

**Sanela Omerovic**

**Solvency II - konforme Bewertung  
von Rückstellungen und  
impliziten Optionen in  
Lebensversicherungsverträgen**

**MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades einer  
Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



**Technische Universität Graz**

**Betreuer:**

**Dipl.-Ing. Dr.techn. Jürgen Hartinger  
O.Univ.-Prof. Dr.phil. Robert Tichy**

**Institut für Analysis und Computational Number Theory**

**Graz, im Mai 2013**

## EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am.....

.....

(Unterschrift)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>1 Solvency II</b>	<b>3</b>
1.1 Ziele von Solvency II . . . . .	3
1.2 Gesetzliche Rahmenbedingungen und Bestandteile . . . . .	4
1.3 Quantitative Anforderungen . . . . .	5
1.3.1 Solvency Capital Requirement (SCR) . . . . .	5
1.3.2 Minimum Capital Requirement (MCR) . . . . .	6
1.3.3 Versicherungstechnische Rückstellungen . . . . .	6
1.3.4 Risikomarge . . . . .	7
1.4 Qualitative Anforderungen und Offenlegungspflichten . . . . .	7
1.5 Mathematische Grundlagen . . . . .	8
1.5.1 Best Estimate . . . . .	8
1.5.2 Risikolose Zinskurven . . . . .	8
<b>2 Bäume und Netze zur Approximation stochastischer Prozesse</b>	<b>10</b>
2.1 Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	10
2.2 Bäume und Netze . . . . .	14
2.3 Die Baumapproximation . . . . .	14
2.4 Konvergenz im Baummodell . . . . .	20
2.5 Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess . . . . .	22
2.5.1 Baumapproximation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses . . . . .	24
<b>3 Zinsstrukturmodelle</b>	<b>25</b>
3.1 Einfache Zinsderivate . . . . .	27
3.2 Infinitesimale Zinsraten . . . . .	28

3.3	Finanzmathematische Grundlagen . . . . .	29
3.4	Das Black-Modell für Caplets . . . . .	35
3.5	Implizite Volatilitäten . . . . .	38
3.6	Short-Rate Modelle . . . . .	39
3.7	Das Black-Derman-Toy ( <b>BDT</b> ) Modell . . . . .	41
3.8	Baumapproximation des <b>BDT</b> -Zinsmodells . . . . .	44
3.8.1	Bepreisung eines Zinscaps . . . . .	46
3.9	Das London Interbank Offered Rate ( <b>LIBOR</b> )-Marktmodell . . . . .	51
3.10	Baumapproximation des <b>LIBOR</b> -Marktmodells . . . . .	55
3.10.1	Bepreisung eines Zinscaps . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Sterblichkeitsmodelle</b>	<b>63</b>
4.1	Das Sterblichkeitsrisiko . . . . .	65
4.2	Modellierung der Sterblichkeit . . . . .	66
4.3	Short Rate Modelle für Sterblichkeiten . . . . .	71
4.4	Das Mean-Reverting-Brownian-Gompertz ( <b>MRBG</b> ) Modell . . . . .	71
4.5	Baumapproximation des <b>MRBG</b> -Modells . . . . .	73
4.5.1	Beispielrechnung . . . . .	74
4.6	Marktmodelle für Sterblichkeiten . . . . .	78
4.7	Das Survivor Credit Offered Rate ( <b>SCOR</b> )-Marktmodell . . . . .	78
4.8	Baumapproximation des <b>SCOR</b> -Marktmodells . . . . .	82
4.8.1	Beispielrechnung . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>89</b>
5.1	Rechnungsgrundlagen . . . . .	89
5.1.1	Sterblichkeitsmodell . . . . .	89
5.1.2	Zinsstrukturmodell . . . . .	92
5.2	Zinsänderungs- und Vorhersagerisiko . . . . .	94
5.2.1	Risikomaße . . . . .	94
5.2.2	Beispielbestand . . . . .	95
5.2.3	Ergebnisse und Sensitivitätsanalyse . . . . .	103
5.3	Der Quadrinomialbaum . . . . .	107
5.3.1	Das Gewinnsystem anhand des Quadrinomialbaumes . . . . .	109
5.3.2	Beispielrechnungen zum Gewinnsystem . . . . .	112
	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>115</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>117</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Säulengliederung der Anforderungen von Solvency II . . . . .	5
2.1	Rekombinierbarer und vollständiger Binomialbaum . . . . .	16
2.2	Rekombinierbarer Baum . . . . .	16
2.3	Einschrittbewegung im Binomialbaum . . . . .	17
2.4	Simulation der Brownschen Bewegung . . . . .	18
3.1	LIBOR Zinssätze zum 12. Dezember 2012, Quelle: <b>FRED</b> [2012] . .	25
3.2	Zinsstruktur im <b>BDT</b> -Modell für zwei Perioden und dazugehöriger Baum . . . . .	44
3.3	Short Rates nach <b>BDT</b> -Baummodell für Cap- und Caplet-Bepreisung	48
3.4	Diskontierte Capletpreise nach Black-Derman-Toy ( <b>BDT</b> ) für $K = 0.002$ . . . . .	49
3.5	Baumstruktur nach <b>Xiao</b> [2011] . . . . .	57
3.6	Baumstruktur nach <b>Xiao</b> [2011] . . . . .	59
3.7	Forward Rates nach <b>Xiao</b> [2011] . . . . .	60
4.1	Ausgewählte Sterbetafeln für Männer von 1868 bis 2000, Quelle: <b>Austria</b> [2012] . . . . .	64
4.2	Gliederung des Sterblichkeitsrisikos . . . . .	66
4.3	Baumstruktur im <b>MRBG</b> -Modell für zwei Perioden . . . . .	73
4.4	Baumstruktur im <b>MRBG</b> -Modell für zwei Perioden für Sterblichkeitsintensitäten und Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten . . . . .	74
4.5	$y_{k;j}$ . . . . .	75
4.6	$\mu_{k;j}$ . . . . .	75
4.7	Diskreter Ornstein-Uhlenbeck-Prozess und Sterblichkeitsintensitäten nach <b>MRBG</b> . . . . .	75
4.8	Überlebenswahrscheinlichkeiten im Baummodell nach <b>MRBG</b> . . . .	76
4.9	Auszahlungsfunktionen zu Überlebenswahrscheinlichkeiten im Baummodell nach <b>MRBG</b> . . . . .	77
4.10	<b>SCOR</b> -Forward Rates nach <b>Xiao</b> [2011] . . . . .	87

5.1	Überlebenswahrscheinlichkeiten nach <b>MRBG</b> für eine 30-jährige Person	90
5.3	Grafische Darstellung aller Pfade des <b>MRBG</b> -Baummodells anhand logarithmierter Sterblichkeitswerte . . . . .	91
5.2	Überlebenswahrscheinlichkeiten nach <b>MRBG</b> für eine 70-jährige Person	91
5.5	Grafische Darstellung aller Pfade des simulierten <b>BDT</b> -Baummodells	93
5.4	Zinsstruktur nach <b>BDT</b> -Baummodell für Berechnungen zu Beispiel- bestand . . . . .	93
5.6	Quadrinomialbaum aus dem <b>MRBG</b> -Modell und <b>BDT</b> -Modell für zwei Perioden . . . . .	108
5.7	Gewinndarstellung anhand eines Quadrinomialbaumes für Tabelle 5.12 . . . . .	112

# Abkürzungen

<b>AVÖ</b>	Aktuarvereinigung Österreichs
<b>BB</b>	Brownsche Bewegung
<b>BDT</b>	Black-Derman-Toy
<b>BE</b>	Best Estimate
<b>BMF</b>	Bundesministerium für Finanzen
<b>CIR</b>	Cox-Ingersoll-Ross
<b>CoC</b>	Cost-of-Capital
<b>CRR</b>	Cox-Ross-Rubinstein
<b>EIOPA</b>	European Insurance and Occupational Pensions Authority
<b>EURIBOR</b>	Euro Interbank Offered Rate
<b>EV</b>	Erlebensfallversicherung
<b>FRA</b>	Forward Rate Agreement
<b>FMA</b>	Finanzmarktaufsicht
<b>FRED</b>	Federal Reserve Economic Data
<b>f.s.</b>	fast sichere Konvergenz
<b>GE</b>	Geldeinheiten
<b>GV</b>	Gemischte Kapitalversicherung
<b>HW</b>	Hull-White
<b>KAVO</b>	Kapitalanlageverordnung
<b>LIBOR</b>	London Interbank Offered Rate
<b>MC</b>	Monte Carlo
<b>MCR</b>	Minimum Capital Requirement
<b>MRBG</b>	Mean-Reverting-Brownian-Gompertz
<b>NEP</b>	Nettoeinmalpraemie
<b>NKA</b>	Nullkuponanleihe
<b>RIS</b>	Rechtsinformationssystem des Bundes

<b>SCR</b>	Solvency Capital Requirement
<b>SC</b>	Survivor Credit
<b>SCOR</b>	Survivor Credit Offered Rate
<b>SDGL</b>	stochastische Differentialgleichung
<b>SP</b>	stochastischer Prozess
<b>TFS</b>	Todesfallsumme
<b>TV</b>	Term-Fix-Versicherung
<b>UGB</b>	Unternehmensgesetzbuch
<b>VAG</b>	Versicherungsaufsichtsgesetz
<b>VN</b>	Versicherungsnehmer
<b>VS</b>	Versicherungssumme
<b>VU</b>	Versicherungsunternehmen
<b>VaR</b>	Value at Risk
<b>YTM</b>	Yield to Maturity, Endfälligkeitsrendite



# Symbole

$\Omega$	Menge
$\mathcal{S}$	Sigma-Algebra
$\mathcal{B}$	Baummodell
$\mathcal{K}$	Knotenmenge
$\mathcal{A}$	Menge an Verzweigungen
$\Omega$	Zustandsraum
$\mathbb{Q}$	risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{Q}^{T_i}$	$T_i$ -Forward Measure
$\mathbb{Q}^{T_N}$	Terminal Measure
$\mathcal{F}$	Filtration
$\mathcal{K}$	Knotenmenge
$\mathbb{P}$	reales Wahrscheinlichkeitsmaß
$Y_t$	stochastischer Prozess oder Itô Prozess
$B_t$	Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}$
$W_t$	Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}$
$Z_t$	Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}$
$h$	Schrittweite
$N$	Diskretisierungsparameter
$y_t$	diskreter Prozess
$r_t$	infinitesimale Short Rate
$r(t, T)$	Spot-Zinsrate (stetig verzinst)
$f(t, T)$	infinitesimale Forward Rate
$F(t; S, T)$	Forward Rate
$L(t, T)$	Spot-Zinsrate (einfach verzinst)
$P(t, T)$	Nullkuponanleihe oder T-Bonds
$C(t)$	Geldmarktkonto

$Cpl(F, t; S, T)$	Caplet auf Forward $F$ zu $t$ für Intervall $[S, T]$
$Cap(t, S, T)$	Cap zu $t$ bestehend aus Caplets zu $S$ und $T$
$u_{t_i}$	Indikatorvariable für Aufwärtsbewegung in Binomialbaum
$\tau(t, T)$	Tenor
$\phi_t$	Abstandsparameter in Baummodell von
$S_t$	Knotenanzahl in Baummodell
$m(t, x)$	diskrete Sterblichkeitsrate für eine $x$ -jährige Person
$N(t, x)$	Populationsanteil der Überlebenden mit Alter $x + t$ zum Zeitpunkt $t$
$p(t, x)$	Überlebenswahrscheinlichkeit für eine $x$ -jährige Person
$q(t, x)$	Sterbewahrscheinlichkeit für eine $x$ -jährige Person
$\mu(t, x)$	Sterblichkeitsintensität für eine $x$ -jährige Person
$S(t, x)$	Survivor Index zu Alter $x + t$ zum Zeitpunkt $t$
$B(t, T, x)$	Sterblichkeitsbonds oder $(t, x)$ -Bonds
$p(t, T, x)$	Forward Sterblichkeitsrate
$\bar{\mu}(t, T, x + T)$	Forward Sterblichkeitsintensität
$\bar{s}(t, T, x)$	SCOR-Rate
$\bar{s}(t, S, T, x)$	SCOR-Forward Rate
$D^i(t)$	Anzahl der verstorbenen Versicherten in Modelpoint $i$
$S^i(t)$	Anzahl der überlebenden Versicherten in Modelpoint $i$
$PV$	Barwert, Present Value
$A(t)$	Cash-Flow Funktion zu $t$ für Beispielbestand
$\Lambda_k$	Verlust in Jahr $k$
$\Pi_k$	Versicherungstechnische Prämie in Jahr $k$
$\Pi_k^S$	Sparprämie in Jahr $k$
$\Pi_k^R$	Risikoprämie in Jahr $k$
$i$	Rechnungszinssatz
${}_kV$	Deckungskapital in Jahr $k$
$G_k$	Gewinn in Jahr $k$

# Tabellenverzeichnis

3.1	Bootstrapping-Algorithmus . . . . .	39
3.2	Marktdaten für das <b>BDT</b> -Baummodell . . . . .	47
3.3	Forward Rates für Formeln von Black und gestrappte Volatilitäten für das <b>BDT</b> -Baummodell . . . . .	47
3.4	Caplets nach <b>BDT</b> -Zinsstrukturmodell . . . . .	50
3.5	Caps nach <b>BDT</b> -Zinsstrukturmodell . . . . .	50
3.6	Marktdaten für das <b>LIBOR</b> -Baummodell nach <b>Xiao [2011]</b> . . . . .	59
3.7	Caplets nach <b>LIBOR</b> -Marktmodell . . . . .	61
3.8	Caps nach <b>LIBOR</b> -Marktmodell . . . . .	62
4.1	Caplet- und Cappreise nach <b>MRBG</b> . . . . .	77
4.2	Marktdaten für das <b>SCOR</b> -Modell . . . . .	86
4.3	Daten für das <b>SCOR</b> -Modell . . . . .	87
4.4	Caplets für <b>SCOR</b> -Modell nach <b>Xiao [2011]</b> . . . . .	88
4.5	Caps für <b>SCOR</b> -Modell nach <b>Xiao [2011]</b> . . . . .	88
5.1	Parameter für Sterblichkeitsmodell . . . . .	90
5.2	Zinsstruktur für Beispielrechnung nach <b>EIOPA [2013]</b> . . . . .	92
5.3	Volatilitätsstruktur für Beispielrechnung nach <b>EIOPA [2013]</b> . . . . .	92
5.4	Beispielbestand . . . . .	96
5.5	Beispielbestand: Modelpoints . . . . .	97
5.6	Rechnungsgrundlagen für Beispielbestand . . . . .	104
5.7	Ergebnisse zu Cash Flow für Beispielbestand . . . . .	104
5.8	Ergebnisse zur Diskontierung für Beispielbestand . . . . .	104
5.9	Kovarianzen für Beispielbestand . . . . .	104
5.10	Beispielbestand: Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko . . . . .	105
5.11	Beispielbestand: Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko für Szenarien 1-4 . . . . .	106
5.12	Beispielrechnung zu Gewinnsystem . . . . .	113
5.13	Pfadentwicklung für Gewinnberechnung aus Tabelle <b>5.12</b> . . . . .	113
5.14	Beispielrechnung zu Gewinnsystem . . . . .	114
5.15	Pfadentwicklung für Gewinnberechnung aus Tabelle <b>5.14</b> . . . . .	114

# Einführung

Internationale Rechnungslegungsvorschriften und die Solvabilitätsvorschriften aus dem Gesetzesprojekt *Solvency II* erfordern von europäischen Versicherungsunternehmen die marktkonsistente Bewertung aller Aktiv- und Passivpositionen in der Versicherungsbilanz. Demnach müssen alle Bilanzpositionen nach verfügbaren Marktdaten ermittelt und bei fehlenden oder nicht liquiden Märkten mittels finanzmathematischer Methoden gebildet werden. Für Lebensversicherungsverträge bedeutet dies die Bewertung aller im Vertrag eingebetteten Optionsrechte, die bei der traditionellen Produktgestaltung oft nicht berücksichtigt werden.

Angesichts fallender Marktzinsen wurde das Angebot der Lebensversicherungsunternehmen durch diverse Finanzoptionen aufgestockt und konkurrenzfähig gemacht. Zu den Finanzoptionen zählen zum Beispiel das vorzeitige Kündigungsrecht, das Angebot einer Beitragsfreistellung oder die Aufschuboption. Aufgrund der starken Wettbewerbssituation am österreichischen Versicherungsmarkt sind diese Optionen unabdingbar geworden, um die Attraktivität der Produktpalette für das Neugeschäft zu wahren. Die Finanzoptionen können während des laufenden Vertrages zu jedem Zeitpunkt vom Versicherungsnehmer ausgeübt werden und müssen vom Versicherungsunternehmen anerkannt werden. Diese eingebetteten Optionen werden bei Vertragsabschluss definiert und sind nicht mit Vertragsänderungen zu verwechseln, welche das Versicherungsunternehmen ablehnen darf.

Das Ziel dieser Masterarbeit ist die Bepreisung von eingebetteten Optionen in Lebensversicherungsverträgen und die Berechnung von Best Estimates für Rückstellungen unter Solvency II. Einem Versicherungsvertrag liegen dabei stochastische Zins- und Mortalitätsentwicklungen zugrunde, die im finanzmathematischen Kontext im Sinne der No-Arbitrage-Pricing Theorie quantifiziert werden können. Aus finanzmathematischer Sicht entsprechen eingebettete Optionen in Lebensversicherungsverträgen amerikanischen Optionen, die im Falle des Ablebens der versicherten Person verfallen. Für die Bewertung von Optionen mit amerikanischem Charakter gibt es im Allgemeinen keine expliziten Bepreisungsformeln, daher wird

auf numerische Berechnungsmethoden zurückgegriffen. Best Estimates werden für versicherungstechnische Rückstellungen durch Diskontierung zukünftiger Zahlungen gebildet. Demzufolge sind Zins- und Sterblichkeitsstruktur des Marktes maßgebend für den Wert der Rückstellungen. In dieser Masterarbeit wird die Approximation der stochastischen Zinsstruktur- und Mortalitätsentwicklung anhand diskreter Baummodelle analysiert und in weiterer Folge an konkreten Beispielen angewandt.

Diese Masterarbeit ist folgendermaßen strukturiert: In Kapitel 1 werden die wichtigsten Aspekte des Gesetzgebungsprojektes *Solvency II* vorgestellt und die behandelten Themen den vorgeschriebenen Kapitalvorschriften zugeordnet. Kapitel 2 behandelt die relevanten Grundlagen stochastischer Prozesse. Anschließend wird ein Überblick der wichtigsten Zinsstrukturmodelle in Kapitel 3 geboten. Zwei Binomialapproximationen veranschaulichen dabei die numerische Approximationsmethode. Die Vorstellung der Sterblichkeitsmodelle und beispielhafter Anwendungen erfolgt in Kapitel 4. Im abschließenden Kapitel 5 werden die vorgestellten Approximationsmethoden der Sterblichkeits- und Zinsstruktur kombiniert und zur Bewertung verschiedener Lebensversicherungsverträge herangezogen.

# 1 Solvency II

Das Projekt *Solvency II* besteht aus Verordnungen der Europäischen Kommission und ist in seiner heutigen Fassung in der Rahmenrichtlinie aus [RRL \[2009\]](#) nachzulesen. Sie fasst alle bis zu ihrer Veröffentlichung erschienen Verordnungen zur Umsetzung von Solvency II zusammen und stellt gemeinsam mit dem Handbuch der Finanzmarktaufsicht (vgl. [FMA \[2012\]](#)) die wichtigsten Literaturquellen dieses Kapitels dar. In diesem Kapitel wird eine kurze Übersicht zu *Solvency II* gegeben. In Abschnitt [1.1](#) werden die Gründe für Solvency und die erwarteten Ziele behandelt. Daraufhin wird in Abschnitt [1.2](#) das juristische Verfahren auf europäischer Ebene bis zur endgültigen Einführung kurz erklärt. Die inhaltlichen Anforderungen sowie die wichtigsten Begriffe werden den Kapiteln [1.3](#) und [1.4](#) erläutert. Kapitel [1.5](#) behandelt die mathematischen Grundlagen.

## 1.1 Ziele von Solvency II

Das Projekt *Solvency* wurde als Überbegriff für die Regulierung der europäischen Versicherungsmärkte von der EU-Kommission im Jahr 1999 eingeführt. Seit Beginn dieses Projekts hat sich die EU-Kommission die Verbesserung des Versicherungsschutzes der Versicherungsnehmer und eine Vereinheitlichung nationaler Versicherungsmärkte auf EU-Ebene als wesentliche Ziele gesetzt. Im Laufe der Jahre wurden regelmäßig Änderungen und Erweiterungen der Zielvorgaben vorgenommen, die zu wiederkehrenden Verzögerungen des festgelegten Eintrittstermins führten. Der heutige Stand ist, dass alle betroffenen Versicherungsunternehmen die Vorgaben nach Solvency II zum 1.1.2014 erfüllen müssen.

Die Zielvorgaben wurden allmählich an die Marktsituationen angepasst, sodass bei der konkreten Umsetzung von Solvency II folgende Punkte im Vordergrund stehen: Der Risikobegriff umfasste in Versicherungsunternehmen bislang immer das versicherungsmathematische Risiko. Dieser Risikobegriff beschreibt das unerwar-

tete Ereignis, das zu einer Leistung an den Vertragspartner (Versicherungsnehmer) führt. Unternehmenstechnisch bestehen aber weitere Risiken, die sich in der Höhe der Eigenmittel eines Unternehmens widerspiegeln können. Aus diesem Grund wurde der Risikobegriff unter Solvency um weitere Komponenten wie das Marktrisiko, das Zinsänderungsrisiko oder das Ausfallrisiko einer Gegenpartei erweitert. Die umfassende Risikosteuerung aller Komponenten stellt nach FMA [2012], S.6, eine Herausforderung für viele Versicherungsunternehmen dar, da die Ergebnisse direkt in der Kapitalanforderung des gesamten Unternehmens abgebildet werden.

Die internationale Gesetzeslinie nach Solvency soll auf europäischer Ebene ebenfalls die Vergleichbarkeit von einzelnen nationalen Versicherungsunternehmen herstellen. Zu diesem Zweck müssen die jeweiligen nationalen Aufsichtsbehörden enger zusammen arbeiten (vgl. FMA [2012]).

## 1.2 Gesetzliche Rahmenbedingungen und Bestandteile

Das Projekt Solvency II ist nach Artikel 2 der RRL [2009] von allen Lebens- und Nichtlebensversicherungsunternehmen, sowie von allen Rückversicherungsunternehmen, mit Sitz in einem Mitgliedsstaat der Europäischen Union umzusetzen und löst in diesen Fällen das nationale VAG [2012] ab (vgl. FMA [2012] S.9). Ausnahmen sind in Artikel 3 bis 12 der RRL [2009] geregelt.

Das Gesetzgebungsverfahren von Solvency ist, ähnlich zur Einführung der Kapitalvorschriften für den Bankensektor (Basel), nach *Lamfalussy* geregelt. Dieses Verfahren gibt in chronologischer Reihenfolge vor, dass...

1. der EU-Rat und das Europäische Parlament die erforderlichen Rahmenrichtlinien verabschieden.
2. die EU-Kommission die nötigen Maßnahmen zur korrekten Durchführung der Rahmenrichtlinien festlegt.
3. die nationalen Aufsichtsbehörden alle Maßnahmen wie vorgeschrieben umsetzen. Auf europäischer Ebene ist die zuständige Behörde European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA).
4. die gewünschte Aufsichtskonvergenz einsetzt, die korrekte Umsetzung der

Gesetze regelmäßig geprüft wird und Vertragsverletzungen juristische Konsequenzen zur Folge haben.

Den vier Unterpunkten wird im Sinne von Solvency die Bezeichnung *Level 1 - 4* zugeordnet. Bisher wurde in diesem Projekt die Rahmenrichtlinie (veröffentlicht unter [RRL \[2009\]](#)) verabschiedet. Diese Rahmenrichtlinie fasst alle bis zu ihrer Veröffentlichung bestehenden Richtlinien zusammen und gliedert die Anforderungen von Solvency II in drei gleichbedeutende Säulen:

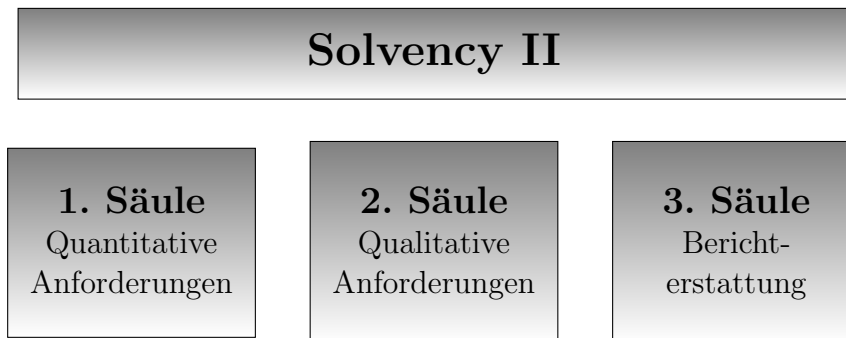


Abbildung 1.1: Säulengliederung der Anforderungen von Solvency II

## 1.3 Quantitative Anforderungen

Die quantitativen Anforderungen repräsentieren die erste Säule von Solvency II und umfassen Vorschriften zur Kapitalausstattung der Versicherungsunternehmen. Dazu gehört die Bildung von versicherungstechnischen Rückstellungen. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Punkte kurz vorgestellt. Die genauen Anforderungen können in der [RRL \[2009\]](#) und [FMA \[2012\]](#) nachgelesen werden.

### 1.3.1 Solvency Capital Requirement (SCR)

Das Solvency Capital Requirement repräsentiert die wichtigste Kapitalanforderung nach Solvency II. Die genaue Vorschrift ist in Artikel 101 Absatz 3 der [RRL \[2009\]](#) nachzulesen.



Diese Kapitalvorschrift schreibt eine Eigenmittelhöhe vor, die die volle Deckung unvorhergesehener Verluste des Versicherungsunternehmens gewährleisten muss. Dabei gilt für das Versicherungsunternehmen nach der bereits erlassenen Richtlinie in Absatz 64 der RRL [2009] die Vorschrift, dass in höchstens einem von 200 aufeinanderfolgenden Versicherungsjahren der totale Eigenmittelverbrauch eintreten darf. Gleichbedeutend damit ist die Vorschrift, dass das Versicherungsunternehmen in 99,5% der Versicherungsfälle seinen Verpflichtungen gegenüber dem Versicherungsnehmer nachkommen kann (vgl. FMA [2012], S.11). Als geeignetes Risikomaß für diese Quantifizierung gilt nach Solvency II der *Value at Risk*  $VaR$ .

**Definition 1.1** *Value at Risk* ( $VaR$ )

Der erwartete Verlust eines Portfolios ist eine Zufallsvariable  $L$ .  $F_L$  bezeichne die Verteilungsfunktion von  $L$ . Sei ein Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  gegeben. Der  $VaR$  eines Portfolios zum Level  $\alpha$  ist definiert als der kleinste Wert  $l \in \mathbb{R}$ , sodass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der erwartete Verlust  $L$  des Portfolios den Wert  $l$  überschreitet kleiner als  $1 - \alpha$  ist. Das bedeutet, es gilt

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L > l] \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

Wahrscheinlichkeitstheoretisch stellt der  $VaR$  das  $\alpha$ -Quantil der Verlustverteilung  $F_L$  dar.

### 1.3.2 Minimum Capital Requirement ( $MCR$ )

Das Minimum Capital Requirement verkörpert die zweite wichtige Kapitalanforderung nach Solvency II. Dabei handelt es sich um eine Eigenmittelvorschrift, deren Verletzung unmittelbare aufsichtsrechtliche Konsequenzen auslöst, die den Entzug der Konzession bewirken können (vgl. FMA [2012], S.30). Aus diesem Grund muss das durch das  $MCR$  vorgeschriebene Kapitalniveau ausnahmslos stets eingehalten werden.

### 1.3.3 Versicherungstechnische Rückstellungen

Die versicherungstechnischen Rückstellungen bilden einen wichtigen Posten der Versicherungsbilanz. Im Rahmen des Jahresabschlusses erfolgt deren Bewertung nach §81 i Absatz 1 VAG. Demnach muss bei der Bildung von Rückstellungen

grundsätzlich das *Vorsichtsprinzip* angewandt werden, um zu gewährleisten, dass das Versicherungsunternehmen seinen Verpflichtungen dauerhaft nachkommen kann. Die Gesetzgebung unter Solvency II erläutert die Bildung von Rückstellungen in Abschnitt 2 Artikel 76 bis 86 der RRL [2009]. Demnach wird von den Versicherungsunternehmen eine marktkonsistente Bewertung von Verbindlichkeiten gefordert (nach Artikel 76 Absatz 2 RRL [2009], FMA [2012] S.23). Nach FMA [2012], S.18, entfällt die Kapitalanlageverordnung mit der Umsetzung von Solvency II und die Versicherungsunternehmen sind darauf angewiesen selbständig Anrechnungsvorschriften für geeignete Kapitalanlagen zur Bedeckung von versicherungstechnischen Rückstellungen festzulegen und aufgrund des fehlenden Marktes für versicherungstechnische Rückstellungen geeignete mathematische Bewertungsstrategien zu finden. Dabei gilt nach Artikel 132 der RRL [2009] der *Grundsatz unternehmerischer Vorsicht*, auch als *Prudent-Person-Principle* bezeichnet (vgl. FMA [2012] S.18).

### 1.3.4 Risikomarge

Nach den Vorschriften zur Bildung von Rückstellungen aus Abschnitt 2 Artikel 76 bis 86 der RRL [2009] ist die zusätzliche Bildung einer *Risikomarge* erforderlich. Diese repräsentiert die bei der Einhaltung der vorgeschriebener Kapitalanforderungen auftretenden Kosten. Die genaue Vorschrift ist in Artikel 77 Absatz 3 RRL [2009] nachzulesen.

Die Bestimmung der Risikomarge wird nach Artikel 77 Absatz 4 RRL [2009] gesondert von der Berechnung des Best Estimate (vgl. Absatz 1.5.1) durchgeführt und erfolgt auf Basis des *Cost-of-Capital*- oder Kapitalkostenansatzes nach Artikel 77 Absatz 5 RRL [2009]. Nach FMA [2012], S.24, werden dabei zukünftige jährliche Kapitalerfordernisse bis zum Laufzeitende projiziert und mit einem vorgegebenen Kapitalkostensatz multipliziert. Anschließend wird der risikolos (vgl. Absatz 1.5.2) diskontierte Barwert dieser Resultate gebildet.

## 1.4 Qualitative Anforderungen und Offenlegungspflichten

Die Anforderungen der zweiten Säule definieren die vorgeschriebenen aufsichtsrechtlichen Methoden und die interne Organisation der Unternehmenssteuerung.

Detaillierte Vorschriften können in [RRL \[2009\]](#) und [FMA \[2012\]](#) S.57ff nachgelesen werden.

Die dritte Säule umfasst die Berichts- und Offenlegungspflichten und vereinheitlicht bereits vorhandene Regelungen aus dem Versicherungsaufsichtsgesetz. Die genauen Vorgaben sind in [RRL \[2009\]](#) und [FMA \[2012\]](#), ab S.73, zu finden.

## 1.5 Mathematische Grundlagen

Die mathematischen Vorgaben von Solvency II sind auf Level-2-Ebene geregelt und nach heutigem Kenntnisstand noch nicht verabschiedet. Der folgende Abschnitt beschreibt die wichtigsten Größen.

### 1.5.1 Best Estimate

Für die Bewertung von Rückstellungen ist nach Artikel 77 Absatz 2 [RRL \[2009\]](#) ein *bester Schätzwert* oder *Best Estimate (BE)* zu bestimmen. Die vollständigen Kriterien für den **BE** sind in Artikel 77 der [RRL \[2009\]](#) und [FMA \[2012\]](#), ab S.23, angeführt und werden an dieser Stelle kurz erläutert.

Der Best Estimate (**BE**) ist nach Artikel 77 Absatz 2 [RRL \[2009\]](#) als Summe risikofrei diskontierter und wahrscheinlichkeitsgewichteter zukünftiger Zahlungen definiert. Nach Artikel 78 Absatz 3 [RRL \[2009\]](#) handelt es sich bei diesen Zahlungen um Brutto-Zahlungen im Sinne der Rückversicherung einschließlich Zahlungen aus Gewinnbeteiligungen und vertraglichen Optionen (Artikel 79 [RRL \[2009\]](#)). Zu den letzteren gehören in Lebensversicherungsverträge eingebettete Finanzoptionen.

### 1.5.2 Risikolose Zinskurven

Solvency II schreibt für die Berechnung des Best Estimates für Rückstellungen nach Artikel 77 Absatz 2 der [RRL \[2009\]](#) die Diskontierung durch eine risikofreie Zinskurve vor. Diese risikofreien Zinsen werden nach [FMA \[2012\]](#), S.25ff, aus liquiden Zinsinstrumenten bestimmt und von [EIOPA](#) zur Verfügung gestellt. Im Vergleich zur Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen nach [UGB](#) fällt der

Einfluss marktkonsistenter Bewertungen für die Versicherungsunternehmen bedeutend aus (siehe [FMA \[2012\]](#), S.25).

## 2 Bäume und Netze zur Approximation stochastischer Prozesse

### 2.1 Stochastische Differentialgleichungen

Das Verhalten von stetigen stochastischen Prozessen wird üblicherweise durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben. Die grundlegende Theorie der stochastischen Analysis wurde in den 1970er-Jahren von Kyoshi Itô verfasst. Der heutige Stand ist z.B. bei [Oksendal \[2000\]](#) zu finden, welchem dieses Kapitel folgt.

**Definition 2.1** *Wahrscheinlichkeitsraum*

Für eine gegebene Menge  $\Omega$  sei die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S}$  eine Familie von Teilmengen in  $\Omega$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{S}$ ,
- (ii)  $S \in \mathcal{S} \Rightarrow S^C \in \mathcal{S}$  mit  $S^C = \Omega \setminus S$  Komplement von  $S$  in  $\Omega$ ,
- (iii)  $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow S := \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{S}$ .

Das Paar  $(\Omega, \mathcal{S})$  wird als Messraum bezeichnet. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{S})$  definiert die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  mit den Eigenschaften

- (i)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- (ii)  $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{S}$  disjunkt für  $i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_i)$ .

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  wird als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet.

**Definition 2.2** *Filtration*

Eine aufsteigende Familie von Untersigmaalgebren  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  mit  $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$  für  $s \leq t$  heißt Filtration.

**Definition 2.3** *Stochastischer Prozess*

Ein stochastischer Prozess  $X_t$  ist eine Familie von Zufallsvariablen, die alle auf  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  definiert sind. Für ein fixes  $t \in T$  gilt die Abbildungsvorschrift

$$X(\omega, t) := X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definition 2.4** *Messbarkeit*

Sei  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozess  $X_t$  heißt  $\mathcal{S}$ -messbar wenn die Abbildung  $X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar ist mit

$$X_t^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega | X_t(\omega) \in U\} \in \mathcal{S}, \quad \forall U \in \mathbb{R}$$

mit offenen Mengen  $U \in \mathbb{R}$ .

**Definition 2.5** *Adaptiertheit*

Ein Prozess  $X_t$  heißt an die Filtration  $\mathcal{F}$  adaptiert, wenn  $\forall t \geq 0$   $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist.

**Definition 2.6** *Vorhersagbar*

Ein linksstetiger, adaptierter Prozess  $X_t$  heißt vorhersagbar und ist  $\forall t \geq 0$   $X_t$   $\mathcal{F}_{t-}$ -messbar.

**Definition 2.7** *Eindimensionaler Itô Prozess*

Sei  $B_t$  eine eindimensionale Brownsche Bewegung (BB) auf  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ .

$$\mathcal{H} := \left\{ H = (H_t)_{0 < t < T} \mid H \text{ adaptiert und messbar mit } \mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty \right\}$$

Ein eindimensionales Itô Prozess ist ein stochastischer Prozess  $Y_t$  auf  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  mit der Darstellung

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s,$$

wobei  $\sigma$  quadratintegrierbar und adaptiert ist, sodass

$$\mathbb{P} \left[ \int_0^t \sigma^2(s, Y_t) ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1.$$

Sei zusätzlich  $\mu$   $\mathcal{H}$ -messbar und

$$\mathbb{P} \left[ \int_0^t |\mu(s, Y_t)| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1.$$

Äquivalent dazu ist die Darstellung in Form einer stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = \mu(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dB_t \quad \text{mit Startbedingung } Y_0. \quad (2.1)$$

**Satz 2.1 (Formel von Itô)** (vgl. *Oksendal [2000]* Satz 4.1.2)

Für einen Itô-Prozess  $Y_t$  mit der Form aus Formel 2.1 sei  $g(Y, t) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ . Dann ist  $X_t = g(Y_t, t)$  ebenfalls ein Itô-Prozess und es gilt die Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{\partial g}{\partial t}(Y_t, t)dt + \frac{\partial g}{\partial Y}(Y_t, t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(Y_t, t)(dY_t)^2. \quad (2.2)$$

Der Faktor  $(dY_t)^2$  entspricht dem quadratischen Variationsprozess von  $Y_t$  und wird auch als  $[dY_t, dY_t]$  angegeben.

**Lemma 2.1 (Produktregel für Itô-Prozesse)** (vgl. *Oksendal [2000]*)

Für das Produkt zweier Itô-Prozesse  $Y_t^{(1)}$  und  $Y_t^{(2)}$  gilt die Ableitungsregel

$$d(Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}) = Y_t^{(1)}dY_t^{(2)} + Y_t^{(2)}dY_t^{(1)} + dY_t^{(1)}dY_t^{(2)}. \quad (2.3)$$

Für das Produkt von  $n$  Itô-Prozessen  $Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(n)}$  folgt aus Formel (2.3) die Ableitungsregel

$$d \left( \prod_{i=1}^n Y_t^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_t^{(k)} dY_t^{(i)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n Y_t^{(k)} dY_t^{(i)} dY_t^{(j)}. \quad (2.4)$$

**Lemma 2.2 (Itô-Isometrie)** (vgl. *Oksendal [2000]* Lemma 3.1.5)

Für eine beschränkte, elementare Funktion  $\sigma(t, Y_t)$  gilt

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_t^T \sigma(t, Y_t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_t^T \sigma^2(t, Y_t) dt \right]. \quad (2.5)$$

**Satz 2.2** Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen (vgl. [Oksendal \[2000\]](#) Satz 5.2.1)

Sei  $T > 0$  und seien  $\mu(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbare Funktionen für die gilt

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]$$

für eine Konstante  $C$  und der Lipschitz-Bedingung

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]$$

für eine Konstante  $D$ . Weiters sei  $Z$  eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz oder

$$\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$$

Dann hat die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \mu(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_0 = Z$$

eine f.s. eindeutige Lösung  $Y_t$  mit

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |Y_t|^2 dt \right] < \infty.$$

Ein Itô-Prozess  $Y_t$  setzt sich aus einer deterministischen Komponente und einem zufälligen Störfaktor zusammen. Dementsprechend besteht die **SDGL** aus einem vorhersehbaren, deterministischen Driftterm  $\mu(t, Y)$  und einem unvorhersehbaren Zufallsterm  $\sigma(t, Y)$ .



## 2.2 Bäume und Netze

Für die Konstruktion eines Baummodells  $\mathcal{B}$  muss eine Baumstruktur festgelegt werden. Die folgende Einführung und die Definition eines Baummodells folgt aus James und Webber [2001].

### Definition 2.8 Baummodell und Baumstruktur

Das Baummodell ( $\mathcal{B}$ ) sei gegeben als die Menge  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$  mit folgenden Parametern:

- Seien  $T_j : j = 0, \dots, N$  die Menge der diskreten Zeitpunkte im Baummodell ( $\mathcal{B}$ ) und  $K_j$  bezeichne die Anzahl der Knoten zum Zeitpunkt  $T_j$ , wobei  $N$  als Diskretisierungsparameter bezeichnet wird.
- Die Baumstruktur setzt sich aus einer endlichen Knotenmenge  $\mathcal{K}$  und einer Menge an Verzweigungen  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{K}$  zusammen.
- Der diskrete Prozess  $y$  wird durch den Zustandsraum ( $\Omega$ ), die Zustandsvariable  $X : \mathcal{K} \rightarrow \Omega$ , die Wahrscheinlichkeiten  $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  und den Zeitparameter  $k : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiert.
- Jedem Knoten  $i \in \mathcal{K}$  wird ein Zeitpunkt  $T_j, j = 0, \dots, N$  zugewiesen.
- Jede Kante aus  $\mathcal{A}$  verbindet einen Knoten zum Zeitpunkt  $T_j$  mit einem Knoten zum darauffolgenden Zeitpunkt  $T_{j+1}$ .

## 2.3 Die Baumapproximation

### Definition 2.9 (Einfacher) Binomialbaum

Ein voller Binomialbaum hat folgende Eigenschaften:

- Der diskrete Zeitparameter  $t$  umfasst die Zeitpunkte  $T_0, \dots, T_N$ . Jeder Kante aus  $\mathcal{A}$  wird eine Übergangswahrscheinlichkeit zugewiesen.
- Zu jedem Zeitpunkt  $T_j : j = 1, \dots, N$  gilt für die Anzahl an Knoten  $K_j = 2 \cdot j$  mit Wurzelknoten zu  $T_0, K_0 = 1$ .
- $N$  wird als Baumordnung oder Level bezeichnet.
- Jeder Knoten ist nur auf einem Pfad vom Wurzelknoten erreichbar.

- Von jedem Knoten (ausgenommen Endknoten zu Zeitpunkt  $t_N$ ) gehen zwei Kanten aus und es gibt  $2^N$  Knoten im Baum.
- Für das Baummodell aus Definition 2.8,  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$ , ist die Kardinalität von  $\mathcal{K}$  bekannt mit  $|\mathcal{K}| = \sum_{j=1}^N K_j = N^2 + N - 1$  und für die Kantenmenge gilt  $|\mathcal{A}| = 2 \cdot (|\mathcal{K}| - K_N) = 2 \cdot (N^2 - N - 1)$ , da von allen Knoten zu den Zeitpunkten  $T_0, \dots, T_{N-1}$  jeweils zwei Kanten wegführen.

Damit die auf Baumstrukturen basierenden Methoden effizient sind, darf der zugrundeliegende Baum nicht zu schnell wachsen in der Knotenanzahl. Aus diesem Grund werden für diese Approximationsmethoden *rekombinierbare Bäume* herangezogen.

**Definition 2.10** *Rekombinierbarer Binomialbaum*

Für rekombinierbare Binomialbäume gilt

- Der diskrete Zeitparameter  $t$  umfasst die Zeitpunkte  $T_0, \dots, T_N$ . Jede Kante aus  $\mathcal{A}$  wird mit einer Wahrscheinlichkeit gewichtet.
- Die Anzahl der Knoten zum Zeitpunkt  $T_j$  für  $j = 0, \dots, N$  beträgt  $K_j = j + 1$ . Unter diesen Voraussetzungen wächst der Baum linear in der Anzahl der Zeitpunkte  $T_j$  für  $j = 0, \dots, N$ .
- Die Anzahl der vorhandenen Pfade vom Ursprungsknoten in  $T_0$  zu den Endknoten zum Zeitpunkt  $t_N$  ist a priori bekannt. Es gilt  $\#(\text{Pfade}) = 2^{N-1}$ .
- Für das Baummodell aus Definition 2.8,  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$ , ist die Kardinalität von  $\mathcal{K}$  bekannt mit  $|\mathcal{K}| = \sum_{j=1}^N K_j = \frac{N^2+N}{2}$  und für die Kantenmenge gilt  $|\mathcal{A}| = 2 \cdot (|\mathcal{K}| - K_N) = N^2 + \frac{N}{2}$ , da von allen Knoten in  $T_0, \dots, T_{N-1}$  jeweils zwei Kanten wegführen.

**Definition 2.11** *Rekombinierbarer Baum*

Für allgemeine rekombinierbare Binomialbäume gilt

- Der diskrete Zeitparameter  $t$  umfasst die Zeitpunkte  $T_0, \dots, T_N$ . Jede Kante aus  $\mathcal{A}$  wird mit einer Wahrscheinlichkeit gewichtet.
- Die Anzahl der Knoten werden zu jedem Zeitpunkt  $T_j$  für  $j = 1, \dots, N$  festgelegt als  $K_j = S_j$ . Für  $T_0$  gilt  $S_0 = 1$ . O.B.d.A. werden an dieser Stelle für alle  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  die  $S_j \equiv S$  gesetzt. Unter diesen Voraussetzungen wächst der Baum linear in der Anzahl der Zeitpunkte  $T_j$  für  $j = 1, \dots, N$ .

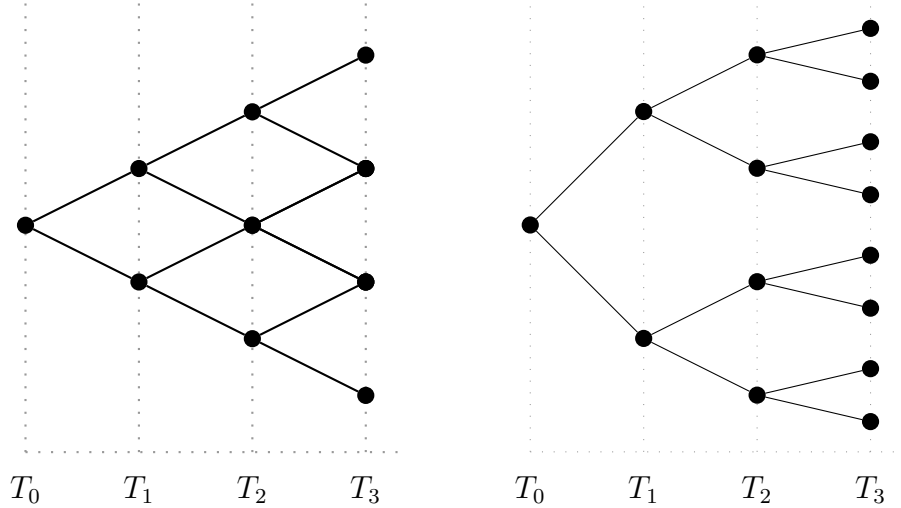


Abbildung 2.1: Rekombinierbarer und vollständiger Binomialbaum

- Die Anzahl der vorhandenen Pfade vom Ursprungsknoten in  $T_0$  zu den Endknoten zum Zeitpunkt  $t_N$  ist a priori bekannt. Es gilt  $\#(\text{Pfade}) = S^N$ .
- Für das Baummodell aus Definition 2.8,  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$ , ist die Kardinalität von  $\mathcal{K}$  bekannt mit  $|\mathcal{K}| = \sum_{j=1}^N K_j = N \cdot S$  und für die Kantenmenge gilt  $|\mathcal{A}| = S + N \cdot S^2$ , da zwischen zwei Levels  $T_j$  und  $T_{j+1}$  alle Knoten durch eine Kante verbunden sind.

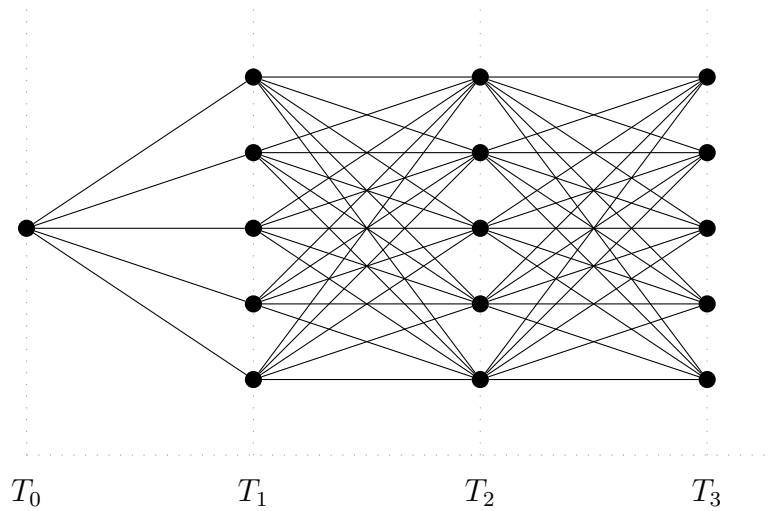


Abbildung 2.2: Rekombinierbarer Baum

Zur Approximation der stochastischen Differentialgleichung aus Formel (2.1) wird eine Diskretisierung des vorgegebenen Zeitintervalls  $[0, T]$  zum festgelegten Diskre-

tisierungsparameter  $N$  vorgenommen. Dazu wird das Intervall  $[0, T]$  in  $N$  gleich lange Teilintervalle der Länge  $h = \frac{T}{N}$ . Der Parameter  $h$  im folgenden als *Schrittweite* bezeichnet wird.

**Definition 2.12** *Binomialapproximation und Binomialprozess*

Die Baumapproximation mittels Binomialbäumen heißt *Binomialapproximation* und der dazugehörige diskrete Prozess wird als *Binomialprozess* bezeichnet:

- Der diskretisierte stochastische Prozess hängt nur von der Schrittweite  $h$  ab und wird mit  ${}_h y_k$  bezeichnet.  $k$  bezeichne den Zeitparameter und umfasst  $N + 1$  diskrete Zeitpunkte  $k \in \{T_0 = 0, T_1 = 1h, \dots, T_N = Nh\}$ .
- Der Binomialprozess  ${}_h y_k$  hat den Startwert  ${}_h y_k = y_0 \forall h$ .
- Es gibt nur zwei Möglichkeiten einer Vorwärtsbewegung (siehe Abbildung 2.3):

(i) Aufwärtsbewegung mit Wahrscheinlichkeit  $p_h^u$  mit

$$p_h^u(k, {}_h y_k) = \mathbb{P}[{}_h y_{k+1} = {}_h y_{k+1}^u(k, {}_h y_k) | k, {}_h y_k] \quad \text{bzw.} \quad (2.6)$$

(ii) Abwärtsbewegung mit Wahrscheinlichkeit  $p_h^d = 1 - p_h^u$ .

Diese Einschrittbewegung sieht folgendermaßen aus:

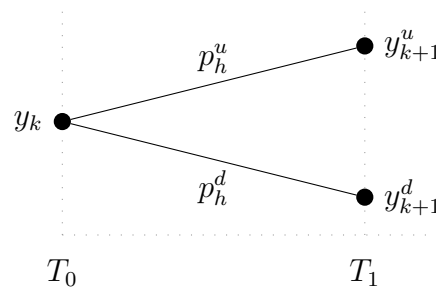


Abbildung 2.3: Einschrittbewegung im Binomialbaum

Rekombinierbare Binomialbäume stellen das Baummodell als Gitterstruktur dar und ermöglichen die Erreichbarkeit eines Knotens auf mehreren Pfaden.

Der Prozess  ${}_h y_k$  mit Startwert  $y_0$  hat die Eigenschaft, dass der Zustand  ${}_h y_{k+1}$  nur vom vorhergehenden Zustand  ${}_h y_k$  abhängt. Diese Eigenschaft der ausschließlichen

Abhängigkeit vom vorhergegangenen Zeitpunkt wird als „Gedächtnislosigkeit“ bezeichnet und ist charakteristisch für einen Markovprozess.

In dieser Arbeit werden vor allem jene Modelle betrachtet, die aufgrund ihrer Markov-Eigenschaft mittels rekombinierbarer Binomialbäume implementiert werden können.

**Beispiel 2.1** *Brownsche Bewegung*

*Der Binomialprozess mit der Abbildungsvorschrift*

$$y_{T_{i+1}} = \begin{cases} y_{T_i} + \sqrt{h}, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0 \leq p_h^u \leq 1 \\ y_{T_i} - \sqrt{h}, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0 \leq p_h^d \leq 1 \end{cases}$$

*konvergiert für die Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$p_h^u = p_h^d = \frac{1}{2}$$

*gegen die Brownsche Bewegung mit den Eigenschaften*

- $B_0 = 0$ ,
- $B$  hat f.s. stetige Pfade,
- für  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$  sind die Zuwächse unabhängig und normalverteilt mit

$$B_{T_i} - B_{T_{i-1}} \sim N(0, T_i - T_{i-1}).$$

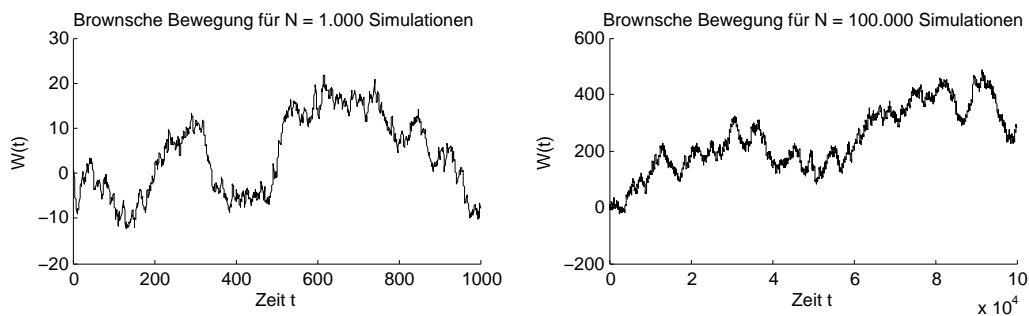


Abbildung 2.4: Simulation der Brownschen Bewegung

**Beweis** Um die Konvergenz aus Beispiel 2.1 nachzuweisen, wird ein skaliertes Random Walk (Irrfahrt)  $x_N(t)$  mit  $N \in \mathbb{N}$  und  $t \in [0, T]$  konstruiert mit folgenden Eigenschaften: Der Random Walk  $x_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  ist auf den diskreten Zeitparametern  $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_N = T$  mit Schrittweite  $h = T_i - T_{i-1} = \frac{1}{N}$  definiert. Die Zuwächse oder Sprünge der Irrfahrt werden mit  $\xi_1, \xi_2, \dots$  bezeichnet es gilt

$$\xi_i = \begin{cases} +\sqrt{h}, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ -\sqrt{h}, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für jeden Zeitpunkt  $T_i$  sind die Zuwächse des Random Walks unabhängig verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma^2 = h = \frac{1}{N}$ . Sei  $S_N := \xi_1 + \dots + \xi_N$  für  $N \in \mathbb{N}$ . Der skalierte Prozess  $x_n(t)$  sei folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} x_N(t) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \left( S_{\lfloor Nt \rfloor} + \underbrace{(Nt - \lfloor Nt \rfloor)\xi_{\lfloor Nt \rfloor + 1}}_{\psi(N,t)} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{N}} (S_{\lfloor Nt \rfloor} + \psi(N, t)) \\ &= (S_{\lfloor Nt \rfloor} + \psi(N, t)), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Aufgrund der Tschebyscheff-Ungleichung gilt  $\psi(N, t) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ . Für  $s \leq t$  konvergieren die Zufallsvariablen in Verteilung gegen die Normalverteilung

$$\begin{aligned} (x_N(s), x_N(t) - x_N(s)) &= (S_{\lfloor Ns \rfloor}, S_{\lfloor Nt \rfloor} - S_{\lfloor Ns \rfloor}) + (\psi(N, s), \psi(N, t) - \psi(N, s)) \\ &\xrightarrow{d} (X_1, X_2). \end{aligned}$$

wobei  $X_1 \sim N(0, \frac{\lfloor Ns \rfloor}{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, s)$  und  $X_2 \sim N(0, \frac{\lfloor Ns \rfloor - \lfloor Nt \rfloor}{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, s - t)$  für  $\frac{\lfloor Nt \rfloor}{N} \rightarrow t$ .

### Beispiel 2.2 Cox-Ross-Rubinstein Modell

Das bekannteste Binomialmodell wurde 1979 von Cox, Ross und Rubinstein zur Optionspreisbestimmung veröffentlicht. Mit der Abbildungsvorschrift

$$y_{T_{i+1}} = \begin{cases} u \cdot y_{T_i}, & 0 \leq p_h^u \leq 1 \\ d \cdot y_{T_i}, & 0 \leq p_h^d \leq 1 \end{cases}$$

und den Parametern

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}},$$

$$p_h^u = \frac{e^{\frac{rt}{n}} - d}{u - d} \quad \text{und} \quad p_h^d = 1 - p_h^u = \frac{u - e^{\frac{rt}{n}}}{u - d}$$

kann ein Aktienkurs  $Y_t$  modelliert werden, dessen Dynamik einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, d.h.

$$dY_t = Y_t \left[ \mu dt + \sigma dW_t \right]. \quad (2.7)$$

Der Beweis ist in [Albrecher u.a. \[2009\]](#) zu finden.

## 2.4 Konvergenz im Baummodell

Die Beispiele [2.1](#) und [2.2](#) demonstrieren konvergente Baummodelle anhand von Binomialapproximationen. In diesem Kapitel werden allgemeine Kriterien für die Konvergenz von Baummodellen angeführt.

Für einen stetigen stochastischen Prozess  $Y_t$ , dessen Dynamik mittels stochastischer Differentialgleichung aus Formel [\(2.1\)](#) beschrieben wird, wird auf dem Intervall  $[0, T]$  ein diskreter Prozess  ${}_h y_k$  konstruiert, der  $Y_t$  approximiert. Nach Definition [2.8](#) ist das diskrete Baummodell  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$  gegeben. Durch die Diskretisierung des vorgegebenen Zeitintervalls  $[0, T]$  resultieren die diskreten Zeitpunkte  $T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_N$  mit Schrittweite  $h = \frac{T}{N}$  für einen Diskretisierungsparameter  $N \in \mathbb{N}$ . Dabei umfasst der diskrete Prozess  $y$  die Zustände  ${}_h y_k$ . Nach [James und Webber \[2001\]](#), S.384 ff, kann für  $N \rightarrow \infty$  eine Familie von Bäumen konstruiert werden, sodass  $h \rightarrow 0$  und die Gitterstruktur des zugrundeliegenden rekombinierbaren Baumes immer feiner wird. Infolgedessen konvergiert die Folge der Variablen  ${}_h y_k$  unter bestimmten Voraussetzungen gegen den stetigen stochastischen Prozess  $Y_t$ . Der diskrete Zeitparameter  $k \in \{T_0, \dots, T_N\}$  erfüllt für  $t \in [0, T]$  die Eigenschaft  $k = \lfloor tN \rfloor$ . Für  $N \rightarrow \infty$  ist daher der Grenzwert  $\frac{k}{N} \rightarrow t$  definiert.

Die Konvergenzresultate sind in [Stroock und Varadhan \[1979\]](#), S.261 ff, enthalten. Unter den folgenden Annahmen zeigt [Nelson \[1990\]](#) mit den Konvergenzresultaten aus [Stroock und Varadhan \[1979\]](#), dass die Folge diskreter Baumprozesse gegen die Lösung der stochastischen Differentialgleichung aus Formel [\(2.1\)](#) konvergiert. Für

weiterführende Literatur wird an [Stroock und Varadhan \[1979\]](#) und [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#) verwiesen.

Die folgenden Annahmen gewährleisten die Beschränktheit der stochastischen Differentialgleichung sowie die Existenz einer f.s. eindeutigen Lösung.

**Annahme 2.1** (vgl. [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.397)

Die Funktionen  $\mu(t, Y_t)$  und  $\sigma(t, Y_t)$  sind stetig und  $\sigma(t, Y_t)$  ist nicht-negativ.

**Annahme 2.2** (vgl. [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.397)

Mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert für  $0 < t < \infty$  eine Lösung  $Y_t$  der stochastischen Differentialgleichung aus Formel (2.1) und  $Y_t$  ist fast sicher eindeutig.

Damit  ${}_h y_k$  in Verteilung gegen  $Y_t$  konvergiert für  $h \downarrow 0$ , muss der diskrete Prozess  ${}_h y_k$  folgende Kriterien erfüllen:

- (i)  $\forall h$  gilt die Startbedingung  ${}_h y_0 = y_0$ .
- (ii) Die Sprunghöhe des diskreten Prozesses  ${}_h y_k$  wird hinreichend schnell sehr klein mit  $h \downarrow 0$ .
- (iii) Der Drift des diskreten Prozesses  ${}_h y_k$  konvergiert gegen Driftterm der stochastischen Differentialgleichung  $\mu(t, Y_t)$  aus Formel (2.1).
- (iv) Der Varianzterm des diskreten Prozesses  ${}_h y_k$  konvergiert gegen den Varianzterm der stochastischen Differentialgleichung  $\sigma^2(t, Y_t)$  aus Formel (2.1).

**Annahme 2.3** (vgl. [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.398)

Für alle  $\delta > 0$  und  $T > 0$  gilt für die zwei Bilder  $y^u$  und  $y^d$  der Einschrittbewegung folgende Konvergenzbedingung:

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta, \\ 0 \leq t \leq T}} |{}_h y_{k+1}^u(k, {}_h y_k) - Y_t| = 0$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta, \\ 0 \leq t \leq T}} |{}_h y_{k+1}^d(k, {}_h y_k) - Y_t| = 0$$



Nach [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.398, werden der Drift des Binomialprozesses als

$$\mu_h(k, {}_h y_k) := \frac{p_h^u(k', {}_h y_k)[{}_h y_{k+1}^u(k', {}_h y_k) - Y_t] - p_h^d(t, y)[{}_h y_{k+1}^d(k', {}_h y_k) - Y_t]}{h}$$

und die Varianz als

$$\sigma_h^2(k, {}_h y_k) := \frac{p_h^u(k', {}_h y_k)[{}_h y_{k+1}^u(k', {}_h y_k) - Y_t]^2 - p_h^d(k', {}_h y_k)[{}_h y_{k+1}^d(k', {}_h y_k) - Y_t]^2}{h}$$

mit  $k' = h \lfloor t/h \rfloor$  festgelegt.

**Annahme 2.4** (vgl. [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.398)

Für jedes  $T > 0$  und  $\delta > 0$  gelte, dass  $\mu_h(k, {}_h y_k)$  und  $\sigma_h^2(k, {}_h y_k)$  gleichmäßig gegen  $\mu(t, Y_t)$  und  $\sigma^2(t, Y_t)$  konvergieren auf der Menge  $|y| \leq \delta, 0 \leq t < T$ :

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta, \\ 0 \leq t \leq T}} |\mu_h(k, {}_h y_k) - \mu(t, Y_t)| = 0,$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta, \\ 0 \leq t \leq T}} |\sigma_h^2(k, {}_h y_k) - \sigma^2(t, Y_t)| = 0.$$

Mit diesen Voraussetzungen gilt folgender Satz für die Konvergenz des Binomialprozesses:

**Satz 2.3** (vgl. [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#), S.399)

Unter den Annahmen [2.1 - 2.4](#) gilt, dass  ${}_h y_k$  in Verteilung gegen  $Y_t$  konvergiert.  $Y_t$  ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung aus Formel [\(2.1\)](#).

Der Beweis kann in [Stroock und Varadhan \[1979\]](#), unter Satz 11.2.3, und [Nelson \[1990\]](#), unter Satz 2.1, nachgelesen werden.

## 2.5 Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist ein in der Finanzmathematik wichtiger und häufig verwendeter stochastischer Prozess. Er wurde 1930 von Leonard Ornstein

und George Uhlenbeck eingeführt (vgl. [Ornstein und Uhlenbeck \[1930\]](#)). Die Dynamik des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses wird durch die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = k[\theta - Y_t]dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = 0 \quad (2.8)$$

modelliert. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess weist nach Gleichung (2.8) ein Mean-Reversion auf. Er tendiert gegen den konstanten Wert  $\theta$ , wobei die Geschwindigkeit dieses Verhaltens von der Konstante  $k$  abhängt.

Die Lösung der Differentialgleichung aus Formel (2.8) kann durch folgenden Ansatz bestimmt werden:

Sei  $X_t = e^{kt}Y_t$ . Mithilfe der Itô-Formel (2.3) resultiert

$$\begin{aligned} dX_t &= d(e^{kt}Y_t) = ke^{kt}Y_t dt + e^{kt}dY_t = \\ &= ke^{kt}Y_t dt + e^{kt}(k(\theta - Y_t)dt + \sigma dB_t) = \\ &= ke^{kt}Y_t dt + e^{kt}k\theta dt - e^{kt}kY_t dt + e^{kt}\sigma dB_t = \\ &= e^{kt}k\theta dt + e^{kt}\sigma dB_t. \end{aligned}$$

Die Integration über das Intervall  $[0, t]$  liefert die Darstellung

$$X_t = e^{kt}Y_t = X_0 + \int_0^t e^{ku}k\theta du + \int_0^t e^{ku}\sigma dB_u \text{ mit } X_0 = Y_0.$$

Daraus resultiert die Lösung der Gleichung aus Formel (2.8) mit

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{k(u-t)}k\theta du + \int_0^t e^{k(u-t)}\sigma dB_u = \\ &= Y_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \int_0^t e^{k(u-t)}\sigma dB_u. \end{aligned}$$

Das erste Moment von  $Y_t$  setzt sich aus dem Drift-Term zusammen und lautet

$$\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) = \theta(1 - e^{-kt}), \quad Y_0 = 0,$$

da Integrale nach der Brownschen Bewegung aufgrund ihrer Verteilungseigenschaften Erwartungswert Null haben. Mittels Itô-Isometrie kann das zweite Moment von  $Y_t$  bestimmt werden durch

$$\mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{k(u-t)}\sigma dB_u\right)^2\right] \stackrel{(2.5)}{=} \int_0^t e^{2k(u-t)}\sigma^2 du$$

$$= e^{-2kt} \sigma^2 \int_0^t e^{2ku} du = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt}).$$

Der Prozess  $Y_t$  unterliegt konkret der Normalverteilung

$$Y_t \sim N\left(\theta(1 - e^{-kt}), \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})\right) \quad (2.9)$$

und die asymptotische Verteilung lautet dementsprechend  $Y_t \sim N(\theta, \sigma^2/2k)$ . Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess gehört somit zur Familie der Gauß-Prozesse, die sogenannte gaußverteilte bzw. normalverteilte Prozesse umfassen. Auf die Eigenschaften dieses Prozesses wird in Kapitel 3.6 und 4.4 eingegangen.

### 2.5.1 Baumapproximation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

Die verallgemeinerte Binomialapproximation für Diffusionsprozesse aus [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#) kann nun auf den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angewendet werden. Die Abbildungsvorschrift für die Einschrittbewegung lautet

$$y_{T_{i+1}} = \begin{cases} y_{T_i} + \sigma\sqrt{h}, & 0 \leq p^u \leq 1 \\ y_{T_i} - \sigma\sqrt{h}, & 0 \leq p^d \leq 1 \end{cases}$$

mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_h^u = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{hk}(\theta - y_t)}{2\sigma} & \text{für } 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{hk}(\theta - y_t)}{2\sigma} \leq 1, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{hk}(\theta - y_t)}{2\sigma} < 0, \\ 1 & \text{für } 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{hk}(\theta - y_t)}{2\sigma}, \end{cases}$$

$$p_h^d = 1 - p_h^u.$$

Die Fallunterscheidungen gewährleisten, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten im Intervall  $[0, 1]$  liegen und zu einem sinnvollen Binomialmodell führen. Der Konvergenzbeweis für den diskreten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist in [Nelson und Ramaswamy \[1990\]](#) angeführt.

## 3 Zinsstrukturmodelle

In der Lebensversicherung werden Rückstellungen durch Diskontierung zukünftiger Zahlungen gebildet. Die Preisdynamik wird somit direkt von der Zinsdynamik beeinflusst und motiviert die Modellierung der Zinsstruktur. Erste Modellierungsansätze für die Zinsstruktur sind ungefähr um das Jahr 1975 entstanden in Form des *Vasicek Modells* (vgl. [Vasicek \[1977\]](#)), auf das in Kapitel 3.6 ausführlicher eingegangen wird.

Die wichtigsten Literaturquellen dieses Kapitels sind [Brigo und Mercurio \[2006\]](#) und [James und Webber \[2001\]](#).

### Definition 3.1 Zinsstruktur

*Die Zinsstruktur bezeichnet die funktionale Darstellung eines Zinssatzes in Abhängigkeit eines fixierten Finanzinstruments, das als Basiswert fungiert.*

*Die grafische Veranschaulichung dieser Entwicklung wird als Zinsstrukturkurve bezeichnet.*

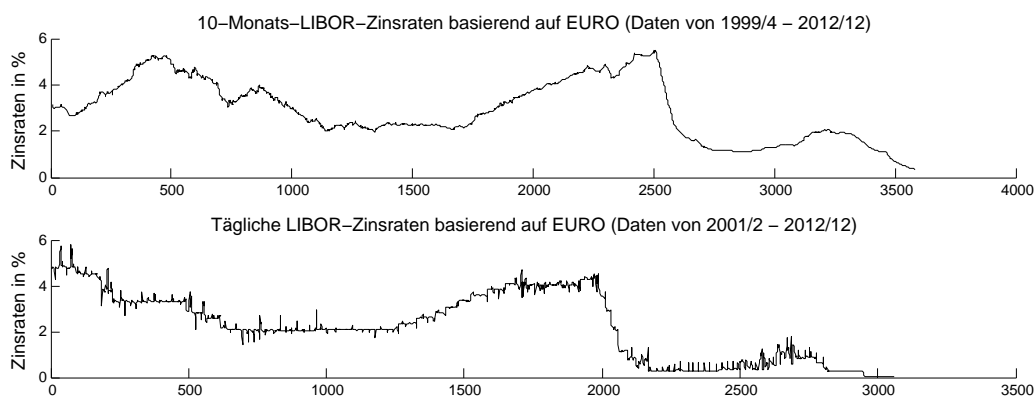


Abbildung 3.1: LIBOR Zinssätze zum 12. Dezember 2012, Quelle: [FRED \[2012\]](#)

In der Praxis werden häufig Zinsstrukturmodelle verwendet, die aktuelle Marktdaten gut replizieren und marktkonsistente Bewertungen für zukünftige Entwicklungen liefern. Im Hinblick auf die umfangreiche Menge an vorhandenen Marktdaten, ist es nicht möglich mit einem Zinsstrukturmodell eine zufriedenstellende Anpassung für alle vorhandenen Marktdaten (Bondpreise, Capletpreise, Volatilitäten, etc.) zu erstellen. Um eine geeignete Modellanpassung an verfügbare und zukünftige Marktdaten zu gewährleisten, muss ein Zinsstrukturmodell ausreichend frei wählbare Modellparameter besitzen.

Häufig verwendete Zinsstrukturmodelle besitzen explizite Bepreisungsformeln oder alternative, simple, numerische Lösungsmethoden (Baumapproximationen, Approximationen mittels Monte Carlo-Simulation, ...) für wichtige Zinsderivate.

Für zukünftige Bewertungen versucht man, Verteilungseigenschaften des Zinsmodells festzustellen, um eine Bepreisung mithilfe der Martingaleigenschaften unter dem risikolosen Maß  $\mathbb{Q}$  (vgl. Kapitel 3.3) zu ermöglichen. Es gilt bei der Modellierung der Zinsstruktur, eine Balance zwischen der Nachbildung aktueller Marktdaten und einer zuverlässigen Vorhersage zukünftiger Entwicklungen herzustellen, wobei die Bepreisung von der Komplexität des betrachteten Finanzinstruments abhängt.

In den folgenden Kapiteln werden grundlegende Finanzinstrumente vorgestellt, die für die Konstruktion von Zinsstrukturmodellen notwendig sind, und auf verschiedene Zinsstrukturmodelle eingegangen. Kapitel 3.1 und 3.2 präsentieren alle in dieser Masterarbeit relevanten finanzmathematischen Größen. In Kapitel 3.3 werden wichtige Grundlagen der No-Arbitrage-Pricing Theorie definiert. Im Kapitel 3.4 wird das Black-Modell für Caplets vorgestellt und in Kapitel 3.5 wird auf implizite Volatilitäten eingegangen. In Kapitel 3.6 wird die Gruppe der bekanntesten Zinsstrukturmodelle behandelt, die Short-Rate Modelle. Zu diesem Zweck wird eine Bewertung mittels Binomialbäumen anhand des konkreten Black-Derman-Toy (BDT)-Modells demonstriert. In 3.9 wird das London Interbank Offered Rate (LIBOR) Marktmodell eingeführt und anhand einer konkreten Baumapproximation veranschaulicht.

### 3.1 Einfache Zinsderivate

Ein elementares Finanzgut ist die Nullkuponanleihe (**NKA**), da alle Zinsraten in Abhängigkeit von Nullkuponanleihen dargestellt werden können.

**Definition 3.2** *Nullkuponanleihe (T-Bond)*

Eine Nullkuponanleihe ist ein Vertrag, der zum Zeitpunkt  $t$  abgeschlossen wird und dem Besitzer zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  garantiert eine Geldeinheit ausbezahlt. Der Preis zum Zeitpunkt  $t$  mit  $0 \leq t \leq T$  wird mit  $P(t, T)$  bezeichnet. Folglich gilt  $P(T, T) = 1$ .

Die Restlaufzeit bis zur Fälligkeit sei  $\tau(t, T) = T - t$  und wird als *Tenor* bezeichnet. Die stetige Spot-Zinsrate  $r(t, T)$  für den Zeitraum  $(t, T)$  ist implizit in der Auszahlung einer verzinste **NKA** erhalten durch

$$P(t, T)e^{r(t, T)\tau(t, T)} = 1.$$

Aufgelöst nach dem Zinssatz resultiert die Darstellung

$$r(t, T) = -\frac{1}{\tau(t, T)} \ln(P(t, T)).$$

Die einfach verzinste Spot-Zinsrate wird mit  $L(t, T)$  bezeichnet und resultiert aus

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1$$

durch Auflösen nach der Zinsrate als

$$L(t, T) = \frac{1}{\tau(t, T)} \left( \frac{1}{P(t, T)} - 1 \right). \quad (3.1)$$

Beispiele für am Markt gehandelte, einfach verzinste Spot-Zinssätze sind der **LIBOR** und der **EURIBOR**.

**Definition 3.3** *Forward Rate Agreement (FRA):*

Ein Forward Rate Agreement ist ein Vertrag, der zum Zeitpunkt  $t$  abgeschlossen wird für die Zeitpunkte  $t \leq T \leq S$ . Der Vertrag fixiert einen Zinssatz für das Intervall  $(T, S)$ . Zum Zeitpunkt  $T$  bezahlt ein Vertragspartner eine Geldeinheit und erhält dafür zum Zeitpunkt  $S$  diese Geldeinheit zuzüglich Zinsen zurück, das

heißt den Betrag

$$1 + F(t; T, S)\tau(T, S).$$

Die im Vertrag festgelegte Zinsrate  $F(t; T, S)$  heißt Forward Rate.

Die einfach verzinste Forward Rate lässt sich in Abhängigkeit einer **NKA** mathematisch darstellen als

$$\begin{aligned} \frac{P(t, T)}{P(t, S)} &= 1 + F(t; T, S)\tau(T, S) \\ \text{bzw. } F(t; T, S) &= \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Definition 3.4** *Geldmarktkonto*

Das Geldmarktkonto ist ein risikoloses Bankkonto mit Wert  $C(t)$  zum Zeitpunkt  $t > 0$ . Der Gewinn wird durch Verzinsung mit einem risikolosen Zinssatz  $r_t$  erzielt. Es gilt  $C(0) = 1$  und für die Dynamik des Kontos

$$dC(t) = r_t C(t) dt \quad r_t > 0 \quad \forall t.$$

Somit gilt

$$C(t) = \exp \left\{ \int_0^t r_s ds \right\}. \quad (3.3)$$

## 3.2 Infinitesimale Zinsraten

Für ein Intervall  $[T, S]$  infinitesimaler Größe mit  $\tau(T, S) \rightarrow 0$  werden durch Grenzwertbildung *infinitesimale Zinssätze* hergeleitet.

**Definition 3.5** *Infinitesimale Forward Rate*

Die zum Zeitpunkt  $t$  vereinbarte *Infinitesimale Forward Rate*  $f(t, T)$  gilt für das zukünftige *infinitesimale Intervall*  $[T, S]$  und lautet

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T} F(t; T, S) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
f(t, T) &= \lim_{S \rightarrow T} F(t; T, S) = \lim_{S \rightarrow T} \frac{1}{S - T} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) \\
&= - \lim_{S \rightarrow T} \frac{1}{P(t, S)} \left( \frac{P(t, T) - P(t, S)}{T - S} \right) \\
&= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.
\end{aligned}$$

Integrieren von Formel (3.4) führt zur Darstellung einer Nullkuponanleihe (NKA)

$$P(t, T) = \exp \left( \int_t^T -f(t, u) du \right). \quad (3.5)$$

Für die Modellierung von Zinsstrukturmodellen ist die infinitesimale Short-Rate  $r_t$  von besonderer Bedeutung. Diese legt den Zinssatz für das sofort beginnende infinitesimale Intervall  $[t, T]$  fest. Für die Bestimmung der infinitesimalen Short-Rate  $r_t$  wird der Grenzübergang  $T \rightarrow t$  zur Forward Rate  $f(t, T)$  gebildet.

**Definition 3.6** *Infinitesimale Short Rate*

Die zum Zeitpunkt  $t$  infinitesimal gültige Short Rate  $r(t)$  stimmt mit der sofort gültigen Forward Rate überein

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T) = f(t, t).$$

Obwohl die Short Rate  $r_t$  keine am Markt beobachtbare Größe darstellt, ist sie die zentrale Größe bei der Modellierung von Zinsstrukturmodellen. Nach Definition 3.6 modelliert  $r_t$  keine zukünftigen Zinsraten, aber unter Konstruktion eines arbitragefreien Maßes kann trotzdem ein „fairer“ Preis für Finanzderivate in Abhängigkeit von  $r_t$  angegeben werden. Diese finanzmathematische Theorie wird in den folgenden Kapiteln 3.3 und 3.6 vorgestellt.

### 3.3 Finanzmathematische Grundlagen

Eine grundlegende Voraussetzung an Finanzmärkte ist die *Arbitragefreiheit*. Dabei wird vorausgesetzt, dass keine Möglichkeiten bestehen, risikolos Gewinne zu lukrieren. Ein Beispiel dafür wäre, zum heutigen Zeitpunkt Null Geldeinheiten zu



investieren und in Zukunft mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu erwirtschaften. In der modernen Finanzmathematik werden arbitragefreie Märkte unter einem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  konstruiert. In arbitragefreien Märkten erfolgt die Bepreisung von Finanzderivaten durch die Bestimmung eines *fairen Preises*.

**Definition 3.7** *Zeitstetiges Marktmodell*

Ein zeitstetiges Marktmodell setzt sich zusammen aus

- dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ ,
- einer Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ , die den Informationsverlauf beschreibt,
- und einem zeitstetigen  $d + 1$ -dimensionalen Preisprozess  $S = (S^i(t))_{0 \leq i \leq d}$ .

Alle  $S^i$  seien adaptiert, sodass die stochastischen Integrale  $\int X dS^i$  für vorhersagbare  $S^i$ -integrierbare Prozesse  $X$  definiert sind. Das Finanzgut  $S^0(t)$  bezeichne das Geldmarktkonto aus 3.3  $S^0(t) = C(t)$  mit Short Rate  $r_t$ .

**Definition 3.8** *Handelsstrategie*

Ein vorhersagbarer (messbarer)  $d + 1$ -dimensionaler Prozess

$$X(t) \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ mit } X_t = (X^0(t), X^1(t), \dots, X^d(t))$$

wird als Handelsstrategie bezeichnet. Die Komponenten  $X^i(t)$  sind beschränkt und vorhersagbar für alle  $0 \leq i \leq d$ .

Der Wert der Handelsstrategie ist zum Zeitpunkt  $t$  gegeben als

$$V(X(t), t) = \sum_{i=0}^N X^i(t) \cdot S^i(t)$$

und der Prozess  $V(X(t)) = (V(X(t), t))_{0 \leq t \leq T}$  heißt Wertprozess.

Der Gewinnprozess einer Handelsstrategie  $X(t)$  ist gegeben als

$$G(X(t), t) = \int_0^t X(u) dS(u) = \sum_{i=0}^N \int_0^t X^i(u) \cdot dS^i(u) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.6)$$

**Definition 3.9** *Selbstfinanzierend*

Eine Handelsstrategie  $X(t)$  heißt selbstfinanzierend, wenn

$$V(X(t), t) > 0 \text{ für } 0 \leq t \leq T, \text{ wobei } V(X(t), t) = V(X(0), 0) + G(X(t), t).$$

**Definition 3.10** *Martingal*

Ein Prozess  $X$  ist ein Martingal bezüglich einer Filtration  $\mathcal{F}_t$ , wenn

- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$ ,
- $X_t$  adaptiert und
- $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad f.s. \quad \forall 0 \leq s \leq t$ .

**Definition 3.11** *Äquivalentes Martingalmaß*

Ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{S})$ , wenn

(i)  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  äquivalente Maße ( $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ) sind mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0,$$

(ii) die Radon-Nikodym Ableitung  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  und

(iii) der diskontierte Preisprozess  $\frac{S(t)}{C(t)}$  ein Martingal unter  $\mathbb{Q}$  ist mit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S(t)}{C(t)} \middle| \mathcal{F}_u \right] = \frac{S(u)}{C(u)} \quad 0 \leq u \leq t \leq T.$$

**Definition 3.12** *Zulässig*

Eine Forderung  $H$  heißt zulässig, wenn ein selbstfinanzierender Prozess  $X(t)$  existiert, sodass gilt

$$V(X(T), T) = H_T.$$

$\Pi_t = V(X(t), t)$  ist der Wert der Forderung zum Zeitpunkt  $0 \leq t \leq T$ .

**Definition 3.13** *Arbitrage*

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie heißt Arbitrage, wenn sie zulässig ist und

$$V(X(0), 0) = 0, \quad \mathbb{P}[V(X(T), T) > 0] > 0$$

gilt. Existiert im Marktmodell keine Möglichkeit zur Arbitrage, wird es als arbitragefrei bezeichnet.

**Proposition 3.1** (vgl. *Brigo und Mercurio [2006]*, Proposition 2.1.2)

Sei  $\mathbb{Q}$  ein äquivalentes Martingalmaß und  $H$  eine Forderung. Für jeden Zeitpunkt  $0 \leq t \leq T$  existiert ein eindeutiger Wert bezüglich der Forderung  $H$  mit der Darstellung

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(T)} H \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

**Definition 3.14** Ein Finanzmarkt ist vollständig genau dann, wenn alle Forderungen zulässig sind.

**Satz 3.1 (Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie)** (vgl. *Oksendal [2000]*, Lemma 12.1.6)

Sei  $\mathbb{Q}$  ein zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, sodass der diskontierte Prozess  $\tilde{Y}(t)$  ein lokales Martingal unter  $\mathbb{Q}$  ist. Dann ist das Marktmodell arbitragefrei.

Ein wichtiges Utensil der finanzmathematischen Bepreisung stellt der Maßwechsel von Girsanov dar. Dabei wird ein Martingalmaß bezüglich eines Finanzderivates (Numeraire) induziert, unter dem jeder diskontierte Preisprozess ein Martingal ist.

**Definition 3.15** *Numeraire*

Ein Numeraire ist ein positives Finanzgut, das zur Diskontierung herangezogen wird und bei dem keine Dividendenzahlungen erfolgen.

**Satz 3.2** *Wechsel des Numeraires* (vgl. *Brigo und Mercurio [2006]*, S.27 ff)

Sei ein Numeraire  $N$  gegeben mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}^N$ , sodass  $\mathbb{Q}^N \sim \mathbb{P}$ . Dann ist der Preis jeder Forderung  $X(t)$  bezüglich  $N$  ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^N$

$$\frac{X(t)}{N(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{X(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Sei  $U$  ein Numeraire mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}^U$ , sodass  $\mathbb{Q}^U \sim \mathbb{P}$ . Dann ist der Preis jeder bezüglich  $u$  normierten Forderung  $Y(t)$  ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^U$  mit

$$\frac{Y(t)}{U(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{Y(T)}{U(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Für zwei zueinander äquivalente Maße  $\mathbb{Q}^U$  und  $\mathbb{Q}^N$  ist der Dichteprozess von Radon-Nikodym gegeben als

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

Für ein Finanzinstrument  $Z_t$  gilt demnach

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{Z_T}{N_T} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{U_0 Z_T}{N_0 U_T} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{Z_T}{N_T} \frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^U} \right].$$

**Satz 3.3 (Satz von Girsanov)** (vgl. *Oksendal [2000]* Satz 8.6.3)

Sei  $B$  eine Brownsche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  und

$$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t Y_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t Y_s^2 ds \right\}$$

für  $0 \leq t \leq T$  ein Martingal.  $Y_s$  erfüllt die Novikov Bedingung

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T Y_s^2 ds \right\} \right] < \infty.$$

$Z_t$  definiert das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_t.$$

Dann ist  $X_t = B_t - \int_0^t Y_s ds$  eine Brownsche Bewegung unter  $\mathbb{Q}$  für  $0 \leq t \leq T$ .

Ein häufig verwendeter Numeraire ist die Nullkuponanleihe (**NKA**)  $P(t, T)$ . Dabei resultiert für den Wert einer Forderung  $H$

$$\Pi_t = P(t, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [H_T | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Um den Wert dieser Forderung zu bestimmen, muss der Erwartungswert der Auszahlungsfunktion von  $H_T$  berechnet werden.

**Definition 3.16**  $T$ -Forward Maß  $\mathbb{Q}^T$

Das  $T$ -Forward Maß  $\mathbb{Q}^T$  ist das bezüglich des Numeraires  $P(t, T)$  induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem der diskontierte Preisprozess  $\frac{S(t)}{P(t, T)}$  ein Martingal ist.

**Proposition 3.2** (vgl. *Brigo und Mercurio [2006], Proposition 2.5.1*)

Jede Forward Rate nach Formel (3.2) ist ein Martingal unter dem  $T$ -Forward Maß  $\mathbb{Q}^T$  mit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[F(t; S, T)|\mathcal{F}_u] = F(u; S, T), \quad 0 \leq u \leq t \leq S \leq T.$$

Die Forward Rate für das Intervall  $[S, T]$  ist die erwartete zukünftige einfach verzinsten Spot Rate nach Formel (3.1) zum Zeitpunkt  $S$  mit Fälligkeit  $T$ , sodass

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[L(S, T)|\mathcal{F}_u] = F(t; S, T), \quad 0 \leq t \leq S \leq T. \quad (3.7)$$

Nach Formel (3.2) kann  $F(t; S, T)P(t, T)$  als Anteil der Differenz zweier Bonds ausgedrückt werden in Form von

$$F(t; S, T)P(t, T) = \frac{1}{\tau(S, T)}[P(t, S) - P(t, T)]$$

und repräsentiert demnach den Preis eines Finanzgutes. Daher ist nach der Definition eines  $T$ -Forward Maßes 3.16 die Forward Rate  $F(t; S, T)$

$$\frac{F(t; S, T)P(t, T)}{P(t, T)} = F(t; S, T) \quad (3.8)$$

ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^T$ . Formel (3.7) folgt aus  $F(S; S, T) = L(S, T)$ .

Für die Erweiterung auf infinitesimale Zinsraten gilt die folgende Proposition.

**Proposition 3.3** (vgl. *Brigo und Mercurio [2006], Proposition 2.5.2*)

Der erwartete Wert einer zukünftigen infinitesimalen Spot Zinsrate ist unter  $\mathbb{Q}^T$  gleich der infinitesimalen Forward Rate mit

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_t] = f(t, T), \quad 0 \leq t \leq S \leq T.$$

Für den Beweis wird auf *Brigo und Mercurio [2006]* verwiesen.

### 3.4 Das Black-Modell für Caplets

Das bekannteste Modell der Finanzmathematik wurde 1973 von Fischer Black und Myron Scholes zur Bepreisung europäischer Optionen veröffentlicht. Im Jahr 1976 modifizierte Black das Modell für die Bepreisung von Rohstoffen, denen er eine Lognormalverteilung zu Grunde legte. Das Modell wurde später für Forwards (oder an der Börse gehandelte Futures) übernommen und wird zur Bepreisung von Zinsderivaten herangezogen. Mittlerweile ist es als Black-Modell bekannt.

Im Black-Modell wird die Annahme getroffen, dass die zugrundeliegenden Finanzgüter  $F(t)$  lognormalverteilt sind mit konstanter Varianz  $\sigma$ . Zudem erfolgen keine Dividendenzahlungen und es entstehen keine Kosten in diesem Modell. Unter diesen Voraussetzungen kann die Dynamik von  $F(t)$  als Diffusion ohne Driftterm dargestellt werden bezüglich einer Brownschen Bewegung  $W_t$  in Form von

$$dF(t) = F(t) \sigma dW_t.$$

Es existiert eine eindeutige, starke Lösung für diese stochastische Differentialgleichung. Mit Hilfe der Formel von Itô (2.2) für  $g(F(t), t) = \ln F(t)$  resultiert die Darstellung

$$\begin{aligned} d \ln F(t) &= \frac{\partial \ln F(t)}{\partial F(t)} dF(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln F(t)}{\partial F(t)^2} (dF(t))^2 \\ &= \frac{1}{F(t)} dF(t) + \frac{1}{2} \frac{-1}{F(t)^2} dF(t) dF(t) \\ &= \frac{1}{F(t)} F(t) \sigma dW_t - \frac{1}{2} \frac{1}{F(t)^2} (F(t) \sigma dW_t) (F(t) \sigma dW_t) \\ &= \sigma dW_t - \frac{1}{2} \frac{1}{F(t)^2} F(t)^2 \sigma^2 (dW_t)^2 \\ &= \sigma dW_t - \frac{\sigma^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Durch Integration über das Intervall  $[0, T]$  folgt

$$\begin{aligned} \int_0^T d \ln F(t) &= \int_0^T \sigma dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt \\ F(T) &= F(0) \exp \left\{ \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im Folgenden wird der Exponent aus Formel (3.9) als

$$I(T) := \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T$$

festgelegt. Für den Erwartungswert des Exponenten gilt

$$\mathbb{E}[I(T)] = 0 - \frac{\sigma^2}{2}T.$$

Für die Varianz gilt

$$\text{Var}(I(T)) = \text{Var}(\sigma W_T) = \mathbb{E}\left[(\sigma W_T)^2\right] - 0^2 = \sigma^2 T.$$

Demnach hat  $I(T)$  die Verteilung

$$I(T) \sim m + V \cdot N(0, 1)$$

mit den Parametern

$$m = -\frac{\sigma^2}{2}T \quad \text{und} \quad V^2 = T\sigma^2.$$

Somit gilt für Formel (3.9) die Darstellung

$$F(T) = F(0) \exp\{I(T)\} = F(0)e^{m+V \cdot N(0,1)}.$$

Für  $\ln F(t) \sim m + VN(0, 1)$  wird im Folgenden  $\mathbb{E}[(F(T) - K)^+]$  betrachtet.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(F(T) - K)^+] &= \mathbb{E}[(F(0)e^{m+V \cdot N(0,1)} - K)^+] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (F(0)e^{m+V \cdot x} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}}^{\infty} (F(0)e^{m+V \cdot x} - K) e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{m+V \cdot x} e^{-x^2/2} dx - K \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{m+V \cdot x - x^2/2} dx - K(1 - \Phi(\bar{x})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-(x-V)^2/2 + V^2/2 + m} dx - K(1 - \Phi(\bar{x})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) e^{V^2/2 + m} \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-(x-V)^2/2} dx - K(1 - \Phi(\bar{x})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(0) e^{V^2/2+m} \int_{\bar{x}-V}^{\infty} e^{-z^2/2} dz - K(1 - \Phi(\bar{x})) \\
 &= F(0)(1 - \Phi(\bar{x} - V)) - K\Phi(-\bar{x}) \\
 &= F(0)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

In Schritt (\*) wird das Intervall eingegrenzt, in dem die Auszahlungsfunktion positiv ist, als

$$F(0)e^{m+Vx} > K \Leftrightarrow x > \frac{-\ln \frac{F(0)}{K} - m}{V} =: \bar{x}.$$

Für Formel (3.10) gilt demzufolge

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F(0)}{K} + 0.5 \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}.$$

**Definition 3.17** *Caplet und Cap*

Ein Caplet  $Cpl(F, t; S, T)$  ist eine Call-Option auf eine zugrundeliegende Forward Rate  $F(t; S, T)$  zur Fälligkeit  $t$  und mit Ausübungspreis  $K$ . Die Auszahlungsfunktion zum Zeitpunkt  $t < S < T$  lautet

$$Cpl(F, t; S, T) = (F(t; S, T) - K)^+.$$

Der Wert eines Caplets entspricht im Black-Modell

$$Cpl^{Bl}(F, t; S, T) = e^{-r(T-S)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(F(t; S, T) - K)^+].$$

Ein Cap setzt sich aus mehreren Caplets auf Forward Rates  $F(t; T_{i-1}, T_i)$  mit  $T_0 \leq T_{i-1} \leq T_i \leq T_N$  zusammen und hat zum Zeitpunkt  $t$  den Wert

$$Cap(t; T_0, \dots, T_N) = \sum_{i=1}^N Cpl(F, t; T_{i-1}, T_i) \quad \forall t \leq T_0. \tag{3.11}$$

Für die  $i$ -te Forward Rate gilt in weiterer Folge die Notation  $F_i(t) := F_i(t; T_{i-1}, T_i)$ . Der Capletpreis auf die Forward Rate  $F_i(t)$  wird in weiterer Folge als  $Cpl_i(F, t)$  bezeichnet.

**Satz 3.4** *Formeln von Black für Caplets*

Zum Ausübungszeitpunkt  $t$  kann der Preis eines Caplets  $Cpl(F, t)$  nach Formel



(3.10) bestimmt werden:

$$Cpl^{Bl}(F, t) := e^{-r(T-t)}[F(t)\Phi(d_1) - K \Phi(d_2)] \quad (3.12)$$

mit den Koeffizienten

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F(t)}{K} + 0.5 \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Die Volatilität wird im Modell von Black für das betrachtete Intervall  $[0, T]$  als konstant angenommen. Die Forward Rates  $F(0)$  werden mittels Formel (3.2) aus Markt Spot Rates berechnet als

$$F_i(0) = \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \left( \frac{P(0, T_{i-1})}{P(0, T_i)} - 1 \right). \quad (3.13)$$

### 3.5 Implizite Volatilitäten

Bei der Kalibrierung von Zinsstrukturmodellen werden theoretische Modellgrößen so gut wie möglich an vorhandene Marktdaten angepasst. Eine wichtige Rolle spielen dabei am Markt beobachtete Preise für Zinscaps. Zinscaps setzen sich nach Formel (3.11) aus mehreren Caplets zusammen. Der Wert der Caplets kann nach der Formel von Black aus (3.12) berechnet werden. Aufgrund dieser Äquivalenz sind die dazugehörigen Caplet Volatilitäten *implizit* in den Preisen der Zinscaps enthalten und können durch Invertieren der Formel von Black ermittelt werden.

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus vorgestellt, der die gesuchten Volatilitäten für Caplets aus den Preisen für Zinscaps extrahiert. Dazu sei der Zinscap  $Cap(t; T_0, \dots, T_N)$  für die Zeitpunkte  $\{T_0, \dots, T_N\}$  zum Zeitpunkt  $t < T_0$  gegeben mit Volatilität  $\sigma^{Cap}(t)$ . Die Caplet-Preise lassen sich durch Subtraktion der Zinscap-Preise sukzessive zu den Zahlungszeitpunkten bestimmen durch

$$Cap(t; T_0, \dots, T_k) = \sum_{i=1}^k Cpl_i(F, t) \quad \forall t \leq T_0. \quad (3.14)$$

*Flat*-Volatilitäten legen unabhängig von  $t$  für alle Caplets  $Cpl_i(F, t)$  die gleiche Cap-Volatilität fest. Diese Methode führt zu ungenauen Preisansätzen bei manchen Caplets (vgl. Filipovic [2009]). Deshalb wird an dieser Stelle die Bestim-

mung individueller Volatilitäten für jedes Caplet motiviert. Diese sogenannten *spot*-Volatilitäten werden durch ein spezielles Bootstrappingverfahren bestimmt. Dabei bezeichne  $\sigma^{Cap}(t)$  die Marktvolatilität eines Zinscaps für das Intervall  $[0, t]$  mit Fälligkeit  $t$ . Die Caplet-Volatilitäten  $\sigma(T_i)$  werden folgendermaßen iterativ bestimmt:

---



---

### Bootstrapping-Algorithmus

---

1. Setze  $\sigma(T_1) := \sigma^{Cap}(T_1)$
  2. Löse  $\frac{\sigma^2(T_1) + \sigma^2(T_2)}{2} = \sigma^{Cap}(T_2)^2$  nach  $\sigma_2$  auf.
  3. Wiederhole 2. bis alle Caplet-Volatilitäten  $\sigma(T_i) \forall i = 1, \dots, n$  gefunden.
- 
- 

Tabelle 3.1: Bootstrapping-Algorithmus

Die Idee dieser Iteration basiert auf der Additivität von Varianzen für ein zugrundeliegendes Finanzinstrument.

## 3.6 Short-Rate Modelle

Short Rate Modelle werden direkt unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  modelliert. In dieser Arbeit werden ausschließlich Ein-Faktor-Short-Rate Modelle behandelt und für allgemeinere Modelle wird auf [Brigo und Mercurio \[2006\]](#) verwiesen.

Die allgemeine Darstellung der Zinsstruktur einer risikolosen Zinsrate  $r_t$  hat, basierend auf der Darstellung einer **SDGL** aus Formel (2.1), die Drift- und Diffusions-terme

$$\begin{aligned}\mu(t, r) &= \theta(t) + a(t)r_t, \\ \sigma(t, r) &= \sigma(t)r_t^\gamma,\end{aligned}$$

mit deterministischen Funktionen  $a(t)$ ,  $\theta(t)$  und  $\sigma(t)$ . Somit kann die Dynamik der risikolosen Zinsrate  $r_t$  durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben als

$$dr_t = \left[ \theta(t) + a(t)r_t \right] dt + \sigma(t)r_t^\gamma dW_t. \quad (3.15)$$

Die freie Wahl von  $a(t)$ ,  $\theta(t)$  und  $\sigma(t)$  gewährleistet in diesem Fall eine Anpassung an drei Funktionen aus beobachtbaren Marktdaten wie zum Beispiel die aktuelle Zinsstrukturkurve. In dieser Arbeit werden Modelle mit  $\gamma = 0$  (vgl. [Buetow u.a. \[2001\]](#)) betrachtet mit der Darstellung

$$dr_t = \left[ \theta(t) + a(t)r_t \right] dt + \sigma(t) dW_t. \quad (3.16)$$

Die stochastische Differentialgleichung aus Formel (3.16) besitzt einen deterministischen Mean-Reversion-Term  $a(t)$  und einen deterministischen, lokalen Volatilitätsterm  $\sigma(t)$ . Die Mean-Reversion initiiert einen für zukünftige Zinsstrukturen vorteilhaften Effekt: der erwartete Wert der Short Rate  $r_t$  wird sich tendenziell zum Mean Reversion Level  $\theta(t)$  entwickeln. Diese Eigenschaft gilt unter der Voraussetzung einer beschränkten Volatilitätsfunktion  $\sigma(t)$ .

Der Leitgedanke der Bepreisungstheorie und allgemeiner Short-Rate Modelle ist, dass der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt  $t < T$  als Erwartungswert einer mittels  $r_t$  abgezinsten Geldeinheit unter dem risikolosen Maß  $\mathbb{Q}$  gegeben ist (zu aktuell verfügbaren Informationen  $\mathcal{F}_t$ ) als

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.17)$$

Für  $t = T$  gilt  $P(T, T) = 1$ . Das älteste Short-Rate Modell stammt von [Vasicek \[1977\]](#) und modelliert die Dynamik der Short rate  $r_t$  nach einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (siehe Kapitel 2.5). Die stochastische Differentialgleichung für die Short Rate  $r_t$  lautet im Vasicek-Modell

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \quad \text{mit} \quad r_0 > 0$$

mit positiven Konstanten  $k, \theta$  und  $\sigma$ . Dieser Prozess initiiert, mit den in Kapitel (2.5) angeführten Eigenschaften, normalverteilte Short Rates  $r_t$ . Als wesentlicher Nachteil ergeben sich verteilungsbedingt positive Wahrscheinlichkeiten für negative Zinsraten. In der Praxis hat sich zudem gezeigt, dass nicht ausreichend Parameter zur Verfügung stehen, um die gesamte Zinsstruktur zu replizieren.

Um den negativen Zinsraten entgegenzuwirken, wurden exponentielle Zinsstrukturmodelle für die Short Rate  $r_t$  eingeführt. Die Modellierung der Short Rate erfolgt in solchen Modellen als Exponentialdarstellung einer davon unabhängigen Zustandsvariablen  $Y_t$  mit ( $r_t = e^{Y_t}$ ). Als Beispiel für ein derartiges Modell wird im nächsten Abschnitt dieser Arbeit (Kapitel 3.7) das Black-Derman-Toy Modell nä-

her behandelt. Ein weiteres Beispiel dieser Methode ist die Verallgemeinerung des Vasicek Modells zum *Exponentiellen Vasicek Modell* nach Dothan [1978]. Demnach wird die Dynamik der Short Rate  $r_t$  als

$$d \ln r_t = r_t \left[ \theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r_t \right] dt + r_t \sigma dW_t \quad \text{mit } r_0 > 0$$

modelliert. Dieses Modell führt auf eine Log-Normalverteilung der Short-Rate  $r_t$ , ermöglicht aber keine explizite Berechnungsmethode für einfache Zinsderivate.

Um dem Nachteil der unzureichenden Modellkalibrierung im Vasicek Modell entgegenzuwirken, wurde von Hull und White [1990] eine zeitabhängige Funktion in das ursprüngliche Vasicek-Modell eingebunden. Die allgemeine stochastische Differentialgleichung lautet in diesem Einfaktor-Hull-White-Modell

$$dr_t = \left[ \theta(t) - a(t)r_t \right] dt + \sigma(t)dW_t$$

mit deterministischen Funktionen  $\theta(t)$ ,  $a(t)$  und  $\sigma(t)$ . Damit konnte die aktuelle Zinskurve vollständig nachgebildet werden und einfache Bepreisungen durchgeführt werden. Die positive Wahrscheinlichkeit für negative Zinsraten blieb aber bestehen. Eine Übersicht über weitere Zinsstrukturmodelle ist in Brigo und Mercurio [2006] und James und Webber [2001] enthalten.

### 3.7 Das Black-Derman-Toy (BDT) Modell

In der Praxis werden vor allem jene Zinsstrukturmodelle verwendet, die einfach umgesetzt werden können und dennoch ausreichend marktkonsistente Daten produzieren. Bevorzugt werden in dieser Hinsicht Zinsstrukturmodelle, die gewährleisten, dass die erzeugten Zinsraten positiv bleiben, wie zum Beispiel Modelle für die Dynamik logarithmierter Short Rates  $\ln(r_t)$ . Dieser Ansatz modelliert die Short Rate  $r_t$  als Exponential eines normalverteilten Prozesses  $Y_t$  (vgl. 2.5) in Form von

$$r_t = e^{Y_t} = c(t)e^{\sigma(t)W_t} \tag{3.18}$$

Als Beispiel für ein solches Modell wird in diesem Abschnitt das Black-Derman-Toy Modell näher behandelt.

**Definition 3.18** *Black-Derman-Toy Modell*

Im Black-Derman-Toy Modell folgen die lognormalverteilten Short Rates  $r_t$  der stochastischen Differentialgleichung

$$d \ln r_t = \left[ \theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r_t \right] dt + \sigma(t) dW_t \quad (3.19)$$

mit deterministischen Funktionen  $\theta(t)$  und  $\sigma(t)$ .

Die Differentialgleichung aus Formel 3.19 folgt direkt aus der Exponentialdarstellung in Formel (3.18). Durch Logarithmieren resultiert für  $\ln r_t$  die Gleichung

$$\ln r_t = \ln c(t) + \sigma(t)W_t.$$

Äquivalent zu diesem Ausdruck ist

$$W_t = \left[ \ln r_t - \ln c(t) \right] \frac{1}{\sigma(t)}.$$

Mithilfe der Produktregel resultiert die Darstellung

$$dW_t = \left[ d \ln r_t - d \ln c(t) \right] \frac{1}{\sigma(t)} + \left[ \ln r_t - \ln c(t) \right] \frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)}.$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu folgender Darstellung für  $\ln r_t$ :

$$d \ln r_t = d \ln c(t) + \left[ \ln r_t - \ln c(t) \right] \frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)} + \sigma(t) dW_t.$$

Daraus kann die BDT-Differentialgleichung auf Formel (3.19) hergeleitet werden als

$$\begin{aligned} d \ln r_t &= d \ln c(t) + (\ln r_t - \ln c(t)) \frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)} + \sigma(t) dW_t \\ &= \left[ \frac{d \ln c(t)}{dt} + (\ln r_t - \ln c(t)) \frac{d\sigma(t)}{dt} \frac{1}{\sigma(t)} \right] dt + \sigma(t) dW_t \\ &= \left[ \underbrace{\ln' c(t) - \frac{\sigma(t)'}{\sigma(t)} \ln c(t)}_{=\theta(t)} + \underbrace{\frac{\sigma(t)'}{\sigma(t)} \ln r_t}_{=-a(t)} \right] dt + \sigma(t) dW_t \end{aligned}$$

mit  $\frac{d \ln c(t)}{dt} = \ln' c(t)$  und  $\frac{d\sigma(t)}{dt} = \sigma(t)'$

$$= \left[ \theta(t) - a(t) \ln r_t \right] dt + \sigma(t) dW_t.$$

Die Funktion  $a(t)$  initiiert die Mean-Reversion dieses Prozesses. Für  $a(t) = \frac{\sigma(t)'}{\sigma(t)} > 0$  wird eine Mean-Reversion eintreten, aber für konstante Volatilitäten nicht. Das Black-Derman-Toy Modell hat zudem die Eigenschaft, dass die Varianz von  $\ln r_t$  lediglich von der letzten Volatilität  $\sigma(T)$  abhängt und die Kalibrierung an Zinscaps ermöglicht (vgl. [Kazziha und Rebonato \[1998\]](#)).

Für die Varianz von  $\ln r_t$  gilt demnach

$$\text{Var}(\ln r_T) = T \sigma(T)^2. \quad (3.20)$$

Die wichtigsten Derivate am Zinsmarkt sind Zinscaps und Zinsswaps. Demnach sollte ein Zinsstrukturmodell diese Finanzinstrumente bepreisen können. Die Bewertung von Caplets, aus denen sich ein Cap zusammensetzt, erfolgt in der Praxis häufig mittels der *Formeln von Black* (vgl. Satz 3.4), die log-normalverteilte Zinsraten voraussetzen. Diese Bedingung motiviert ebenfalls die Modellierung lognormalverteilter Short Rates  $r_t$ .

Ein Nachteil von Zinsstrukturmodellen mit diesem Exponentialansatz ist die fehlende Möglichkeit, geschlossene Bepreisungsformeln für Bonds oder Optionen anzuführen (vgl. [Brigo und Mercurio \[2006\]](#)). Basierend auf lognormalverteilten Short Rates gilt nach Formel (3.17) für den Wert einer **NKA**

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &\stackrel{T \text{ sehr klein}}{\approx} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ T \frac{r(0) + r(T)}{2} \right\} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &\stackrel{(3.18)}{\approx} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{e^{Y_T}} \right] = \infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Für log-normalverteilte Short Rates  $r_t$  ist der Preis einer Nullkuponanleihe aus Formel (3.21) unbeschränkt nach der Exponentialdarstellung von  $r_t$ . Diese Unbeschränktheit des Erwartungswertes folgt durch doppeltes Exponentieren einer normalverteilten Zufallsvariable  $Y_t$ . Die fehlende Bepreisungsformel eines T-Bonds wird durch Diskretisierungen und numerische Methoden gelöst. **BDT** veröffentlichten den in diesem Abschnitt vorgestellten Algorithmus in Form eines Baummodells. Bei der Verwendung von Baumstrukturen wird dieses Problem durch die Verwendung endlich vieler Zustände umgangen. [Brace u a. \[1997\]](#) konnten diesem Problem entgegenwirken durch die Modellierung eines Marktmodells mit diskreten, beobachtbaren Marktzinsraten, auf das in Kapitel 3.9 eingegangen wird.

### 3.8 Baumapproximation des BDT-Zinsmodells

Ziel ist es nun, die Konstruktion eines Binomialbaumes um die in Formel (3.19) beschriebene Zinsstruktur zu approximieren. Die Bepreisung erfolgt in diesem Baummodell unter der Voraussetzung, dass sich jede Zinsrate bei einem Zustandswechsel für zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte nur in zwei Richtungen bewegen kann. Die neuen Zustände sind beide gleich wahrscheinlich mit  $p^u = p^d = 0.5$ .

Die  $j$ -te Short Rate zum Zeitpunkt  $k$  wird mit  $r_{k;j}$  für  $k = T_1, \dots, T_N$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  bezeichnet und folgendermaßen modelliert. Die diskreten Zeitpunkte umfassen  $T_0, \dots, T_N$  mit Schrittweite  $T_i - T_{i-1} = h$ .

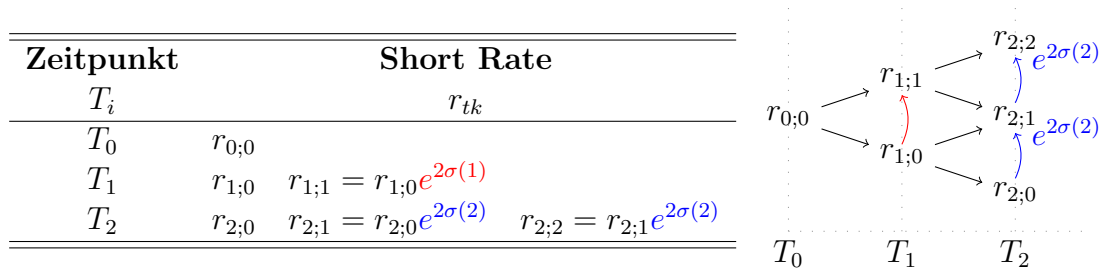


Abbildung 3.2: Zinsstruktur im BDT-Modell für zwei Perioden und dazugehöriger Baum

Für die Baumkonstruktion nach BDT werden Spot Rates  $y(0, k)$  und Marktvolatilitäten  $\sigma(k)$  für  $k = T_1, \dots, T_N$  herangezogen. Somit sind die Preise von Nullkuponanleihen  $P(0, k)$  für alle Laufzeiten  $k$  bekannt. Nach Formel (3.17) müssen diese Preise an den diskontierten Wert einer Geldeinheit kalibriert werden.

1. Zu einem fixen Level  $k = T_1, \dots, T_N$  wird die Beziehung zweier Short Rates durch

$$r_{k;j} = r_{k;j-1} \cdot \exp\{2\sigma(k)\} \quad \text{für } k = 1, \dots, n. \tag{3.22}$$

definiert.

2. Für  $k = T_0$  ist die erste Short Rate im BDT-Binomialbaum  $r_{0;0} := y(0, 1)$ .
3. Für  $k = T_1$  wird die Baumstruktur basierend auf den bekannten Short Rates durch Rückwärtsrekursion auf das Level 0 konstruiert. Die Kalibrierung an

die Nullkuponanleihe erfolgt durch

$$P(0, 1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{1 + r_{0;0}} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + r_{1;0}} + \frac{1}{1 + r_{1;1}} \right] \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{1 + r_{0;0}} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + r_{1;0}} + \frac{1}{1 + r_{1;0} e^{\sigma(1)}} \right]. \quad (3.24)$$

Diese Gleichung ist durch die Beziehung der Short Rates nach  $r_{1;0}$  lösbar. Der Wert einer Nullkuponanleihe wird für jedes  $k = T_1, \dots, T_N$  zur Ermittlung der ersten Short Rate  $r_{k;0}$  verwendet. Anschließend werden die Short Rates  $r_{k;1}$  bis  $r_{k;k}$  im aktuellen Level bestimmt.

Das **BDT**-Baummodell besteht zum Level  $T_1$  aus den Zinsraten  $r_{0;0}, r_{1;0}$  und  $r_{1;1}$ . Daraus resultieren folgender Erwartungswert und Varianz für die logarithmierte Short Rate  $\ln r_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln r_t] &= \frac{1}{2} (\ln r_{0;1} + \ln r_{0;1} e^{2\sigma}) = \ln r_{0;1} + \sigma \\ \text{Var}(\ln r_t) &= \frac{1}{2} (\ln r_{0;1} e^{2\sigma(1)} - \ln(r_{0;1} + 2\sigma(1)))^2 + \frac{1}{2} (\ln r_{0;1} - \ln(r_{0;1} + 2\sigma(1)))^2 \\ &= 4 \sigma^2(1) \end{aligned}$$

Die Zinsstruktur sei nach dem Baummodell von Black-Derman-Toy für eine Laufzeit von  $n$  Jahren gegeben. Die Anzahl der Pfade vom Ursprungsknoten  $r_{0;0}$  bis zu den Endknoten ist a priori bekannt nach Definition 2.11. Die einzelnen Pfade seien für das Zinsstrukturmodell als  $I_\nu, \nu = 1, \dots, 2^{N-1}$  gegeben und unterscheiden sich eindeutig voneinander durch die zeitabhängigen Auf- und Abwärtsschritte. Sei

$$u_{T_i}^{I_\nu} = \begin{cases} 1, & \text{Aufwärtsbewegung in } [T_i, T_{i+1}] \text{ auf Pfad } I_\nu \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Indikatorvariable für die Auf- und Abwärtsbewegungen im Baummodell für die Zeitpunkte  $T_i, i = 0, \dots, N - 1$ . Dadurch kann jeder Pfad durch die zeitliche Anordnung der Auf- und Abwärtsbewegungen eindeutig festgelegt werden in Form von

$$I_\nu = \{u_{T_0}^{I_\nu}, u_{T_1}^{I_\nu}, \dots, u_{T_{n-1}}^{I_\nu}\}.$$



Für einen Pfad  $I_\nu, \nu = 1, \dots, 2^{N-1}$  sei die Anzahl der Aufwärtsbewegungen als

$$\hat{u}(I_\nu) = \sum_{i=0}^{N-1} u_{T_i}^{I_\nu}$$

definiert. Die Anzahl der Abwärtsbewegungen ergibt sich als

$$\hat{d}(I_\nu) = N - 1 - \hat{u}(I_\nu).$$

Für die beispielhafte Baumstruktur aus Abbildung 3.2 existieren die vier Pfade

$$I_1 = \{1, 1\}, I_2 = \{1, 0\}, I_3 = \{0, 1\}, I_4 = \{0, 0\}.$$

Die mehrjährige pfadabhängige Zinsrate sei als  $r^{I_\nu}(t, t+k)$  bezeichnet und durch die zufällige Entwicklung aus stochastisch unabhängigen Zinsraten  $r_{k;j}$  folgendermaßen berechenbar:

$$r^{I_\nu}(0, N) = \prod_{k=0}^{N-1} (1 + r_{k;k+I_\nu(k)}) - 1$$

Zu jedem Pfad  $I_\nu, \nu = 1, \dots, 2^{N-1}$  ist eine Wahrscheinlichkeitsgewichtung  $P(I_\nu)$  festgelegt durch

$$P(I_\nu) = (p^u)^{\hat{u}(I_\nu)} \cdot (p^d)^{N-1-\hat{u}(I_\nu)}.$$

### 3.8.1 Bepreisung eines Zinscaps

Das Black-Derman-Toy-Zinsstrukturmodell wird an dieser Stelle zur konkreten Bepreisung von Caplets und Caps herangezogen. Für die Baumkonstruktion werden Markt Spot Rates  $y(0, T_i)$  und Cap-Volatilitäten  $\sigma^{Cap}(t)$  verwendet. Die Marktdaten stammen von Reuters [2013] zum Stichtag 22. 2. 2013 und sind in Tabelle 3.2 angeführt. Für die Konstruktion des BDT-Binomialbaumes und die Bepreisung müssen vorab die Preise der Nullkuponanleihen  $P(0, T_i)$  und impliziten Caplet-Volatilitäten  $\sigma^{Cpl}(k)$  bestimmt werden.

<b>Laufzeit</b>	<b>Marktdaten vom 22.2.2013</b>		
$T_i$	$y(0, T_i)$	$P(0, T_i)$	$\sigma^{Cap}(T_i)$
1	0.0027	0.997307	29.3%
2	0.0039	0.992245	42.5%
3	0.0071	0.978999	53.4%
4	0.0088	0.965561	59.6%
5	0.0107	0.948175	64.8%
6	0.0126	0.927625	69.0%
7	0.0144	0.904764	71.7%
8	0.0160	0.880745	73.1%
9	0.0175	0.855441	73.7%

Tabelle 3.2: Marktdaten für das **BDT**-Baummodell

Um den Zusammenhang zum Black-Modell aufzuzeigen, werden die gesuchten Capletpreise ebenfalls mittels Formeln von Black berechnet. Zu diesem Zweck werden nach Formel (3.2) Forward Rates  $F_i(0)$  aus den Marktzinsraten extrahiert. Für die Bepreisung nach Black werden die Volatilitäten  $\sigma^{Cpl}(t)$  verwendet. Diese Volatilitäten müssen aus den gegebenen Marktvolatilitäten nach dem Algorithmus aus Kapitel 3.5 bestimmt werden. Zur Baumkonstruktion des **BDT**-Binomialbaumes werden die  $\sigma^{Cap}(t)$  Volatilitäten herangezogen. Die Forward Rates  $F_i(0)$  und die gestrappten Volatilitäten  $\sigma^{Cpl}(t)$  sind in Tabelle 3.3 angeführt.

<b>Laufzeit</b>	<b>Forward Rates</b>	<b>Gestrappte Volatilitäten</b>
$T_i$	$F_i(0)$	$\sigma^{Cpl}(T_i)$
1	0.0027	29.3%
2	0.0051	52.5%
3	0.0135	70.3%
4	0.0139	75.2%
5	0.0183	82.4%
6	0.0222	87.0%
7	0.0253	86.1%
8	0.0273	82.2%
9	0.0296	78.3%

Tabelle 3.3: Forward Rates für Formeln von Black und gestrappte Volatilitäten für das **BDT**-Baummodell

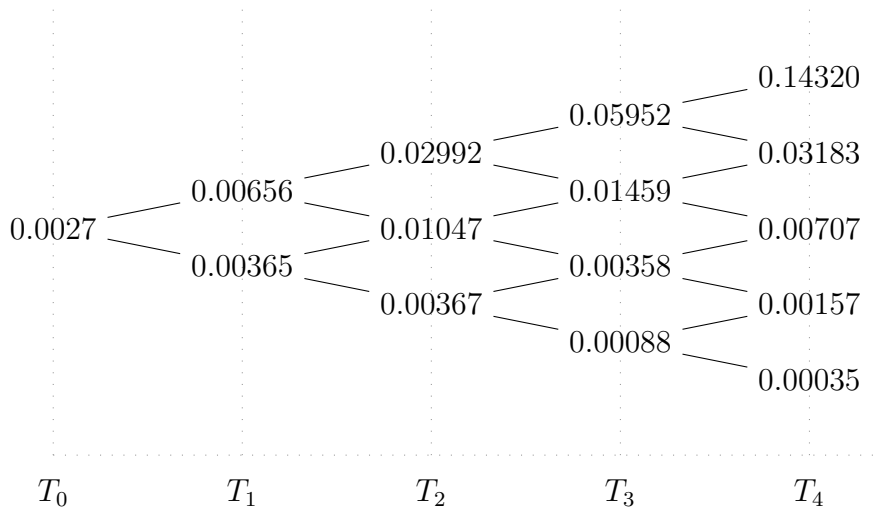


Abbildung 3.3: Short Rates nach **BDT**-Baummodell für Cap- und Caplet-Bepreisung

Mithilfe der  $P(0, T_i)$  und  $\sigma^{Cap}(T_i)$  wird das Baummodell nach Black-Derman-Toy konstruiert. Die Short Rates liegen in Form eines Binomialbaumes laut Abbildung 3.3 vor und werden mit  $r_{k;j}$  bezeichnet.  $k$  bezeichne das Level mit  $k = T_0, \dots, T_N$  und  $j$  den Nummerierung der Knoten zum vorgegebenen Level mit  $0 \leq j \leq k$ . Die Auszahlungsfunktion der Caplets in  $r_{k;j}$  lautet

$$Z(k, j, K) = (r_{k;j} - K)^+ \quad \text{für } k = T_0, \dots, T_N, 0 \leq j \leq k.$$

Der Wert eines Caplets zum heutigen Zeitpunkt wird durch Diskontierung anhand einer Rückwärtsrekursion entlang des Zinsstrukturbaumes bestimmt. Der Nominalwert sei mit 1 festgelegt und wird in weiterer Folge als Faktor nicht angeführt. Basierend auf den vorliegenden Short Rates können die diskontierten Auszahlungsfunktionen in jedem Knoten direkt angegeben werden als

$$Z(k, j, K) = \frac{(r_{k;j} - K)^+}{1 + r_{k;j}} \quad \text{für } k = T_0, \dots, T_N, 0 \leq j \leq k.$$

Abbildung 3.4 veranschaulicht diese Werte im Binomialbaum.

Die Ein-Schritt-Rückwärtsrekursion für die Bepreisung des Caplets lautet  $\forall k = T_0, \dots, T_N, j = 0, \dots, k$

$$Z(k, j, K) := \frac{1}{1 + r_{k;j}} [Z(k + 1, j, K) + Z(k + 1, j + 1, K)].$$

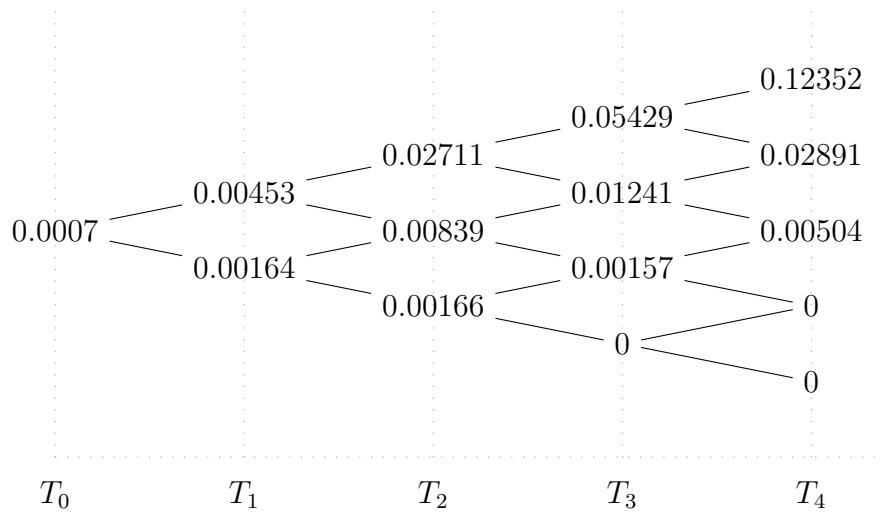


Abbildung 3.4: Diskontierte Capletpreise nach Black-Derman-Toy (BDT) für  $K = 0.002$

Der diskontierte Capletpreis zu  $T_0$  ist

$$Cpl^{BDT}(0, K) = Z(0, 0, K).$$

Wenn alle Caplets bewertet wurden und zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt sind, lässt sich der Preis eines Zinscaps zum Zeitpunkt  $t = 0$  ebenfalls ermitteln aus

$$Cap(0, K)^{BDT} := \sum_{\text{Laufzeiten}} Cpl^{BDT}(0, K).$$

Die mittels BDT und Formel von Black ermittelten Caplet- und Cappreise werden in den Tabellen 3.4 und 3.5 angeführt.

Laufzeit	Capletpreise zu $t = 0$	
	$T_i$	$Cpl^{BDT}(0, K = 0.002)$
1	0.000698	0.000752
2	0.003077	0.003125
3	0.011288	0.011319
4	0.011646	0.011623
5	0.015696	0.015678
6	0.018984	0.018978
7	0.021502	0.021428
8	0.022632	0.022719
9	0.024007	0.024117

Tabelle 3.4: Caplets nach **BDT**-Zinsstrukturmodell

Laufzeit	Cappreise zu $t = 0$	
	$T_i$	$Cap^{BDT}(0, K = 0.002)$
1	0.000698	0.000752
2	0.003776	0.003876
3	0.015064	0.015196
4	0.026710	0.026818
5	0.042406	0.042496
6	0.061390	0.061474
7	0.082892	0.082902
8	0.105523	0.105621
9	0.129530	0.129738

Tabelle 3.5: Caps nach **BDT**-Zinsstrukturmodell

Die Preise im ersten Jahr werden in diesem Beispiel nur zum Demonstrationszweck angeführt. In der Praxis sind die Zinsraten für das erste Jahr bereits gültig und bedürfen keiner Absicherung in Form von Caplets. Die Differenzen zwischen den beiden Berechnungsarten bewegen sich innerhalb einer Toleranzgrenze von 1%.

### 3.9 Das London Interbank Offered Rate (**LIBOR**)-Marktmodell

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Modellen beziehen sich **LIBOR**-Marktmodelle auf diskrete, am Markt beobachtete Marktzinsen wie den **LIBOR** oder **EURIBOR**. Das **LIBOR**-Marktmodell wurde von Alan Brace, Dariusz Gatarek und Marek Musiela (vgl. [Brace u.a. \[1997\]](#)) eingeführt und wird aus diesem Grund auch *BGM-Modell* genannt. Der aktuelle Stand ist in [Brigo und Mercurio \[2006\]](#) und [James und Webber \[2001\]](#) zu finden. Die wichtigste Literaturquelle dieses Kapitel ist [Brigo und Mercurio \[2006\]](#), der auch die Notationen folgen.

Die wesentlichste Eigenschaft vom **LIBOR**-Marktmodells für Forward Rates ist der Bezug zu den Bepreisungsformeln von Black für Zinscaps (vgl. Kapitel 3.4). Zinscaps zählen zu einfachen, aber am Zinsmarkt wichtigen Zinsderivaten. Aus diesem Grund sind Zinsstrukturmodelle, die eine marktkonsistente Bewertung dieser Zinsinstrumente ermöglichen, sehr beliebt. Im **LIBOR**-Marktmodell werden unter einem bestimmten  $T_i$ -Forward Measure Zinsraten konstruiert, die unter ihrem Martingalmaß lognormalverteilt sind und auf die Bepreisungsformeln von Black führen.

Die diskrete Forward Rate für das Intervall  $[T_{i-1}, T_i]$  und Tenor  $\tau_i := \tau(T_{i-1}, T_i) = T_i - T_{i-1}$  sei mit  $L_i(t) := L(t; T_{i-1}, T_i)$  bezeichnet und lautet

$$L_i(t) := L(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left( \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right).$$

Daraus folgt die Darstellung

$$1 + \tau_i L_i(t) = P(T_{i-1}, T_i) = \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} \quad (3.25)$$

und es gilt für den Wert einer Nullkuponanleihe für  $t \leq T_k$

$$\begin{aligned} P(T_i, T_k) &= \frac{P(T_i, T_{i+1})}{P(T_i, T_i)} \frac{P(T_i, T_{i+2})}{P(T_i, T_{i+1})} \cdots \frac{P(T_i, T_{k-1})}{P(T_i, T_{k-2})} \frac{P(T_i, T_k)}{P(T_i, T_{k-1})} \\ &= \prod_{j=i+1}^k \frac{P(T_i, T_j)}{P(T_i, T_{j-1})} \stackrel{(3.25)}{=} \prod_{j=i+1}^k \left[ 1 + \tau_j L_j(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Um ein passendes Martingalmaß für die Zinsrate  $L_i(t)$  herzuleiten, sei  $P(T_{i-1}, T_i)$  der dazugehörige Numeraire. Sowohl  $L_i(t)P(T_{i-1}, T_i)$  als auch  $P(T_{i-1}, T_i)$  sind Mar-

tingale. Folglich ist die Zinsrate  $L_i(t)$  nach Formel (3.8) unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$  bezüglich des Numeraires  $P(T_{i-1}, T_i)$

$$L_i(t) = \frac{L_i(t)P(T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} \quad (3.27)$$

ein Martingal. Die Darstellung der mittels  $P(T_{i-1}, T_i)$  diskontierten Zinsrate  $L_i(t)$  bezüglich des Numeraires  $P(T_{i-1}, T_i)$  veranlasst nach Satz 3.1 die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{Q}^{T_i}$ , da  $L_i(t)$  ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$ . Zudem ist  $L_i(t)$  positiv, da in arbitragefreien Zinsmodellen  $P(t, T_{i-1}) > P(t, T_i)$  gilt.

Unter diesen Voraussetzungen kann die Dynamik von  $L_i(t)$  als Diffusion ohne Drift-term dargestellt werden bezüglich der Brownschen Bewegung  $W_t^{\mathbb{Q}^{T_i}}$  unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$ :

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i(t)dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \quad \forall t \in (T_{i-1}, T_i)$$

Diese Voraussetzungen der Zinsrate  $L_i(t)$  unter dem  $T_i$ -Forward Measure entsprechen denen aus dem Black-Modell und es gilt für den Wert eines Caplets im LIBOR-Marktmodell

$$\begin{aligned} Cpl^{LMM}(t; T_{i-1}, T_i, \sigma_i^{LMM}) &= Cpl^{Bl}(t; T_{i-1}, T_i, \sigma_i^{Bl}) \\ &= P(t, T_i)\tau_i[L_i(T_{i-1})\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)]. \end{aligned}$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln \frac{L_i(T_{i-1})}{K} + 0.5(\sigma_i^{Bl})^2 T_{i-1}}{\sigma_i^{Bl} \sqrt{T_{i-1}}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sigma_i^{Bl} \sqrt{T_{i-1}}.$$

Für die Volatilitäten gilt der Zusammenhang

$$\sigma_i^{Bl} = \sigma_i^{LMM} \sqrt{T_{i-1}}, \quad (3.28)$$

wobei  $\sigma_i^{LMM}$  die in  $[T_{i-1}, T_i]$  stückweise konstante Caplet-Volatilitäten nach Brigo und Mercurio [2006] darstellen mit

$$\sigma_i^{LMM} = \sqrt{\frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_i^2(t) dt}. \quad (3.29)$$

Im LIBOR-Marktmodell entsprechen alle Volatilitäten den stückweise konstanten Volatilitäten  $\sigma_i(t) = \sigma_i^{LMM}$ .

Die Zinsraten  $L_i(t)$  sind unter dem jeweiligen  $T_i$ -Forward Measure lognormalverteilt und können durch Formel (3.28) dargestellt werden. Die allgemeine Darstellung der Zinsraten erfolgt unter einem gemeinsamen Maß, dem Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ), und wird an dieser Stelle hergeleitet.  $L_i(t)$  wird unter  $\mathbb{Q}^{T_N}$  durch die stochastische Differentialgleichung

$$dL_i(t) = L_i(t) \left[ \mu(t, T_i) dt + \sigma_i(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_N}} \right]$$

beschrieben. Die Darstellung eines Finanzgutes unter  $\mathbb{Q}^{T_N}$  erfolgt bezüglich des Numeraires  $P(t, T_N)$ . Es gilt

$$L(t; T_i, T_N) = \frac{1}{\tau_i} \left[ \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_N)} - 1 \right]$$

$$dL(t; T_i, T_N) = \frac{1}{\tau_i} d \left[ \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_N)} \right].$$

Um die Martingaleigenschaft zu erfüllen, muss die Dynamik von  $L(t; T_i, T_N)$  driftlos sein. Zu diesem Zweck wird die  $dL(t; T_i, T_N)$  bestimmt und der Driftterm gleich Null gesetzt. Für den Fall, dass  $i < N$ , gilt nach Formel (3.26)

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_N)} = \prod_{j=i}^{N-1} [1 + \tau_j L_j(t)].$$

Nach der Formel (2.3) von Itô für das Produkt mehrerer Itô-Prozesse gilt

$$d \left[ \prod_{j=i}^{N-1} [1 + \tau_j L_j(t)] \right] = \prod_{j=i}^{N-1} [1 + \tau_j L_j(t)] \cdot \underbrace{\sum_{k=i}^{N-1} \left[ \frac{\tau_k dL_k(t)}{1 + \tau_k L_k(t)} + \sum_{l=k+1}^{N-1} \frac{\tau_k dL_k(t)}{1 + \tau_k L_k(t)} \frac{\tau_l dL_l(t)}{1 + \tau_l L_l(t)} \right]}_{\stackrel{!}{=} 0}.$$

Für  $dL_k(t)$  resultiert der Driftterm  $L_k(t)\mu(t, T_k)$  und für  $dL_k(t)dL_l(t)$  der Term  $L_k(t)L_l(t)\sigma_k(t)\sigma_l(t)\rho_{k,l}$ , sodass folgende Gleichung gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \mu(t, T_k) \frac{\tau_k L_k(t)}{1 + \tau_k L_k(t)} + \sum_{l=k+1}^{N-1} \frac{\tau_k L_k(t)}{1 + \tau_k L_k(t)} \frac{\tau_l L_l(t)}{1 + \tau_l L_l(t)} \sigma_k(t) \sigma_l(t) \rho_{k,l}.$$



Daraus folgt die Darstellung von  $\mu(t, T_k)$  unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$  für den Fall  $i < N$ :

$$\mu(t, T_k) = - \sum_{l=k+1}^{N-1} \frac{\tau_l L_l(t)}{1 + \tau_l L_l(t)} \sigma_k(t) \sigma_l(t) \rho_{k,l}$$

Für den Fall, dass  $i > N$ , gilt

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_N)} = \prod_{j=i}^{N-1} \left[ \frac{1}{1 + \tau_j L_j(t)} \right]$$

und analog zum Fall  $i < N$  erhält man

$$\mu(t, T_k) = \sum_{l=N+1}^{k-1} \frac{\tau_l L_l(t)}{1 + \tau_l L_l(t)} \sigma_k(t) \sigma_l(t) \rho_{k,l}.$$

Zusammenfassend gelten folgende Definitionen für die Darstellung der diskreten Zinsraten  $L_k(t)$  im **LIBOR**-Marktmodell.

**Definition 3.19** *Dynamik der  $L_k(t)$  unter dem  $T_i$ -Forward Measure*

Unter der Annahme lognormalverteilter Zinsraten resultiert die allgemeine Darstellung für die Dynamik der diskreten Zinsraten  $L_k(t)$  unter dem  $T_i$ -Forward Measure ( $\mathbb{Q}^{T_i}$ ) für die Fälle  $i < k, i = k, i > k$ :

$$\begin{aligned} i < k, t \leq T_i : \quad & \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = \sigma_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_j(t) \rho_{k,j} dt + \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \\ i = k, t \leq T_{k-1} : \quad & \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \\ i > k, t \leq T_{k-1} : \quad & \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = -\sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_j(t) \rho_{k,j} dt + \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \end{aligned}$$

**Definition 3.20** *Dynamik der  $L_k(t)$  unter dem Terminal Measure*

Unter dem Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ) gilt für die Dynamik der diskreten Zinsraten  $L_k(t)$

$$dL_k(t) = L_k(0) \sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^N \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_j(t) dt + \sigma_k(t) L_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_N}}. \quad (3.30)$$

### 3.10 Baumapproximation des LIBOR-Marktmodells

In diesem Abschnitt wird ein spezieller Algorithmus für das LIBOR-Marktmodell nach Xiao [2011] vorgestellt. Die grundlegende Idee entspricht einer Diskretisierung des stetigen Prozesses aus 3.15 in Form eines Baummodells. Prinzipiell wird eine Methode der Verschiebung des Forwardmaßes eingeführt, um Martingaleigenschaften der diskreten Marktzinsen  $L_i(t)$  herzuleiten und dadurch eine exakte Bepreisung von Finanzinstrumenten zu ermöglichen. Zudem werden spezielle Approximationen für den Driftterm aus 3.30 vorgestellt.

$L_i(t)$  ist ein Martingal unter dem  $T_i$ -Forward Measure und es gilt

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t)dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \quad (3.31)$$

mit der Lösung

$$L_i(t) = L_i(0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW_s^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right\}.$$

Nach Formel (3.29) entsprechen alle Volatilitäten im LIBOR-Marktmodell in den Intervallen  $[T_{i-1}, T_i]$  konstanten Volatilitäten  $\sigma_i = \sigma_i^{LMM}$ . Demzufolge resultiert folgende Lösung der Differentialgleichung aus Formel (3.31)

$$L_i(t) = L_i(0) \exp \left\{ -\frac{\sigma_i^2}{2} t + \sigma_i W_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right\}. \quad (3.32)$$

Eine Möglichkeit, die Markoveigenschaft von  $L_i(t)$  herzuleiten, bietet die Methode der *Verschiebung des Forwardmaßes*. Dabei wird die Brownsche Bewegung  $W_t \sim N(0, t)$  durch Variablensubstitution zu einer zweiten Brownschen Bewegung  $Z_t \sim N(0, t)$  unter demselben  $T_i$ -Forward Measure ( $\mathbb{Q}^{T_i}$ ). Im Folgenden sind die Brownschen Bewegungen unter dem  $T_i$ -Forward Measure  $\mathbb{Q}^{T_i}$  gültig.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i(t)|\mathcal{F}_0] &= L_i(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma_i^2}{2} t + \sigma_i W_t \right\} \exp \left\{ \frac{W_t}{2t} \right\} dt = \\ &= L_i(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(W_t - t\sigma_i)^2}{2t} \right\} dt = \\ &= L_i(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{Z_t^2}{2t} \right\} dt = L_i(0) \end{aligned}$$

Die Variablensubstitution  $Z_t = W_t - t\sigma_i$  verursacht auch eine Verschiebung in der

expliziten Lösungsformel (3.32)

$$L_i(t) = L_i(0) \exp \left\{ -\frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i W_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right\} = L_i(0) \exp \left\{ \frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i Z_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right\}. \quad (3.33)$$

Die Lösung unter dem Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ) kann mithilfe der Formel (3.30) dargestellt werden als

$$\begin{aligned} L_i(t) &= L_i(0) \exp \left\{ \underbrace{-\int_0^t \sum_{j=i+1}^N \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_j \sigma_i dt}_{\mu_i(t)} - \frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i W_t^{\mathbb{Q}^{T_N}} \right\} \\ &= L_i(0) \exp \left\{ \mu_i(t) - \frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i W_t^{\mathbb{Q}^{T_N}} \right\} \\ &\stackrel{(3.33)}{=} L_i(0) \exp \left\{ \mu_i(t) + \frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i Z_t^{\mathbb{Q}^{T_N}} \right\}. \end{aligned}$$

Die Grundidee des Baumalgorithmus von Xiao [2011] besteht darin, die Brownsche Bewegung mit einer Baumstruktur zu diskretisieren und den Driftterm  $\mu_k(t)$  numerisch zu approximieren.

Für die numerische Approximation des Driftterms  $\mu_i(t)$  stellt Xiao [2011] mehrere Methoden vor. Einige davon werden an dieser Stelle vorgestellt.

**Frozen Drift (FD):**

$$\mu_i(t) = -\int_0^t \sum_{j=i+1}^N \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_j \sigma_i dt \approx -\sum_{j=i+1}^N \frac{\tau_j L_j(0)}{1 + \tau_j L_j(0)} \sigma_j \sigma_i t$$

**Arithmetischer Mittelwert der Forward Rates:**

$$\mu_i(t) \approx -\sum_{j=i+1}^N \frac{\tau_j \frac{1}{2}(L_j(0) + L_j(t))}{1 + \tau_j \frac{1}{2}(L_j(0) + L_j(t))} \sigma_j \sigma_i t$$

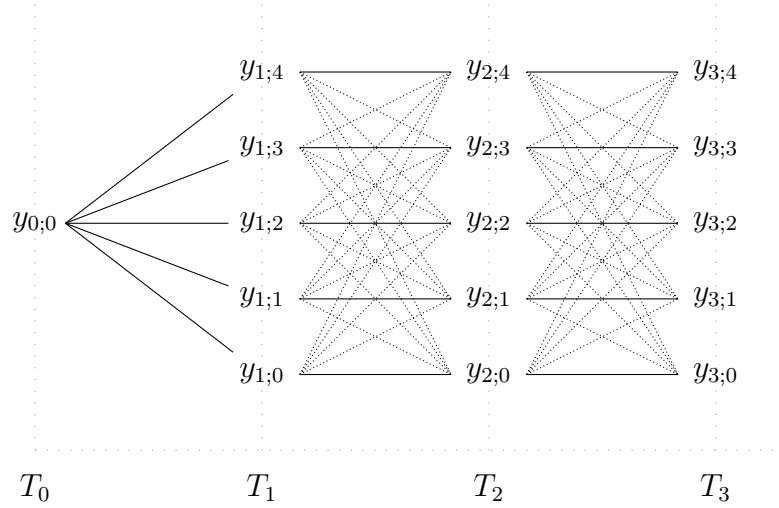


Abbildung 3.5: Baumstruktur nach Xiao [2011]

**Arithmetischer Mittelwert der Driffterme:**

$$\mu_i(t) \approx - \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_j L_j(0)}{1 + \tau_j L_j(0)} + \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \right) \sigma_j \sigma_i t$$

In dieser Arbeit wird der *Frozen Drift* für weitere Berechnungen herangezogen.

Die Baumkonstruktion erfolgt nach Definition 2.11. Es werden zu jedem Zeitpunkt  $T_j$  für  $j = 1, \dots, N$  eine festgelegte Anzahl an Knoten  $S$  gleichmäßig um Null positioniert. Der Abstand zwischen den Knoten wird mit  $\varphi$  bezeichnet. Nach Xiao [2011] kann die Genauigkeit der Bepreisung gewährleistet werden für den Fall, dass  $S \cdot \varphi$  ein Vielfaches der Standardabweichung der Standardnormalverteilung abdeckt. Die Baumknoten werden mit  $y_{t,j}$  bezeichnet. Für  $S = 5$  hat der rekombinierbare Baum die Darstellung aus Abbildung 3.5.

Die gesuchten Forward Rates werden basierend auf dem rekombinierbaren Baum aus Abbildung 3.5 folgendermaßen bestimmt:

$$L_k(k; y_{k;j}) = L_k(0) \exp \left\{ \mu_k(k; y_{k;j}) + \frac{\sigma_k^2}{2} k + \sigma_k y_{k;j} \right\} \quad (3.34)$$

Daraus kann die Darstellung einer Nullkuponanleihe als

$$P(k, T_i; y_{k,j}) = \prod_{j=1}^i \frac{1}{1 + \tau_j L_j(k; y_{k;j})}$$

definiert werden. Resultierend aus der Diskretisierung der Brownschen Bewegung, können die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Baumknoten  $x_{t;i}$  und  $x_{T;j}$  mithilfe der Dichtefunktion einer Normalverteilung angegeben werden als

$$p(x_{t;i}, t; x_{T;j}, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{(x_{T;j} - x_{t;i})^2}{2(T-t)} \right\}. \quad (3.35)$$

Angesichts der Variablensubstitution  $Z_t = W_t - t\sigma$  müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten aus Formel (3.35) angepasst werden. Daraus resultiert

$$p(y_{t;i}, t; y_{T;j}, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{(y_{T;j} - y_{t;i} + \sigma(T)T - \sigma(t)t)^2}{2(T-t)} \right\}. \quad (3.36)$$

Die Bepreisung von Derivaten erfolgt durch Rückwärtsrekursion anhand der Baumstruktur aus Abbildung 3.5 und wird im nächsten Kapitel anhand eines Zinscaps illustriert.

### 3.10.1 Bepreisung eines Zinscaps

Der Algorithmus von Xiao [2011] wird an dieser Stelle am Beispiel der Bepreisung eines Zinscaps veranschaulicht. Zu diesem Zweck werden erneut die Marktdaten aus Tabelle 3.2 herangezogen, um die Vergleichbarkeit zu den bereits durchgeführten Berechnungen herzustellen. Im vorgestellten LIBOR-Marktmodell werden die Capletvolatilitäten  $\sigma^{LMM}(T_i)$  verwendet. Die Markt-Volatilitäten  $\sigma^{Cap}(T_i)$  werden erneut zur Berechnung der Capletpreise nach den Formeln von Black benötigt. Im LIBOR-Marktmodell erfolgt die Modellierung der Marktzinsraten  $L_i(t)$  in den Intervallen  $[T_{i-1}, T_i]$ , weshalb zur Umrechnung der Volatilität die Formel (3.29) herangezogen wird. Die Forward Rates  $L_i(0)$  wurden nach Formel (3.13) bestimmt. Tabelle 3.6 beinhaltet die Marktdaten, die Forward Rates  $L_i(0)$  sowie die Caplet-Volatilitäten.

Laufzeit	Marktdaten 22.2.2013		Forward Rates	Volatilitäten
$T_i$	$y(0, T_i)$	$\sigma^{Cap}(T_i)$	$L_i(0)$	$\sigma_i^{LMM}$
1	0.0027	29.3%	0.0027	29.3%
2	0.0039	42.5%	0.0051	30.1%
3	0.0071	53.4%	0.0135	30.8%
4	0.0088	59.6%	0.0139	29.8%
5	0.0107	64.8%	0.0183	29.0%
6	0.0126	69.0%	0.0222	28.2%
7	0.0144	71.7%	0.0253	27.1%
8	0.0160	73.1%	0.0273	25.8%
9	0.0175	73.7%	0.0296	24.6%

Tabelle 3.6: Marktdaten für das LIBOR-Baummodell nach Xiao [2011]

Für die Konstruktion des Baummodells wird die Brownsche Bewegung diskretisiert. Zu diesem Zweck wird eine einheitliche Anzahl an Zuständen mit  $S$  für jeden Zeitpunkt  $k$  festgelegt mit Knotenabstand  $\varphi = 0.5$ . Die Baumdarstellung hat für  $S = 5$  die Darstellung aus Abbildung 3.6.

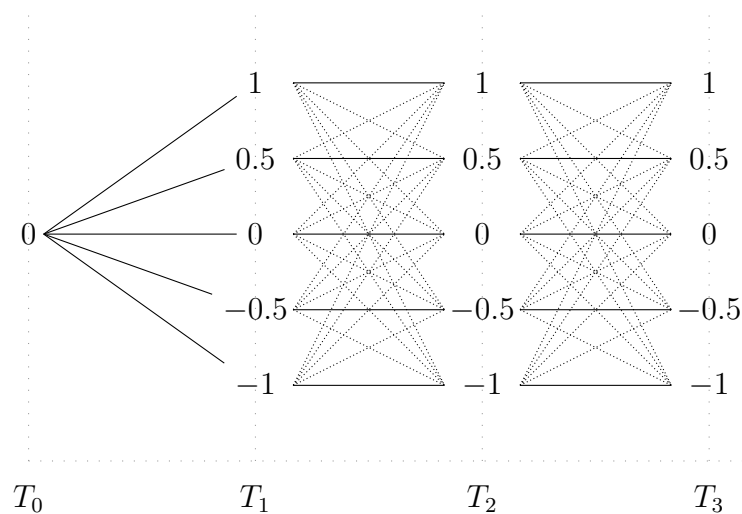


Abbildung 3.6: Baumstruktur nach Xiao [2011]

Unter Anwendung des Frozen Drifts für die Diskretisierung des Driftterms resultieren, basierend auf der Baumstruktur aus Abbildung 3.6, die Zinsraten  $L_i(k, y_{k;j})$  in Abbildung 3.7.

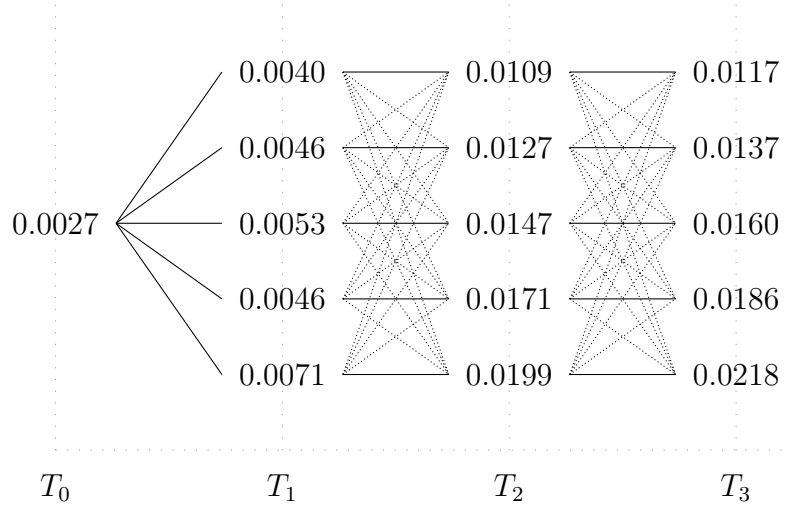


Abbildung 3.7: Forward Rates nach Xiao [2011]

Für die Berechnung der Caplets sei ein einheitlicher Ausübungspreis  $K$  mit  $K = 0.002$  festgelegt. Beginnend beim letzten Zeitpunkt  $N$  sei die Auszahlungsfunktion gegeben als

$$Z(y_{N;j}, K) = (L_i(N, y_{N;j}) - K)^+ \quad \text{für } 0 \leq j \leq S - 1.$$

Da der Ausübungspreis  $K$  in weiterer Folge konstant bleibt, wird für die Auszahlungsfunktion die Notation  $Z(y_{k;j}) := Z(y_{k;j}, K)$  festgelegt. Die Ein-Schritt-Rückwärtsrekursion für die Bepreisung des Caplets lautet

$$\forall k = T_0, \dots, T_N, \quad j = 0, \dots, S - 1$$

$$Z(y_{k;j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_{k+1} - T_k)}} \int Z(Y) \underbrace{\exp \left\{ -\frac{(Y - y_{k;j} + \sigma_{k+1}T_{k+1} - \sigma_k T_k)^2}{2(T_{k+1} - T_k)} \right\}}_{=: E(Y)} dY.$$

Für die Approximation des Integrals wird in diesem Beispiel die Trapezregel verwendet. Demnach gilt für den Wert eines Caplets im Knoten  $y_{k;j}$

$$\begin{aligned} Z(y_{k;j}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_{k+1} - T_k)}} \int Z(Y) E(Y) dY \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_{k+1} - T_k)}} \frac{\varphi}{2} \sum_{i=1}^{S-1} \left[ Z(y_{k+1;i}) E(y_{k+1;i}) + Z(y_{k+1;i-1}) E(y_{k+1;i-1}) \right]. \end{aligned}$$

Der Capletpreis zum Zeitpunkt  $T_0$  ist in  $Z(y_{0;0})$  enthalten und berechnet sich als

$$\begin{aligned} Cpl^{LMM}(0, K) &:= P(0, T_N)Z(y_{0;0}) \\ &= P(0, T_N)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T_1)}}\frac{\varphi}{2}\sum_{i=1}^{S-1}\left[Z(y_{1;i})E(y_{1;i}) + Z(y_{1;i-1})E(y_{1;i-1})\right] \\ &= P(0, T_N)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T_1)}}\frac{\varphi}{2}\sum_{i=1}^{S-1}\left[Z(y_{1;i})\exp\left\{-\frac{(y_{1;i} + \sigma_1 T_1)^2}{2(T_1)}\right\}\right. \\ &\quad \left.+ Z(y_{1;i-1})\exp\left\{-\frac{(y_{1;i-1} + \sigma_1 T_1)^2}{2(T_1)}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Tabelle 3.7 beinhaltet die Capletpreise nach Xiao [2011] und Black.

Laufzeit	Capletpreise zu $t = 0$	
	$Cpl^{LMM}(0, K = 0.002)$	$Cpl^{Bl}(L_i(0), 0, K = 0.002)$
$T_1$		
1	0.000700	0.000752
2	0.003075	0.003125
3	0.011204	0.011319
4	0.011626	0.011623
5	0.015646	0.015678
6	0.018912	0.018978
7	0.021458	0.021428
8	0.022849	0.022719
9	0.024205	0.024117

Tabelle 3.7: Caplets nach LIBOR-Marktmodell

Es lässt sich feststellen, dass die Capletpreise nach dem Algorithmus von Xiao [2011] besser mit den mittels der Formel von Black berechneten Preisen übereinstimmen als im BDT-Modell. Wenn die Caplets für alle Fälligkeiten  $T_i$  bewertet wurden und zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt sind, lässt sich der Preis eines Zinscaps zum Zeitpunkt  $T_0$  ebenfalls ermitteln aus

$$Cap^{LMM}(0, K) := \sum_{\text{Laufzeiten}} Cpl^{LMM}(0, K).$$



Laufzeit	Cappreise zu $t = 0$	
	$Cap^{LMM}(0, K = 0.002)$	$Cap^{Bl}(0, K = 0.002)$
$T_i$		
1	0.000700	0.000752
2	0.003775	0.003876
3	0.014979	0.015196
4	0.026606	0.026818
5	0.042252	0.042496
6	0.061163	0.061474
7	0.082621	0.082902
8	0.105470	0.105621
9	0.129675	0.129738

Tabelle 3.8: Caps nach **LIBOR**-Marktmodell

Bei den Preisen der Zinscaps aus Tabelle 3.8 ist erneut die bessere Übereinstimmung bei den Formeln von Black als im **BDT**-Modell zu beobachten. Die Toleranzgrenze zwischen den beiden Berechnungsmethoden liegt bei 0.8%.

**Bemerkung 3.1** *Im diskreten **LIBOR**-Marktmodell von Xiao [2011] wird die Genauigkeit der Ergebnisse von verschiedenen Punkten beeinflusst. Die gesuchten Forward Rates  $L_i(t)$  basieren in erster Linie auf der festgelegten Baumstruktur, die zu jedem Zeitpunkt in Form einer Knotenmenge  $S$  und dem Knotenabstand  $\varphi$  gegeben ist. Ebenfalls großen Einfluss auf die Berechnung der  $L_i(t)$  hat die gewählte Diskretisierung des Driftterms  $\mu_i(t)$ . Ausschlaggebend für die Bepreisung ist auch die Approximation des Integrals bei der Rückwärtsrekursion.*

## 4 Sterblichkeitsmodelle

Für die Modellierung von Überlebens- oder Sterbewahrscheinlichkeiten gibt es mehrere Ansätze. In dieser Arbeit wird der Ansatz der risikolosen, finanzmathematischen Bewertung herangezogen. Dieses Thema wurde von David Blake, Andrew Cairns and Kevin Dowd in den Arbeiten [Blake u a. \[2006\]](#), [Blake u a. \[2008\]](#) und [Cairns \[2007\]](#) behandelt. Die Arbeit [Blake u a. \[2006\]](#) bildet die wichtigste Literaturquelle dieses Kapitels.

Die Sterblichkeitsentwicklung weist laut [Austria \[2012\]](#) seit Beginn des 19. Jahrhunderts kontinuierlich Veränderungen auf. Für alle Altersgruppen ist eine allgemeine Verbesserung der Überlebensrate erkennbar, wobei dieser Effekt für bestimmte Altersgruppen besser ausfällt (vgl. [Blake u a. \[2006\]](#)). Diese Entwicklung wird in [Abbildung \(4.1\)](#) veranschaulicht. Diese Abbildung zeigt eine graphische Darstellung der Sterbetafeln für die österreichische Bevölkerung seit dem Jahr 1868, basierend auf Volkszählungen. Man kann deutlich erkennen, dass für die Altersgruppe der 40-60-Jährigen eine stärkere Verbesserung der Überlebensraten eingetreten ist als für die Altersgruppe der 80-Jährigen. Diese Entwicklung ist vorrangig auf den medizinischen Fortschritt und die allgemein verbesserten Lebensumstände im europäischen Raum zurückzuführen. Eine genaue Analyse der Sterblichkeitsstatistiken zeigt ebenfalls lokale Schwankungen auf, die ein paar Jahre andauern und auf politische oder epidemiologische Ursachen zurückzuführen sind.

Die statistische Erfassung von Sterblichkeitsdaten erfolgt jährlich anhand einer Referenzpopulation  $N(t, x)$  für  $t \in \mathbb{N}$ . Dabei werden zum Zeitpunkt  $t = 0$  folgende Annahmen getroffen:

- zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien 100.000 lebende Individuen erfasst, die die Gesamtpopulation repräsentieren und
- alle Populationsmitglieder haben das Alter  $x$ , somit gilt:  $N(0, x) = 100.000$ .

Zum Zeitpunkt  $t > 0$  seien  $N(t, x)$  Populationsmitglieder am Leben mit Alter

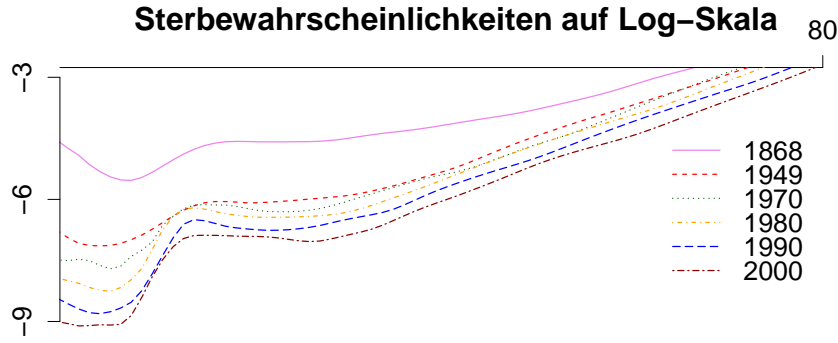


Abbildung 4.1: Ausgewählte Sterbetafeln für Männer von 1868 bis 2000, Quelle: [Austria \[2012\]](#)

$x+t$ . Dies ermöglicht eine einfache Berechnung diskreter Sterblichkeitsraten  $m(t, x)$  anhand dieser Referenzpopulation in Form von

$$m(t, x) = \frac{N(0, x) - N(t, x)}{N(0, x)} = 1 - \frac{N(t, x)}{N(0, x)}.$$

Für die mathematische Modellierung von Sterblichkeiten stellt  $m(t, x)$  eine erste Approximation der Sterbewahrscheinlichkeit  $q(t, x)$  dar. Die Sterbewahrscheinlichkeit steht in direktem Zusammenhang zur komplementären Sterbewahrscheinlichkeit  $p(t, x)$  und zur Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$ . Die Sterblichkeitsintensität gilt als wichtige Bezugsgröße, deren stochastische Modellierung (mit Ausnahme des Kapitels 4.6) ein zentrales Thema dieser Arbeit darstellt.

Es gilt der Zusammenhang zwischen  $q(t, x)$ ,  $p(t, x)$  und  $\mu(t, x)$

$$\mu(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \ln p(t, x), \quad (4.1)$$

$$q(t, x) = 1 - p(t, x) = 1 - \exp \left\{ \int_t^{t+1} \mu(u, x - t + u) du \right\}. \quad (4.2)$$

Der Begriff *Sterblichkeitsmodelle* umfasst allgemein die Modellierung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Größen, die repräsentativ für Sterblichkeiten sind. In den folgenden Kapiteln werden Größen für die Sterblichkeitsmodellierung eingeführt und es wird auf verschiedene Sterblichkeitsmodelle näher eingegangen. Vorab wird in Kapitel 4.1 das behandelte Sterblichkeitsrisiko definiert. In Kapitel 4.2 werden die nötigen Modellgrößen eingeführt. In Kapitel 4.3 wird die Modellierung von Sterblichkeitsgrößen unter dem Framework der Short-Rate Modelle demon-

striert. Ein spezielles Short-Rate Modell mit Baumapproximation wird in Kapitel 4.4 vorgestellt. In Kapitel 4.6 werden Marktmodelle im Sinne der Sterblichkeitsmodellierung behandelt.

Bei der Konstruktion von Sterblichkeitsmodellen steht man vor der Problematik ungewisser, zukünftiger, sozioökonomischer, politischer und wissenschaftlicher Entwicklungen. Beispielhaft dafür kann einerseits zweifellos davon ausgegangen werden, dass Verbesserungen der Überlebensraten infolge medizinischer Fortschritte eintreten werden, andererseits können deren konkrete Auswirkungen nicht eindeutig prognostiziert werden. Diese unsicheren Entwicklungen und zufälligen Schwankungen motivieren die stochastische Modellierung der Sterblichkeitsdynamik.

Bevor auf die konkreten Modelle zur Sterblichkeitsmodellierung näher eingegangen wird, ist es notwendig, an dieser Stelle den Begriff des *Sterblichkeitsrisikos* zu definieren und gegebenenfalls nach [Wetzel \[2011\]](#) aufzusplitten.

## 4.1 Das Sterblichkeitsrisiko

Das Sterblichkeitsrisiko bezeichnet die zufällige Abweichung zukünftiger Sterblichkeitswerte von kalkulierten Rechnungsgrundlagen. Für Lebensversicherungen stellt dies eine wichtige Risikoquelle dar, die unmittelbaren Einfluss auf die aktuarielle Berechnung versicherungstechnischer Prämien und Reserven ausübt. Diese Tatsache verstärkt die Wichtigkeit einer konsistenten Modellierung und exakten Bepreisung von Derivaten basierend auf Sterblichkeitsgrößen.

Abweichungen zwischen modellierten und tatsächlichen Sterblichkeitswerten können in zwei Risikoklassen unterteilt werden (vgl. [Wetzel \[2011\]](#) und [Blake u a. \[2006\]](#)):

### „Small Sample Risk“:

Diese Risikogruppe umfasst *zufällige unsystematische Schwankungen*, die in den meisten Fällen einen oder mehrere spezifische Jahrgänge betreffen. Die Schwankungen treten zeitlich beschränkt auf und deuten auf keine systematischen zugrundeliegenden Ursachen hin. Für hinreichend große Populationen verschwindet dieses Risiko gänzlich nach dem Gesetz der großen Zahlen.

**Prozess- oder Vorhersagerisiko:**

Dieses Risiko verursacht systematisch Abweichungen für alle Jahrgänge und wird aus diesem Grund als *systematisches Sterblichkeitsrisiko* bezeichnet. Die Ursache dieser Abweichungen können zum Beispiel ungeeignete Modelle oder falsche Parameterschätzungen sein.

In dieser Arbeit wird die Annahme getroffen, dass das Versicherungsunternehmen ausreichend Versicherungspolizzen im Bestand hat, sodass das *Small Sample Risiko* durch Diversifikation verschwindet und die ausschließliche Bewertung des systematischen Risikos im Vordergrund steht. Das systematische Risiko kann sich in Form einer kurzzeitigen Erhöhung der Sterblichkeitsraten (*Short-Term-* oder *Katastrophenrisiko*) oder einer langfristigen Reduzierung der Sterblichkeitsraten (zum Beispiel für hohe Alter) äußern. Die folgende Grafik fasst die Risikoklasseneinteilung zusammen:

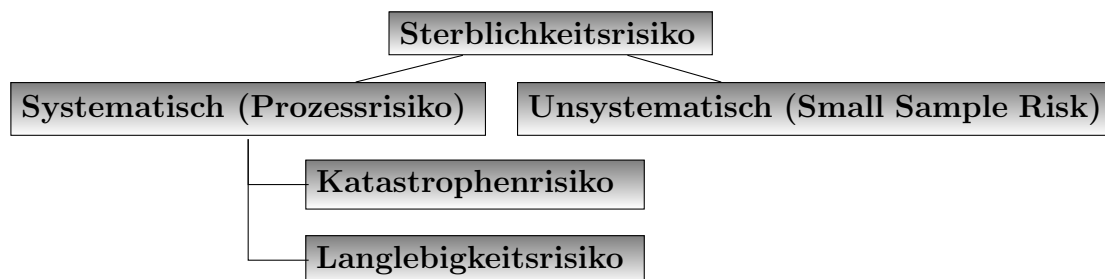


Abbildung 4.2: Gliederung des Sterblichkeitsrisikos

## 4.2 Modellierung der Sterblichkeit

Für die Modellierung der Sterblichkeit werden Gemeinsamkeiten mit Zinsgrößen wie der Short-Rate oder der Forward-Rate hervorgehoben, um bei der Konstruktion der Sterblichkeitsmodelle auf bekannte Modellansätze für Zinsstrukturen aus der Finanzmathematik zurückzugreifen.

Sowohl die Sterblichkeitsdynamik als auch die Zinsdynamik zeigen eine stochastische Entwicklung auf und können durch positive Prozesse in Form von stochastischen Differentialgleichungen nach Formel (2.1) beschrieben werden. Um einen arbitragefreien Markt zu gewährleisten, ist es nötig, das Sterblichkeitsrisiko unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  zu bepreisen. Dabei wird nach [Blake u.a. \[2006\]](#) die

Annahme getroffen, dass durch Diversifikation kein *Small Sample Risiko* besteht. Zum Zeitpunkt  $t$  sei die Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, y)$  ein beobachtbarer Prozess und generiere die Filtration  $\mathcal{M}_t$ . Die Filtration  $\mathcal{M}_t$  enthält somit Informationen über die Dynamik der Sterblichkeit und nicht über die genaue Anzahl der gestorbenen Individuen einer Gesamtpopulation (vgl. Blake u a. [2006]). Sei  $\mathcal{M}_t^*$  in weiterer Folge die *augmentierte Filtration* mit der zusätzlichen Information über die Anzahl der Todesfälle zum Zeitpunkt  $t$ . Die Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, y)$  repräsentiert im Sinne der Sterblichkeitsmodellierung die mathematisch äquivalente Größe zur Short Rate  $r_t$  aus dem Framework der Zinsstrukturmodellierung.

Eine grundlegende Größe für die Sterblichkeitsmodellierung stellt der *Survivor Index*  $S(t, y)$  dar. Diese Zufallsvariable beschreibt den Anteil einer Gesamtpopulation, der zum Zeitpunkt  $t$  mit Alter  $y + t$  noch lebt, und wird im Folgenden den Basiswert eines Sterblichkeitsbonds verkörpern. Der Survivor Index  $S(t, y)$  wird bei gegebener Entwicklung von  $\mu(t, y)$  durch

$$S(t, y) = \exp \left\{ - \int_0^t \mu(u, y + u) du \right\}$$

bestimmt und verkörpert ein Maß für die Sterblichkeitsrate einer Gesamtpopulation. Sei mit  $I_i(t)$  die Indikatorfunktion für das  $i$ -te Populationsmitglied zum Zeitpunkt  $t$  folgendermaßen festgelegt:

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn Individuum } i \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ lebt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3)$$

Anhand  $I_i(t)$  kann die Überlebenswahrscheinlichkeit  $p(0, u, x)$  eines  $x$ -jährigen Individuums für das Zeitintervall  $[0, u]$  bestimmt werden als folgender Erwartungswert bezüglich der Filtration  $\mathcal{M}_u$  mit

$$p(0, u, x) = \mathbb{E}[I_i(u) = 1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_i(u) = 1 | \mathcal{M}_u]] = \mathbb{E}[S(u, x)].$$

Für ein  $t < u$  gilt

$$p(t, u, x) = \mathbb{E}[I_i(u) = 1 | I_i(t) = 1, \mathcal{M}_t] = \mathbb{E} \left[ \frac{S(u, x)}{S(t, x)} \middle| \mathcal{M}_t \right].$$

Ein fundamentales Derivat der Sterblichkeitsmodellierung ist der *Sterblichkeitsbonds* oder *(T,x)-Bonds* (vgl. *Indexgebundene Sterblichkeits-Nullkuponanleihe* aus Blake u a. [2006]).

**Definition 4.1**  $(T,x)$ -Bonds

Eine  $(T,x)$ -Bonds oder Sterblichkeitsbonds ist ein Vertrag, der zum Zeitpunkt  $t$  abgeschlossen wird und zum Zeitpunkt  $T$  für ein Referenzalter  $x$  den Betrag  $S(T,x)$  ausbezahlt. Ein  $(T,x)$ -Bonds wird mit  $B(t,T,x) \forall t : 0 \leq t \leq T$  und  $\forall x \in \mathbb{N}^+$  bezeichnet und lautet

$$B(t,T,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(T,x)|\mathcal{M}_t].$$

Sei  $\mathcal{D}_t$  die kombinierte Filtration aus  $\mathcal{F}_t$  und  $\mathcal{M}_t$ . Der diskontierte Wert eines  $(T,x)$ -Bonds  $\forall t : 0 \leq t \leq T$  und  $\forall x \in \mathbb{N}$  wird mit  $\tilde{B}(t,T,x)$  bezeichnet und lautet

$$\tilde{B}(t,T,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(T)} S(T,x) \middle| \mathcal{D}_t \right].$$

Der diskontierte  $(T,x)$ -Bonds  $\tilde{B}(t,T,x)$  repräsentiert ein wichtiges Derivat auf Sterblichkeiten. Für das Geldmarktkonto  $C(t)$  aus Kapitel 3.1 als Numeraire sind der T-Bond und der  $(T,x)$ -Bonds Martingale unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  mit

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(T)} \middle| \mathcal{D}_t \right], \\ \tilde{B}(t,T,x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(T)} S(T,x) \middle| \mathcal{D}_t \right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Für weitere Schritte wird folgende Annahme getroffen:

**Annahme 4.1** *Unabhängigkeit der Sterblichkeits- und Zinsstruktur (vgl. Parker [1997] S.57)*

Die Dynamiken der Sterblichkeitsstruktur und der Zinsstruktur entwickeln sich unabhängig voneinander.

Unter Annahme 4.1 ist es möglich, das Sterblichkeitsrisiko vom Zinsrisiko bei der Bepreisung eines  $(T,x)$ -Bonds zu trennen in Form von

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t,T,x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(T,x)|\mathcal{M}_t] \\ &= P(t,T)B(t,T,x). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da  $\tilde{B}(t,T,x)$  und  $P(t,T)$  bereits Martingale unter  $\mathbb{Q}$  sind, muss folglich  $B(t,T,x)$  ebenfalls ein Martingal unter  $\mathbb{Q}$  sein.

Die Entwicklung der Sterblichkeitsintensität  $\mu(u, x + u)$  für  $0 < u < t$  kann ausgedrückt werden als

$$B(t, t, x) = S(t, x) = \exp \left\{ - \int_0^t \mu(u, x + u) du \right\}.$$

Die risikoneutrale Spot-Überlebenswahrscheinlichkeit  $p^{\mathbb{Q}}(t, T, x)$  ist gegeben als

$$p^{\mathbb{Q}}(t, T, x) := \frac{B(t, T, x)}{B(t, t, x)} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S(T, x)}{S(t, x)} \middle| \mathcal{M}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T \mu(u, x + u) du \right\} \middle| \mathcal{M}_t \right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}[I_i(u) = 1 | I_i(t) = 1, \mathcal{M}_u] = \frac{S(u, x)}{S(t, x)}.$$

Anhand dieser Kenntnisse lassen sich wichtige Modellgrößen für Sterblichkeitsmodelle definieren:

**Spot-Überlebensrate:**

Die kurzfristige Spot-Überlebensrate lässt sich aus der Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  für eine x-jährige Person zum Zeitpunkt  $t$  bestimmen als

$$p^{\mathbb{Q}}(t, T, x) = \frac{B(t, T, x)}{B(t, t, x)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T \mu(u, x + u) du \right\} \middle| \mathcal{M}_t \right].$$

Die Überlebensrate unter  $\mathbb{Q}$  kann aus mathematischer Sicht im Framework der Sterblichkeitsmodellierung dem Wert einer **NKA** der Zinsstrukturmodellierung gleichgesetzt werden.

Analog zu den infinitesimalen Sterblichkeitsgrößen  $p^{\mathbb{Q}}(t, T, x)$  und  $\mu(t, x)$  lassen sich durch Hinzunahme eines Zeitparameters Forward-Größen definieren. Für die Zeitpunkte  $0 \leq t \leq S \leq T$  gelten die Definitionen:



**Forward-Sterblichkeitsintensität:**

Die Forward-Rates der Sterblichkeitsintensität lauten

$$\bar{\mu}(t, T, x + T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t, T, x)$$

Für die kurzfristige Spot-Sterblichkeitsintensität für eine  $x$ -jährige Person zum Zeitpunkt  $t$  gilt der Zusammenhang

$$\lim_{T \rightarrow t} \bar{\mu}(t, T, x + T) = \mu(t, x + t).$$

**Forward-Überlebensrate:**

Die Wahrscheinlichkeit eines zum Zeitpunkt  $t$   $x + t$ -jährigen, das zukünftige Zeitintervall  $[S, T] : 0 \leq t \leq S \leq T$  zu überleben, wird nach Formel (4.7) bestimmt und als Forward-Überlebensrate  $p^{\mathbb{Q}}(t, S, T, x)$  bezeichnet mit der Darstellung

$$\begin{aligned} p^{\mathbb{Q}}(t, S, T, x) &:= \frac{B(t, T, x)}{B(t, S, x)} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S(T, x)}{S(S, x)} \middle| \mathcal{M}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_S^T \bar{\mu}(t, u, x + u) du \right\} \middle| \mathcal{M}_t \right]. \end{aligned}$$

Basierend auf den verschiedenen Methoden für die Modellierung von Zinsstrukturmodellen, lassen sich die wichtigsten Frameworks für Sterblichkeitsmodelle zusammenfassen als

- a) Short-Rate Modelle, für die Modellierung der Spot-Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  (Kapitel 4.3),
- b) Forward-Rate Modelle, für die Modellierung von  $\bar{\mu}(t, T, x + T)$  nach Heath-Jarrow-Morton (vgl. Brace u a. [1997]) und
- c) Marktmodelle, für die Sterblichkeitsmodellierung nach Brace u a. [1997] und Blake u a. [2006] (siehe Kapitel 4.6).

In dieser Arbeit werden Short-Rate-Modelle und Marktmodelle zur Modellierung von Sterblichkeitsdynamiken vorgestellt.

### 4.3 Short Rate Modelle für Sterblichkeiten

Ähnlich zu Zinsstrukturmodellen wurde bei der Modellierung von Sterblichkeiten großteils unter dem Framework für Short-Rate Modelle gearbeitet. Dabei wird die Dynamik der Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, y)$  durch die stochastische Differentialgleichung

$$d\mu(t, y) = a(t, y)dt + b(t, y)dW_t^{\mathbb{Q}}$$

angegeben. Die Funktionen  $a(t, y)$  und  $b(t, y)$  sind deterministisch.

Dieses Framework umfasst auch die Gruppe der *Gompertzmodelle*. Diese Modelle haben ihren Ursprung im frühen 19. Jahrhundert, als die ersten Ansätze der Sterblichkeitsmodellierung mittels Exponentialfunktionen gemacht wurden. [Carriere \[1994\]](#) stellt ein konkretes exponentielles Wachstumsmodell für die Sterblichkeitsentwicklung vor. In dieser Arbeit wird das stochastische Exponentialmodell von [Milevsky und Promislow \[2001\]](#) und eine passende Baumapproximation vorgestellt.

### 4.4 Das Mean-Reverting-Brownian-Gompertz (MRBG) Modell

Die altersabhängigen Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p(t, x)$  für ein Zeitintervall  $[t, T]$  können für alle Zeitpunkte  $t \in \mathbb{R}^+$  und in Abhängigkeit von der Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  nach Formel (4.2) berechnet werden. Es gilt folgender Zusammenhang

$$p(t, x) = \exp \left\{ \int_t^{t+1} \mu(u, x - t + u) du \right\}. \quad (4.8)$$

Die Modellierung der Überlebenswahrscheinlichkeiten hängt somit direkt von der Dynamik der Sterblichkeitsintensität ab. In diesem Abschnitt wird ein spezieller Exponentialansatz zur Modellierung von  $\mu(t, x)$  nach [Milevsky und Promislow \[2001\]](#) vorgestellt. Dabei wird die Dynamik der Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  als Exponential eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses  $Y_t$  (vgl. Kapitel 2.5) modelliert in

Form von

$$\mu(t, x) = \mu(0, x) \exp\{gt + \sigma^{(1)}Y_t\} \quad \text{mit } g, \sigma^{(1)}, \mu(0, x) > 0. \quad (4.9)$$

mit der allgemeinen Darstellung für  $Y_t$  aus Formel (2.8)

$$dY_t = b(\theta - Y_t)dt + \sigma^{(2)}dB_t \quad \text{mit } Y_0 = 0$$

Milevsky und Promislow [2001] setzen als Mean-Reversion Level  $\theta = 0$  und  $\sigma^{(2)} = 1$  und erhalten die Gleichung

$$dY_t = -bY_tdt + dB_t \quad \text{mit } Y_0 = 0, b \geq 0.$$

Der Prozess wird tendenziell gegen 0 streben und initiiert folglich exponentiell in  $t$  wachsende Werte für die Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$ . Die Geschwindigkeit der Mean-Reversion wird durch die festgelegte Konstante  $b$  bestimmt.

Der Prozess  $Y_t$  ist laut Kapitel 2.5 normalverteilt mit

$$Y_t \sim N\left(0, \frac{1}{2b}(1 - e^{-2bt})\right)$$

und für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch normalverteilt mit  $Y_t \sim N(0, 1/2b)$ . Daraus folgt, dass der Prozess der Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  log-normalverteilt ist bzw.  $\ln(\mu(t, x))$  normalverteilt ist mit

$$\ln \mu(t, x) \sim N\left(\ln(gt) + \ln(\mu_0), \frac{1}{2b}(1 - e^{-2bt})\right)$$

Die nicht-zentrierten Momente der Ordnung  $n$  können nach Milevsky und Promislow [2001] bestimmt werden als

$$\mathbb{E}[\mu^n(t, x)] = \mathbb{E}[\mu(0, x) \exp\{gt + \sigma Y_t\}] = \mu^n(0, x) \exp\{ngt\} \mathbb{E}[\exp\{n\sigma Y_t\}].$$

Somit ergibt sich folgende allgemeine Form für die Sterblichkeitsintensität

$$\mathbb{E}[\mu^n(t, x)] = \mu^n(0, x) \exp\{ngt\} \exp\left\{\frac{(n\sigma)^2}{2} \frac{1 - e^{-2bt}}{2b}\right\}$$

und speziell für das erste Moment mit  $n = 1$

$$\mathbb{E}[\mu(t, x)] = \mu(0, x) \exp\left\{gt + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1 - e^{-2bt}}{2b}\right)\right\}.$$

## 4.5 Baumapproximation des MRBG-Modells

An dieser Stelle soll eine geeignete Baumapproximation für die Wahrscheinlichkeiten aus Formel (4.2) gefunden werden. Die Sterblichkeitsintensität  $\mu(t, x)$  wird in Form eines Baummodells konstruiert. Daraus können die gesuchten Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p(t, x)$  direkt abgeleitet werden. In Kapitel 2.5.1 wurde bereits eine geeignete Baumapproximation für den verallgemeinerten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess vorgestellt. In diesem Abschnitt wird dieser Binomialprozess zur Diskretisierung und Approximation des stochastischen Prozesses  $Y_t$  herangezogen. Für die Bestimmung der diskreten Sterblichkeitsintensität und Überlebenswahrscheinlichkeiten werden die Formeln (4.9) und (4.2) komponentenweise angewandt.

Im Binomialmodell von Ornstein-Uhlenbeck (siehe Kapitel 2.5) wird im Mean-Reverting-Brownian-Gompertz-Prozess  $\sigma^{(2)} \equiv 1$  gesetzt, sodass die Darstellung

$$y_{T_{i+1}} = \begin{cases} y_{T_i} + \sqrt{h}, & 0 \leq p^u \leq 1 \\ y_{T_i} - \sqrt{h}, & 0 \leq p^d \leq 1 \end{cases}$$

mit

$$p_h^u = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{-bY_t\sqrt{h}}{2} & \text{für } 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{-bY_t\sqrt{h}}{2} \leq 1 \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} + \frac{-bY_t\sqrt{h}}{2} < 0 \\ 1 & \text{für } 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{-bY_t\sqrt{h}}{2} \end{cases}$$

$$p_h^d = 1 - p_h^u$$

resultiert. Die tabellarische und grafische Veranschaulichung dieses Baummodells zur Approximation der Sterblichkeitsstruktur ist in Abbildung (4.3) ersichtlich.

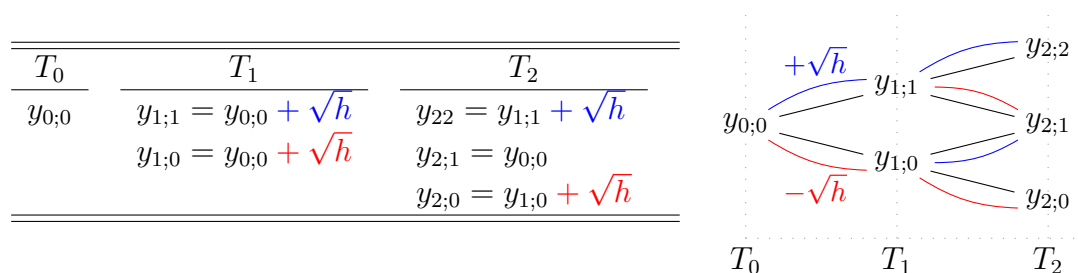


Abbildung 4.3: Baumstruktur im MRBG-Modell für zwei Perioden

Die Anwendung von Formel (4.8) und (4.9) führt auf die Baummodelle der Sterblichkeitsintensitäten und Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten, wie in Abbildung 4.4 grafisch dargestellt.

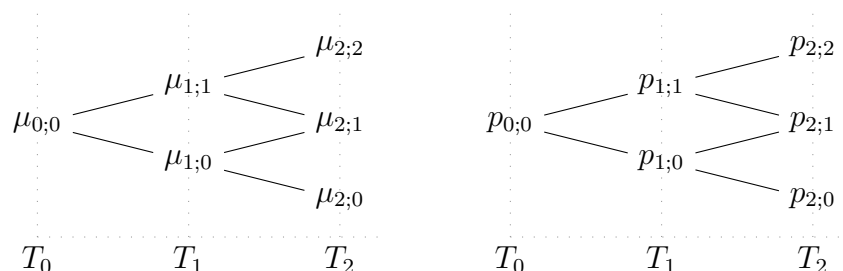


Abbildung 4.4: Baumstruktur im MRBG-Modell für zwei Perioden für Sterblichkeitsintensitäten und Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten

Analog zum Short Rate Zinsstrukturmodell sei die Anzahl der möglichen Pfade von Ursprungsknoten  $p_{0;0}$  bis zum letzten Level a priori bekannt und mit  $J_\gamma, \gamma = 1, \dots, 2^{N-1}$  bezeichnet. Die mehrjährige pfadabhängige Überlebenswahrscheinlichkeit sei als  $p^{J_\gamma}(0, n)$  festgelegt und berechnet sich folgendermaßen:

$$p^{J_\gamma}(0, N) = \prod_{i=0}^{N-1} p_{i, i+J_\gamma(i)}$$

Die N-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit  $\tilde{p}(0, N)$  kann durch die Erwartungswertbildung berechnet werden:

$$\tilde{p}(0, N) = \mathbb{E}[p(0, N)] = \sum_{\gamma=1}^{2^{N-1}} P(I_\gamma) p(0, N) = \sum_{\gamma=1}^{2^{N-1}} P(I_\gamma) \prod_{i=0}^{N-1} p_{i, i+J_\gamma(i)} \quad (4.10)$$

Es gilt  $P(I_\gamma) = (p^u)^{\hat{u}(I_\gamma)} \cdot (p^d)^{N-1-\hat{u}(I_\gamma)}$ .

### 4.5.1 Beispielrechnung

Um die Vorgehensweise des Baummodells für den MRBG-Prozess zu illustrieren, wird in diesem Abschnitt ein Cap auf Sterblichkeiten berechnet. Da der MRBG-Prozess auf einem diskreten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess basiert, ist für dessen Diskretisierung ein Startwert  $Y_0$  und der Parameter  $b_Y$  nötig.  $Y_0$  wird, entsprechend der Mean - Reversion des stetigen Prozesses, gleich Null gesetzt.  $b_Y$  bestimmt

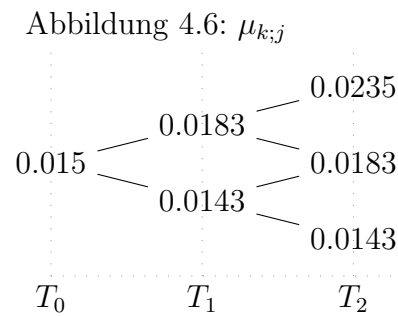
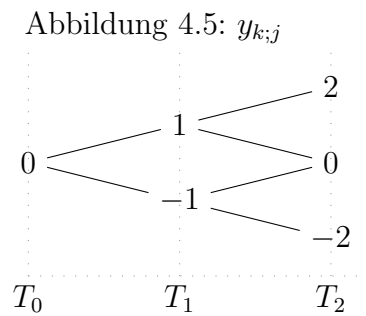


Abbildung 4.7: Diskreter Ornstein-Uhlenbeck-Prozess und Sterblichkeitsintensitäten nach MRBG

die Spannweite des Binomialbaumes und korrespondiert zur Mean-Reversion Geschwindigkeit des stetigen Prozesses. Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten werden in der Praxis jährlich berechnet. Demzufolge sei die Schrittweite  $h = 1$ . Nach [Wetzel \[2011\]](#) und [Milevsky und Promislow \[2001\]](#) werden folgende Parameter festgelegt:

$$Y_0 = 0, b_Y = 0.5, h = 1$$

Im nächsten Schritt werden die diskreten Sterblichkeitsintensitäten bestimmt. Für diese wird ein Startwert für eine festgelegte Kohorte ausgewählt. In diesem Beispiel wird eine 31-jährige Person betrachtet. Demnach kann aus der aktuell gültigen Sterbetafel die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit herangezogen werden, sodass als Startwert für den Prozess  $\mu(t, 31)$  der Wert  $\mu(0, 31) = -\ln p(0, 31)$  vorliegt. Die Volatilität  $\sigma^{(1)}$  ist konstant für alle Laufzeiten und wird nach [Wetzel \[2011\]](#) und [Milevsky und Promislow \[2001\]](#) als

$$\mu(0, x) = 0.015, \sigma^{(1)} = 0.1, g = 0.04$$

festgelegt. Sowohl die Volatilität als auch der Driftparameter  $g$  werden in diesem Modell sehr vorsichtig angesetzt, da die Sterblichkeitsintensität nur ein geringes Wachstum und im Allgemeinen sehr kleine Werte aufweist. Diese Voraussetzungen garantieren vorsichtige Sterblichkeitswerte für die anschließende Berechnung.

Die Baumapproximationen für  $Y_t$  und  $\mu(t, x)$  resultieren in den Binomialbäumen aus [Abbildung 4.7](#). Durch Anwendung von [Formel \(4.2\)](#) auf das Baummodell der Sterblichkeitsintensitäten kann das Baummodell der Überlebenswahrscheinlichkeiten

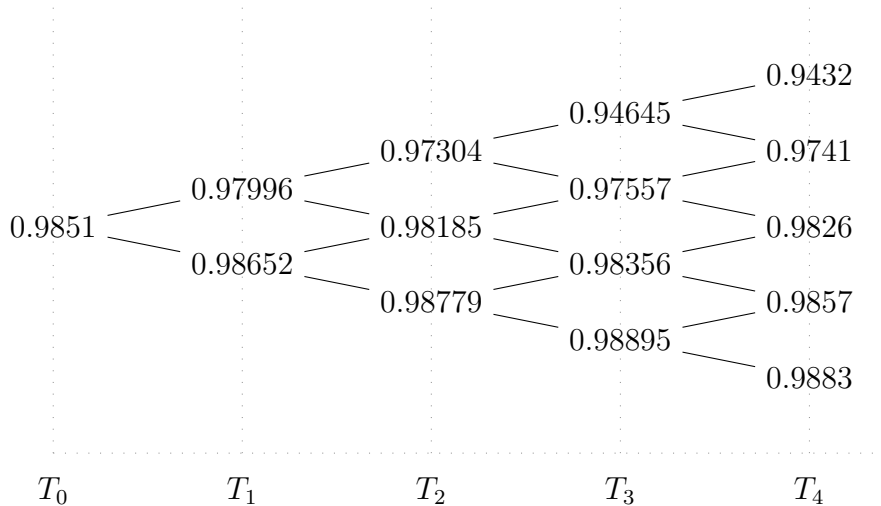


Abbildung 4.8: Überlebenswahrscheinlichkeiten im Baummodell nach MRBG

ten bestimmt werden durch

$$p_{i,j} = \exp\{-\mu_{i,j}\} \quad \forall i = T_0, \dots, T_{N-1}; \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Abbildung 4.8 stellt die berechneten Überlebenswahrscheinlichkeiten im Binomialbaum dar. Für eine gegebene Überlebenswahrscheinlichkeit  $K^x = 0.95$  können Preise für Caplets und Caps, basierend auf dem vorliegenden Überlebenswahrscheinlichkeiten aus dem MRBG-Binomialbaum  $p_{k,j}$ , mit  $0 \leq k \leq N-1$ ,  $0 \leq j \leq k$  berechnet werden. Die Auszahlungsfunktion eines Caplets, basierend auf Sterblichkeiten, lautet

$$Z(k, j, K^x) = (p_{k,j} - K^x)^+.$$

Die einzelnen Auszahlungsfunktionen werden in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Ein-Schritt-Rückwärtsrekursion für die Bepreisung des Caplets auf Sterblichkeiten lautet

$$\forall k = 0, \dots, N-1 \quad j = 0, \dots, k$$

$$Z(k, j, K^x) := p_{k,j} \cdot [Z(k+1, j, K^x) + Z(k+1, j+1, K^x)].$$

Die Auszahlungsfunktionen werden zudem mit den, im MRBG-Baummodell vorgestellten, Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtet.

Schließlich können die folgenden Caplet- und Cappreise aus Tabelle 4.1 bestimmt werden.

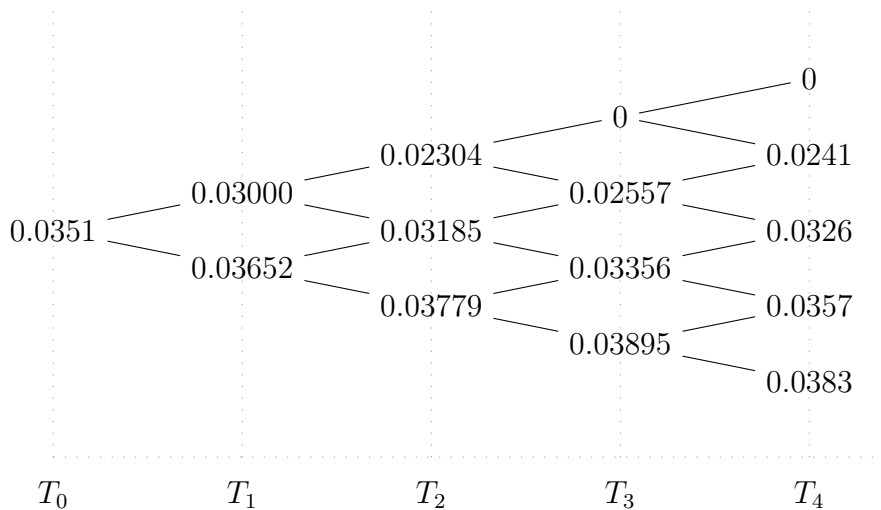


Abbildung 4.9: Auszahlungsfunktionen zu Überlebenswahrscheinlichkeiten im Baummodell nach MRBG

<b>Laufzeit</b>	<b>Capletpreise zu <math>t = 0</math></b>	<b>Cappreise zu <math>t = 0</math></b>
$T_i$	$C_{pl}^{MRBG}(0, K^x = 0.95)$	$C_{ap}^{MRBG}(0, K^x = 0.95)$
1	0.0496	0.0496
2	0.0495	0.0991
3	0.0495	0.1486
4	0.0494	0.1980
5	0.0493	0.2473
6	0.0490	0.2963
7	0.0488	0.3451
8	0.0488	0.3940
9	0.0480	0.4420

Tabelle 4.1: Caplet- und Cappreise nach MRBG

Die ermittelten Überlebenswahrscheinlichkeiten weisen nur geringfügige und sehr niedrige Änderungen für den betrachteten Zeitraum von ca. 10 Jahren auf. Aus diesem Grund ist der Verlauf der Capletpreise aus Tabelle 4.1 sehr monoton und fallend, was aber charakteristisch für Überlebensraten ist. Durch Summation der Capletpreise werden die ebenfalls angeführten Cappreise ermittelt. Basierend auf den beschriebenen Eigenschaften der Capletpreise, wachsen die Cappreise monoton.



## 4.6 Marktmodelle für Sterblichkeiten

Bei der Sterblichkeitsmodellierung gibt es analog zur Zinsstrukturmodellierung ebenfalls Ansätze für Marktmodelle. David Blake, Andrew Cairns und Kevin Dowd beschäftigen sich in den Arbeiten [Blake u.a. \[2006\]](#) und [Cairns \[2004\]](#) mit der Modellierung von Marktmodellen für Sterblichkeiten und führen zu diesem Zweck eine neue Bezugsgröße ein, die als Grundlage für diese Modelle dient.

## 4.7 Das Survivor Credit Offered Rate (SCOR)-Marktmodell

Um ein geeignetes Marktmodell für die Modellierung von Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten zu konstruieren, ist es nötig, eine neue Bezugsgröße einzuführen, die repräsentativ für die Sterblichkeitsentwicklung ist. Die neue Größe wird als *Survivor Credit* (Guthaben im Erlebensfall) bezeichnet und ist ein Martingal unter dem dazugehörigen Forward-Maß.

Nach [Blake u.a. \[2006\]](#) wird im folgenden Abschnitt die Survivor Credit (SC) konstruiert. Dazu sei folgendes Vertragsmodell einer Lebensversicherung gegeben:

- Zum Zeitpunkt  $t$  sind  $N(t, x)$  identische Versicherungsnehmer am Leben. Unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[N(t+1, x) | \mathcal{M}_t] = N(t, x)p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x).$$

- Der Versicherungsnehmer  $i \in \mathbb{N}(t-1, x)$  hat unmittelbar vor dem Stichtag  $t$  ein Kapital  $F_i(t)$ .
- Zum Zeitpunkt  $t$  erhöht sich das Kapital des Versicherungsnehmer (VN) um den Betrag  $P_i(t)$ .
- Das Versicherungsunternehmen (VU) verpflichtet sich dem VN zum darauffolgenden Stichtag  $t+1$  den Kapitalertrag  $s(t, t+1, x)$  gutzuschreiben, falls der VN noch lebt. Andernfalls endet der Vertrag und das Kapital wird dem VU zugeteilt.

Falls der VN zum Zeitpunkt  $t+1$  lebt, steht ihm der Betrag  $F_i(t) - P_i(t)$  zu. Für dieses Kapital muss unmittelbar vor dem nächsten Stichtag des Versicherungsjahres

$t + 1$  gelten

$$F_i((t + 1)^-) = [F_i(t^-) - P_i(t)](1 + s(t, t + 1, x))$$

mit dem Kapital  $F_i(t^-)$ , das dem  $i$ -ten VN unmittelbar vor dem Stichtag  $t$  zusteht im Erlebensfall. Unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$  muss die Auszahlung zum Zeitpunkt  $(t + 1)^-$  dem der Auszahlung  $F_i(t^-) - P_i(t)$  entsprechen. Demzufolge gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(t+1)} I(t+1)(1 + s(t, t+1, x)) \middle| \mathcal{D}_t, I(t) = 1 \right] = 1.$$

Die Indikatorfunktion  $I(t)$  kann nach Formel (4.3) in Abhängigkeit des Survivor Index angegeben werden als

$$I(t+1) = \frac{S(t+1, x)}{S(t, x)}.$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft des *Survivor Credit* gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C(t)}{C(t+1)} \frac{S(t+1, x)}{S(t, x)} \middle| \mathcal{D}_t, I(t) = 1 \right] (1 + s(t, t+1, x)) = 1.$$

Daraus folgt nach Formel (4.4) die Darstellung

$$\frac{\tilde{B}(t, t+1, x)}{\tilde{B}(t, t, x)} (1 + s(t, t+1, x)) = 1,$$

die zu expliziten Formeln für  $s(t, t+1, x)$  führt mit

$$\begin{aligned} s(t, t+1, x) &= \frac{\tilde{B}(t, t, x) - \tilde{B}(t, t+1, x)}{\tilde{B}(t, t+1, x)} \\ &\stackrel{(4.5)}{=} \frac{P(t, t)B(t, t, x) - P(t, t+1)B(t, t+1, x)}{P(t, t+1)B(t, t+1, x)} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{1 - P(t, t+1)p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x)}{P(t, t+1)p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für  $p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x) = 1$  verschwinden die Sterblichkeitsterme in Formel (4.11) und es bleibt der Ausdruck für den LIBOR Zinssatz aus Formel (3.25) zurück mit der

Darstellung

$$L(t, t + 1, x) = \frac{1 - P(t, t + 1, x)}{P(t, t + 1, x)}.$$

Angesichts dieser Analogie zur **LIBOR**-Darstellung wurde für  $s(t, t + 1, x)$  die Bezeichnung Survivor Credit Offered Rate (**SCOR**) festgelegt.

**Definition 4.2** *Survivor Credit Offered Rate (**SCOR**)*

Die Survivor Credit Offered Rate (**SCOR**)  $s(t, t + 1, x)$  wird vertraglich zwischen dem **VU** und dem **VN** vereinbart und ist eine Zinsrate, die im Erlebensfall des Versicherungsnehmers zum Stichtag  $t + 1$  zuzüglich zu einer Geldeinheit vom **VU** an den **VN** bezahlt wird.

Analog zur Definition (3.3) kann eine *Forward SCOR* Rate definiert werden.

**Definition 4.3** *Forward Survivor Credit Offered Rate (**SCOR**):*

Ein *Forward SCOR* wird durch einen zum Zeitpunkt  $t$  zwischen **VU** und **VN** für das Intervall  $t \leq T_{i-1} \leq T_i$  vereinbarten Vertrag festgelegt. Dieser Vertrag setzt voraus, dass zum Zeitpunkt  $t$  keine Zahlungen erfolgen. Zum darauffolgenden Zeitpunkt  $T_{i-1}$  zahlt der **VN** eine Geldeinheit an den Vertragspartner und erhält diese zuzüglich **SCOR** Zinsen zum Zeitpunkt  $T_i$  zurück unter der Voraussetzung, dass der **VN** noch lebt. Die im Vertrag festgelegte Zinsrate  $S(t; T_{i-1}, T_i, x)$  heißt *Forward-Survivor Credit Offered Rate (**SCOR**)*.

Für die *Forward SCOR*-Rate gilt die Darstellung

$$S_i(t) := S(t, T_{i-1}, T_i, x) = \frac{\tilde{B}(t, T_{i-1}, x) - \tilde{B}(t, T_i, x)}{\tilde{B}(t, T_i, x)}. \quad (4.12)$$

Die Darstellung von  $S(t, T_{i-1}, T_i, x)$  erfolgt (analog zum **LIBOR**) in Abhängigkeit von handelbaren Finanzgütern  $\tilde{B}(t, T_{i-1}, x) - \tilde{B}(t, T_i, x)$  und  $\tilde{B}(t, T_i, x)$  für  $t \leq T_{i-1} \leq T_i$ . Der Bonds  $\tilde{B}(t, T_i, x) > 0$  wird als Numeraire herangezogen und induziert das Forward-Maß  $\mathbb{Q}^{T_i}$ . Unter diesen Voraussetzungen ist  $S(t, T_{i-1}, T_i, x)$  ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$ . Für einen fixen Zeitpunkt  $t = T_{i-1}$  ist die *Forward-SCOR* beschränkt, da gilt

$$0 < S_i(T_{i-1}) = \frac{\tilde{B}(T_{i-1}, T_{i-1}, x) - \tilde{B}(T_{i-1}, T_i, x)}{\tilde{B}(T_{i-1}, T_i, x)}$$

$$= \frac{1 - P(T_{i-1}, T_i) p^Q(T_{i-1}, T_i, x)}{P(T_{i-1}, T_i) p^Q(T_{i-1}, T_i, x)} < \infty. \quad (4.13)$$

**Bemerkung 4.1** Aus Formel (4.13) folgt

$$0 < \frac{\tilde{B}(t, T_i, x)}{\tilde{B}(t, T_{i-1}, x)} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{p^Q(t, T_i, x)}{p^Q(t, T_{i-1}, x)} < 1. \quad (4.14)$$

Somit kann  $S_i(t)$  unter einer Log-Normalverteilung in Form eines stochastischen Prozesses mit der Dynamik

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[ \sigma_i^P(t) dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} + \sigma_i^B(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right] = S_i(t) \tilde{\sigma}_i(t) d\tilde{W}_t$$

und den Parametern

$$\tilde{\sigma}_i(t) = \sqrt{(\sigma_i^P(t))^2 + (\sigma_i^B(t))^2} \quad \text{und} \quad d\tilde{W}_t = dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} + dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \quad (4.15)$$

modelliert werden.  $\sigma_i^P(t)$  und  $\sigma_i^B(t)$  sind deterministische Funktionen in  $t$ . Für die Brownschen Bewegungen gilt

$$(dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_i}})^2 = dt, \quad (dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}})^2 = dt, \quad dZ_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} = 0. \quad (4.16)$$

Es resultiert die Darstellung

$$(dS_i(t))^2 = S_i^2(t) \tilde{\sigma}_i(t)^2 (d\tilde{W}_t)^2 \stackrel{(4.16)}{=} S_i^2(t) \tilde{\sigma}_i(t)^2 dt. \quad (4.17)$$

Durch Anwendung der Itô-Formel für  $g(S_i(t), t) = \ln S_i(t)$  resultiert

$$\begin{aligned} d \ln S_i(t) &= \frac{\partial \ln S_i(t)}{\partial S_i(t)} dS_i(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S_i(t)}{\partial S_i(t)^2} (dS_i(t))^2 \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \tilde{\sigma}_i(t) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_i(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Durch Integration über das Intervall  $[0, T]$  folgt

$$S_i(T) = S_i(0) \exp \left\{ \int_0^T \tilde{\sigma}_i(t) d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{\sigma}_i(t)^2 dt \right\}. \quad (4.18)$$

Für die Verteilung von  $S_i(u)$  gilt im Intervall  $t \leq u \leq T_{i-1} \leq T_i$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}}[S_i(u)|\mathcal{D}_t] &= S_i(t), \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}^{T_i}}(\ln S_i(t)|\mathcal{D}_t) &= \int_t^{T_i} \tilde{\sigma}_i(s) ds.\end{aligned}$$

Unter diesen Verteilungseigenschaften kann, analog zum **LIBOR**-Marktmodell, im **SCOR**-Modell die Preisfunktion eines Caplets zum Zeitpunkt  $T_i$  mit Ausübungspreis  $K$  nach Formel (3.10) bestimmt werden als

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}}[(S_i(T) - K)^+] = S_i(0)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln \frac{S_i(0)}{K} + 0.5 \tilde{\sigma}_i(t) \sqrt{T}}{T \tilde{\sigma}_i(t)}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{T} \tilde{\sigma}_i(t).$$

## 4.8 Baumapproximation des **SCOR**-Marktmodells

In diesem Abschnitt wird eine Baumapproximation für das vorgestellte **SCOR**-Marktmodell konstruiert. Um eine geeignete Baumapproximation für das **SCOR**-Modell zu finden, wird die Annahme konstanter Verzinsung zu einem Zinssatz  $r$  für jeder Intervall  $[t, t + 1]$ , getroffen. Demzufolge gilt

$$\frac{C(t)}{C(t+1)} = \frac{e^{rt}}{e^{r(t+1)}} = e^{-r}. \quad (4.19)$$

Für das Intervall  $(t, t + 1)$  gilt für die Darstellung der **SCOR**-Rate unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r} I(t+1)(1 + s(t, t+1, x)) \middle| \mathcal{M}_t, I(t) = 1 \right] = 1.$$

Für die Indikatorfunktion

$$I(t+1) = \frac{S(t+1, x)}{S(t, x)}$$

und aufgrund der Martingaleigenschaft des *Survivor Credit* gilt

$$e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S(t+1, x)}{S(t, x)} \middle| \mathcal{M}_t, I(t) = 1 \right] (1 + s(t, t+1, x)) = 1.$$

Daraus folgt nach Formel (4.4) die Darstellung

$$e^{-r} \frac{B(t, t+1, x)}{B(t, t, x)} (1 + s(t, t+1, x)) = 1,$$

die zu einer expliziten Formel für die **SCOR**  $s(t, t+1, x)$  führt mit

$$\begin{aligned} s(t, t+1, x) &= \frac{e^r B(t, t, x) - B(t, t+1, x)}{B(t, t+1, x)} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{1 - e^{-r} p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x)}{e^{-r} p^{\mathbb{Q}}(t, t+1, x)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Für die Forward-**SCOR**-Rate gilt für  $t \leq T_{i-1} \leq T_i$

$$S_i(t) := S(t, T_{i-1}, T_i, x) = \frac{1 - e^{-r} p^{\mathbb{Q}}(t, T_{i-1}, T_i, x)}{e^{-r} p^{\mathbb{Q}}(t, T_{i-1}, T_i, x)}. \quad (4.21)$$

Die **SCOR**-Rate aus Formel (4.21) entspricht der Darstellung einer **LIBOR**-Zinsrate, wobei die **NKA** multipliziert wird mit einem konstanten Faktor. Aus Formel (4.14) folgt die Eigenschaft  $p^{\mathbb{Q}}(t, T_{i-1}, x) < p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, x)$ . Die **SCOR**-Rate ist somit positiv und ein Martingal unter  $\mathbb{Q}^{T_i}$ . Unter diesen Voraussetzungen kann die Forward-**SCOR**-Rate dargestellt werden als

$$dS_i(t) = S_i(t) \sigma_i^B(t) dW_t^{\mathbb{Q}}. \quad (4.22)$$

Für die Herleitung der Darstellung unter einem allgemeinen  $\mathbb{Q}^{T_N}$  sei nach Formel (4.21) die Forward-**SCOR** gegeben durch

$$S_i(t) = e^r \frac{B(t, T_{i-1}, x)}{B(t, T_i, x)} - 1,$$

wobei

$$\frac{B(t, T_{i-1}, x)}{B(t, T_i, x)} = p^{\mathbb{Q}}(t, T_{i-1}, T_i, x) = e^{-r} \frac{1}{1 + S_i(t)}.$$

Für die mehrjährige Forward-Überlebensrate gilt

$$\begin{aligned} \frac{B(t, T_i, x)}{B(t, T_k, x)} &= p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_k, x) \\ &= \frac{p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_{i+1}, x) p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_{i+2}, x)}{p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_i, x) p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_{i+1}, x)} \cdots \frac{p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_k, x)}{p^{\mathbb{Q}}(t, T_i, T_{k-1}, x)} \end{aligned}$$

$$= e^{-r(k-i-1)} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{1}{1 + S_j(t)}.$$

Analog zum **LIBOR**-Marktmodell wird die allgemeine Darstellung der diskreten Zinsraten  $S_k(t)$  im **SCOR**-Marktmodell hergeleitet.

**Definition 4.4** *Dynamik der  $S_k(t)$  unter dem  $T_i$ -Forward Measure*

Unter der Annahme lognormalverteilter Sterblichkeitsraten resultiert folgende allgemeine Darstellung für die Dynamik der diskreten Zinsraten  $S_k(t)$  unter dem  $T_i$ -Forward Measure ( $\mathbb{Q}^{T_i}$ ) für die Fälle  $i < k, i = k, i > k$ :

$$\begin{aligned} i < k, t \leq T_i : \quad & \frac{dS_k(t)}{S_k(t)} = \sigma_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{S_j(t)}{1 + S_j(t)} \sigma_j(t) \rho_{k,j} dt + \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \\ i = k, t \leq T_{k-1} : \quad & \frac{dS_k(t)}{S_k(t)} = \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \\ i > k, t \leq T_{k-1} : \quad & \frac{dS_k(t)}{S_k(t)} = -\sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{S_j(t)}{1 + S_j(t)} \sigma_j(t) \rho_{k,j} dt + \sigma_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \end{aligned}$$

Die Darstellung der Zinsraten unter einem gemeinsamen Maß erfolgt mit Hilfe des Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ) bezüglich des Numeraires  $B(t, T_N, x)$ .

**Definition 4.5** *Dynamik der  $S_k(t)$  unter dem Terminal Measure*

Unter dem Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ) gilt für die diskreten Zinsraten  $S_k(t)$  die Dynamik

$$dS_k(t) = S_k(0) \sigma_k(t) \sum_{j=k+1}^N \frac{S_j(t)}{1 + S_j(t)} \sigma_j(t) dt + \sigma_k(t) S_k(t) dW_t^{\mathbb{Q}^{T_N}}. \quad (4.23)$$

Das **SCOR**-Modell entspricht in dieser Form dem **LIBOR**-Marktmodell und kann auf die gleiche Weise diskret approximiert werden. Unter der Annahme vorhandener Märkte für Bonds und Zinscaps auf Sterblichkeiten wird die Volatilität im **SCOR**-Modell wie im **LIBOR**-Marktmodell an implizite Caplet-Volatilitäten kalibriert. Unter der Annahme stückweise konstanter Volatilitätsfunktionen  $\sigma_i^B := \sigma_i^B(t)$  nach [Brigo und Mercurio \[2006\]](#) ist die Lösung der Differentialgleichung aus Formel

(4.22)

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left\{ -\frac{(\sigma_i^B)^2}{2} t + \sigma_i^B W_t^{\mathbb{Q}^{T_i}} \right\}.$$

Analog zur LIBOR-Rate kann der Algorithmus von Xiao [2011] zur Modellierung der Sterblichkeitsentwicklung herangezogen werden. Daraus resultiert die Lösungsformel

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left\{ -\frac{(\sigma_i^B)^2}{2} t + \sigma_i^B W_t \right\} = S_i(0) \exp \left\{ \frac{(\sigma_i^B)^2}{2} t + \sigma_i^B Y_t \right\}.$$

Unter dem Terminal Measure ( $\mathbb{Q}^{T_N}$ ) lautet die Darstellung

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left\{ \mu_i(t) + \frac{\sigma_i^2}{2} t + \sigma_i Y_t^{\mathbb{Q}^{T_N}} \right\}$$

Nach dem Algorithmus von Xiao [2011] kann die Dynamik von  $S_i(t)$  durch die Diskretisierung der Brownschen Bewegung approximiert werden. Sei  $y_{k;j}$  der  $j$ -te Knoten zum Zeitpunkt  $k \in \{T_0, \dots, T_N\}$ . Dann gilt für die diskrete SCOR-Rate

$$S_k(k; y_{k;j}) = S_k(0) \exp \left\{ \mu_k(k; y_{k;j}) + \frac{(\sigma_k^B)^2}{2} k + \sigma_k^B y_{k;j} \right\} \quad (4.24)$$

und einen (T,x)-Bonds

$$P(k, T_i; y_{k;j}) = \prod_{j=1}^i \frac{1}{1 + S_j(k; y_{k;j})}. \quad (4.25)$$

Die Approximation des Driftterms erfolgt mithilfe des *Frozen Drifts*.

**Frozen Drift (FD):**

$$\mu_i(t) = - \int_0^t \sum_{j=i+1}^N \frac{S_j(t)}{1 + S_j(t)} \sigma_j \sigma_i dt \approx - \sum_{j=i+1}^N \frac{S_j(0)}{1 + S_j(0)} \sigma_j \sigma_i t \quad (4.26)$$

Basierend auf der Normalverteilung, können die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen im Baum mithilfe der Dichtefunktion der Normalverteilung



lung angegeben werden:

$$p(y_{t;i}, t; y_{T;j}, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{(y_{T;j} - y_{t;i} + \sigma_T T - \sigma_t t)^2}{2(T-t)} \right\}$$

### 4.8.1 Beispielrechnung

An dieser Stelle wird das in Kapitel 4.8 vorgestellte **SCOR**-Marktmodell anhand des Algorithmus von Xiao [2011] approximiert. Die Forward Rates  $S_i(0)$  können mittels Formel (4.21) extrahiert werden. Zu diesem Zweck werden diskrete Überlebenswahrscheinlichkeiten aus veröffentlichten Sterbetafeln als Modellparameter für  $p^{\mathbb{Q}}(0, T_{i-1}, T_i, x)$  herangezogen. In diesem Beispiel wird die AVÖ 2005 Unisex Rentensterbetafel für eine 80-jährige Person betrachtet. Sterblichkeitswerte verlaufen im Allgemeinen monoton und sind daher schwach volatil. Aus diesem Grund werden für die Berechnungen die Volatilitäten  $\sigma(T_i)$  aus Tabelle 4.2 herangezogen. Zusätzlich wird ein fixer Zinssatz  $r = 0.01$  festgesetzt, sodass der jährliche Diskontierungsfaktor  $e^{-0.01} = 0.99005$  resultiert. Die Parameter  $p^{\mathbb{Q}}(0, T_{i-1}, T_i, x)$  und die berechneten Forward Rates  $S_i(0)$  sind ebenfalls in Tabelle 4.2 aufgelistet.

Laufzeit	Daten	Marktvolatilitäten
$T_i$	$p(0, T_{i-1}, T_i, 30)$	$\sigma(T_i)$
1	0.968202	20%
2	0.963523	21%
3	0.958100	22%
4	0.951826	23%
5	0.944663	24%
6	0.936565	25%
7	0.927340	26%
8	0.916789	27%
9	0.905045	28%
10	0.891975	29%

Tabelle 4.2: Marktdaten für das **SCOR**-Modell

Laufzeit	Forward Rates	Volatilitäten
$T_i$	$S_i(0)$	$\sigma_i^{SCOR}$
1	0.043223	20.0%
2	0.048289	14.8%
3	0.054222	12.7%
4	0.061171	11.5%
5	0.069217	10.7%
6	0.078462	10.2%
7	0.089191	9.8%
8	0.101726	9.5%
9	0.116022	9.3%
10	0.132375	9.2%

Tabelle 4.3: Daten für das SCOR-Modell

In Abbildung 4.10 werden die SCOR-Forward Rates basierend auf dem diskreten Baummodell nach Xiao [2011] für die Knotenmenge  $S = 5$  und den Abstand  $\varphi = 0.5$  dargestellt.

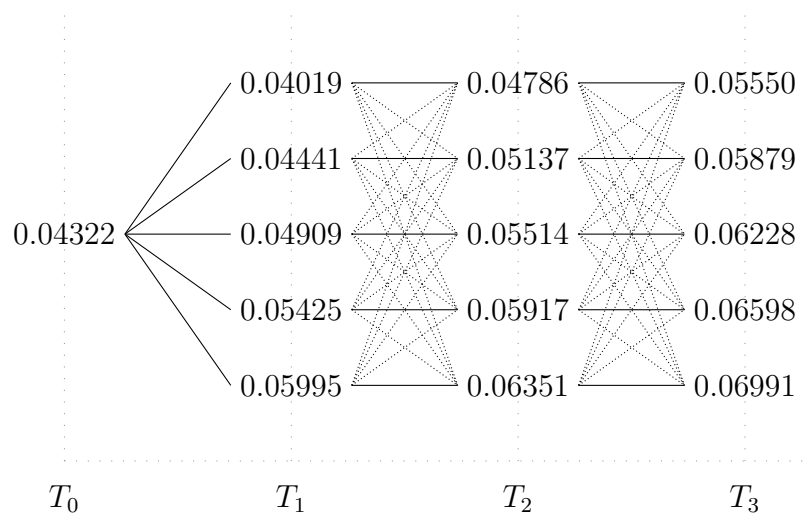


Abbildung 4.10: SCOR-Forward Rates nach Xiao [2011]

In diesem Beispiel wird ein Ausübungspreis  $K = 0.001$  festgelegt um Preise für Caplets und Caps zu berechnen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.4 und 4.5 angeführt.

<b>Laufzeit</b>	<b>Capletpreise zu <math>t = 0</math></b>	
$T_i$	$Cpl^{SCOR}(0, K = 0.001)$	$Cpl^{Bl}(S_i(0), 0, K = 0.001)$
1	0.042223	0.042222
2	0.047226	0.047289
3	0.053221	0.053222
4	0.060157	0.060171
5	0.068158	0.068218
6	0.077330	0.077462
7	0.087947	0.088191
8	0.100322	0.100726
9	0.114393	0.115022
10	0.130432	0.131375

Tabelle 4.4: Caplets für SCOR-Modell nach Xiao [2011]

Aufgrund der monotonen Forward Rates  $S_i(0)$  und der niedrigen Volatilitäten stimmen die Werte des SCOR-Marktmodells gut überein mit den Preisen nach den Formeln von Black.

<b>Laufzeit</b>	<b>Cappreise zu <math>t = 0</math></b>	
$T_i$	$Cap^{SCOR}(0, K = 0.001)$	$Cap^{Bl}(S_i(0), 0, K = 0.001)$
1	0.043223	0.042223
2	0.090445	0.089511
3	0.143666	0.142733
4	0.203823	0.202904
5	0.271981	0.271122
6	0.349310	0.348584
7	0.437257	0.436775
8	0.537579	0.537501
9	0.651971	0.652523
10	0.782404	0.783898

Tabelle 4.5: Caps für SCOR-Modell nach Xiao [2011]

Basierend auf den Capletpreise, stimmen die Cappreise der beiden Methoden ebenfalls sehr gut überein.

## 5 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden Beispiele zur Anwendung diskreter Sterblichkeits- und Zinsstrukturmodelle analysiert. Einführend werden die verwendeten Rechnungsgrundlagen, basierend auf aktuellen Marktdaten, vorgestellt. Anhand dieser erfolgt die Risikoanalyse eines gegebenen Versicherungsbestandes in Form des bereits vorgestellten Vorhersage- und Zinsrisikos. Abschließend wird eine neue Datenstruktur eingeführt, anhand derer Abhängigkeitsstrukturen zwischen zwei Binomialbäumen modelliert werden können. Dazu wird eine Überschussbeteiligung konstruiert, um die Bewertung von lebensversicherungstechnischen Optionen zu demonstrieren.

### 5.1 Rechnungsgrundlagen

#### 5.1.1 Sterblichkeitsmodell

Das Sterblichkeitsmodell basiert auf dem bereits vorgestellten **MRBG**-Baummodell. Demnach wird ein diskreter Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für die Modellierung der Sterblichkeitsintensität herangezogen (vgl. Abschnitt 4.4). Für die weiterführenden Berechnungen werden die Parameter aus **Nelson und Ramaswany [1990]** für die Modellierung der Sterblichkeitsentwicklung festgelegt. Demnach gelten für die Parameter  $x$ ,  $\mu(0, x)$ ,  $\sigma^{(1)}$  und  $g$  die Werte aus Tabelle 5.1. Die Anfangsbedingung der Sterblichkeitsintensitäten resultiert aus der Überlebenswahrscheinlichkeit eines 30-Jährigen nach der AVÖ 2005 R Unisex (vgl. **AVÖ [2012]**). Demnach gilt

$$\begin{aligned}\mu(0, 30) &= \ln(p_{30}) = -\ln(0.99961) = 0.0004 \\ \mu(0, 70) &= \ln(p_{70}) = -\ln(0.98985) = 0.0102.\end{aligned}$$

Daraus resultieren folgende Sterblichkeitsentwicklungen anhand eines Baummodells:

Parameter für MRBG-Baummodell					
Ornstein-Uhlenbeck-Prozess		Sterblichkeitsintensitäten			
$b_Y$	$Y_0$	$x$	$\mu(0, x)$	$g$	$\sigma^{(1)}$
0.5	0	30 Jahre	$\ln(p_{30})$	0.04	0.1
0.5	0	70 Jahre	$\ln(p_{70})$	0.1	0.2

Tabelle 5.1: Parameter für Sterblichkeitsmodell

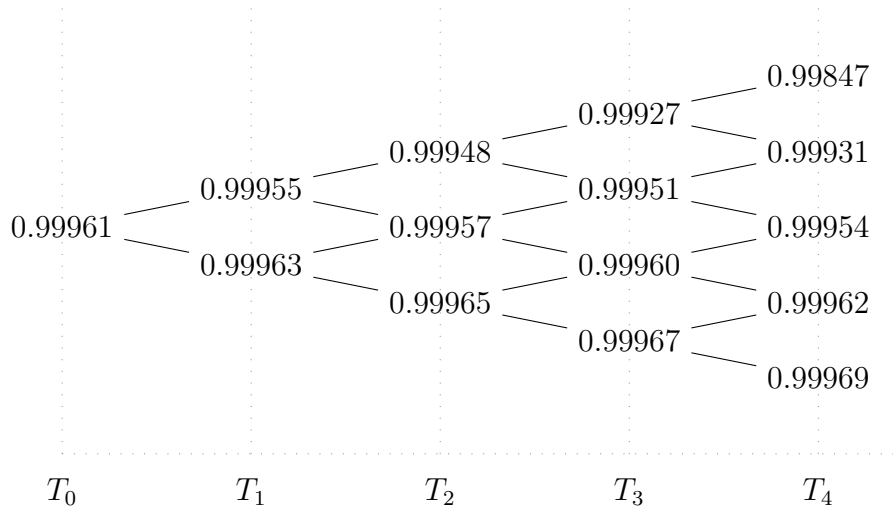


Abbildung 5.1: Überlebenswahrscheinlichkeiten nach MRBG für eine 30-jährige Person

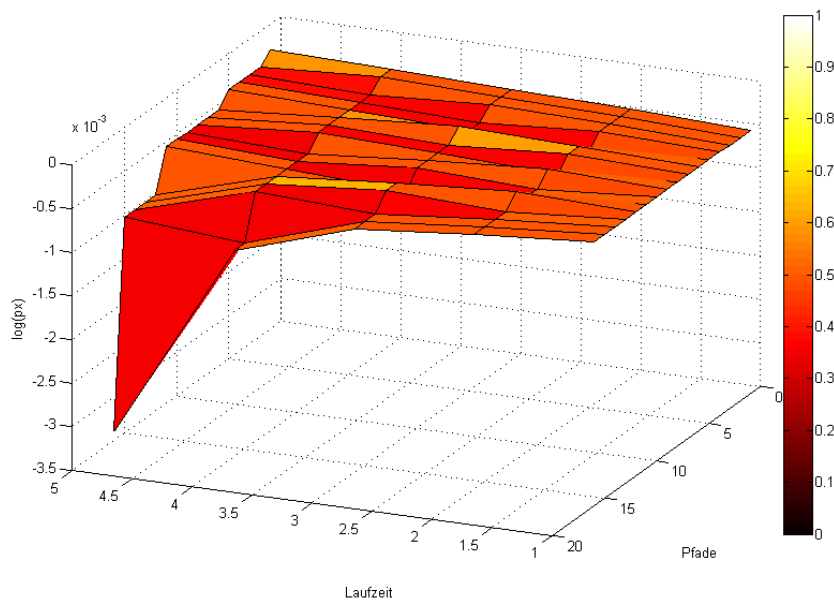


Abbildung 5.3: Grafische Darstellung aller Pfade des MRBG-Baummodells anhand logarithmierter Sterblichkeitswerte

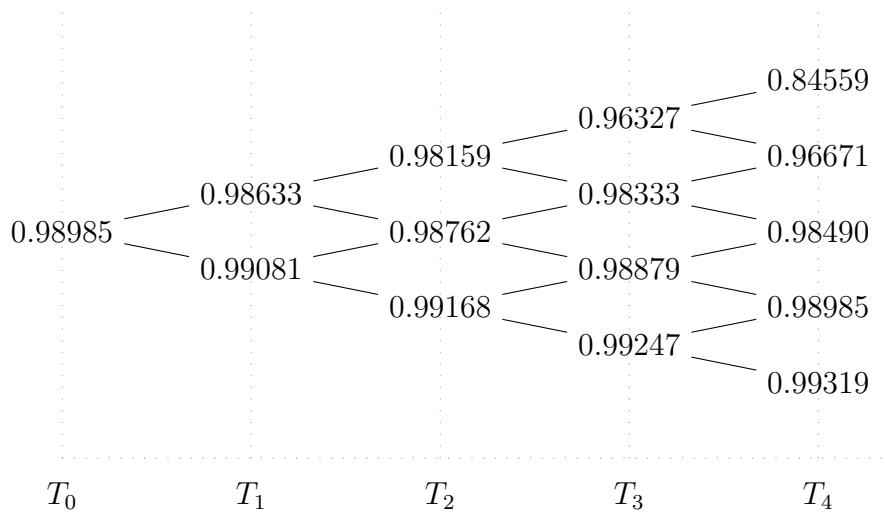


Abbildung 5.2: Überlebenswahrscheinlichkeiten nach MRBG für eine 70-jährige Person

### 5.1.2 Zinsstrukturmodell

Die Dynamik der Kapitalmarktentwicklung wird in den Anwendungsbeispielen anhand des vorgestellten **BDT**-Zinsstrukturmodells konstruiert. Dabei werden logarithmierte Short Rates modelliert, die zur anschließenden Beispielrechnung herangezogen werden.

Für die Konstruktion des Zinsstrukturmodells werden aktuelle Marktdaten aus der *Long-term guarantees assessment* Auswirkungsstudie (vgl. [EIOPA \[2013\]](#)) herangezogen.

Zinsraten laut Auswirkungsstudie zum 31.12.2011 in %									
$t$	Zins	$t$	Zins	$t$	Zins	$t$	Zins	$t$	Zins
1	0.67	11	3.18	21	3.68	31	3.86	41	3.95
2	1.09	12	3.27	22	3.70	32	3.87	42	3.95
3	1.50	13	3.34	23	3.73	33	3.88	43	3.96
4	1.87	14	3.40	24	3.75	34	3.89	44	3.97
5	2.18	15	3.46	25	3.77	35	3.90	45	3.97
6	2.43	16	3.50	26	3.78	36	3.91	46	3.98
7	2.64	17	3.55	27	3.80	37	3.92	47	3.98
8	2.82	18	3.59	28	3.82	38	3.93	48	3.99
9	2.96	19	3.62	29	3.83	39	3.94	49	3.99
10	3.08	20	3.65	30	3.84	40	3.95	50	4.00

Tabelle 5.2: Zinsstruktur für Beispielrechnung nach [EIOPA \[2013\]](#)

Es werden folgende Volatilitäten herangezogen:

Volatilitäten zum 31.12.2011 in %					
Jahre	1	2	3	4	5
Volatilität	55.75	66.88	84.87	85.10	88.62
Jahre	6	7	8	9	10
Volatilität	91.75	84.66	82.76	79.39	75.34
Jahre	12	15	20	25	30
Volatilität	72.85	66.53	59.98	58.34	59.06

Tabelle 5.3: Volatilitätsstruktur für Beispielrechnung nach [EIOPA \[2013\]](#)

Nach dem **BDT**-Modell kann folgender Zinsstrukturbaum aufgespannt werden.

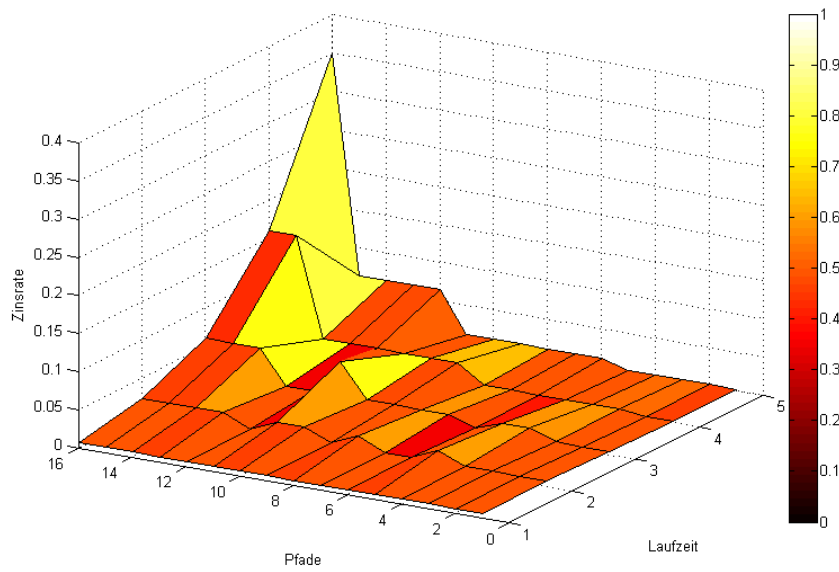


Abbildung 5.5: Grafische Darstellung aller Pfade des simulierten **BDT**-Baummodells

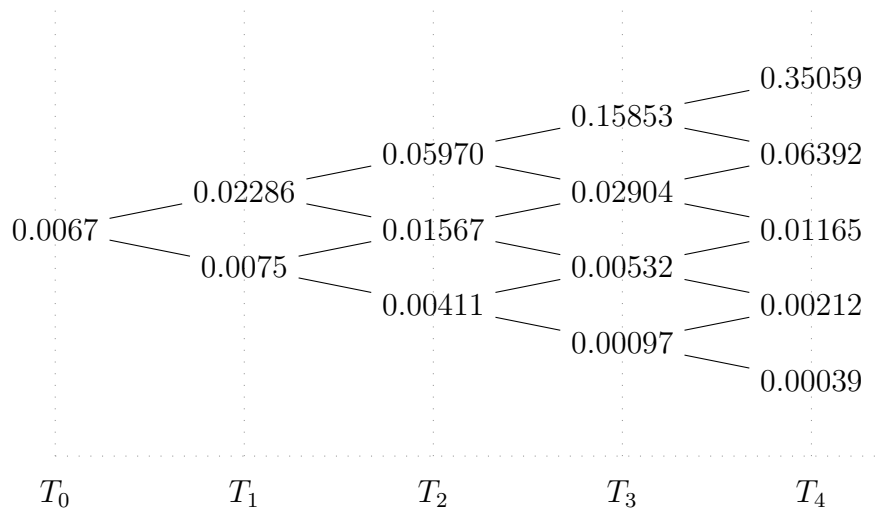


Abbildung 5.4: Zinsstruktur nach **BDT**-Baummodell für Berechnungen zu Beispielbestand

Ausgehend von den vorgestellten Methoden zur diskreten Modellierung der stochastischen Sterblichkeitsdynamik und Zinsstrukturdynamik liegen die nötigen Werte in Form von Binomialbäumen vor.



## 5.2 Zinsänderungs- und Vorhersagerisiko

Für Versicherungsunternehmen ist es von Bedeutung, zugrundeliegende Risikoquellen in Versicherungsbeständen zu quantifizieren und gegebenenfalls zu steuern. In Parker [1997], Bruno u.a. [1997] und Coppola u.a. [2002] wird eine geeignete Methode zur Quantifizierung des Vorhersage- und Zinsrisikos untersucht, die auf einer Varianzzerlegung basiert. In diesem Abschnitt wird diese Methode analysiert und anhand eines Beispielbestandes numerisch ausgewertet und diskutiert (vgl. Wetzel [2011]).

### 5.2.1 Risikomaße

Die beiden Risikokomponenten für die Sterblichkeit und die Zinsstruktur werden anhand einer, für den vorhandenen Bestand repräsentativen Zielgröße  $X$  bestimmt. Für die Quantifizierung der beiden Risiken wird die Varianz der Zielgröße zerlegt.

**Satz 5.1** *Varianzzerlegung (vgl. Wetzel [2011] Satz 2.1)*

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  gegeben und  $\mathcal{F}$  eine Filtration. Sei  $X \in \mathcal{A}$  und quadratintegrierbar. Dann ist die bedingte Varianz von  $X$  unter  $\mathcal{F}$  gegeben als

$$\text{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2]. \quad (5.1)$$

Es gilt der Zusammenhang

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F})] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]). \quad (5.2)$$

Die Varianz der bekannten Zielgröße  $X$  kann durch den Satz in die folgenden Komponenten getrennt werden. Dabei repräsentiert  $\mathcal{F}$  die Filtration basierend auf der Kapitalmarktentwicklung.

$$\text{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F})]}_{\text{Vorhersagerisiko}} + \underbrace{\text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])}_{\text{Zinsänderungsrisiko}}. \quad (5.3)$$

Um eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu erzielen, wird der *quadratische Variationskoeffizient*  $V(X)$  herangezogen. Dieser wird folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{\mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F})] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])}{\mathbb{E}[X]^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F})]}{\mathbb{E}[X]^2} + \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])}{\mathbb{E}[X]^2}. \end{aligned}$$

Daraus resultieren *relative Risikomaße* für das Vorhersage- und Zinsrisiko mit

$$V(X) = \underbrace{\frac{\mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F})]}{\mathbb{E}[X]^2}}_{\text{relatives Vorhersagerisiko}} + \underbrace{\frac{\text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])}{\mathbb{E}[X]^2}}_{\text{relatives Zinsänderungsrisiko}}. \quad (5.4)$$

Nach [Parker \[1997\]](#), S.61, wird die Varianz bedingt auf die Kapitalmarktentwicklung zerlegt. Die Zerlegung in bedingte Erwartungswert- und Varianzterme bezüglich der Sterblichkeitsentwicklung wäre theoretisch auch möglich, wird aber in [Parker \[1997\]](#) und [Wetzel \[2011\]](#) nicht favorisiert. Der Grund lässt sich auf das Grenzverhalten der durchschnittlichen Varianz  $\text{Var}(\frac{X}{c})$ , mit  $c$  als Bestandsgröße, zurückführen. Bei kontinuierlichem Anstieg der Bestandsgröße verschwindet das Vorhersagerisiko zur Gänze und das Zinsänderungsrisiko bleibt konstant und ist somit unabhängig von  $c$ . Da es naheliegend scheint, dass das Zinsänderungsrisiko nicht von der Bestandsgröße abhängt, wird die Bedingung auf die Kapitalmarktentwicklung bevorzugt angewandt für die Risikoquantifizierung.

### 5.2.2 Beispielbestand

Als demonstratives Beispiel wird an dieser Stelle der Bestand aus [Wetzel \[2011\]](#), S.79, betrachtet. Demzufolge umfasst der Bestand zwei verschiedene Vertragstypen zu drei verschiedenen Laufzeiten. Es seien ein- bis dreijährige Rentenversicherungen und Risikoversicherungen vorhanden. Die folgende Tabelle beinhaltet die Bezeichnungen und Beschreibungen der vorhandenen Verträge.

Bezeichnung	Laufzeit	Art des Vertrags
Re1	1 Jahr	Rentenversicherung
Re2	2 Jahre	Rentenversicherung
Re3	3 Jahre	Rentenversicherung
RV1	1 Jahr	Risikoversicherung
RV2	2 Jahre	Risikoversicherung
RV3	3 Jahre	Risikoversicherung

Tabelle 5.4: Beispielbestand

Die angeführten Versicherungsverträge werden entsprechend ihrer Laufzeiten und Leistungen zu sechs Vertragsgruppen zusammengefasst. Die Gruppen werden in weiterer Folge als *Modelpoints* bezeichnet. Ein Modelpoint wird als einzelner Versicherungsvertrag betrachtet, dem ein repräsentatives Referenzalter zugewiesen wird und dessen Versicherungsleistung aus der Summation der einzelvertraglichen Versicherungssummen resultiert.

Sei  $i$  der Index für den Vertragstyp mit der vorgegebenen Definitionsmenge

$$i \in I = \{Re1, Re2, Re3, RV1, RV2, RV3\}, \quad m = |I|.$$

Folgende Notationen werden in diesem Abschnitt verwendet:

$m$  : Festgelegte Anzahl an Gruppierungen, d.h. Modelpoints, von Versicherungsverträgen nach ähnlichen Vertragsdaten (Laufzeit, Leistungen usw.); für den angeführten Beispielbestand gilt  $m = 6$

$x_i$  : Referenzalter für alle Verträge, die in Modelpoint  $i$  zusammengefasst sind;

$a_i$  : Versicherungssumme aller Einzelverträge aus Modelpoint  $i$  mit  $i \in I$ ;

$n_i$  : einheitliche Laufzeit der Einzelverträge aus Modelpoint  $i \in I$ ;

$c_i$  : Anzahl der zusammengefassten Versicherungsverträge in Modelpoint  $i \in I$ ;

$c$  : Größe des Gesamtbestandes mit  $c = \sum_{i=1}^m c_i$ ;

$p_i$  : Anteil der Verträge aus Modelpoint  $i$  an Gesamtbestand mit  $p_i = c_i/c$ ;

$D^i(t)$  : Anzahl der Ablebenden in Modelpoint  $i \in I$  in Jahr  $t$ ; binomialverteilt;

$S^i(t)$  : Anzahl der Überlebenden in Modelpoint  $i \in I$  in Jahr  $t$ ; binomialverteilt;

Die folgende Tabelle veranschaulicht die Zusammensetzung des Beispielbestandes mit den Versicherungssummen. Die Leistung  $a_i$  der Rentenverträge entspricht der

jährlichen Rentenleistung.

Modelpoints						
$i$	Bezeichnung	$x_i$	$n_i$	$a_i$	$c_i$	$p_i$
1	Re1	70	1	3.000	100.000	10%
2	Re2	70	2	3.000	250.000	26%
3	Re3	70	3	3.000	300.000	31%
4	RV1	30	1	100.000	50.000	5%
5	RV2	30	2	100.000	80.000	8%
6	RV3	30	3	100.000	200.000	20%

Tabelle 5.5: Beispielbestand: Modelpoints

Für weitere Berechnungen wird die Menge der vorhandenen Modelpoints  $I$  in zwei disjunkte Mengen mit Erlebens- und Todesfallcharakter aufgesplittet:

$$Re = \{Re1, Re2, Re3\}, \quad RV = \{RV1, RV2, RV3\}$$

Die Auszahlungsfunktion des Vertrages  $i \in I$  sei mit  $A_j^i(t)$  bezeichnet für die Jahre  $t = 0, 1, 2$  und  $j = 1, \dots, c_i$  ein Element aus Modelpoint  $i \in I$ . Es gilt

$$\forall j = 1, \dots, c_i, i \in Re : A_j^i(t) = \begin{cases} a_i, & {}_t p_x \\ 0, & (1 - {}_t p_x) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\forall j = 1, \dots, c_i, i \in RV : A_j^i(t) = \begin{cases} a_i, & {}_{t-1} q_x \\ 0, & (1 - {}_{t-1} q_x). \end{cases} \quad (5.6)$$

Sei mit  $A(t)$  die Auszahlungsfunktion des gesamten Bestandes definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i \in RV} a_i D^i(t) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} + \sum_{i \in Re} a_i S^i(t) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} \\ &= \sum_{i \in I} a_i \left[ D^i(t) \mathbb{I}_{\{i \in RV\}} + S^i(t) \mathbb{I}_{\{i \in Re\}} \right] \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Zufallsvariablen  $D^i(t)$  und  $S^i(t)$  unterliegen einer Binomialverteilung für  $t = 1, 2, 3$ . Es gilt somit

$$D^i(t) \sim \text{Binomial}(D^i(t-1); {}_{t-1} q_x), \quad i \in RV, \quad t = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad (5.8)$$

$$S^i(t) \sim \text{Binomial}(S^i(t-1); {}_t p_x), \quad i \in Re, \quad t = 1, 2, 3 \quad \text{mit} \quad (5.9)$$

$$S^i(0) = c_i \quad \forall i \in Re \quad \text{und} \quad D^i(0) = c_i \quad \forall i \in RV.$$

Für weiterführende Berechnungen wird nach [Wetzel \[2011\]](#), S. 53, folgende Annahme getroffen.

**Annahme 5.1**

*Die Sterblichkeits- und Zinsentwicklung verlaufen stochastisch unabhängig voneinander.*

Sei mit  $R(t)$  der Diskontierungsfaktor für  $t = 1, 2, 3$  gegeben. Der heutige Wert der zukünftigen Zahlungen sei mit  $PV$  bezeichnet. Dann gilt

$$PV(t) = A(t) \frac{1}{R(t)}.$$

Die zukünftigen Zahlungen des gesamten Bestandes werden zusammengefasst über alle zukünftigen Zahlungszeitpunkte (vgl. [Wetzel \[2011\]](#), S.77)

$$PV = \sum_{t=1}^n A(t) \frac{1}{R(t)}$$

mit  $n = \max\{n_i : i \in \{Re1, Re2, Re3, RV1, RV2, RV3\}\}$ . Es gilt

$$\mathbb{E}[PV] = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^n A(t) \frac{1}{R(t)} \right] \stackrel{\text{Annahme 5.1}}{=} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[A(t)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t)} \right].$$

Für die Varianz der Zufallsgröße  $PV$  gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(PV) &= \mathbb{E}[PV^2] - \mathbb{E}[PV]^2 = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{t=1}^n A(t) \frac{1}{R(t)} \right)^2 \right] - \mathbb{E}[PV]^2 \\ &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \mathbb{E}[A(t_1)A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] - \mathbb{E}[PV]^2. \end{aligned}$$

Sei  $\mathcal{H}_t$  die Filtration basierend auf der Kapitalmarktentwicklung.

$$\begin{aligned} \text{Var}(PV) &= \mathbb{E}[PV^2] - \mathbb{E}[PV]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{t=1}^n A(t) \frac{1}{R(t)} \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^n A(t) \frac{1}{R(t)} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \mathbb{E}[A(t_1)A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \\
 &\quad - \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_2)} \right] \\
 &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left( \mathbb{E}[A(t_1)A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_2)} \right] \right) \\
 &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left( \mathbb{E}[A(t_1)A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] + \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_2)} \right] \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left( \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right) \right) \\
 &= \underbrace{\sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right]}_{=:\mathbb{E}[\text{Var}(PV|\mathcal{H}_t)]} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right)}_{=:\text{Var}(\mathbb{E}[PV|\mathcal{H}_t])} \\
 &= \mathbb{E}[\text{Var}(PV|\mathcal{H}_t)] + \text{Var}(\mathbb{E}[PV|\mathcal{H}_t]).
 \end{aligned}$$

In (1) wurden folgende Gleichungen verwendet:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] &= \\
 & \quad (\mathbb{E}[A(t_1)A(t_2)] - \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)]) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \\
 \mathbb{E}[A(t_1)] \mathbb{E}[A(t_2)] \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right) &=
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[A(t_1)]\mathbb{E}[A(t_2)] \left( \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_2)} \right] \right)$$

Die Varianz von  $PV$  kann somit nach Satz 5.1 aufgesplittet werden in

$$\text{Var}(PV) = \mathbb{E}[\text{Var}(PV|\mathcal{H}_t)] + \text{Var}(\mathbb{E}[PV|\mathcal{H}_t]).$$

Daraus können die Risikomaße für das Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko abgeleitet werden nach Wetzel [2011], S.78. Das Vorhersagerisiko entspricht demnach

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Var}(PV|\mathcal{H}_t)] &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n \text{Var}(A(t)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R^2(t)} \right] \\ &\quad + 2 \sum_{t_1=1}^{n-1} \sum_{t_2=t_1+1}^n \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Das Zinsänderungsrisiko entspricht der Variabilität der auf die Kapitalentwicklung bedingten Zufallsvariable  $PV$  mit

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbb{E}[PV|\mathcal{H}_t]) &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \mathbb{E}[A(t_1)]\mathbb{E}[A(t_2)] \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \mathbb{E}^2[A(t)] \text{Var} \left( \frac{1}{R(t)} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{t_1=1}^{n-1} \sum_{t_2=t_1+1}^n \mathbb{E}[A(t_1)]\mathbb{E}[A(t_2)] \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Für die numerische Auswertung der gesuchten Risiken ist die Bestimmung folgender Größen erforderlich:

$$\mathbb{E}[A(t)], \mathbb{E}[A^2(t)], \text{Var}(A(t)), \text{Cov}(A(t_1), A(t_2)) \quad (5.12)$$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t)} \right], \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R^2(t)} \right], \mathbb{E} \left[ \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right], \text{Cov} \left( \frac{1}{R(t_1)} \frac{1}{R(t_2)} \right). \quad (5.13)$$

Die Berechnung der Momente des Diskontierungsfaktors  $1/R(t)$  werden nach der

Methode von Black-Derman-Toy für Zinsstrukturmodelle in Kapitel 3.7 bestimmt. Im Folgenden wird die Berechnung der Momente von  $A(t)$  und der, für den Bestand repräsentativen, Zufallsgröße  $PV$  näher betrachtet. Dafür werden folgende Annahmen getroffen:

- (i) Die Zufallsvariablen  $A_j^i(t)$  sind für alle  $i \in I$  unabhängig voneinander. Für ein festes  $i \in I$  gilt für alle  $j = 1, \dots, c_i$ , dass  $A_j^i(t)$  identisch verteilt.
- (ii)  $A_j^i(t)$  und  $1/R(t)$  sind unabhängig voneinander (vgl. Annahme 5.1).
- (iii) Die Diskontierungsfaktoren  $1/R(t)$  sind nicht unabhängig.

Da Versicherungsverträge der  $m$  Modelpoints unabhängig sind, gilt für die erwarteten Zahlungen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A(t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i \in I} c_i A^i(t)\right] = \sum_{i \in I} c_i \mathbb{E}[A^i(t)] \\ &= \sum_{i \in RV} c_i {}_{t-1}q_x a_i \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} + \sum_{i \in Re} c_i {}_t p_x a_i \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}}. \end{aligned}$$

Das zweite Moment der Auszahlungsfunktion  $A(t)$  lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{c_i} A_j^i(t)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{c_k} A_j^i(t) A_l^k(t)\right] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{c_k} \mathbb{E}[A_j^i(t) A_l^k(t)] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{c_i} \mathbb{E}[A_j^i(t) A_l^i(t)] + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{c_k} \mathbb{E}[A_j^i(t) A_l^k(t)] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{c_i} \mathbb{E}[A_j^i(t)^2] + \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{c_i} \mathbb{E}[A_j^i(t) A_l^i(t)] \\ &\quad + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} \sum_{j=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{c_k} \mathbb{E}[A_j^i(t) A_l^k(t)] \\ &= \sum_{i \in I} c_i \mathbb{E}[A_1^i(t)^2] + \sum_{i \in I} c_i (c_i - 1) \mathbb{E}[A_1^i(t) A_2^i(t)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} c_i c_k \mathbb{E}[A_1^i(t) A_1^k(t)] \\
 & = \sum_{i \in I} c_i \mathbb{E}[A_1^i(t)^2] + \sum_{i \in I} c_i (c_k - 1) \mathbb{E}[A_1^i(t)] \mathbb{E}[A_2^i(t)] \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} c_i c_k \mathbb{E}[A_1^i(t)] \mathbb{E}[A_1^k(t)].
 \end{aligned}$$

Für die Varianz der allgemeinen Auszahlungsfunktion gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(A(t)) & = \text{Var} \left( \sum_{i \in I} c_i A^i(t) \right) = \sum_{i \in I} c_i \text{Var} (A^i(t)) \\
 & \stackrel{(2)}{=} \sum_{i \in RV} c_i a_i^2 \text{Var}(D^i(t)) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} + \sum_{i \in Re} c_i a_i^2 \text{Var}(S^i(t)) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} \\
 & = \sum_{i \in RV} c_i a_i^2 {}_{t-1}q_x (1 - {}_{t-1}q_x) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}} + \sum_{i \in Re} c_i a_i^2 {}_t p_x (1 - {}_t p_x) \mathbb{I}_{\{t \leq n_i\}}.
 \end{aligned}$$

In Schritt (2) wird die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Verträge verschiedener Modelpoints verwendet. Für zwei Zeitpunkte  $t_1, t_2 = 1, 2, 3$  mit  $t_1 < t_2$  gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} (A(t_1), A(t_2)) & = \sum_{i \in RV} c_i a_i^2 \text{Cov} (D^i(t_1), D^i(t_2)) \mathbb{I}_{\{t_2 \leq n_i\}} \\
 & + \sum_{i \in Re} c_i a_i^2 \text{Cov} (S^i(t_1), S^i(t_2)) \mathbb{I}_{\{t_2 \leq n_i\}}.
 \end{aligned}$$

Nach Formel (5.8) sind im  $i$ -ten Modelpoint die Anzahl der Sterbenden  $D^i(t)$  multinomialverteilt für  $t = 1, 2, 3$ . Im  $i$ -ten Modelpoint ist die Kovarianz zwischen der Anzahl der Sterbenden  $D^i(t_1)$  im Jahr  $t_1$  und  $D^i(t_2)$  im Jahr  $t_2$  demzufolge

$$\text{Cov}(D^i(t_1), D^i(t_2)) = -c_i {}_{t_1-1}q_{30} {}_{t_2-1}q_{30}.$$

Für die Anzahl der Überlebenden  $S^i(t_1)$  im Jahr  $t_1$  und  $S^i(t_2)$  im Jahr  $t_2$  lautet die Kovarianz

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(S^i(t_1), S^i(t_2)) & = \mathbb{E} \left[ (S^i(t_1) - \mathbb{E}[S^i(t_1)]) (S^i(t_2) - \mathbb{E}[S^i(t_2)]) \right] \\
 & = \mathbb{E} \left[ S^i(t_1) S^i(t_2) \right] - \mathbb{E}[S^i(t_1)] \mathbb{E}[S^i(t_2)].
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbb{E} \left[ S^i(t_1) S^i(t_2) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ S^i(t_1) S^i(t_2) \right] \middle| S^i(t_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[ (S^i(t_1))^2 \cdot {}_{t_2-1}p_{70} \right] = \mathbb{E} \left[ (S^i(t_1))^2 \right] \cdot {}_{t_2-1}p_{70+t_2} \\
&= \left[ \text{Var}(S^i(t_1)) + \mathbb{E}[S^i(t_1)]^2 \right] \cdot {}_{t_2-1}p_{70}
\end{aligned}$$

Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten gilt der Zusammenhang

$${}_{t_2-1}p_{70} = p_{70} \cdots p_{70+t_2-1} \cdot p_{70+t_2}. \quad (5.14)$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeiten sind im ersten Jahr bekannt und es gilt

$$\text{Cov}(A(1), A(t)) = 0 \quad , t = 2, 3.$$

Demnach gilt folgende Kovarianz für den Rentenbestand

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(S^i(2), S^i(3)) &= \left[ \text{Var}(S^i(2)) + \mathbb{E}[S^i(2)]^2 \right] p_{72} - \mathbb{E}[S^i(2)]\mathbb{E}[S^i(3)] \\
&= \left[ c_i p_{70} p_{71} (1 - p_{70} p_{71}) + (c_i p_{70} p_{71})^2 \right] p_{72} \\
&\quad - c_i p_{70} p_{71} c_i p_{70} p_{71} p_{72} \\
&= c_i p_{70} p_{71} p_{72} \left[ (1 - p_{70} p_{71}) + c_i p_{70} p_{71} - c_i p_{70} p_{71} \right] \\
&= c_i p_{70} p_{71} p_{72} (1 - p_{70} p_{71})
\end{aligned}$$

### 5.2.3 Ergebnisse und Sensitivitätsanalyse

Aus allen durchgeführten Berechnungen resultieren folgende Ergebnisse: Die verwendeten Rechnungsgrundlagen sind in Tabelle 5.6 angeführt. Die beiden Tabellen 5.7 und 5.9 beinhalten die nötigen Terme, die zur Berechnung des Vorhersage- und Zinsänderungsrisikos nötig sind. Die letzteren sind in Tabelle 5.10 enthalten.

Mithilfe der Binomialapproximationen aus Kapitel 3.7 und 4.4 wurden die Rechnungsgrundlagen ermittelt.

		Rechnungsgrundlagen		
		$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<b>Re</b>	${}_t p_{70}$	0.98985	0.97854	0.96619
	$p_{70+t}$	0.98985	0.98857	0.98738
<b>RV</b>	${}_{t-1} q_{30}$	0.00039	0.00041	0.00043
	$q_{30+t}$	0.00039	0.00041	0.00043

Tabelle 5.6: Rechnungsgrundlagen für Beispielbestand

Zur Quantifizierung des Vorhersage- und Investmentrisikos wurden die in (5.12) und (5.13) angeführten Terme berechnet:

$T_i$	$\mathbb{E}[A(T_i)]$	$\mathbb{E}[A^2(T_i)]$	$\text{Var}(A(T_i))$
0	$1.9431 \cdot 10^9$	$3.7758 \cdot 10^{18}$	0
1	$1.6261 \cdot 10^9$	$2.6440 \cdot 10^{18}$	$1.2010 \cdot 10^{12}$
2	$8.7809 \cdot 10^8$	$7.7104 \cdot 10^{17}$	$8.8393 \cdot 10^{11}$

Tabelle 5.7: Ergebnisse zu Cash Flow für Beispielbestand

$T_i$	$\mathbb{E}\left[\frac{1}{R(T_i)}\right]$	$\mathbb{E}\left[\frac{1}{R^2(T_i)}\right]$	$\text{Var}\left(\frac{1}{R(T_i)}\right)$
0	0.97771	0.95592	0
1	0.95126	0.90491	$1.5630 \cdot 10^{-5}$
2	0.92157	0.84938	$8.7099 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 5.8: Ergebnisse zur Diskontierung für Beispielbestand

Für verschiedenen Zeitpunkte  $T_i$  und  $T_k$  für  $i, k = 0, 1, 2$  wurden folgende Resultate ermittelt.

$T_i, T_k$	$\text{Cov}(A(T_i), A(T_k))$	$\text{Cov}\left(\frac{1}{R(T_i)}, \frac{1}{R(T_k)}\right)$
0, 1	0	0
0, 2	0	0
1, 2	$9.0769 \cdot 10^{11}$	$1.1569 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.9: Kovarianzen für Beispielbestand

Ausgehend von Formel (5.10) und Formel (5.11) kann schließlich das Vorhersagerisiko sowie das Zinsänderungsrisiko angeführt werden.

	Zinsänderungsrisiko	Vorhersagerisiko
absolut	$2.9000 \cdot 10^{14}$	$3.4292 \cdot 10^{12}$
relativ	$1.6011 \cdot 10^{-5}$	$1.8933 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 5.10: Beispielbestand: Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko

Es ist möglich, das Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko durch Bestandsmodifikationen zu beeinflussen. Dieser Effekt wird anhand der folgenden vier Szenarien analysiert.

**Szenario 1:** Im Beispielbestand werden Versicherungsverträge mit Erlebenscharakter, das bedeutet Rentenversicherungen, verdoppelt:

$$c_1 = 200.000, \quad c_2 = 500.000, \quad c_3 = 600.000$$

**Szenario 2:** Im Beispielbestand werden Versicherungsverträge mit Erlebenscharakter, das bedeutet Rentenversicherungen, halbiert:

$$c_1 = 50.000, \quad c_2 = 125.000, \quad c_3 = 150.000$$

**Szenario 3:** Im Beispielbestand werden Versicherungsverträge mit Erlebenscharakter, das bedeutet Rentenversicherungen, verdoppelt und jene mit Todesfallcharakter, die Risikoversicherungen, halbiert:

$$c_1 = 200.000, \quad c_2 = 500.000, \quad c_3 = 600.000$$

$$c_4 = 25.000, \quad c_5 = 40.000, \quad c_6 = 100.000$$

**Szenario 4:** Im Beispielbestand werden Versicherungsverträge mit Erlebenscharakter, das bedeutet Rentenversicherungen, halbiert und jene mit Todesfallcharakter, die Risikoversicherungen, verdoppelt:

$$c_1 = 50.000, \quad c_2 = 125.000, \quad c_3 = 150.000$$

$$c_4 = 100.000, \quad c_5 = 80.000, \quad c_6 = 400.000$$

Für die vier Szenarien resultieren die Risiken:

	Zinsänderungsrisiko	Vorhersagerisiko
<b>Szenario 1</b>		
absolut	$1.1501 \cdot 10^{15}$	$3.6054 \cdot 10^{12}$
relativ	$1.5992 \cdot 10^{-5}$	$5.0134 \cdot 10^{-8}$
Diff in %	-0.0012%	-74%
<b>Szenario 2</b>		
absolut	$7.3744 \cdot 10^{13}$	$3.3411 \cdot 10^{12}$
relativ	$1.6048 \cdot 10^{-5}$	$7.2709 \cdot 10^{-7}$
Diff in %	+0.0023%	+285%
<b>Szenario 3</b>		
absolut	$1.1452 \cdot 10^{15}$	$1.9859 \cdot 10^{12}$
relativ	$1.5983 \cdot 10^{-5}$	$2.7620 \cdot 10^{-8}$
Diff in %	-0.0017%	-86%
<b>Szenario 4</b>		
absolut	$7.6265 \cdot 10^{13}$	$6.5940 \cdot 10^{12}$
relativ	$1.6121 \cdot 10^{-5}$	$1.3939 \cdot 10^{-6}$
Diff in %	+0.0069%	+637%

Tabelle 5.11: Beispielbestand: Vorhersage- und Zinsänderungsrisiko für Szenarien 1-4

Während das Zinsänderungsrisiko für alle Szenarien relativ unverändert bleibt, gibt es beim Vorhersagerisiko deutliche Veränderungen. Im dritten Szenario ist das Vorhersagerisiko am niedrigsten, was auf die Verdoppelung an Rentenversicherungen und Reduktion der Risikoversicherungen zurückzuführen ist. Bei Szenario 1 ist ein ähnlich positiver Effekt zu beobachten. Es kann festgestellt werden, dass eine Erhöhung der Anzahl an Risikoversicherungen im Bestand deutliche negative Änderungen des Vorhersagerisikos verursacht. Zusammenfassend wird festgehalten, dass das Vorhersagerisiko in Versicherungsbeständen durch eine günstige Bestandszusammensetzung verkleinert werden kann. Diese Methode der Bestandsoptimierung zur Steuerung des Vorhersagerisikos wird nach [Wetzel \[2011\]](#) als *natürliches Hedging* bezeichnet.

## 5.3 Der Quadrinomialbaum

Die Bewertung von Lebensversicherungsverträgen erfordert die gemeinsame Anwendung beider Modelle in Form einer Kombination der beiden zugrundeliegenden Binomialbäume. Zu diesem Zweck eignet sich ein *Quadrinomialbaum*. Daher wird diese Datenstruktur im Folgenden näher erörtert.

Ausgehend von den zugrundeliegenden Binomialbäumen der Sterblichkeits- und Zinsstruktur wird ein neuer gemeinsamer rekombinierbarer Baum erstellt. Die Konstruktion dieser Datenstruktur wird schrittweise eingeführt:

- (i) Zu jedem Level werden alle möglichen Paarkombinationen  $(p_{i;j}; r_{k;l})$  gebildet. Die zusammengesetzten Paare  $(p_{i;j}; r_{k;l})$  bilden einen Knoten im neuen Baum aus Abbildung 5.6 und es gilt  $i = k$ .
- (ii) Zwei Knoten  $(p_{i;j}; r_{k;l})$  und  $(p_{i+1;j}; r_{k+1;l})$  werden durch eine Kante verbunden, wenn im ursprünglichen Binomialbaum  $p_{i;j}$  mit  $p_{i+1;j}$  und  $r_{k;l}$  mit  $r_{k+1;l}$  verbunden sind. Somit wird gewährleistet, dass die Pfade des neuen Baumes alle möglichen Entwicklungen, basierend auf den ursprünglichen Binomialbäumen zur Modellierung der Sterblichkeits- und Zinsdynamik, abdecken.

Aus dieser Konstruktion resultiert ein *Quadrinomialbaum* mit der grafischen Darstellung in Abbildung (5.6) (vgl. Wetzel [2011], S. 75). Die folgende Definition führt wichtige Eigenschaften dieser Datenstruktur ein.

**Definition 5.1** (*Rekombinierbarer*) *Quadrinomialbaum*

*Ein voller rekombinierbarer Quadrinomialbaum hat folgende Eigenschaften:*

- *Der diskrete Zeitparameter  $t$  umfasst die Zeitpunkte  $T_0, \dots, T_N$ . Jede Kante aus  $\mathcal{A}$  wird mit einer Wahrscheinlichkeit gewichtet.*
- *Zu jedem Zeitpunkt  $T_j : j = 0, \dots, N$  gilt für die Anzahl an Knoten  $K_j = (j + 1)^2$ .*
- *Von jedem Knoten (ausgenommen Endknoten zu Zeitpunkt  $T_N$ ) gehen vier Kanten aus und es gibt  $4^{N-1}$  Pfade im Baum.*
- *Für das Baummodell aus Definition 2.8,  $\mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{A}, \Omega, y, \mathbb{P}, t)$ , ist die Kardinalität von  $\mathcal{K}$  bekannt mit  $|\mathcal{K}| = \sum_{j=0}^N K_j^2 = \frac{(N+1)(N+2)(2(N+1)+1)}{6}$ . Das Baumwachstum verhält sich kubisch in  $N$ .*

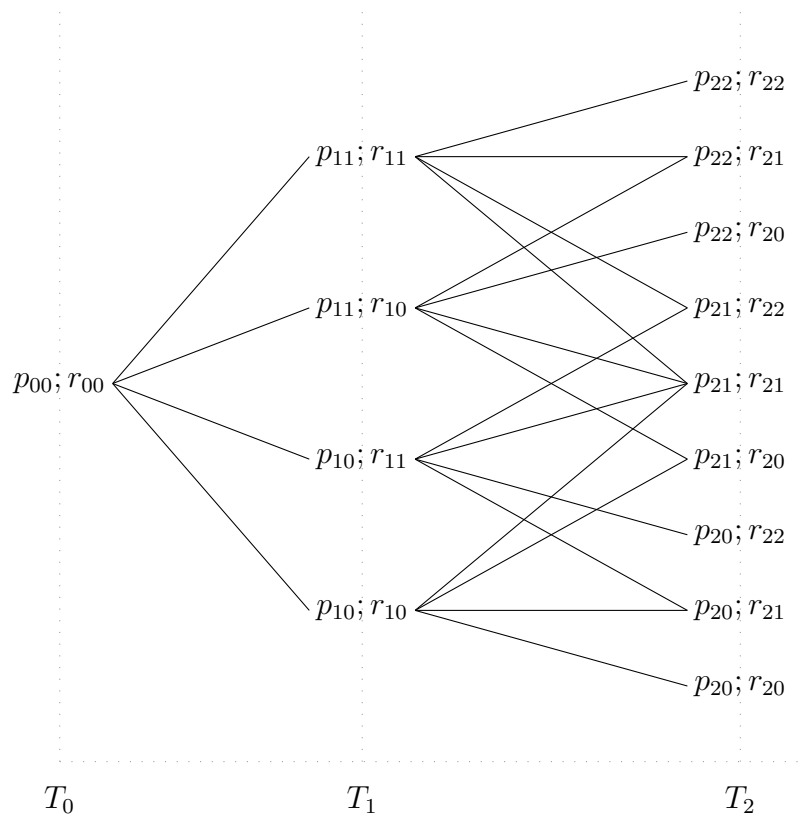


Abbildung 5.6: Quadrinomialbaum aus dem MRBG-Modell und BDT-Modell für zwei Perioden

Dieser Baum gewährleistet die gemeinsame Anwendung zweier Binomialbäume, indem alle möglichen Entwicklungen, die auf Basis der zugrundeliegenden Binomialprozesse eintreten können, abgebildet werden.

Durch die Summe aller möglichen Pfadentwicklungen kann die Nettoeinmalprämie einer Lebensversicherung bestimmt werden. Nach Wetzler [2011] gelten folgende Formeln für die NEP einer Renten-, Risiko- und Term-Fix-Versicherung:

#### Term-Fix-Versicherung (TV):

$$NEP(T) = VS \cdot \sum_{\nu=1}^{2^{N-1}} P(I_{\nu}) \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{1 + r_{i, I_{\nu}}} \quad (5.15)$$

**Rentenversicherung (EV):**

$$NEP(EV) = VS \sum_{\nu=1}^{2^{N-1}} P(I_\nu) \sum_{\gamma=1}^{2^{N-1}} P(J_\gamma) \prod_{i=0}^{N-1} \frac{p_{i,J_\gamma}}{1+r_{i,I_\nu}} \quad (5.16)$$

**Risikoversicherung (RV):**

$$NEP(RV) = VS \sum_{\nu=1}^{2^{N-1}} P(I_\nu) \sum_{\gamma=1}^{2^{N-1}} P(J_\gamma) \sum_{t=0}^{N-1} \left( \frac{1-p_{t,J_\gamma}}{1+r_{t,I_\nu}} \prod_{i=0}^{t-1} \frac{p_{i,J_\gamma}}{1+r_{i,I_\nu}} \right) \quad (5.17)$$

Unter der Annahme unabhängiger Sterblichkeits- und Zinsstrukturentwicklungen (nach 4.1) ist die Modellierung anhand der zugrundeliegenden Binomialbäume ausreichend, da die Leistungen und die Diskontierungsfaktoren in jeder Auszahlungsfunktion faktorisiert werden können (vgl. Wetzel [2011], S.77).

In dieser Arbeit wird ein spezielles Anwendungsbeispiel zur Erfassung zukünftiger Gewinne analysiert, das die Modellierung anhand eines Quadrinomialbaumes erfordert. Zu diesem Zweck wird im Folgenden das Gewinnsystem konstruiert.

**5.3.1 Das Gewinnsystem anhand des Quadrinomialbaumes**

Das zugrundeliegende Gewinnsystem setzt sich aus dem Sterblichkeits- und Zinsgewinn zusammen. Die Vernachlässigung von Kosten verhindert die Entstehung eines Kostengewinnes und es wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass kein sonstiger Gewinn lukriert wird. Demzufolge gibt es zwei Gewinnquellen in Form des Deckungskapitals und der jährlichen Risikoprämien. Für die Berechnung der Verlaufswerte eines Lebensversicherungsvertrages wird an Gerber [1986] verwiesen, dem auch die Notationen aus diesem Kapitel folgen. Sei  ${}_kV$  das Deckungskapital und  $c_k$  bezeichne die Leistung im Todesfall der versicherten Person zum Stichtag des Versicherungsjahres  $k = T_0, \dots, T_N$ . Mit  $v$  wird der jährliche Diskontierungsfaktor bezüglich eines festgelegten konstanten Rechnungszinssatzes  $i$  bezeichnet. Die jährliche Prämie wird mit  $\Pi_k$  bezeichnet und in die Spar- und Risikokomponente zerlegt mit

$$\Pi_k = \Pi_k^S + \Pi_k^R \quad \forall k = T_0, \dots, T_N. \quad (5.18)$$



Die Zufallsvariable  $K$  repräsentiere das Jahr, in dem der Tod der versicherten Person eintritt, mit  $K \in \mathbb{N}$ . Für das Versicherungsunternehmen gilt nach Gerber [1986], S. 64, die Verlustfunktion

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & , K \leq k+1 \\ c_{k+1}v - ({}_kV + \Pi_k) & , K = k \\ {}_{k+1}Vv - ({}_kV + \Pi_k) & , K \geq k+1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(5.18)}{=} \begin{cases} 0 & , K \leq k+1 \\ -\Pi_k^R + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)v & , K = k \\ -\Pi_k^R & , K \geq k+1 \end{cases} .$$

Lebensversicherungsverträge werden in den meisten Fällen für lange Laufzeiten abgeschlossen. Um die dauerhafte Erfüllbarkeit aller Verpflichtungen zu gewährleisten werden die Rechnungsgrundlagen nach dem Vorsichtsprinzip bestimmt. Dies hat zur Folge, dass die tatsächlich verzeichneten Rechnungsgrundlagen die ursprünglich festgelegten übersteigen, da diese entweder veraltet sind oder zu konservativ gewählt wurden, was zu Überschussbildungen führt.

Sei nach Gerber [1986], S.67, mit  $i'$  der tatsächlich erwirtschaftete Gewinn des Unternehmens und mit  $i$  der verwendete Rechenzins bezeichnet. Dann lautet der technische Gewinn für das Jahr  $k$  mit  $k = T_0, \dots, T_N$

$$G_{k+1} = \begin{cases} ({}_kV + \Pi_k)(1 + i') - c_{k+1} & , K = k \\ ({}_kV + \Pi_k)(1 + i') - {}_{k+1}V & , K \geq k+1 \end{cases} .$$

Für die umgeformte Schreibweise der Verzinsung mit  $1 + i' = 1 + i + i' - i$  lässt sich der jährliche Gewinn  $G_k$  in zwei Komponenten unterteilen mit

$$G_{k+1} = \underbrace{({}_kV + \Pi_k)(i' - i)}_{\text{Zinsgewinn}} - \underbrace{\Lambda_k(1 + i)}_{\text{Sterblichkeitsgewinn}} .$$

Der Zinsgewinn im Jahr  $k$  wird in weiterer Folge mit  $ZG$  und der Sterblichkeitsgewinn mit  $SG$  bezeichnet.

Für das Anwendungsbeispiel wird die Kapitalentwicklung in Form eines Baummodells nach BDT und die Sterblichkeitsentwicklung anhand des MRBG-Baummodells modelliert. Das Versicherungsunternehmen legt zudem bei Vertragsabschluss einen Prozentsatz  $\alpha$  fest, in dessen Höhe der jährliche Gewinn an den Kunden ausge-

schüttet wird. In diesem Sinne wird der jährliche Gewinn im Anwendungsbeispiel mit  $G^*$  bezeichnet und lautet

$$G^* = \alpha \cdot \max(ZG + SG, 0).$$

In weiterer Folge bezeichne  $r_{k;l}$  den tatsächlich erwirtschafteten Zins des Unternehmens nach der modellierten Kapitalanlageentwicklung aus dem zugrundeliegenden Baummodell. Die jährlichen Sterblichkeitsraten seien mit  $q_{k;j}$  bezeichnet. Der Zinsgewinn kann für jeden Zustand im Baum  $(k;l)$  mit  $k = T_0, \dots, T_{N-1}$  und  $l = 0, \dots, k$  festgelegt werden als

$$ZG_{k;l} = ({}_kV + \Pi_k)(r_{k;l} - i).$$

Der Sterblichkeitsgewinn resultiert aus der Abweichung der eingetretenen Sterblichkeitsraten bemessen an der Risikoprämie

$$\Pi_k^R = (c_{k+1} - {}_{k+1}V) q_{x+k}$$

und lautet für jeden Zustand des Baumes  $(k;j)$  mit  $k = T_0, \dots, T_{N-1}$  und  $j = 1, \dots, k$

$$SG_{k;j} = (c_{k+1} - {}_{k+1}V) (q_{k;j} - q_{x+k}).$$

Für jeden Knoten des Quadrinomialbaumes lässt sich die Gewinnfunktion auswerten als

$$G_{k;j;l}^* = \alpha \cdot \max(ZG_{k;l} + SG_{k;j}, 0) \quad (5.19)$$

Das anhand eines Quadrinomialbaumes konstruierte Gewinnsystem basiert auf zwei Gewinnquellen: dem Deckungskapital zu Beginn jedes Versicherungsjahres und der jährlichen Risikoprämie. Für diese Gewinnquellen wird eine traditionelle Gemischte Versicherung berechnet, die den aktuellen gültigen Rechnungsgrundlagen am Markt entspricht. Demnach gilt für den Rechnungszinssatz nach aktueller Höchstzinssatzverordnung (vgl. [RIS \[2012\]](#))

$$i = 1.75\%$$

und es wird die Sterbetafel AVÖ 2005 R unisex (vgl. [AVÖ \[2012\]](#)) herangezogen.

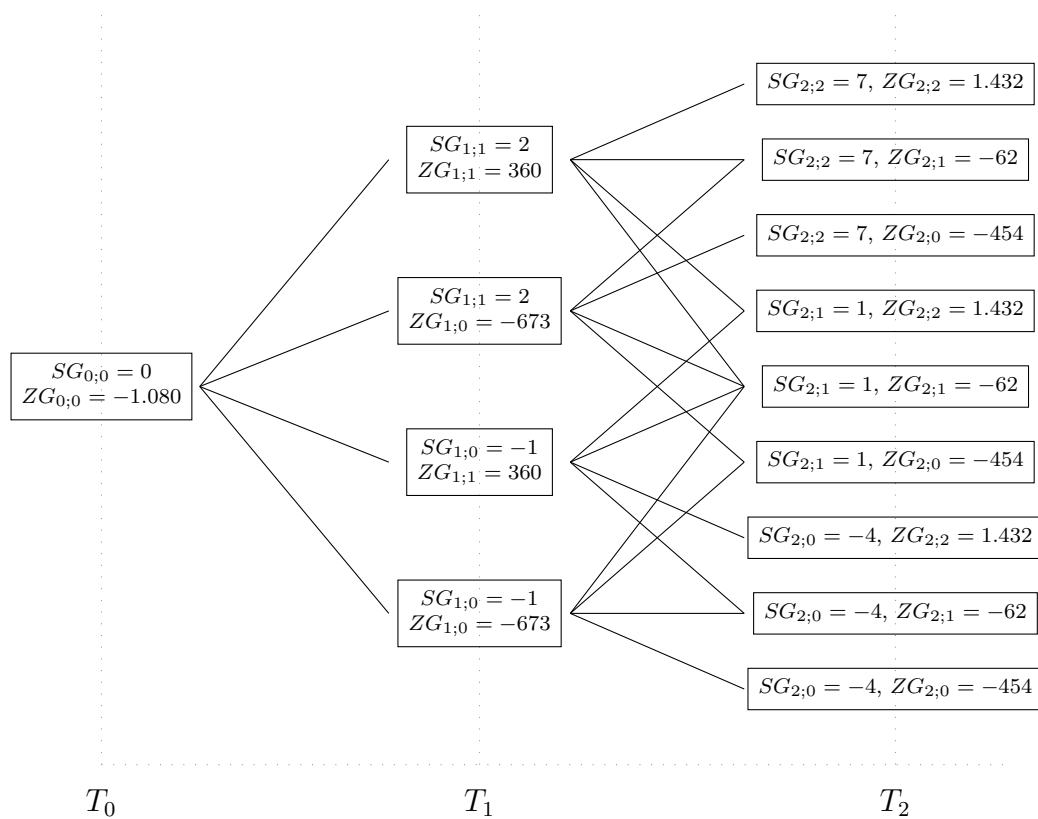


Abbildung 5.7: Gewinndarstellung anhand eines Quadrinomialbaumes für Tabelle 5.12

### 5.3.2 Beispielrechnungen zum Gewinnsystem

Für die Gewinnermittlung wird eine gemischte Versicherung für gegebene Laufzeiten  $n$  berechnet. Aufgrund der Komplexität der Datenstruktur wird die Möglichkeit eines Rückkaufs für kurze Laufzeiten zu jedem Jahr und für längere Laufzeiten zu jedem zweiten oder jedem dritten Jahr gewährt. Darauf aufbauend wird ein Gewinnsystem anhand des Quadrinomialbaumes konstruiert, sodass der Kunde zu jedem möglichen Rückkaufszeitpunkt einen fixen Anteil  $\alpha$  am Gewinn erhält. Für die Berechnung der gemischten Versicherung wird der Rechenzins  $i = 1.75\%$  und die aktuelle Sterbetafel AVÖ 2005 R Unisex (vgl. AVÖ [2012]) für eine 30-jährige Person herangezogen. Als Versicherungssumme werden 100.000 Geldeinheiten angesetzt.

Für den Fall eines möglichen Rückkaufs zu jedem dritten Jahr wird in folgender

Tabelle der erwartete Gesamtgewinn für  $\alpha \in \{0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1\}$  angeführt.

Gewinnanteil $\alpha$	Gesamtgewinn in GE		
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
0.75	634	9.375	60.434
0.80	677	10.000	64.469
0.85	720	10.625	68.498
0.90	762	11.250	72.527
0.95	804	11.874	76.556
1.00	846	12.500	80.585
% an VS	0.6 – 0.8%	9.4 – 12.5%	60.4 – 80.6%

Tabelle 5.12: Beispielrechnung zu Gewinnsystem

Der Gewinn wird dem Kunden zum festgelegten Anteil  $\alpha$  jährlich ausgeschüttet. In Tabelle 5.12 wird der erwartete Gewinn des Versicherungsnehmers, abhängig von der Laufzeit, nach dem beschriebenen Gewinnsystem angeführt. Die Gewinne steigen mit zunehmender Laufzeit, was primär auf die Entwicklung der zugrundeliegenden Gewinnquellen zurückzuführen ist. Aufgrund der fest gewählten Zinsrate  $i = 1.75\%$  werden bestimmte Pfade ab einem gewissen Zeitpunkt dauerhaft größer als  $i$  sein und zu einem Zinsgewinn führen. Die kalkulierten Sterblichkeiten werden in der Praxis sehr vorsichtig angesetzt und sind für jedes Jahr anhand der verwendeten Rentensterbetafel vorgegeben. Auf den meisten Pfaden führt die simulierte Sterblichkeitsentwicklung zu einem positiven Sterblichkeitsgewinn, was sich bei einer Laufzeit von  $n = 15$  besonders deutlich widerspiegelt. Für die angeführten Laufzeiten aus Tabelle 5.12 entstehen folgende Möglichkeiten an Pfadentwicklungen:

Pfade	Simulationen		
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
$4^{n-1}$	256	262.144	268.435.456

Tabelle 5.13: Pfadentwicklung für Gewinnberechnung aus Tabelle 5.12

Für den Fall eines möglichen Rückkaufs zu jedem dritten Jahr wird in folgender Tabelle der erwartete Gesamtgewinn für  $\alpha \in \{0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1\}$  angeführt.

Gewinnanteil	Gesamtgewinn in GE		
	$\alpha$	$n = 18$	$n = 27$
0.75	1.172	8.061	38.269
0.80	1.250	8.599	40.820
0.85	1.328	9.136	43.372
0.90	1.406	9.674	45.923
0.95	1.484	10.211	48.474
1.00	1.562	10.748	51.025
% an VS	1.2 – 1.6%	8.1 – 10.8%	38.3 – 51.0%

Tabelle 5.14: Beispielrechnung zu Gewinnsystem

Zur Bestimmung des Gewinns werden die Gewinnquellen des aktuellen Jahres und der vorhergehenden beiden Versicherungsjahre herangezogen.

Unter der Erweiterung, den Gewinn jedes dritte Jahr auszuschütten, wird dem VN weniger an Gewinn ausbezahlt, da im zugrundeliegenden Quadrinomialbaum weniger Pfadentwicklungen simuliert werden. Diese Methode der Gewinnermittlung ermöglicht folglich die Gewinnberechnung für längere Laufzeiten anhand der komplexen Datenstruktur des Quadrinomialbaumes, führt aber zu geringeren Ausschüttungen an den VN. Die Anzahl der nötigen Pfadsimulationen ist in folgender Tabelle angeführt:

Pfade	Simulationen		
	$n = 18$	$n = 27$	$n = 36$
$4^{n/3-1}$	1.024	65.536	4.194.304

Tabelle 5.15: Pfadentwicklung für Gewinnberechnung aus Tabelle 5.14

## Schlussfolgerung

In der europäischen Versicherungsbranche gehört die Bewertung impliziter Optionen in Lebensversicherungsverträgen und die Berechnung von Best Estimates zu den zentralen Themen unter Solvency II.

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden diskrete Baummodelle präsentiert, die zur Bewertung der genannten Größen herangezogen werden können. Die vorgestellten Methoden basieren auf theoretischen Modellen der modernen Finanzmathematik und ermöglichen eine anwendungsorientierte Umsetzung für diskrete Handelszeitpunkte. Im Rahmen dieser Arbeit wurde aufgezeigt, dass die Modellierung der Mortalitätsentwicklung unter dem Framework der modernen Finanzmathematik möglich ist. Dies öffnet die Tür zu bereits intensiv erforschten Gebieten der Finanzmathematik und erlaubt die Übertragung theoretischer Resultate über Zinsgrößen auf Modellgrößen für Sterblichkeiten. Ein Kritikpunkt dieser Methoden ist der fehlende Markt für Mortalitätsprodukte. Erste Ansätze sind bereits vorhanden in Form von Katastrophen- und Langlebigkeitsbonds oder Rentenversicherungen als Swap-Rates (vgl. [Blake u.a. \[2006\]](#)). Dennoch müssen auf dieser Ebene erst attraktive Produkte eingeführt werden, die eine Marktentstehung fördern.

Die praktische Anwendung der vorgestellten Methoden wurde einführend anhand der Bepreisung von Caps auf Zins- und Sterblichkeitsraten erörtert. In weiterer Folge wurde anhand eines vorgegebenen Versicherungsbestandes die Best Estimate Berechnung basierend auf diskreten Baummodellen untersucht. In Bezug auf diese Ergebnisse konnte gezeigt werden, dass durch eine geeignete Bestandszusammensetzung das Vorhersagerisiko für Versicherungsunternehmen vorteilhaft beeinflusst werden kann. Die Bewertung impliziter Optionen wurde anhand eines Gewinnsystems analysiert. Dabei ergab sich, dass vorhandene Abhängigkeiten zwischen Kapitalmarkt- und Sterblichkeitsdynamik ein komplexes Baummodell als neue Datenstruktur bei der Umsetzung erfordert. Es konnte aufgezeigt werden, dass komplexe Baummodelle programmiertechnische Grenzen bei Speicheraufwand und Laufzeit erreichen.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die Solvency II-konforme Bewertung impliziter Optionen und Best Estimates für versicherungstechnische Rückstellungen in Lebensversicherungsverträgen mit der Methode bekannter Baummodelle durchgeführt werden kann, aber bei vorhandenen Abhängigkeitsstrukturen zwischen Zins- und Sterblichkeitsentwicklung beträchtlich an Komplexität zunimmt.

# Literaturverzeichnis

- [Albrecher u a. 2009] ALBRECHER, Hansjörg ; BINDER, Andreas ; MAYER, Philipp: *Einführung in die Finanzmathematik*. Birkhäuser Verlag, 2009 2.2
- [Austria 2012] AUSTRIA, Statistik: *Sterbetafeln*. [http://www.statistik.at/web\\_de/statistiken/bevoelkerung/demographische\\_masszahlen/sterbetafeln/index.html](http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/demographische_masszahlen/sterbetafeln/index.html), 2012 (document), 4, 4.1
- [AVÖ 2012] AVÖ: *Rechnungsgrundlagen*. [http://www.avoe.at/avoe\\_rechnungsgrundlagen.html](http://www.avoe.at/avoe_rechnungsgrundlagen.html), 2012 5.1.1, 5.3.1, 5.3.2
- [Blake u a. 2006] BLAKE, David ; CAIRNS, Andrew J. ; DOWD, Kevin: Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. *ASTIN Bulletin* 36 (2006), S. 79–120 4, 4.1, 4.2, 4.2, 3, 4.6, 4.7, 5.3.2
- [Blake u a. 2008] BLAKE, David ; CAIRNS, Andrew J. ; DOWD, Kevin: Modelling and Management of Mortality Risk: A Review. *Scandinavian Actuarial Journal* 108 (2008), S. 79–113 4
- [Brace u a. 1997] BRACE, Alan ; GATAREK, Dariusz ; MUSIELA, Marek: The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance* 7 (1997), S. 127–155 3.7, 3.9, 2, 3
- [Brigo und Mercurio 2006] BRIGO, Damiano ; MERCURIO, Fabio: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Bd. 2. Springer Finance, 2006 3, 3.1, 3.2, 3.2, 3.3, 3.6, 3.6, 3.7, 3.9, 3.9, 4.8
- [Bruno u a. 1997] BRUNO, Maria ; CAMREINI, Emanuela ; TOMASSETTI, Alvaro: Financial and Demographical Risks of a Portfolio of Life Insurance Policies with Stochastic Interest Rates: Evaluation Methods and Applications. *North American Actuarial Journal* 4 (1997), S. 44–113 5.2



- [Buetow u.a. 2001] BUETOW, Gerald W. ; HANKE, Bernd ; FABOZZI, Frank J.: Impact of Different Interest Rate Models on Bond Value Measures. *The Journal of Fixed Income* 11 (2001), S. 41–53 3.6
- [Cairns 2004] CAIRNS, Andrew J.: *Interest Rate Models - An Introduction*. Princeton University Press, 2004 4.6
- [Cairns 2007] CAIRNS, Andrew J.: *A Multifactor Generalisation of the Olivier-Smith Model for Stochastic Mortality*. 2007. – In Proceedings of the 1st IAA Life Colloquium, Stockholm 4
- [Carriere 1994] CARRIERE, Jaques F.: An Investigation of the Gompertz Law of Mortality. *Actuarial Research Clearing House* 2 (1994), S. 161–178 4.3
- [Coppola u.a. 2002] COPPOLA, Mariarosaria ; LORENZO, Emilia D. ; SIBILLO, Marilena: Further Remarks on risk Sources Measuring: The Case os a Life Annuity Portfolio. *Journal of Actuarial Practice* 10 (2002), S. 229–241 5.2
- [Dothan 1978] DOTHAN, L. U.: On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics* 6 (1978), S. 59–69 3.6
- [EIOPA 2013] EIOPA: *European Insurance and Occupational Pensions Authority*. <https://eiopa.europa.eu/>, 2013 (document), 5.1.2, 5.2, 5.3
- [Filipovic 2009] FILIPOVIC, Damir: *Term Structure Models - A Graduate Course*. Springer Finance, 2009 3.5
- [FMA 2012] FMA: *Solvency II Handbuch - Eine Einführung in das neue Europäische Versicherungsaufsichtsrecht*. LexisNexis Verlag ARD Orac, 2012 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.4, 1.5.1, 1.5.2
- [FRED 2012] FRED: *Economic Research von Federal Reserve Bank of St.Louis - Interest Rates*. <http://research.stlouisfed.org/>, 2012. – [Online; Zugriff am 12. Dezember 2012] (document), 3.1
- [Gerber 1986] GERBER, Hans: *Lebensversicherungsmathematik*. Springer-Verlag, 1986 5.3.1, 5.3.1
- [Hull und White 1990] HULL, John ; WHITE, Alan: Pricing Interest Rate Derivate Securities. *The Review of Financial Studies* 3 (1990), S. 573–592 3.6

- [James und Webber 2001] JAMES, Jessica ; WEBBER, Nick: *Interest Rate Modeling*. John Wiley and Sons Ltd., 2001 2.2, 2.4, 3, 3.6, 3.9
- [Kazziha und Rebonato 1998] KAZZIHA, Soraya ; REBONATO, Riccardo: Unconditional Variance, Mean Reversion and Short Rate Volatility in the Calibration of the Black-Derman-Toy Model and of Two-Dimensional Log-Normal Short Rate Models / University of Michigan Department of Mathematics. 1998. – Forschungsbericht 3.7
- [Milevsky und Promislow 2001] MILEVSKY, Moshe A. ; PROMISLOW, S. D.: Mortality derivatives and the option to annuitise. *Insurance: Mathematics and Economics* 29 (2001), S. 299–318 4.3, 4.4, 4.4, 4.5.1
- [Nelson 1990] NELSON, Daniel B.: ARCH Models as Diffusion Approximations. *Journal of Econometrics* 45 (1990), S. 7–38 2.4, 2.4
- [Nelson und Ramaswamy 1990] NELSON, Daniel B. ; RAMASWAMY, Krishna: Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models. *The Review of Financial Studies* 3 (1990), S. 393–430 2.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.4, 2.3, 2.5.1, 5.1.1
- [Oksendal 2000] OKSENDAL, Bernt: *Stochastic Differential Equations*. Bd. 5. Springer-Verlag, 2000 2.1, 2.1, 2.1, 2.2, 2.2, 3.1, 3.3
- [Ornstein und Uhlenbeck 1930] ORNSTEIN, L.S. ; UHLENBECK, G.E.: On the Theory of the Brownian Motion. *Physical Review* 36 (1930), S. 823–842 2.5
- [Parker 1997] PARKER, Gary: Stochastic Analysis of the Interaction between Investment and Insurance Risks. *North American Actuarial Journal* 1 (1997), S. 55–84 4.1, 5.2, 5.2.1
- [Reuters 2013] REUTERS: *Economic Research von Federal Reserve Bank of St. Louis - Interest Rates*. <http://www.reuters.com/>, 2013. – [Online; Zugriff am 22. Februar 2013] 3.8.1
- [RIS 2012] RIS: *Gesamte Vorschrift für Höchstzinssatzverordnung*. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10007689>, 2012 5.3.1
- [RRL 2009] RRL: *Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments*

- und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II). [http://www.bmf.gv.at/Finanzmarkt/RechtlicheGrundlage\\_753/SolvabilitatII/Richtlinie\\_2009\\_138\\_EG.pdf](http://www.bmf.gv.at/Finanzmarkt/RechtlicheGrundlage_753/SolvabilitatII/Richtlinie_2009_138_EG.pdf), 2009. – [Online; accessed 13-December-2012] [1](#), [1.2](#), [1.2](#), [1.3](#), [1.3.1](#), [1.3.3](#), [1.3.4](#), [1.4](#), [1.5.1](#), [1.5.2](#)
- [Stroock und Varadhan 1979] STROOCK, Daniel W. ; VARADHAN, Srinivasa: *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, 1979 [2.4](#), [2.4](#)
- [VAG 2012] VAG: *Gesamte Rechtsvorschrift für Versicherungsaufsichtsgesetz*. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10006594>, 2012 [1.2](#)
- [Vasicek 1977] VASICEK, Oldrich: An Equilibrium Characterization of Term Structure. *Journal of Financial Economics* 5 (1977), S. 177–188 [3](#), [3.6](#)
- [Wetzel 2011] WETZEL, Carmen: *Die Funktionsweise und die Wirkung des natürlichen Hedgings*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften Ulm, 2011 [4](#), [4.1](#), [4.5.1](#), [5.2](#), [5.1](#), [5.2.1](#), [5.2.2](#), [5.2.2](#), [5.2.2](#), [5.2.3](#), [5.3](#), [5.3](#), [5.3](#)
- [Xiao 2011] XIAO, Tim: An efficient Lattice Algorithm for the Libor Market Model. *Journal of Derivatives* 19 (2011), S. 25–40 ([document](#)), [3.10](#), [3.10](#), [3.5](#), [3.10.1](#), [3.6](#), [3.6](#), [3.7](#), [3.10.1](#), [3.10.1](#), [3.1](#), [4.8](#), [4.8.1](#), [4.8.1](#), [4.10](#), [4.4](#), [4.5](#)