließt in den linken Tank exakt gleich viel Wasser wie in den rechten  $(\gamma_1 + \gamma_2) = 1$  ist es nicht möglich, unterschiedliche Füllhöhen einzustellen. Dieser Grenzfall spiegelt die Singularität bei der Arbeitspunkteinstellung wieder, welche bereits in Kapitel 2.2 aufgezeigt wurde.

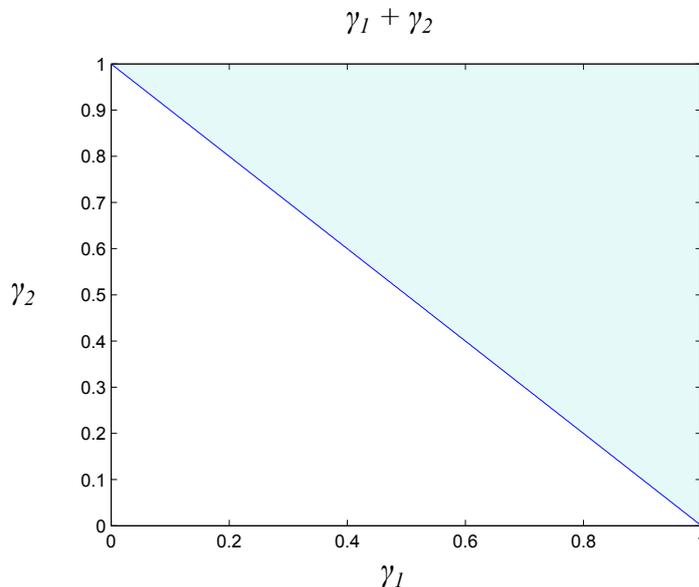


Abbildung 8: Verhalten des Gesamtsystems abhängig von Ventilstellungen

Die Auswirkungen der Summe der Ventilstellungen auf das Verhalten des Gesamtsystems ist in Abbildung 8 dargestellt. Im oberen Dreieck ist die Summe der Ventilstellungen größer eins und das System ist minimalphasig. Im unteren Bereich besitzt es eine Nullstelle rechts und ist somit nicht mehr minimalphasig.

## 2.5 Validierung des linearisierten Modells

In den Laborräumlichkeiten des Instituts für Regelungs- und Automatisierungstechnik wird ein Versuchsaufbau des 4-Tank Modells erstellt, eine Weiterentwicklung des bestehenden 3-Tank Modells. Die Abmessungen und Parameter, welche in den obigen Abschnitten zum mathematischen Modell verwendet werden, sind auf dieses Modell zugeschnitten. Es soll von Anfang an das mathematische Modell gegen den Laboraufbau getestet werden. Dies ermöglicht eine evolutionäre Entwicklung der mathematischen Beschreibung des Modells. Beispielsweise entwickelten sich die Kennlinien für

die Pumpen von einer linearen über eine quadratische Kennlinie hin zu jener in Kapitel 2.1 beschriebenen Kurve<sup>6</sup>.

Es bestätigte sich, dass das mathematische Modell nur eine Abstraktion bzw. Vereinfachung der Realität ist und keine exakte Beschreibung darstellt. Beispielsweise haben die Tanks nicht exakt gleiche Austrittsöffnungen, was dazu führt, dass in den oberen und unteren, sowie in den linken und rechten Tanks bei konstantem Pumpenfluss unterschiedliche Füllhöhen gemessen werden. Durch kleine Variationen der Parameter für den Durchmesser der Austrittsöffnung  $A_a$  und die Höhe des Ausflusstutzens  $h_0$  kann diese Beobachtung im mathematischen Modell berücksichtigt werden.

### Füllstände abhängig von einer Pumpe

Bei einer Ventilstellung  $\gamma = 0$  beziehungsweise  $\gamma = 1$  wird von einer Pumpe entweder nur in den zugehörigen unteren oder nur in den zugehörigen oberen Tank Wasser gepumpt. Die Füllstände der Tanks hängen somit nur von jeweils *einer* Pumpe ab. Mit einer Ventilparametereinstellung  $\gamma = 1$  wurde ein Experiment durchgeführt und die Versuchsergebnisse den Simulationsergebnissen gegenübergestellt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 9 dargestellt.

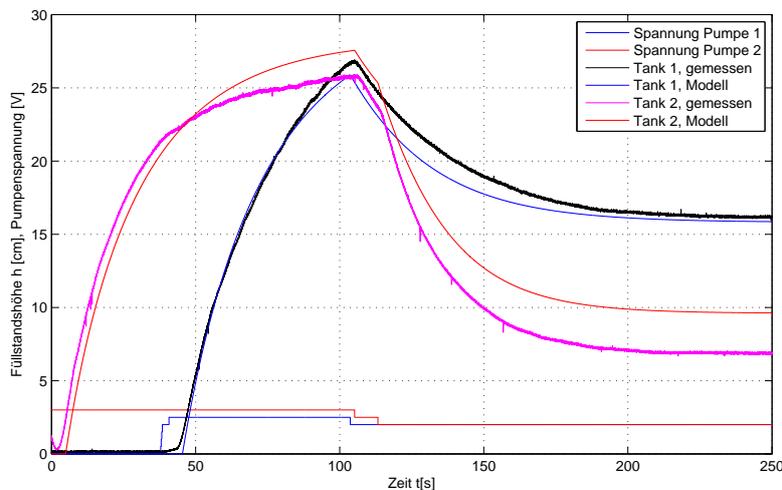


Abbildung 9: Vergleich der Füllstände aus Experiment und Modell in Abhängigkeit von einer Pumpe

<sup>6</sup>Diese Kurve wurde bereits von (Fruhmann, 1992) gefunden, die im Folgenden angeführten Probleme mit den Pumpen bedingten jedoch eine komplette Neuermittlung aller Kennlinien.

Zum Zeitpunkt  $T = 0$  wird an Pumpe 2 eine konstante Spannung von 3 Volt angelegt und der Pegelstand in Tank 2 beginnt zu steigen. Zwischen  $T = 38$  und  $T = 42$  wird die Spannung an Pumpe 1 auf 2,5 Volt erhöht. Der Pegelstand in Tank 1 steigt an, in Tank 2 steigt der Füllstand plötzlich weniger stark. Dieser Effekt ist im mathematischen Modell nicht vorgesehen und dadurch beginnen sich die Simulationswerte von den gemessenen in Tank 1 zu unterscheiden. Ab Zeitpunkt  $T = 115$  liegen an beiden Pumpen 2 Volt an, die Ergebnisse von Modell und Experiment sind für Tank 2 zufriedenstellend, für Tank 1 jedoch nicht. Die Ursache dieser Absonderlichkeit wird in Kapitel 2.5 behandelt.

### Füllstände abhängig von beiden Pumpen

Bei einer Ventilstellung  $\gamma \neq 0$  beziehungsweise  $\gamma \neq 1$  wird in alle 4 Tanks Wasser gepumpt. Dem mathematischen Modell wurde mittels dem Parameter  $\gamma$  eine Näherung für die Ventilstellungen des Laboraufbaus vorgegeben. Ab dem Zeitpunkt  $T = 14$  wird an Pumpe 1 eine Spannung von konstant 3 Volt angelegt und ab ungefähr  $T = 85$  an Pumpe 2 konstant 2,5 Volt. Die Messergebnisse wurden wieder den Simulationsergebnissen gegenübergestellt, die Ergebnisse sind in 10 dargestellt.

Wie man erkennen kann, ist die Genauigkeit der Übereinstimmung des mathematischen Modells mit dem Labormodell deutlich geringer. Hierfür können zwei Ursachen verantwortlich gemacht werden:

- *Parameter  $\mu$ ,  $A_a$ ,  $A_b$  und  $h_0$  sind nur lokal gut.* Der Durchmesser der Austrittsöffnung  $A_a$ , der Behälterdurchmesser  $A_b$ , die Höhe des Ausflusstutzens  $h_0$  sowie die Ausflusszahl  $\mu$  sind Parameter, die für jeden Tank individuell festgelegt werden könnten. Folgendes spricht jedoch dagegen, jeden Behälter speziell zu konfigurieren: Zum einen soll die Wahl der Parameter durch die physischen Vorgaben begrenzt werden. Dadurch bleibt der Zusammenhang zwischen dem Labormodell und dem mathematischen erhalten. Zum anderen hat die Änderung eines Parameters eines Tanks nicht nur unmittelbare Auswirkungen, sondern mittelbar auf das Gesamtsystem. Beispielsweise werden zur Ermittlung der Pumpenkennlinien beziehungsweise der normierten Pumpenflüsse die Behälterdurchmesser  $A_b$  herangezogen.

Es zeigt sich, dass es mit einer feineren Adjustierung der Parameter durchaus möglich ist, für Spezialfälle eine höhere Übereinstimmung des Laboraufbaus mit dem mathematischen Modell zu erzielen. Sucht man jedoch Parameter, die den physikalischen Vorgaben entsprechen und global gesehen akzeptable Ergebnisse

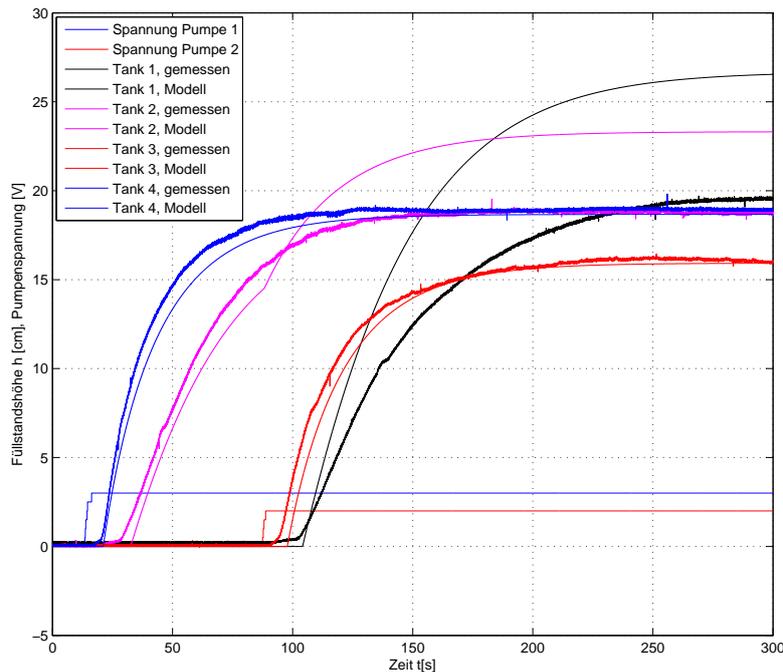


Abbildung 10: Vergleich der Füllstände aus Experiment und Modell in Abhängigkeit beider Pumpen

erzielen, kann mit jenen in Tabelle 2 (Kapitel 2.1) angegebenen Werten eine gute Näherung gefunden werden.

- $\gamma$  kann nicht exakt vorgegeben werden. Das Verhältnis  $\gamma$  zwischen dem Fluss in den unteren Tank und dem in den oberen hat einen wesentlichen Einfluss auf das Gesamtsystem. Da man das Verhältnis jedoch nicht messen kann, soll durch ein Experiment vorab eine Näherung gefunden werden. Dazu stellt man die Dreiwegventile in die gewünschte Position und misst die Füllstände bei konstanter Pumpeneingangsspannung. Das Verhältnis der stationären Höhen ist proportional zu dem Parameter  $\gamma$ .

Probleme ergeben sich hierbei aus zwei Gründen: Zum einen kann die Höhe nicht beliebig genau gemessen werden. Zum anderen Verhalten sich die Pumpen bei unterschiedlichen Ventilstellungen nicht konstant. Dies rührt vom veränderlichen Widerstand, den die Pumpe erfährt, je nach dem, ob die Ventile eher geöffnet, oder eher geschlossen sind. Zusätzlich hängt der Pumpenfluss von der Förderhöhe ab. Laut Spezifikation sollten beide Effekte ausgeglichen werden.

In Abbildung 10 kann man sehr gut die Auswirkungen eines falsch eingestellten

Parameters  $\gamma$  erkennen. Ab ungefähr  $T = 85$ , an der die Spannung an Pumpe 2 auf konstante 2,5 Volt erhöht wird, driften mathematisches Modell und Versuch auseinander. Dies ist rein eine Auswirkung eines falsch vorgegebenen Parameters für die Ventilstellung und wirkt sich auch nur auf zwei der 4 Kennlinien aus, Tank 1 und Tank 2.

### Stationäre Drift der Pumpen

Die größte Differenz zwischen mathematischem Modell und realen Labormodell beruht auf einem Effekt, der an den Pumpen festgestellt werden konnte: Die Pumpenflüsse können für konstante Eingangsspannungen nicht vorausgesagt werden, sind also nicht stationär! Es stellen sich für vorgegebene Eingangsspannungen sehr wohl konstante Füllhöhen ein, welche aus konstanten Pumpenflüssen resultieren, nur sind diese nicht immer die gleichen.

Ein Experiment soll diese Problematik veranschaulichen. Abbildung 11 zeigt die im Folgenden beschriebene Situation.

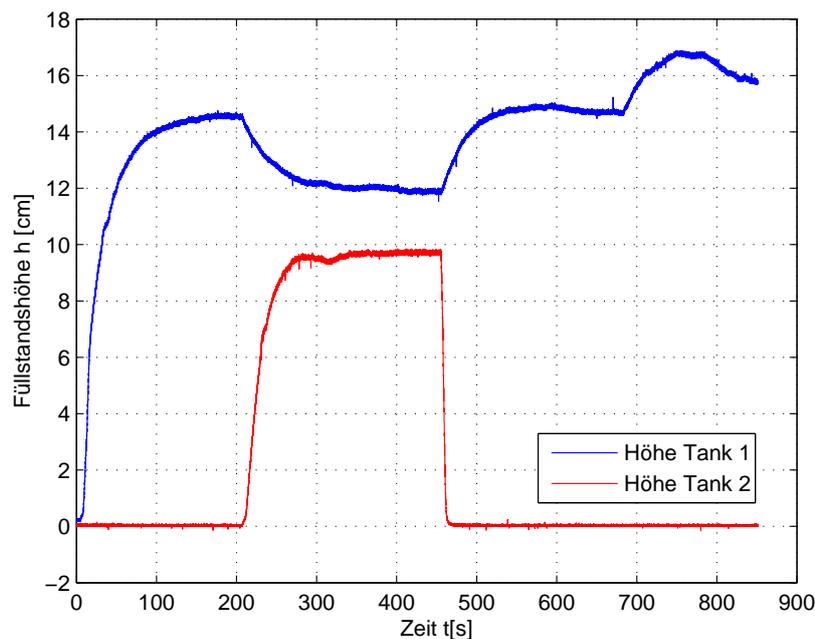


Abbildung 11: Pumpenflüsse bzw. Füllhöhen hängen nicht nur von der Eingangsspannung der Pumpen ab

Am Labormodell werden die Ventile so eingestellt, dass der Einfachheit halber nur die unteren Tanks befüllt werden ( $\gamma = 0$ ) und an Pumpe 1, welche (ausschließlich)

Tank 1 befüllt, wird eine konstante Eingangsspannung von 1.8 Volt für die Dauer des gesamten Experiments angelegt. Die Eingangsspannung an Pumpe 2, welche (ausschließlich) Tank 2 befüllt, sei vorerst auf 0 Volt eingestellt. Die Füllhöhe an Tank 1 beginnt zu steigen und es ist ersichtlich, dass der Pegelstand gegen einen konstanten Wert von rund  $h_1 = 14,5 \text{ cm}$  strebt.

Nach  $t = 200$  Sekunden wird die Spannung an Pumpe 2 auf konstante 2 Volt erhöht. *Die Spannung an Pumpe 1 ist noch immer unverändert bei konstanten 1.8 Volt.* Dennoch beginnt sich der Pumpenfluss und damit die Höhe in Tank 1 zu ändern. Er strebt gegen einen neuen Wert von  $h_1 = 12 \text{ cm}$ .

Nach weiteren 250 Sekunden wird die Spannung an Pumpe 2 wieder abgeschaltet. Der Pumpenfluss und die Höhe in Tank 1 erhöhen sich wieder auf den ursprünglichen Wert.

Bei  $t = 680$  Sekunden ändert sich der Pumpenfluss in Tank 1 plötzlich, *obwohl in das Gesamtsystem nicht eingegriffen wurde.*

Mit diesem Experiment soll gezeigt werden, dass die Pumpenflüsse keine reine Funktion der jeweiligen Pumpenspannungen sind. Nichtlineare Abhängigkeiten von der Eingangsspannung an der anderen Pumpe, sowie die bereits oben angeführten Abhängigkeiten von der Ventilstellung und der Förderhöhe führen zu den experimentell festgestellten Unannehmlichkeiten.

Die in Kapitel 2.1 ermittelten Pumpenkennlinien können somit nur näherungsweise gültig sein<sup>7</sup>.

## Fazit

Es gibt also zwei Faktoren, die hauptsächlich für Ungenauigkeiten sorgen:

- der schlecht ermittelbare Parameter  $\gamma$  für das Verhältnis der Pumpenflüsse und
- die stationäre Drift der Pumpen.

Mit dem Erkennen dieser Hauptursachen ist die Frage zu beantworten, ob das mathematische Modell nun den Laboraufbau hinreichend gut beschreiben kann.

Zuallererst muss einem bewusst sein, dass man mit einem Modell arbeitet und somit eine mathematische Abstraktion der realen Gegebenheiten vornimmt. Bei der Linearisierung um eine Ruhelage werden durch das Vernachlässigen nichtlinearer Terme

---

<sup>7</sup>Es wurden mehrere Testreihen durchgeführt und die gewonnenen Daten für eine mittlere Kennlinie herangezogen.

zusätzliche Ungenauigkeiten in Kauf genommen. Eine gewisse Abweichung des mathematischen Modells von den Messergebnissen ist somit zu erwarten<sup>8</sup>.

Ein wichtiger Punkt verringert die negativen Einflüsse der Ungenauigkeiten drastisch: Wir können die gesuchten Ausgangsgrößen, die Füllstände der beiden unteren Tanks, und die Füllstände der oberen Tanks direkt messen!

Es kann also davon ausgegangen werden, dass das hier gefundene Modell hinreichend gut ist, um darauf eine Regelung aufzubauen.

## 2.6 Laboraufbau

In den Laborräumlichkeiten des Instituts für Regelungs- und Automatisierungstechnik wird im Zuge dieser Arbeit ein bestehendes 3-Tank-System, abgebildet in 12(a) in ein 4-Tank-System umgebaut.

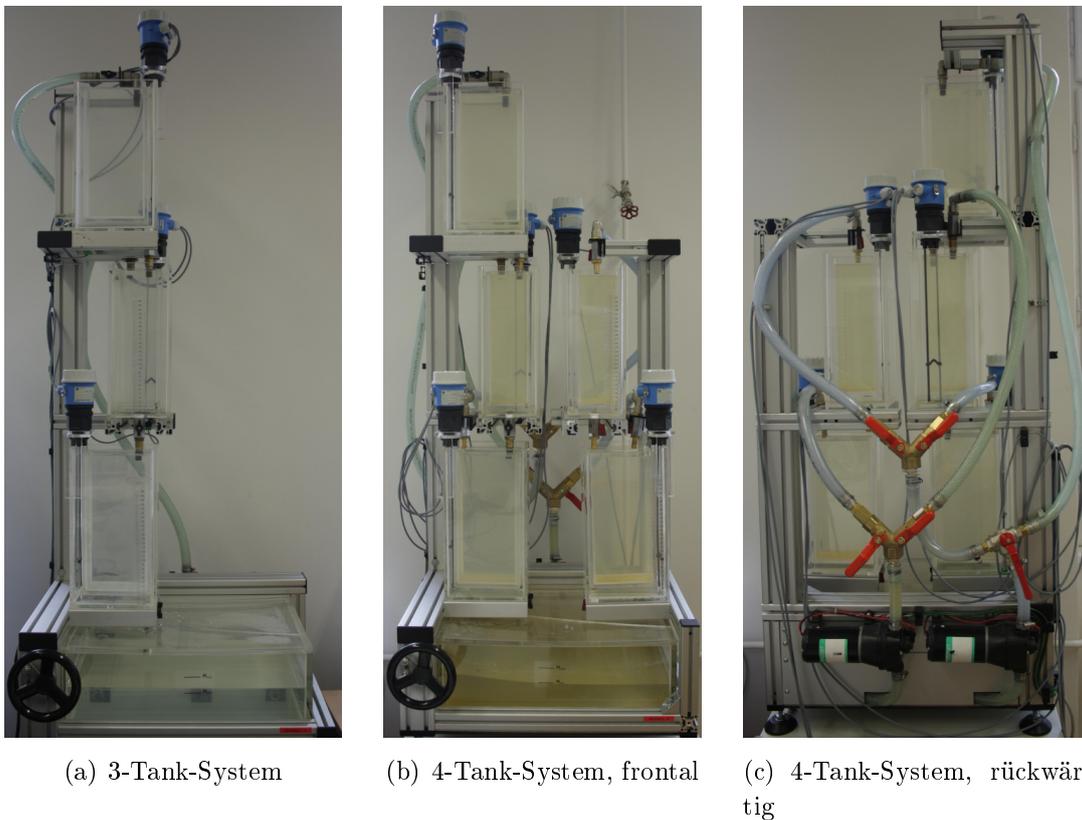


Abbildung 12: Laboraufbau

<sup>8</sup>Gäbe es keine Abweichungen, könnten wir auf eine Regelung verzichten und uns mit reiner Steuerung begnügen.

Abbildung 12(b) zeigt die Frontalansicht des realisierten Systems, dem ursprünglichen Modell wurden zwei Tanks hinzugefügt. In Abbildung 12(c) ist die rückwärtige Ansicht dargestellt. Mittels der beiden 3-Wege-Ventile kann das Verhältnis der Aufteilung der jeweiligen Pumpenflüsse eingestellt werden. Um auch das 3-Tank-System wie gewohnt weiterverwenden zu können, wurde zusätzlich ein L-Ventil zum Umschalten verbaut, in Abbildung 12(c) rechts unten erkennbar.

### 3 Regelungskonzepte

Mit abgeschlossener Modellbildung kann der Reglerentwurf beginnen. Unterschiedliche Ein- und Mehrgrößenregelungskonzepte werden anhand des mathematischen Modells entwickelt und anschließend am realen Versuchsaufbau implementiert. Dieses Kapitel beschreibt die Entwicklung und Details der verschiedenen Konzepte. Im ersten Abschnitt wird auf die Bedeutung der Linearisierung und Arbeitspunkteinstellung hingewiesen, das vorliegende System verlangt bei Veränderung des Parameters  $\gamma$  für die Ventilstellungen eine Neuberechnung des selbigen. Die anschließenden Unterkapitel beschreiben realisierte Regelungskonzepte im Ein- sowie im Mehrgrößenfall. Dabei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass das 4-Tank-System je nach Stellung der Ventile minimalphasig oder nicht-minimalphasig sein kann.

Alle Regelungskonzepte werden mittels Matlab und Simulink entwickelt und am Labormodell getestet. Dabei werden zeitkontinuierliche Regelungen entwickelt und für Abtastperioden zwischen 0.5 und 0.05 Sekunden getestet. Es stellt sich heraus, dass in keinem Fall, auch bei der sehr langen Abtastperiode von 0.5 Sekunden, die zeitkontinuierliche Regelung versagt. Daher wird zur Vereinfachung darauf verzichtet, Regler wie Strecke bei allen Entwürfen zu diskretisieren.

#### 3.1 Linearisierung, Arbeitspunkt

Zur Berechnung der Regelungen wird das in Kapitel 2 entwickelte mathematische Modell des 4-Tank-Systems (2.16) linearisiert. Die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{1}{T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \gamma_1 k_{u1} & 0 \\ 0 & \gamma_2 k_{u2} \\ 0 & (1 - \gamma_2) k_{u2} \\ (1 - \gamma_1) k_{u1} & 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$T_i = \frac{2\sqrt{\lambda_{i,R}}}{\delta_i} \quad k_{ui} = \left. \frac{df(u_{Pi})}{du_{Pi}} \right|_{u_{i,R}} = \frac{\gamma_i}{2\sqrt{\beta_i + \gamma_i u_{i,R}}}$$

Die Gültigkeit der Vereinfachung des Modells durch Linearisierung beschränkt sich auf einen Bereich um den gewählten Arbeitspunkt  $(\lambda_R, u_R)$ . Es ist für die Regelung entscheidend, dieses Paar bei jeder Ventilstellung neu zu bestimmen, da die Matrizen

$A$  und  $B$  von dieser wesentlich beeinflusst werden, wie man aus (3.49) leicht erkennen kann.

Die Behälter des Versuchsaufbaus haben eine Höhe  $h = 30$  cm, die von der Ventilstellung abhängigen stationären Spannungen für den Arbeitspunkt werden so eingestellt, dass die Füllstände in den unteren Tanks konstant bei  $\lambda_R \approx 15 + h_0$  cm zu liegen kommen.

Aus allen möglichen Ventilstellungen werden zwei repräsentative herausgegriffen.

Im ersten Fall ist das System *minimalphasig*,  $(\gamma_1 + \gamma_2) > 1$ , die Pumpen fördern zusammen mehr Wasser in die unteren Tanks. Man kann davon ausgehen, dass eine Regelung problemlos durchführbar sein wird, sofern ein Arbeitspunkt gefunden werden kann.

Bei einer Ventilstellung  $(\gamma_1 + \gamma_2) < 1$  ist das System *nicht minimalphasig*, der Reglerentwurf wird durch eine positive Nullstelle eingeschränkt.

### 3.2 Minimalphasiges System

Die Wahl eines Arbeitspunkts für die Linearisierung beziehungsweise die Reglersynthese stellt einen im minimalphasigen System vor größere Herausforderungen, als erwartet. Um dies zu zeigen, gehen wir von den Gleichungen aus, die in Kapitel 2.2 für konstante Eingangsspannungen hergeleitet wurden:

$$\begin{aligned}\delta_1 \sqrt{\lambda_{1,R}} &= (1 - \gamma_2) f_1(u_{2,R}) + \gamma_1 f_4(u_{1,R}) \\ \delta_2 \sqrt{\lambda_{2,R}} &= (1 - \gamma_1) f_2(u_{1,R}) + \gamma_2 f_3(u_{2,R}) \\ \delta_3 \sqrt{\lambda_{3,R}} &= (1 - \gamma_2) f_3(u_{2,R}) \\ \delta_4 \sqrt{\lambda_{4,R}} &= (1 - \gamma_1) f_4(u_{1,R})\end{aligned}\tag{3.50}$$

Zur Vereinfachung soll hier die Konstante  $\delta_i$ , welche die Parameter der einzelnen Tanks zusammenfasst, für alle 4 Behälter gleich angenommen werden, d.h.  $\delta_i = \delta$  für  $i = 1, \dots, 4$ . Auch die Pumpenkennlinien  $f_j$  werden zu  $f_j = f$  für  $j = 1, \dots, 4$  vereinfacht. Es ergeben sich zwei Gleichungssysteme für die oberen und unteren Tanks:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_{1,R}} \\ \sqrt{\lambda_{2,R}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma_1 & (1 - \gamma_2) \\ (1 - \gamma_1) & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u_{1,R}) \\ f(u_{2,R}) \end{pmatrix}\tag{3.51}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_{3,R}} \\ \sqrt{\lambda_{4,R}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} 0 & (1 - \gamma_2) \\ (1 - \gamma_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u_{1,R}) \\ f(u_{2,R}) \end{pmatrix}\tag{3.52}$$

Aus (3.52) können die Pumpenflüsse direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(u_{1,R}) &= \frac{\delta}{1 - \gamma_2} \sqrt{\lambda_{3,R}} \\ f(u_{2,R}) &= \frac{\delta}{1 - \gamma_1} \sqrt{\lambda_{4,R}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Eingesetzt in (3.51) können die stationären Höhen der unteren Tanks rein durch die stationären Höhen der oberen Tanks dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,R} &= \left( \lambda_{3,R} + \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1} \sqrt{\lambda_{4,R}} \right)^2 \\ \lambda_{2,R} &= \left( \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_2} \sqrt{\lambda_{3,R}} + \lambda_{4,R} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Folgende Randbedingungen sind nun zu beachten:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) > 1 \quad (3.55)$$

$$h_{3,0} \leq \lambda_{3,R} \leq 30 + h_{3,0} \quad h_{4,0} \leq \lambda_{4,R} \leq 30 + h_{4,0} \quad (3.56)$$

Bedingung (3.55) ist die Voraussetzung für die Minimalphasigkeit des Systems. Bedingung (3.56) legt die Füllhöhen  $\lambda_{3,R}$  und  $\lambda_{4,R}$  innerhalb des Tanks fest. Wählt man nun die Parameter so, dass der Ausdruck der Klammern in (3.54) minimal wird:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0,51 \quad \frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{0,51}{0,49} = 1,0408 \approx 1$$

$$h_{3,0} = h_{4,0} = h_0 = 10$$

errechnet sich eine untere Abschätzung für die minimale Höhe der Pegelstände der Arbeitspunkte in den unteren Tanks aufgrund der minimalen Höhe der Arbeitspunkte in den oberen Tanks zu:

$$\lambda_{3,R} = \lambda_{4,R} = \left( 2\sqrt{10} \right)^2 = 40 = h_{max} + h_0 \quad (3.57)$$

Es kann somit mit den vorliegenden Parametern kein Arbeitspunkt gefunden werden, der in allen 4 Tanks den geforderten Bedingungen genügt. Eine lineare Mehrgrößenregelung, welche auch die oberen Pegelstände verwendet, beispielsweise ein Zustandsregler, kann für das minimalphasige System mit diesen Parametern nicht gefunden werden. Durch geeignete Wahl von  $\delta_i$  könnte sehr wohl ein Arbeitspunkt gefunden werden. Dazu müssten die Ventile in den Auslaufrohren der Tanks entsprechend verstellt werden. Aus praktischen Überlegungen wurde dieser Ansatz jedoch nicht weiter verfolgt.

### 3.2.1 Entkoppelte Eingrößenregelung: integrierender Zustandsregler

Geht man von dem Ansatz aus, die Tanks entkoppelt voneinander zu betrachten, kann man ein Regelungskonzept entwerfen, bei dem zwei Eingrößenregelungen je eine Füllhöhe in einem der unteren Tanks regeln. Mathematisch ist diese Vorgehensweise einer Eintankregelung gleichzusetzen. Der Zufluss aus den oberen Tanks wird als Störgröße aufgefasst. Hier genügt es, nur für die beiden unteren Behälter einen Arbeitspunkt zu wählen, um den linearisiert wird, da die Zustände der oberen Tanks nicht in die Regelung eingehen.

Beispielhaft für eine minimalphasiges System wird folgende Einstellung für die Ventilparameter vorgegeben:

$$\gamma_1 = 0,9 \qquad \qquad \qquad \gamma_2 = 0,9$$

Ein sinnvolle Wahl für den Arbeitspunkt kann folgendermaßen gefunden werden:

$$u_R = \begin{pmatrix} 2,15 \\ 2,4 \end{pmatrix} \qquad \qquad \qquad h_R = \lambda_R - h_0 = \begin{pmatrix} 15,61 \\ 15,40 \\ -9,65 \\ -7,93 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass diese Konfiguration wie erwähnt nur für die unteren Tanks einen zulässigen Arbeitspunkt bereitstellt.

Es soll für dieses System ein Zustandsregler mit integrierendem Anteil entworfen werden. Mit Hilfe eines Zustandsreglers kann das dynamische Verhalten eines Systems beeinflusst werden. Geht man von einer linearen, zeitinvarianten Beschreibung der Strecke in bekannter Zustandsraumdarstellung aus:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A x + b u \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{3.58}$$

und entwirft eine Rückkopplung wie in Abbildung 13 dargestellt<sup>9</sup>:

$$u = -h^T x \tag{3.59}$$

ergibt sich die Zustandsbeschreibung des Regelkreises folgendermaßen:

---

<sup>9</sup>Ein frei wählbarer Parameter zur Kompensation der bleibenden Regelabweichung wird hier ausgelassen, da mittels des im Anschluss beschriebenen I-Anteils diese bei konstanter Störung beziehungsweise leicht veränderten Streckenparametern vermieden werden kann.

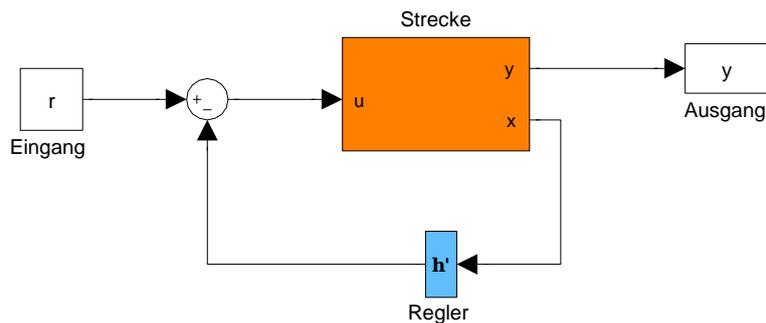


Abbildung 13: Zustandsregelung

$$\frac{dx}{dt} = (A - b h^T) x + b r \quad y = c^T x \quad (3.60)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $(A, b)$  steuerbar ist, hat man nun die Möglichkeit, den Vektor  $h$  so festzulegen, dass die Eigenwerte der Systemmatrix  $(A - b h^T)$  an *beliebig* vorgegebenen Stellen liegen. Damit kann dem System das gewünschte dynamische Verhalten eingepreßt werden. Die Berechnung des Rückkopplungsvektors kann mittels *Eigenwertvorgabe nach Ackermann* folgendermaßen durchgeführt werden:

Ein Wunschpolynom bezüglich der Eigenwerte des Regelkreises sei vorgegeben:

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0 \quad (3.61)$$

Damit errechnet sich der Vektor  $h$  der Reglerparameter nach Ackermann zu:

$$h^T = t_1^T p(A) = t_1^T \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I) = t_1^T (p_0 I + p_1 A + \dots + p_{n-1} A^{n-1} + A^n) \quad (3.62)$$

Hierbei bezeichnet  $A$  die Dynamikmatrix des Systems und  $t_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix (siehe Kapitel 2.4):

$$t_1^T = e_n^T S^{-1} \quad (3.63)$$

Um zusätzlich zur asymptotischen Stabilität des Regelkreises stationäre Genauigkeit für konstante Führungsgrößen (beziehungsweise eine Unempfindlichkeit gegenüber unbekanntem, konstanten Störungen) zu erreichen, kann ein integrierender Anteil in den Regelkreis eingebaut werden. Abbildung 14 zeigt den Aufbau eines solchen.

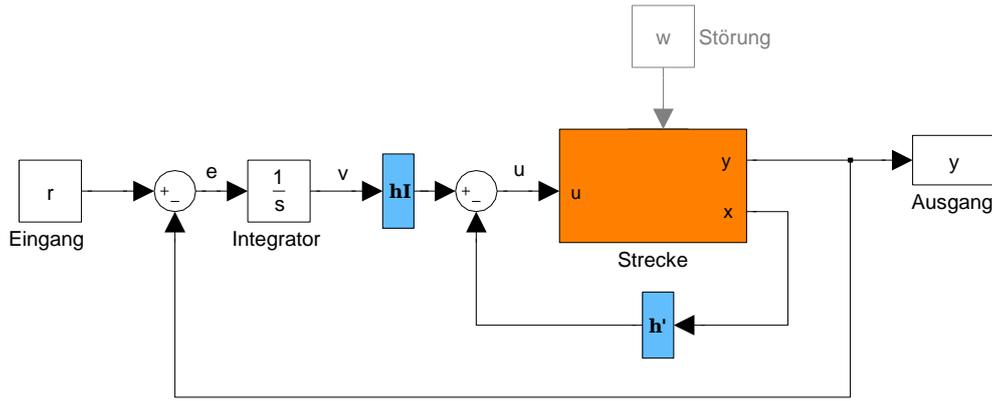


Abbildung 14: Zustandsregelung mit integrierenden Anteil

Die zugrundeliegende Idee besteht darin, dass durch den Integrator die Regelabweichung aufsummiert wird, der Integratorausgang  $v$  wird sich solange verändern, bis der Regelfehler verschwindet<sup>10</sup>. Unter Einführung einer neuen Zustandsvariablen  $v$ :

$$\dot{v} = e = r - y = r - c^T x \quad (3.64)$$

und der Zustandsrückkopplung:

$$u = - \begin{pmatrix} h^T & h_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

kann das Zustandsmodell folgendermaßen erweitert werden:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - b h^T & -b h_I \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad (3.66)$$

$$y = \begin{pmatrix} c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Somit kann der Entwurf eines Zustandsreglers mit integrierendem Anteil auf den Entwurf einer einfachen Zustandsregelung zurückgeführt werden, indem man die Eigenwerte für die um obige Idee erweiterte Systemmatrix vorgibt.

$$\begin{pmatrix} A - b h^T & -b h_I \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^T & h_I \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

<sup>10</sup>Unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert existiert. Der Regelkreis muss asymptotisch stabil sein.

Um nun für das Mehrgrößensystem Eingrößenregelungen erstellen zu können, wird angenommen, dass Tank 1 nur von Pumpe 1 und Tank 2 nur von Pumpe 2 befüllt wird. Die Ausflüsse aus den oberen Tanks 3 und 4 werden als Störungen aufgefasst. Somit ergeben sich zwei entkoppelte Differentialgleichungen für die beiden Pegelstände:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{T_1} x_1 + \gamma_1 k_{u1} u_1 + w_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{T_2} x_2 + \gamma_2 k_{u2} u_2 + w_2\end{aligned}\quad (3.68)$$

$w_1$  und  $w_2$  bezeichnen die oben erwähnten Störeinflüsse. Eine Regler mit integrierendem Anteil ist erforderlich, um die stationäre Genauigkeit gewährleisten zu können. Daher wird für beide Systeme ein Regelkreis nach (3.66) entworfen:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{dv_i}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_i} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_i k_{ui} \\ 0 \end{pmatrix} u_i \quad i = 1, 2 \quad (3.69)$$

Die vorgegebenen Eigenwerte lauten:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x_1} &= \{-0.11, -0.11\} \\ \epsilon_{x_2} &= \{-0.11, -0.11\}\end{aligned}$$

Mittels der oben angeführten Eigenwertvorgabe nach Ackermann konnten die Reglerparameter folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}h_1 &= 0,1666 & h_{I,1} &= 0,0112 \\ h_2 &= 0,2679 & h_{I,2} &= 0,0182\end{aligned}$$

Da die Eigenwerte der Strecke bei ungefähr -0,04 liegen, konnte das System deutlich schneller gemacht werden. Im Bild 15 ist die Sprungantwort der geregelten Systeme dargestellt. Diese ist für beide Systeme gleich. Man erkennt auch, dass die stationäre Genauigkeit aufgrund der hier gewählten Reglerstruktur gewährleistet wird.

Ein in Simulink erstellter Strukturplan der Regleranordnung ist Abbildung 16 zu entnehmen.

Zur besseren Übersicht wurden die unterschiedlichen Komponenten eingefärbt. Gelbe Funktionsblöcke sind für das Anfahren des Arbeitspunkts vor Beginn der Regelung verantwortlich, da aufgrund der Linearisierung die Regelung nur in einem Bereich um den Arbeitspunkt gültig ist. Das Anfahren dauert im minimalphasigen System ca. 20 Sekunden. In den Eingabeblocken Höhe T1 und Höhe T2, links im Bild, kann ein gewünschter Pegelstand vorgegeben werden. Orange Bauteile tragen dem Umstand

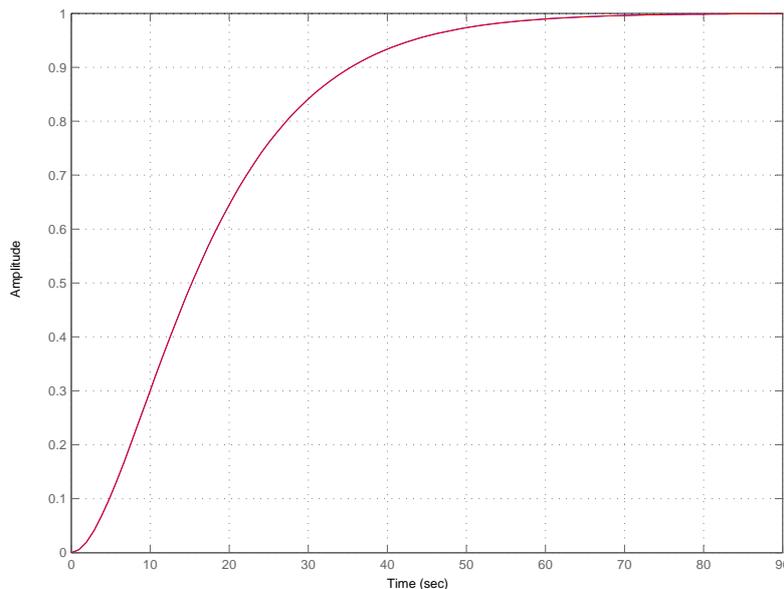


Abbildung 15: Sprungantwort der geregelten Tanks

Rechnung, dass die Regelung für Abweichungen um den Arbeitspunkt ausgelegt ist. Mit der hier verbauten Anordnung kann der Arbeitspunkt als Nullpunkt für die Regelung vorgegeben werden, um den die Höhengauslenkungen stattfinden. Sättigungsglieder beschränken die Eingangsspannung. Die Regelung ist so ausgelegt, dass das System nie in Sättigung gerät, die Begrenzer sind nur eine Vorsichtsmaßnahme. Die Blöcke *HIL Write Analog* und *HIL Read Analog*<sup>11</sup> sind für die Kommunikation mit dem Labormodell verantwortlich. An das System werden Spannungen für die Pumpen geschickt und vom System werden Spannungen zurückgeliefert, welche proportional zu den Pegelständen sind. Im grünen Block werden die Spannungen in adäquate Füllstandshöhen zurückgeführt. Die blauen Funktionsblöcke sind für die Regelung verantwortlich, sie werden mit den gefundenen Parametern befüllt.

In einem Experiment wurde das entwickelte, nichtlineare mathematische Modell mit einem Laborversuch verglichen. Dazu wurde der Aufbau aus Abbildung 16 derart verändert, dass die Pumpenspannungen gleichzeitig den Aufbau und die Simulation speisen. Die Ergebnisse aus beiden Experimenten wurden verglichen und sind in Grafik 17 dargestellt.

Die feinen Linien sind die Höhen, welche sich aus der Simulation ergeben, die mit Messrauschen behafteten Linien stellen die Ergebnisse des Versuchs dar. Das System

<sup>11</sup>Zur Kommunikation mit dem Labormodell werden Schnittstellenkarten der Firma Quanser verwendet. In (Quanser, 2009) ist die Installation der zugehörigen Software, sowie deren Verwendung unter Simulink angeführt.

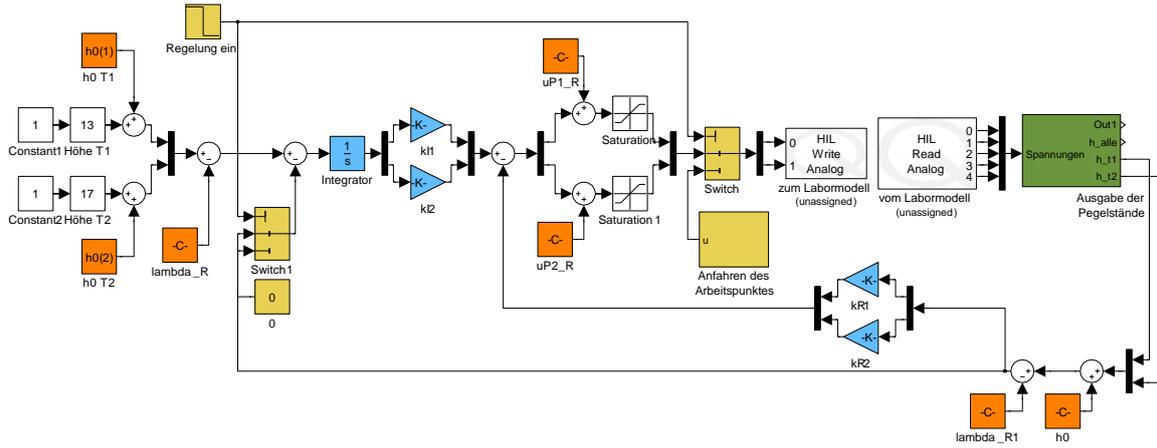


Abbildung 16: Strukturplan der ZR-I SISO Regelung

befindet sich anfangs im gewählten Arbeitspunkt bei 15cm Höhe. Bei  $t = 740$  Sekunden wird Tank 2 ein Wunschpegelstand von 17cm vorgegeben und bei  $t = 745$  Sekunden Tank 1 13cm. Beide Regler beginnen mit nahezu gleicher Dynamik, den geforderten Pegelstand anzustreben, nach 50 Sekunden ist der Endwert beinahe erreicht, was auch mit den Sprungantworten aus Abbildung 15 übereinstimmt. Modell und Simulation verhalten sich zufriedenstellend ähnlich.

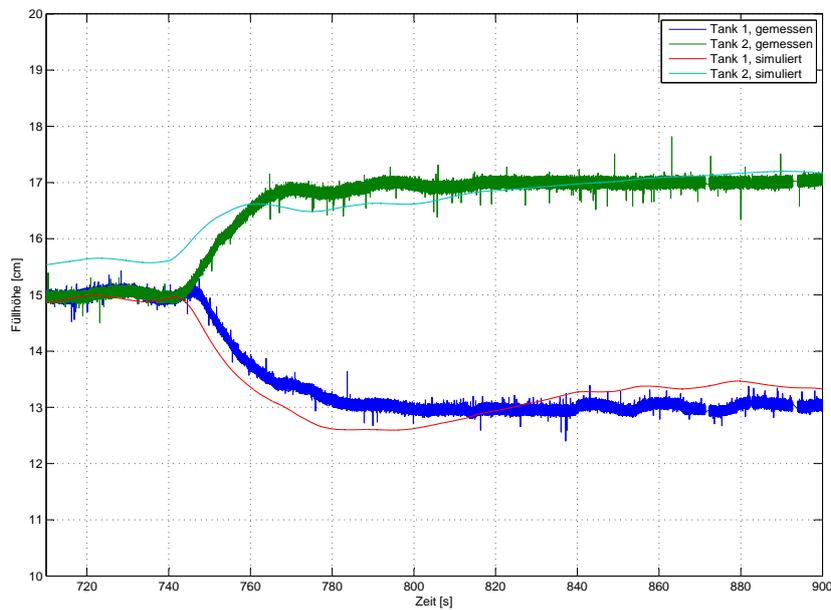


Abbildung 17: Vergleich der Regelung von Laborexperiment und Simulation um den Arbeitspunkt

### 3.3 Nicht minimalphasiges System

In der Regelungstechnik wird ein System mit gebrochener rationaler Übertragungsfunktion als minimalphasig bezeichnet, wenn es ausschließlich Pole und Nullstellen mit negativem Realteil besitzt<sup>12</sup>. Somit wird durch eine Nullstelle in der rechten komplexen Halbebene immer ein nicht minimalphasiges System erzeugt. Wie bereits in Kapitel 2.4 aufgezeigt, kann beim hier vorliegenden 4-Tank-System allein durch Variation der Ventilparameter die Lage der Nullstellen verändert werden. Nicht-Minimalphasigkeit wird erreicht, wenn die Summe der beiden Ventilparameter kleiner eins ist,  $(\gamma_1 + \gamma_2) < 1$ . Bei einer Ventilstellung:

$$\gamma_1 = 0,085 \qquad \qquad \qquad \gamma_2 = 0,08$$

kann eine sinnvolle Wahl für den Arbeitspunkt folgendermaßen gefunden werden:

$$u_R = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,0 \end{pmatrix} \qquad \qquad \qquad h_R = \lambda_R - h_0 = \begin{pmatrix} 11,98 \\ 14,56 \\ 14,91 \\ 12,78 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass hier, im Gegensatz zum Arbeitspunkt des minimalphasigen Systems alle vier Pegelstände in einem geeigneten Bereich liegen. Die geringe Öffnung der Ventile ergibt sich aus der bereits in Kapitel 3.2 gefundenen Näherung für den Zusammenhang der Füllhöhen:

$$\lambda_{unten,R} = \left( \left( 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sqrt{\lambda_{oben,R}} \right)^2 \qquad (3.70)$$

wobei  $\lambda_{unten,R}$  und  $\lambda_{oben,R}$  in einem Bereich zwischen ungefähr 20 und 30 Zentimetern liegen soll. Der beschriebene Arbeitspunkt wird für alle nachfolgenden Regelungskonzepte verwendet.

Unter Berücksichtigung der für Mehrgrößensysteme zu erweiternden Pol- und Nullstellendefinitionen, siehe Abschnitt 2.4, errechnen sich die Pole des Systems aus Gleichung (2.44) zu:

$$\{-0.0437, -0.0436, -0.0424, -0.0379\}$$

sowie die Nullstellen anhand von Gleichung (2.48) zu:

$$\{0.4151, -0.4965\}$$

Wie erwartet besitzt das System eine positive Nullstelle.

<sup>12</sup>siehe: (Lunze, 2008, Kapitel 6.7.6).

### 3.3.1 Eingrößenregelung: 2-Tank Kaskadenregelung

Auch im nicht minimalphasigen Fall können die Tanks entkoppelt voneinander betrachtet werden und ein Eingrößenregelungskonzept angewandt werden. Geht man von den Betrachtungen zum Arbeitspunkt, Kapitel 2.2, aus kann man erkennen, dass durch:

$$\sqrt{\lambda_R} = \frac{1}{\delta} M f(u_R) \quad M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & (1 - \gamma_2) \\ (1 - \gamma_1) & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

mit den hier gewählten Ventilparametern Pumpe 1 hauptsächlich Tank 2 (über Tank 4) und Pumpe 2 hauptsächlich Tank 1 (über Tank 3) befüllt:

$$M = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,915 \\ 0,92 & 0,08 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Es ist naheliegend, den Pegelstand eines Tanks von derjenigen Pumpe regeln zu lassen, von welcher die größte Auswirkung hervorgerufen wird.

Das 4-Tank-System wird, wie in Abbildung 18 dargestellt, in zwei unabhängige 2-Tank-Systeme getrennt.

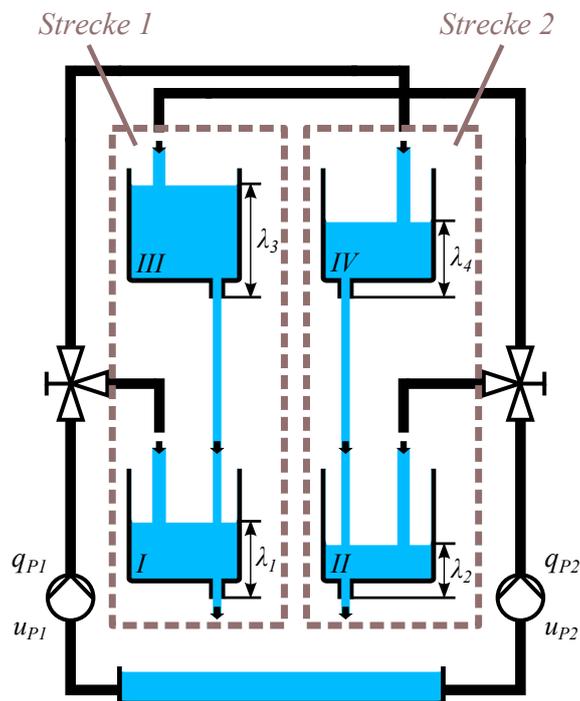


Abbildung 18: Trennung des 4-Tank-Systems in zwei 2-Tank-Systeme

Zwei Eingrößenregelungskonzepte werden betrachtet:

- *PID- Regelung*: Vorgabe einer Pumpenspannung aufgrund des Regelfehlers für den unteren Tank, jedoch ohne den Füllstand des oberen Tanks berücksichtigen zu können. Da dieser eine maximale Füllhöhe jedoch nicht überschreiten darf, ergibt sich eine beträchtliche Einschränkung der Dynamik des geregelten Systems. Vorteilhaft dabei ist, dass nur die Höhe des unteren Tanks gemessen werden muss.
- *Kaskaden- Regelung*: In einer Kaskadenstruktur wird durch den inneren Regelkreis der Füllstand des oberen Tanks geregelt, im äußeren Regelkreis die Füllhöhe des unteren Tanks. Dabei gibt der äußere Regler die Referenzhöhe des oberen Tanks vor. Mittels einer Begrenzung kann jetzt berücksichtigt werden, dass die maximale Füllhöhe nie überschritten wird. Nun kann der innerer Regelkreis so ausgelegt werden, dass die Anstiegsgeschwindigkeit des Pegelstands maximiert wird. Dadurch kann eine viel höhere Dynamik gegenüber obigem Konzept erreicht werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Füllhöhe des oberen Tanks messtechnisch erfasst werden kann.

Da die Pegelstände der oberen Tanks zur Verfügung stehen, wird eine Kaskadenregelung realisiert. Der Reglerentwurf wird nur einmal durchgeführt und für beide Teilsysteme verwendet, da sich die Strecken 1 und 2 nur unwesentlich unterscheiden. Das Prinzip ist in Abbildung 19 dargestellt.

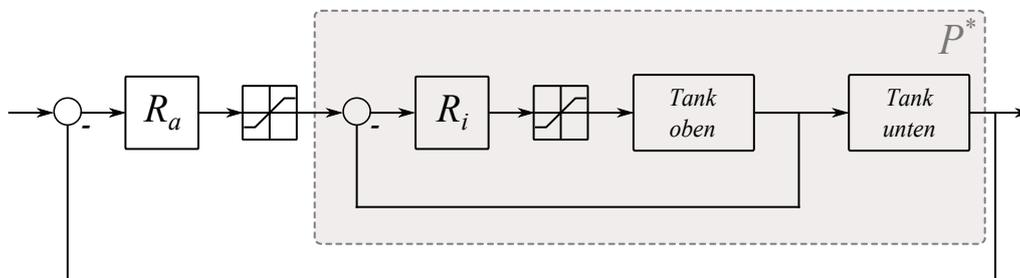


Abbildung 19: Kaskadenregelung: Prinzip

Der innere Regelkreis gibt für die vorgegebene Füllhöhe die benötigte Spannung vor, begrenzt auf die maximal zulässige Pumpenspannung. Beim Entwurf ist darauf zu achten, den inneren Regelkreis erheblich schneller als den äußeren auszulegen, hier soll er um ungefähr das zehnfache schneller sein. Angestrebt wird eine Anstiegszeit von rund 2 Sekunden,  $t_r \approx 2$ , und kein Überschwingen,  $\ddot{u} \approx 0\%$ . Für die Durchtrittsfrequenz  $w_c$  und die Phasenreserve  $\Phi_r$  des geschlossenen Kreises ergeben sich laut

(Horn & Dourdoumas, 2004, Kapitel 16.3) näherungsweise die Beziehungen:

$$w_c t_r \approx 1,5 \qquad \Phi_r + \ddot{u} \approx 70 \qquad (3.73)$$

Daraus errechnen sich die Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis zu:

$$w_c \approx 0,75 \qquad \Phi_r \approx 70$$

Mittels Frequenzkennlinien-Verfahren<sup>13</sup> wurde ein PI-Regler ermittelt. Seine Koeffizienten lauten:

$$R_i = \frac{0,7211 s + 0,0279}{s} \qquad (3.74)$$

Bezeichnet man die Übertragungsfunktion des oberen Tanks mit  $T_o$  und jene des unteren Tanks mit  $T_u$ , so kann man die für die Berechnung der äußeren Regelung benötigte Strecke  $P^*$  über

$$P^* = \frac{R_i T_o T_u}{1 + R_i T_o} \qquad (3.75)$$

bestimmen. Aus dem Wunsch, dass der äußere Regler um das Zehnfache langsamer sein soll, ergibt sich hier die Anstiegszeit zu  $t_r \approx 20$  Sekunden. Strebt man ebenfalls kein Überschwingen an, errechnen sich laut 3.73 Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve für den geschlossenen äußeren Regelkreis zu:

$$w_c \approx 0,075 \qquad \Phi_r \approx 70$$

Unter Anwendung des obigen Entwurfsverfahrens ergeben sich die Koeffizienten für den äußeren PI-Regler folgendermaßen:

$$R_a = \frac{1,8007 s + 0,0838}{s} \qquad (3.76)$$

Abbildung 20 zeigt die Realisierung der Kaskadenregelung in Simulink. Gelbe und orange Funktionsblöcke sind für das Anfahren und die Arbeitspunkteinstellung zuständig. Die Regler sind blau eingefärbt. In Abbildung 21 ist eine Reglerimplementierung im Detail dargestellt, exemplarisch für  $R4$  aus obiger Abbildung. Die Reglerkoeffizienten sind blau eingefärbt, mit dem orange Funktionsblock wird der Arbeitspunkt vorgegeben. In grün ist eine zusätzliche Anti-Windup Maßnahme implementiert. Dadurch wird eine weitere Integration vermieden, wenn die Stellgröße außerhalb des Beschränkung liegt.

<sup>13</sup>Unter Matlab wurde der Befehl *sisotool* der *Control System Toolbox* verwendet.

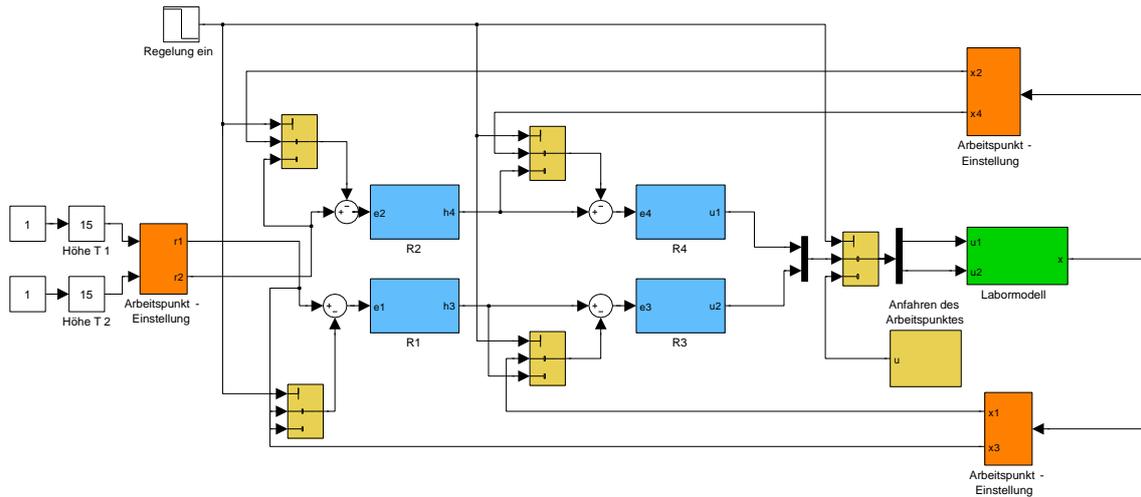


Abbildung 20: Implementation der Kaskadenregelung

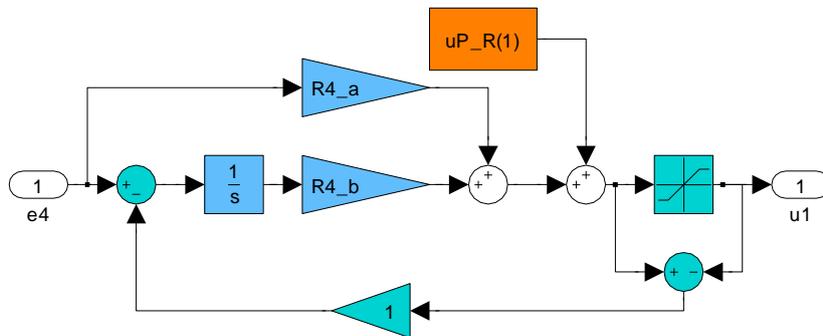


Abbildung 21: Implementation eines Reglers inklusive Anti-Windup Maßnahme

Die Regelung wurde in einem Experiment überprüft, dessen Ergebnis ist Abbildung 22 zu entnehmen.

Zum Zeitpunkt  $t = 125$  Sekunden wird dem stationären System für den Tank 2 eine neue Füllhöhe von 25 Zentimetern vorgegeben und Tank 1 5 Zentimeter.

Man erkennt, dass die Füllhöhe für Tank 2 ohne Überschwingen und so schnell wie möglich ansteigt. Für ein Eingrößenregelungskonzept kann kein besseres Ergebnis erwartet werden<sup>14</sup>.

Die vorgegebene Höhe von 5 Zentimetern für Tank 1 wird hingegen weit weniger gut erreicht, da sich Tank 3 komplett entleert und gar kein Wasser mehr in den unteren

<sup>14</sup>Bei einer Mehrgrößenregelung könnte Pumpe 2 den Anstieg der Füllhöhe in Tank 2 noch weiter erhöhen.

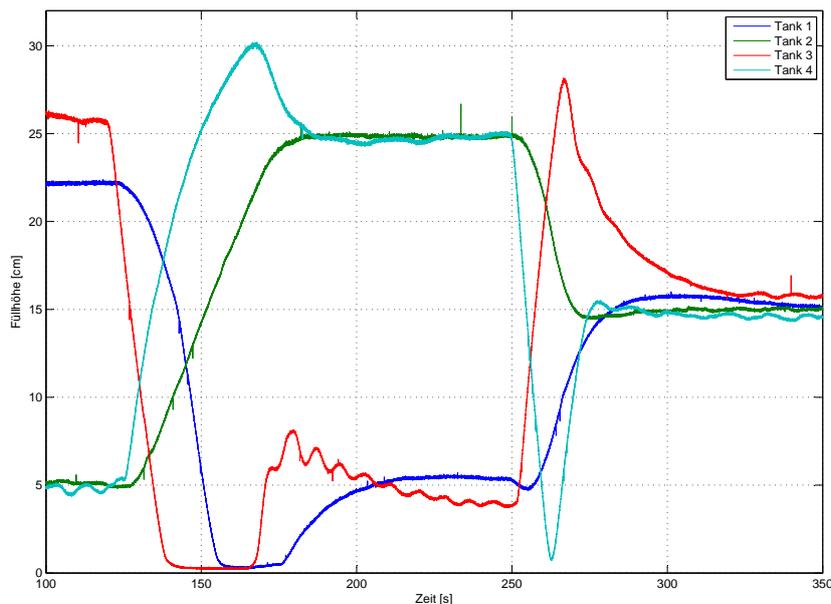


Abbildung 22: Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, Kaskadenregelung

fließt, was mit dem linearisierten Regelungsmodell nicht mehr übereinstimmt.

Bei einer Vorgabe von 15 Zentimetern für beide Tanks zum Zeitpunkt  $t = 250$  verhalten sich die Füllhöhen der beiden unteren Tanks wie erwartet ähnlich.

### 3.3.2 Mehrgrößenregelung: integrierender Zustandsregler

Das Konzept eines integrierenden Zustandsreglers aus der entkoppelten Eingrößenregelung wird auf das Mehrgrößensystem erweitert. Durch Umformung von Gleichung (3.66) und Erweiterung der Vektoren auf Matrizen, wird folgendes Zustandsraummodell entwickelt:

$$\begin{pmatrix} A & -B H & -B H_I \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (H \quad H_I) \quad (3.77)$$

Die Systemmatrix muss von der Dimension  $(6 \times 6)$  sein, da die  $(2 \times 4)$  Matrix  $H$  die vier Systemzustände auf zwei Eingangsgrößen umzurechnen hat, sowie die  $(2 \times 2)$  Matrix  $H_I$  die Verstärkung von den zwei integrierten Regelfehlern auf die Eingangsgrößen durchführt. Die Nullen in obiger Gleichung sind Matrizen entsprechender Dimension.

Das Konzept der Eigenwertvorgabe ist im Mehrgrößenfall, im Gegensatz zum Eingrößenfall nicht eindeutig. Dazu betrachten wir die generelle Problemstellung:

Ausgehend von gegebenen  $(n \times n, n \times m)$  Matrizen  $(A, B)$  und einer Menge  $n$  reeller beziehungsweise konjugiert komplexer Zahlen  $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  soll eine reelle  $(m \times n)$  Matrix  $H$  so gefunden werden, dass die Eigenwerte der Gleichung  $(A - B H)$  bei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  liegen<sup>15</sup>.

Im Eingrößenfall ( $m = 1$ ) ist die Lösung, sofern sie existiert, eindeutig. Im hier vorliegenden Fall  $1 < m < n$  ist die Lösung, sofern existent, mehrdeutig. Wie in (Kautsky, Nichols & Chu, 1989) vorgeschlagen, werden die zusätzlichen Freiheitsgrade dazu verwendet, um diejenige Rückkopplungsmatrix  $H$  zu finden, welche das geschlossene System *robust* in dem Sinn macht, dass seine Pole so unempfindlich wie möglich gegenüber Störungen sind. Die Autoren zeigen, dass die Störempfindlichkeit der vorgegebenen Eigenwerte von der Wahl der zugehörigen Eigenvektoren abhängt. Bildet man eine Matrix  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dieser Eigenvektoren kann mit der *Konditionszahl*

$$\text{cond}(X) = \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2 \quad (3.78)$$

ein Maß für die Empfindlichkeit gefunden werden. Neben dieser existieren weitere Empfindlichkeitsmaße, zu finden in (Kautsky et al., 1989, Kapitel 2.5).

Somit kann die ursprüngliche Problemstellung erweitert werden:

Ausgehend von gegebenen Matrizen  $(A, B)$  und einer Menge  $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  soll eine reelle Matrix  $H$  und eine nicht singuläre Matrix  $X$  so gefunden werden, dass Bedingung

$$(A - B H) X = X \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (3.79)$$

so erfüllt ist, dass eine Maß für die Konditionierung oder Robustheit des Problems optimiert wird.

Die ursprünglichen Freiheitsgrade werden also dahingehend verwendet, linear unabhängige Vektoren  $v \in X$  so zu wählen, dass das resultierende Gesamtsystem robust wird<sup>16</sup>. Durch Vorgabe der Eigenwerte:

$$\epsilon = \{-0.2, -0.2, -0.15, -0.1, -0.1, -0.15\}$$

werden mittels obiger Methode folgende Reglerparameter gefunden:

$$H = \begin{pmatrix} -0.157 & 1.381 & -0.102 & 0.471 \\ 1.123 & -0.175 & 0.341 & -0.121 \end{pmatrix} \quad H_I = \begin{pmatrix} 0.007 & -0.087 \\ -0.071 & 0.007 \end{pmatrix}$$

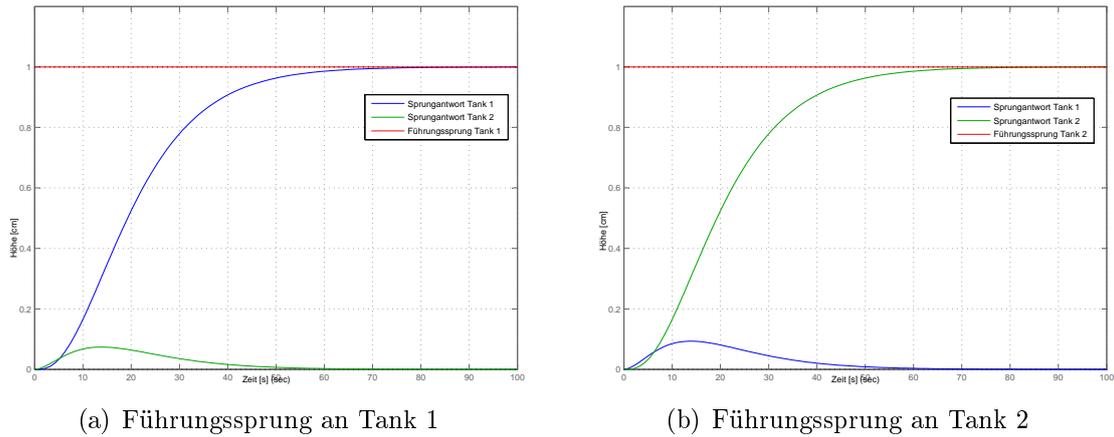


Abbildung 23: Füllstandsänderungen in Tanks 1 und 2 bei Führungssprüngen

In Abbildung 23 sind die Sprungantworten des geschlossenen Kreises dargestellt.

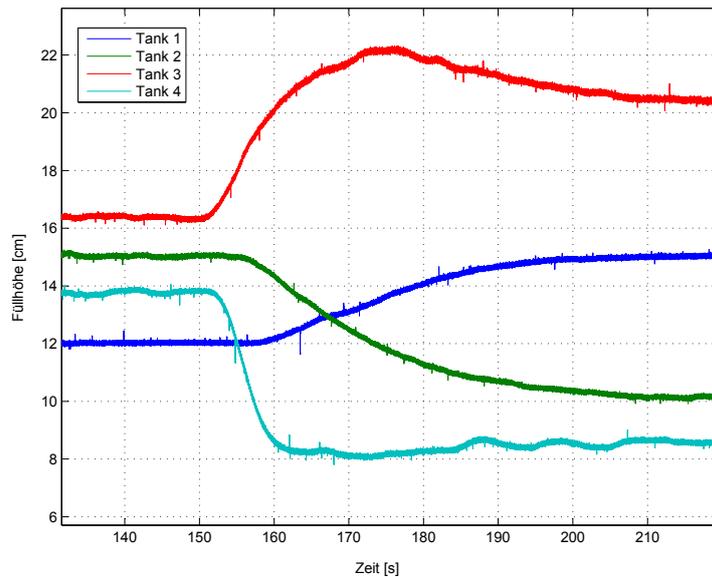


Abbildung 24: Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit integrierendem Zustandsregler

Abbildung 24 zeigt die Ergebnisse eines Experiments für eine Füllhöhenänderung, wobei sich das System anfänglich im Arbeitspunkt befindet. Bei  $t = 155$  Sekunden

<sup>15</sup>Voraussetzung:  $(A, B)$  ist steuerbar.

<sup>16</sup>Die von (Kautsky et al., 1989) vorgestellte Methode ist in Matlab durch die Funktion *place* implementiert.

wird Tank 1 eine neue Höhe von 15 cm und Tank 2 eine von 10 cm vorgegeben. Nach rund 50 Sekunden sind die gewünschten Pegelstände ohne Überschwingen erreicht. Vergleicht man die Anstiegsgeschwindigkeit von Tank 2 in Abbildung 25 mit jener in

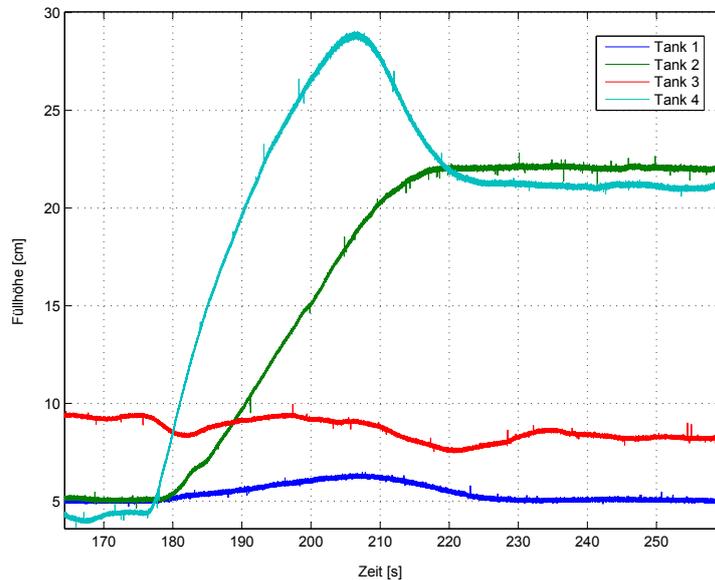


Abbildung 25: Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit integrierendem Zustandsregler

Abbildung 22 für die Kaskadenregelung, kann man erkennen, dass sie im Mehrgrößenfall ein wenig höher ist. Man muss jedoch beachten, dass hier die Beschränkung der Füllhöhe des oberen Tanks nicht wie in der Kaskadenregelung integriert werden kann. Will man eine noch größere Füllhöhenänderung vorgeben können, muss die Dynamik des Reglers verringert werden.

### 3.3.3 Mehrgrößenregelung: $H_\infty$ Regelung

Als weiterer Ansatz zur Mehrgrößenregelung soll nun eine  $H_\infty$  Regelung betrachtet werden. Die  $H_\infty$ - Norm eines realisierbaren<sup>17</sup>, linearen, stabilen Systems mit der Übertragungsmatrix  $G(s)$  ist folgendermaßen definiert:

$$\|G(s)\|_\infty := \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.80)$$

<sup>17</sup>Eine Übertragungsfunktion heißt realisierbar, wenn der Grad ihres Nennerpolynoms größer gleich dem Grad ihres Zählerpolynoms ist.

wobei mit  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  der größte Singulärwert von  $G(j\omega)$  bezeichnet wird. Die Singulärwerte von  $G(j\omega)$  sind die positiven Quadratwurzeln der Eigenwerte von  $G(-j\omega)^T G(j\omega)$ , d.h.

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega))} \quad (3.81)$$

Für die Matrix  $G(-j\omega)^T$  wird in der Literatur häufig das Symbol  $G^H$  verwendet. Führt man eine Singulärwert-Zerlegung einer Matrix  $G(j\omega)$  durch, wie sie beispielsweise in (Skogestad & Postlethwaite, 1997, 3.3.4 und A.3) beschrieben ist, so erhält man eine Zerlegung der Form:

$$G(j\omega) = U \Sigma V^T \quad (3.82)$$

Hierbei sind  $U$  und  $V$  orthogonale Matrizen, d.h.

$$U^T U = I \quad V^T V = I$$

und  $\Sigma$  bezeichnet eine Diagonalmatrix, in der die Singulärwerte von  $G(j\omega)$  in absteigender Reihenfolge angeführt sind.

Die Singulärwerte geben die Verstärkung der Matrix  $G$  an der Frequenz  $\omega$  an, in die aus der Singulärwert-Zerlegung ermittelten zugehörigen Richtungen.

Ist man nun bestrebt, die oben definierte  $H_\infty$ -Norm zu minimieren, entspricht das der Minimierung des größten Singulärwerts des Systems in der "schlechtesten Richtung" bei der "schlechtesten Frequenz".

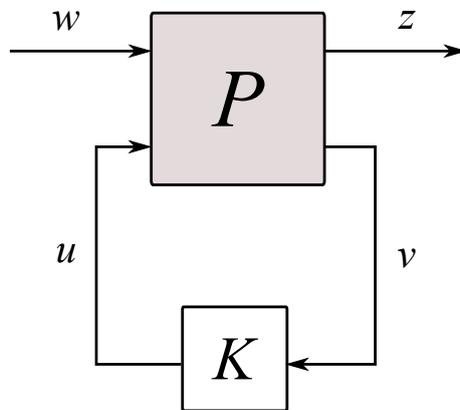


Abbildung 26: verallgemeinerte Regelkonfiguration

Geht man von einer generellen Methode zur Formulierung von Regelungsproblemen nach (Doyle, 1982) aus, betrachtet man eine verallgemeinerte Regelkreiskonfiguration

wie in Abbildung 26, wobei  $P$  die generalisierte Strecke und  $K$  den Regler darstellt. Die generalisierte Strecke besteht aus dem ursprünglichen System und meist zusätzlichen Gewichtsfunktionen. Das Signal  $w$  beschreibt alle externen Eingänge wie Störungen, Sensorrauschen und Sollwerte, der Ausgang  $z$  den Regelfehler.  $u$  beschreibt die Stellgrößen und  $v$  die Messgrößen. Beinahe jedes lineare Regelungsproblem kann in dieser Form (ohne Modellunsicherheiten) dargestellt werden.

Das Regelungsproblem stellt sich nun verallgemeinert folgendermaßen<sup>18</sup>:

Finde einen Regler  $K$ , welcher, basierend auf den Informationen in  $v$ , Stellgrößen  $u$  derart generiert, dass sie den Einflüssen von  $w$  auf  $z$  entgegenwirken. Dabei soll eine geeignete Norm des geschlossenen Kreises von  $w$  nach  $z$  minimiert werden.

In dem hier gewählten Fall wird die  $H_\infty$ - Norm verwendet, um die Energieverstärkung von  $w$  nach  $z$  zu minimieren. Hierzu wird die generalisierte Strecke  $P$  mit dem Regler  $K$  beschaltet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} &= P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \\ u &= K(s) v \end{aligned} \quad (3.83)$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu<sup>19</sup>:

$$z = F_l(P, K) w \quad (3.84)$$

wobei:

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{11}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.85)$$

Eine  $H_\infty$  Regelung hat also die  $H_\infty$  - Norm von  $F_l(P, K)$  zu minimieren:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty \rightarrow \min \quad (3.86)$$

Herauszustreichen ist in diesem Zusammenhang, dass  $K(s)$  ein dynamisches System beschreibt. Dies und die Tatsache, dass der Regler nur mit den Messgrößen (in unserem Fall den Pegelständen der unteren Tanks) arbeitet, unterscheidet sich zusätzlich zum

<sup>18</sup>entnommen aus: (Skogestad & Postlethwaite, 1997).

<sup>19</sup> $F_l(P, K)$  beschreibt eine untere *linear fractional transformation* (LFT) von  $P$  mit  $K$ , wie sie von (Doyle, 1984) vorgestellt wurde.

vorangegangenen Mehrgrößenregelungskonzept mittels Zustandsregelung<sup>20</sup>. Bindet man das 4-Tank-System in die verallgemeinerte Regelungskonfiguration ein, so stellt es sich wie in Abbildung 27 dar.

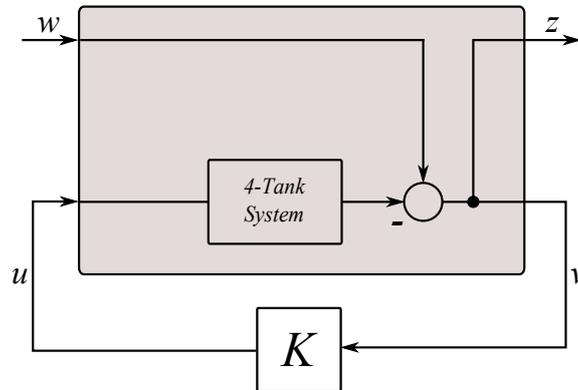


Abbildung 27: verallgemeinerte Regelkonfiguration für das 4-Tank Modell

In Zustandsraumdarstellung lauten die Gleichungen für die generalisierte Strecke somit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ v &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (3.87)$$

Daraus ergeben sich die Parameter der generalisierten Strecke  $P$  zu

$$P = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

Der generalisierte Strecke sind die Parameter des linearisierten 4-Tank Systems folgendermaßen zugeordnet<sup>21</sup>

$$\begin{array}{lll} A = A & B_1 = 0 & B_2 = B \\ C_1 = -C & D_{11} = I & D_{12} = 0 \\ C_2 = -C & D_{21} = I & D_{22} = 0 \end{array}$$

<sup>20</sup>Da nur die Pegelstände der unteren Tanks verwendet werden, eignet sich dieses Mehrgrößenregelungskonzept prinzipiell auch für den minimalphasigen Fall. Das Verhalten und die Beschränkungen durch die positive Nullstelle machen den nicht minimalphasigen Fall jedoch deutlich interessanter.

<sup>21</sup>0 und I seien Null- und Einheitsmatrizen passender Dimension.

Der zur Lösung verwendete Algorithmus von (Doyle, Glover, Khargonekar & Francis, 1989) beinhaltet eine Annahme, die durch die vorliegende Strecke jedoch nicht erfüllt wird:  $D_{12}$  sollte vollen Rang haben, eine hinreichende Bedingung, um realisierbare Regler zu erhalten. Indem man in die Strecke zusätzliche Regelgrößen und geeignete Gewichtungen einbaut, ist es jedoch möglich diese Bedingung zu erreichen.

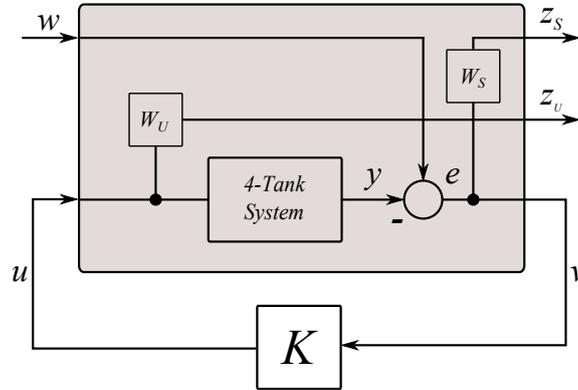


Abbildung 28: verallgemeinerte Regelkonfiguration für das 4-Tank Modell mit Gewichtungen

Die in Abbildung 28 dargestellte Strecke entspricht einer *mixed-sensitivity*  $H_\infty$  Optimierungsaufgabe. Zur Lösung selbiger führt man die Matrix der Störübertragungsfunktionen

$$S(s) : w(s) \rightarrow e(s)$$

mithilfe der oben eingeführten Vektoren  $e(s)$  und  $y(s)$ , sowie der Matrix  $G(s)$  der Übertragungsfunktionen des 4-Tank-Systems ein:

$$e(s) = w(s) - y(s) = w(s) - G(s) u(s) = w(s) - G(s) K(s) e(s)$$

$$(I + G(s) K(s)) e(s) = w(s)$$

$$S(s) = (I + G(s) K(s))^{-1}$$

Man ist nun bestrebt jenen Regler  $K(s)$  zu finden, der die  $H_\infty$ - Norm von  $F_l(P, K)$  minimiert:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} W_S S \\ W_U K S \end{pmatrix} \right\|_\infty \rightarrow \min \quad (3.89)$$

Hierbei gewichtet die Übertragungsmatrix  $W_S$  die Matrix der Störübertragungsfunktionen  $S$ :

$$W_S(s) S(s) : w(s) \rightarrow z_S(s) \quad (3.90)$$

$W_U$  gewichtet die Stellgrößen:

$$W_U(s) K(s) S(s) : w(s) \rightarrow z_U(s) \quad (3.91)$$

Die Herausforderung dieser Aufgabe stellt sich nun dadurch, sinnvolle Gewichte zu finden. Für die Übertragungsmatrix  $W_S$  orientiert man sich an der Störübertragungsmatrix der Mehrgrößenregelung mittels Zustandsregler. Für  $W_U$  wählt man eine konstante Matrix. Die Gewichte lauten:

$$W_S = \begin{pmatrix} \frac{s+0,008}{s+1 \times 10^{-6}} & 0 \\ 0 & \frac{s+0,008}{s+1 \times 10^{-6}} \end{pmatrix} \quad W_U = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,95 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Die Koeffizienten für  $W_U$  wurden so gewählt, dass die Beschränkung der Stellgrößen für die verwendeten Sollgrößensprünge eingehalten wird. Die Pole von  $W_S$  wurden so gewählt, dass annähernd integrierendes Verhalten erreicht wird. Ein reiner Integrator kann nicht verwendet werden, da der resultierende Regler  $K(s)$  die generalisierte Strecke nicht stabilisieren würde. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Übertragungsmatrix  $G(s)$  des Systems bereits wie im Kapitel 2.4 skaliert ist. Die Berechnung des Reglers erfolgt unter Matlab mithilfe der *Robust Control Toolbox*. Hierbei wird die verallgemeinerte Regelkonfiguration aus Abbildung 28 nachgebildet<sup>22</sup>. Für diese wird unter Zuhilfenahme des Befehls *hinfsyn* ein dynamischer Regler entworfen. In Zustandsraumdarstellung lauten dessen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A x + B v \\ u &= C x + D v \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,1156 & -0,1746 & -1,6525 & 0,2618 & 1,9718 & -0,1123 \\ 0,3012 & -0,7344 & -6,5508 & 0,6179 & 4,9982 & -0,4400 \\ 0,0079 & -0,0186 & -0,4064 & 0,0210 & 0,1490 & -0,0387 \\ -0,3415 & 0,4925 & 4,6506 & -0,7356 & -5,6943 & 0,3154 \\ -0,0206 & -0,0011 & -0,0274 & 0,0059 & -0,1701 & -0,0027 \\ -0,1191 & 0,2906 & 2,5209 & -0,2429 & -1,9713 & 0,1659 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,1165 & 0 \\ 0 & 0,0458 \\ 0 & -0,0338 \\ 0,0412 & 0 \\ -0,0295 & 0 \\ 0 & 0,1136 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>22</sup>Es wird die Verwendung von *augw* empfohlen. Vorsicht ist bei dem Befehl *sysic* geboten, der ein System zu hoher Ordnung erzeugen kann, da die Zustände von  $G(s)$  mehrmals auftreten können.

$$C = \begin{pmatrix} 0,6136 & -1,4087 & -13,8550 & 1,2714 & 10,2299 & -0,9689 \\ -0,7283 & 0,9657 & 9,0729 & -1,3564 & -11,5649 & 0,6129 \end{pmatrix}$$

Die Norm von  $F_l(P, K)$  für den gefundenen Regler  $K(s)$  ergibt sich zu:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = 1.0609$$

In Abbildung 29 sind die Singulärwerte von  $F_l(P, K)$  über der Frequenz aufgetragen.

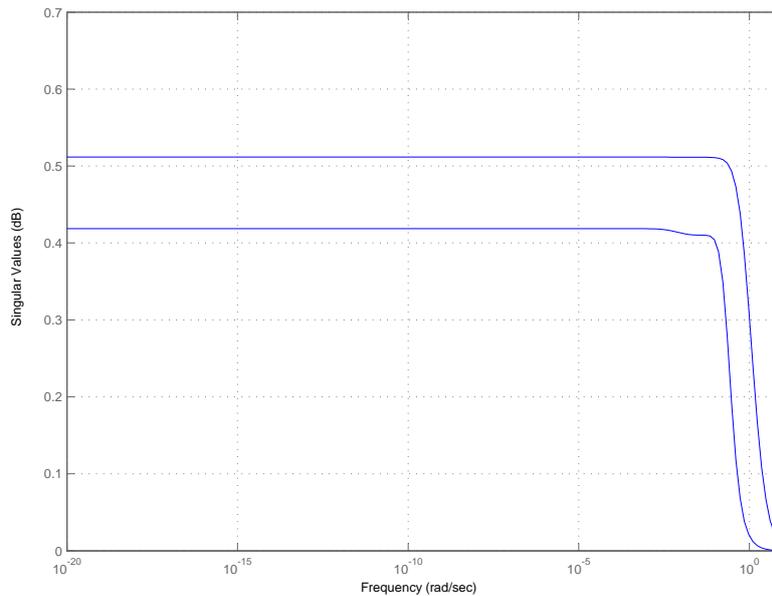


Abbildung 29: Singulärwerte von  $F_l(P, K)$

Ein Koppelplan in Simulink für diesen Regler ist in Abbildung 30 dargestellt. Das Zustandsraummodell des entwickelten Reglers wird in den blau eingefärbten Funktionsblock eingegeben.

Abbildung 31 zeigt das Ergebnis eines Experiments. Dem System, welches im Arbeitspunkt eingeschwungen ist, wird zum Zeitpunkt  $t = 200$  Tank 1 eine neue Höhe von 15cm und Tank 2 10cm vorgegeben. Im Vergleich zur robusten Zustandsregelung, an dem das gleiche Experiment durchgeführt wurde, siehe Abbildung 24, ist eine geringere Anstiegszeit feststellbar. Dies beruht auf der Tatsache, dass aufgrund des verwendeten *dynamischen* Reglers die Änderung eines Sollwertes sich viel stärker als bei allen anderen Regelungskonzepten auf beide Stellgrößen auswirkt. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die stationäre Genauigkeit viel später erreicht wird,

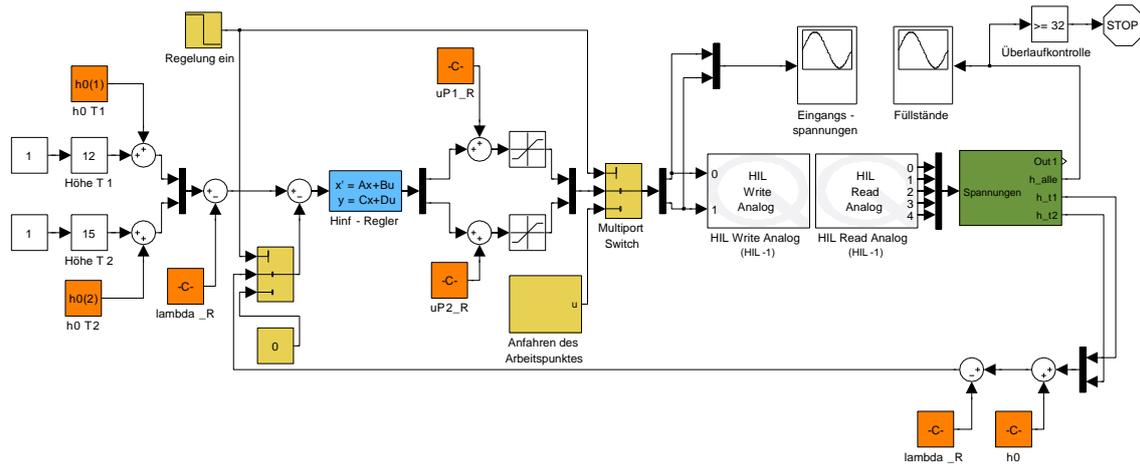


Abbildung 30: Simulink Plan der  $H_\infty$  Regelung

im Vergleich zum robusten Zustandsregler wird doppelt soviel Zeit benötigt. Die Tatsache, dass kein Integrierer in der Reglersynthese verwendet werden kann, ist dafür verantwortlich

Es sei hier explizit, wie am Beginn dieses Kapitels angeführt, darauf hingewiesen, dass der Einfluss der Abtastperiode bei der digitalen Realisierung in dem untersuchten Bereich nicht erkennbar war. Bei einer Abtastperiode von 0,5 Sekunden ist auch

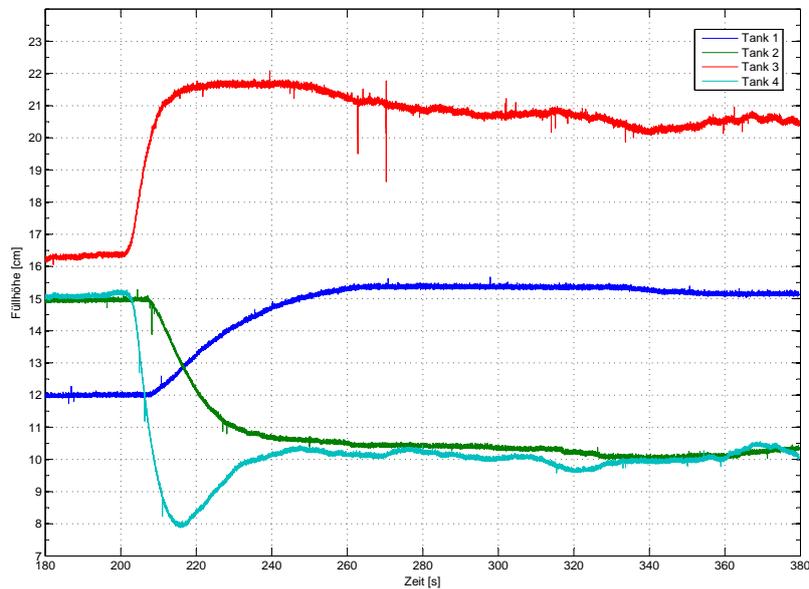


Abbildung 31: Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit  $H_\infty$  Regelung

für den dynamischen Regler keine Einschränkung bemerkbar. In obiger Simulink-Realisierung erfolgt die Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Reglers mittels Euler-Verfahren und einer Abtastperiode von 0.05 Sekunden.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein 4-Tank-System vorgestellt, ein Mehrgrößensystem aus vier miteinander verbundenen Tanks und zwei Pumpen. Ein Labormodell wurde am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität aufgebaut, die Modellparameter können dieser Arbeit entnommen werden. Das nichtlineare mathematische Modell, welches das Gesamtsystem beschreibt, wurde ermittelt und validiert, ein Arbeitspunkt gefunden und eine Linearisierung durchgeführt. Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit sowie die Lage der Pol- und Nullstellen bei Mehrgrößensystemen wurde untersucht. Es wurde festgestellt, dass rein mittels Variation der Ventilstellungen eine Nullstelle des Gesamtsystems in die rechte komplexe Halbebene verschoben werden kann. Dadurch geht die Minimalphasigkeit des Systems verloren. Es besteht ein direkter physikalischer Zusammenhang: Im minimalphasigen System wird in Summe mehr Wasser in die unteren Tanks gepumpt, im nicht-minimalphasigen mehr in die oberen. Es ist beachtenswert, dass alle Teilübertragungsfunktion keine positive Nullstelle besitzen. Eine Validierung bestätigt die Übereinstimmung zwischen Labormodell und mathematischem Modell. Die zwei Hauptursachen für die Beeinträchtigung der Genauigkeit sind die stationäre Drift der Pumpen und das nur ungenau einstellbare Verhältnis der Pumpenflüsse.

Ein- und Mehrgrößenregelungskonzepte wurden sowohl für den minimalphasigen als auch den nicht-minimalphasigen Fall entworfen und realisiert.

Im minimalphasigen Fall konnte gezeigt werden, dass mit dezentralen Eingrößenregelungen am Beispiel einer integrierenden Zustandsregelung bereits gute Ergebnisse erzielt werden können, indem von je einer Pumpe ein Pegelstand der unteren Tanks geregelt wird. Wasser, welches aus den oberen Tanks fließt, wird als Störung angesehen und kann mittels eines in den Regelkreis implementierten Integrierers gut ausgeglichen werden. Die Güte des Gesamtsystems kann durch Mehrgrößenregelungen nicht merklich verbessert werden, wie bereits (K. H. Johansson, 2002) aufzeigte.

Für das nicht-minimalphasige System wird eine 2-Tank Kaskadenregelung entworfen. Sie dient als Eingrößenregelungskonzept zum Vergleich mit den Mehrgrößenregelungskonzepten. Ein integrierender Zustandsregler wurde entworfen, indem das Konzept der Polvorgabe auf den Mehrgrößenfall verallgemeinert wurde. Alle vier Messgrößen wurden nun zur Regelung verwendet. Da weniger Eingangsgrößen als Systemzustände vorhanden sind ist die Lösung der Aufgabe nicht eindeutig. Die zusätzlichen Freiheitsgrade wurden genutzt, um nach der Idee von (Kautsky et al., 1989) die Robustheit des Gesamtsystems insofern zu erhöhen, dass die gewählten Pole möglichst unempfindlich gegenüber Parameterschwankungen sind. Hiermit war es möglich, das nicht-minimalphasige System gut zu regeln.

Als zweites Mehrgrößenregelungskonzept wurde ein  $H_\infty$  Regler entworfen. Hier wurde, im Gegensatz zu den konstanten Verstärkungen in den anderen Regelungen, ein dynamischer Regler entwickelt. Die Reglersynthese erfolgte durch Minimierung der  $H_\infty$ - Norm einer um Gewichte erweiterten Strecke in verallgemeinerter Regelkonfiguration. Unter Berücksichtigung der systemimmanenten Beschränkungen wurde die Energieverstärkung von den Störungen zu den Systemausgängen minimiert. Auch mit diesem Konzept konnte eine zufriedenstellende Regelung erzielt werden.

Vergleicht man die Ergebnisse der Mehrgrößenregelungskonzepte miteinander, kann man erkennen, dass die beste Regelgüte mittels des integrierenden Zustandsreglers erreicht wird. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da hierbei alle vier Zustandsgrößen verwendet werden. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Leistungsfähigkeit des  $H_\infty$  Regelungskonzepts, welches mit nur zwei Messgrößen auskommt, noch beeindruckender. Vergleicht man die Mehrgrößenregelungskonzepte mit der 2-Tank Kaskadenregelung, so stellt man fest, dass dieses einfachere Konzept einen wesentlichen Vorteil hat: Der Füllstand des oberen Tanks kann nur hier begrenzt werden, ohne Einbußen bei der Dynamik des Gesamtsystems zu erhalten. Dadurch ist die Anstiegsgeschwindigkeit nicht zu überbieten. Ein Vorteil des Mehrgrößen-Zustandsreglers ist seine Robustheit.

Aufbauend auf der vorliegenden Arbeit können fortgeschrittene Regelungskonzepte entwickelt und am Labormodell getestet werden, wie sie beispielsweise in Biswas, Srivastava, Ray & Samanta, 2009 vorgestellt werden. Auch nichtlineare Regelungskonzepte können untersucht werden. Das 4-Tank-System kann um Totzeiten erweitert werden, wie es in Shneiderman & Palmor, 2010 vorgeschlagen wird.

## Literatur

- Doyle, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 129 (6), 242-250.
- Doyle, J. (1984). Lecture notes in advances in multivariable control. *ONR/Honeywell Workshop*.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P. & Francis, B. (1989, August). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34 (8), 831 -847.
- Fruhmann, M. (1992). Realisierung einer Füllstandsregelungsanlage. Diplomarbeit. *Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz*.
- Horn, M. & Dourdoumas, N. (2004). *Regelungstechnik*. Pearson Studium.
- Johansson, K. & Nunes, J. (1998, Juni). A multivariable laboratory process with an adjustable zero. In *American control conference, 1998. proceedings of the 1998* (Bd. 4, S. 2045 -2049 vol.4).
- Johansson, K. H. (2002). Interaction bounds in multivariable control systems. *Automatica*, 38 (6), 1045 - 1051.
- Kautsky, J., Nichols, N. & Chu, E.-W. (1989). Robust pole assignment in singular control systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 121 (C), 9-37.
- Lunze, J. (2008). *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer. Paperback. Verfügbar unter <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/3540707905>
- Quanser. (2009). QuaRC 1.2 Installation Guide [Software-Handbuch]. Quanser Inc., Ontario, Canada.
- Roppenecker, G. & Preuß, H.-P. (1982). Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensysteme. *Regelungstechnik*, 30, 219-255 und 255-263.
- Rosenbrock, H. H. (1970). *State-space and multivariable theory*. Thomas Nelson & Sons Ltd, London.
- Seebacher, M. (2009). *Pegelsensor für das 3-Tanksystem*. Projektarbeit, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz.
- Skogestad, S. & Postlethwaite, I. (1997). *Multivariable feedback control: Analysis and design*. John Wiley & Sons.
- Tipler, P. A. (2000). *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Wolf, E. A., Skogestad, S., Hovd, M. & Mathisen, K. W. (1992). A procedure for controllability analysis. *IFAC Workshop on interactions between process design and process control*, 127-142.

## Abbildungsverzeichnis

1	4-Tank-System . . . . .	1
2	Physikalisches Modell eines einzelnen Tanks . . . . .	4
3	Pumpenkennlinie: Spannung zu normiertem Fluss . . . . .	7
4	4-Tank-System . . . . .	8
5	Validierung des nichtlinearen Modells, stationär . . . . .	10
6	Validierung des nichtlinearen Modells, instationär . . . . .	11
7	Korrekturkennlinie für die Pegelsensoren . . . . .	12
8	Verhalten des Gesamtsystems abhängig von Ventilstellungen . . . . .	24
9	Vergleich der Füllstände aus Experiment und Modell in Abhängigkeit von einer Pumpe . . . . .	25
10	Vergleich der Füllstände aus Experiment und Modell in Abhängigkeit beider Pumpen . . . . .	27
11	Pumpenflüsse bzw. Füllhöhen hängen nicht nur von der Eingangsspannung der Pumpen ab . . . . .	28
12	Laboraufbau . . . . .	30
13	Zustandsregelung . . . . .	36
14	Zustandsregelung mit integrierenden Anteil . . . . .	37
15	Sprungantwort der geregelten Tanks . . . . .	39
16	Strukturplan der ZR-I SISO Regelung . . . . .	40
17	Vergleich der Regelung von Laborexperiment und Simulation um den Arbeitspunkt . . . . .	40
18	Trennung des 4-Tank-Systems in zwei 2-Tank-Systeme . . . . .	42
19	Kaskadenregelung: Prinzip . . . . .	43
20	Implementation der Kaskadenregelung . . . . .	45
21	Implementation eines Reglers inklusive Anti-Windup Maßnahme . . . . .	45
22	Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, Kaskadenregelung	46
23	Füllstandsänderungen in Tanks 1 und 2 bei Führungssprüngen . . . . .	48
24	Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit integrierendem Zustandsregler . . . . .	48
25	Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit integrierendem Zustandsregler . . . . .	49
26	verallgemeinerte Regelkonfiguration . . . . .	50
27	verallgemeinerte Regelkonfiguration für das 4-Tank Modell . . . . .	52
28	verallgemeinerte Regelkonfiguration für das 4-Tank Modell mit Gewichtungen . . . . .	53
29	Singulärwerte von $F_l(P, K)$ . . . . .	55
30	Simulink Plan der $H_\infty$ Regelung . . . . .	56

31	Experiment am nicht minimalphasigen Labormodell, robuste Mehrgrößenregelung mit $H_\infty$ Regelung . . . . .	56
----	---	----

## Tabellenverzeichnis

1	Parameter der Pumpenkennlinie . . . . .	6
2	Modellparameter für das 4-Tank-System . . . . .	9
3	Parameter der Sensorkennlinie . . . . .	13