

Georg Wehowar

Entstehung von Preisblasen durch heterogene Markteinschätzung

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang MÜLLER

Institut für Statistik

Graz, im April 2013

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Statische Modelle	7
2.1	Ein einfaches Modell	7
2.2	Ein Modell von Jarrow	9
3	Das Modell von Harrison und Kreps	13
3.1	Grundlagen	13
3.2	Anwendungsbeispiel	16
4	Das Modell von Chen und Kohn	23
4.1	Grundlagen	23
4.2	Der minimale Gleichgewichtspreis	26
4.3	Numerisches Beispiel	42
5	Das Modell von Scheinkman und Xiong	45
5.1	Grundlagen	45
5.2	Gleichgewichtspreise	53
5.3	Preisblasen	64
5.4	Numerisches Beispiel	69
	Literatur	72

1 Einleitung

Seit Jahrhunderten kommt es immer wieder zu überhöhten Preisen von Rohstoffen oder Wertpapieren, die durch ihren tatsächlichen Wert nicht mehr gerechtfertigt zu sein scheinen. Das wohl bekannteste Beispiel aus der Geschichte ist die holländische Tulpenmanie in den Jahren 1634-1638 (vgl. [3], [29]). Damals stiegen die Preise besonders seltener Tulpenzwiebeln teilweise um das Zwanzigfache an und entwickelten sich nach und nach zu reinen Spekulationsobjekten. Man sparte die Tulpenzwiebeln auf, um sie später teurer zu verkaufen, schloss auch Termingeschäfte ab, ohne die Absicht je eine Tulpe zu besitzen, sondern lediglich um Profit zu machen. Als dann die erwarteten Preise nicht mehr erzielt wurden, brach der Markt zusammen, und der Preis der Tulpen sank wieder. Die Tulpenmanie gilt als eine der ersten wissenschaftlich gut dokumentierten Spekulationsblasen. Ihr folgten unzählige, wie zum Beispiel die US-amerikanische Immobilienblase, die um 2006 ihren Höhepunkt erreichte (vgl. [29]). Was eine Preisblase nun konkret ausmacht, ist in der Literatur jedoch nicht eindeutig festgelegt. Eine den Modellen von Harrison und Kreps [9] sowie Chen und Kohn [8] nahestehende Definition von Preisblasen stammt von Joseph E. Stiglitz [22]:

„If the expectations of investors change in such a way that they believe they will be able to sell an asset for a higher price in the future than they had been expecting, then the current price of the asset will rise. [...] if the reason that the price is high today is only because investors believe that the selling price will be high tomorrow - when 'fundamental' factors do not seem to justify such a price - then a bubble exists.“

Zur mathematischen Charakterisierung von Preisblasen gibt es zwei unterschiedliche Klassen von Modellen:

- Modelle, die Preisblasen quantitativ beschreiben, ohne ihre Entstehung zu erklären.
- Modelle, die die Entstehung von Preisblasen durch einen Mechanismus, wie zum Beispiel unterschiedliche Einschätzungen der Marktteilnehmer, erklären.

Beispiele der ersten Klassen sind [4], [18]. In einem arbitragefreien standard Marktmodell ist der Wertprozess $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ eines Finanzguts bezüglich eines riskolosen Maßes ein lokales Martingal. Ist S positiv, dann ist S stets ein Supermartingal, sodass

$$S_t - \mathbb{E}(S_T | \mathcal{F}_t) \geq 0.$$

Wenn diese Differenz echt positiv ist, so spricht man von einer Preisblase. Der Marktpreis S_t ist dann echt größer als der Fundamentalpreis $\mathbb{E}(S_T | \mathcal{F}_t)$. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn S ein lokales Martingal und kein echtes Martingal ist.

Einen anderen Zugang bilden die in dieser Arbeit beschriebenen Modelle. Sie alle haben gemeinsam, dass die Entstehung der Preisblase durch heterogene Markteinschätzungen begründet wird. Von zentraler Bedeutung für diese Klasse von Modellen ist der Begriff des

1 Einleitung

Gleichgewichtspreises. Dabei handelt es sich um den Preis, zu dem der Nachfrager bereit ist, genau jene Menge eines Finanzguts abzunehmen, die der Anbieter zu diesem Preis zu verkaufen bereit ist (vgl. S.218ff in [23]). Übersteigt ein Gleichgewichtspreis den Sachwert eines Finanzguts, kann man von einer Preisblase sprechen.

In Kapitel 2 werden zwei einperiodige, diskrete Modelle behandelt, in denen Investoren ihr Portfolio so zusammenstellen, dass sie ihren erwarteten Nutzen maximieren. Das Modell von Lintner [11] bildet den Rahmen für ein vereinfachtes Modell, anhand dessen Scheinkman und Xiong [27] die Entstehung überhöhter Preise allein durch heterogene Markteinschätzung und das Vorhandensein von Leerverkaufsverboten erklären. Ausgehend vom Lintner-Modell beschreibt Jarrow [5], wie unter anderen Annahmen Heterogenität und Leerverkaufsbedingungen nicht stets zu höheren Preisen führen müssen. Die Dynamik des Handelns wird in diesen beiden Modellen jedoch nicht berücksichtigt.

Die wichtigste Grundlage für die Erklärung der Entstehung von Preisblasen durch heterogene Markteinschätzung bildet eine Arbeit von Harrison und Kreps [9] aus dem Jahr 1978, mit der sich Kapitel 3 beschäftigt. Es handelt sich dabei um ein einfaches, diskretes Modell mit nur einem risikobehafteten Finanzgut, das Dividenden auszahlt. Die Marktteilnehmer werden in verschiedene Gruppen mit je unterschiedlichen Ansichten über die Verteilung zukünftiger Dividenden eingeteilt. Das Modell beruht auf der Dynamik von Marktteilnehmern mit heterogenen Einschätzungen. Xiong [29] formuliert hierzu treffend:

„[...] an asset buyer may be willing to pay more than his own expectation of the asset's fundamental. This is because he holds the option of reselling the asset to other more optimistic buyers for a speculative profit in the future.“

Unter spekulativem Verhalten verstehen Harrison und Kreps [9], dass ein Investor bereit ist, mehr als den erwarteten, diskontierten Wert zukünftiger Dividenden zu bezahlen. In diesem Fall lässt sich der Preis des Finanzguts nicht mehr nur durch Dividendenzahlungen rechtfertigen. Man kann sogar zeigen, wie optimistischere Einschätzungen zukünftiger Dividenden durch eine Gruppe von Marktteilnehmern zu solch spekulativem Verhalten führen. Harrison und Kreps [9] bezeichnen Preise als Gleichgewichtspreise, wenn sie sich aus dem unter allen Investorengruppen maximalen, über alle Stoppzeiten gebildeten Supremum der erwarteten, diskontierten Dividendenzahlungen bis zur Stoppzeit und dem erwarteten, diskontierten Preis zur Stoppzeit zusammensetzen. Vereinfacht ausgedrückt bestehen Gleichgewichtspreise aus dem durch Dividendenzahlungen gerechtfertigtem Sachwert und dem Preis, den man durch Verkauf des Finanzguts zu einem späteren Zeitpunkt erzielen kann. Sie sind nicht eindeutig. Harrison und Kreps [9] zeigen die Existenz und Eindeutigkeit eines minimalen Gleichgewichtspreises. Als Preisblase wird der Unterschied zwischen einem beliebigen Gleichgewichtspreis und dem minimalen definiert. Das Anwendungsbeispiel stellt eine Verallgemeinerung des numerischen Beispiels aus der Arbeit von Harrison und Kreps [9] dar und dient zu Veranschaulichung theoretischer Aussagen. Die Herkunft unterschiedlicher Einschätzungen erklärt das Modell jedoch nicht.

Mit dem Modell von Chen und Kohn [8] beschäftigt sich Kapitel 4. Es stellt eine stetige Verallgemeinerung des Modells von Harrison und Kreps [9] dar. Man beschränkt sich auf zwei Klassen von Investoren. Der Prozess der Dividendenrate ist ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit für jede Investorenklasse unterschiedlichen Mean-Reversion-Parametern. Ein Gleichgewichtspreis wird analog zu konsistenten Preisen bei Harrison und Kreps [9] eingeführt. Der minimale Gleichgewichtspreis ist eindeutig. Chen und Kohn [8] stellen eine gewöhnliche

1 Einleitung

Differentialgleichung auf und zeigen, dass deren über die parabolischen Zylinderfunktionen darstellbare Lösung als minimaler Gleichgewichtspreis aufgefasst werden kann. Ein Vorteil dieses Modells liegt darin, dass man somit den minimalen Gleichgewichtspreis explizit bestimmen kann. Die Größe einer Preisblase wird als Differenz zwischen minimalem Gleichgewichtspreis und Sachwert definiert. Da man zeigen kann, dass der Sachwert stets kleiner als der minimale Gleichgewichtspreis ist, verschwindet die Preisblase in diesem Modell nie. Das in Kapitel 5 behandelte Modell von Scheinkman und Xiong [28],[27] veranschaulicht die Entstehung einer Preisblase durch heterogene Markteinschätzung. Es enthält ein risikobehaftetes Finanzgut, das Dividenden auszahlt, und zwei Klassen A und B risikoneutraler Marktteilnehmer. Der Zinssatz wird als r konstant angenommen und die Transaktionskosten c werden berücksichtigt. Die Dividendenrate folgt einem nicht beobachtbaren Mean-Reverting-Prozess. Beobachtbar ist stattdessen ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$, der sich aus den kumulierten Dividenden und einer stochastischen Störung zusammensetzt. Zusätzlich können noch zwei sogenannte Signale beobachtet werden. Obwohl diese Information allen zugänglich ist, haben die Investorenklassen unterschiedliche Ansichten darüber. Jede Klasse überschätzt die Aussagekraft eines dieser Signale, indem sie annimmt, diese korrelieren stärker mit dem Prozess der Dividendenrate. Ein Paar von Preisen (p_t^A, p_t^B) heißt Paar von Gleichgewichtspreisen, wenn es

$$p_t^A = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E} \left(\int_t^{t+\tau} e^{-r(u-t)} dX_u + e^{-r\tau} (p_{t+\tau}^B - c) \middle| \mathcal{F}_t^A \right)$$

erfüllt, wobei das Supremum über alle nichtnegativen Stoppzeiten gebildet wird und \mathcal{F}_t^A den Informationsverlauf der Klasse A bezeichnet. Den maximalen Preis $p_t^{\infty, A}$, den ein Marktteilnehmer für alle zukünftigen, erwarteten, diskontierten Dividenden zu zahlen bereit ist, nennt man Sachwert. Jeder Gleichgewichtspreis wird zu

$$p_t^A = p_t^{\infty, A} + q_t^A$$

zerlegt, wobei q_t^A den Wiederverkaufswert des Finanzguts bezeichnet. Man führt einen Mean-Reverting-Prozess Y_t^A als Unterschied in der Einschätzung ein. Scheinkman und Xiong [28],[27] bestimmen dann jenes Paar von Gleichgewichtspreisen, bei denen q_t^A die Form $q(Y_t^A)$ hat. Definiert man die Preisblase als Differenz zwischen Gleichgewichtspreis und Sachwert, so entspricht diese genau dem Wiederverkaufswert. Somit kann man den Einfluss der Modellparameter auf die Größe der Preisblase analysieren. Überschätzung der Aussagekraft eines Signals lässt die Preisblase entstehen. Für $c \rightarrow 0$ kann man zeigen, dass die Preisblase mit steigenden Zinsen r kleiner und mit steigender Volatilität des Dividendenratenprozesses größer wird (vgl. [28]). Das Modell hat Ähnlichkeiten zu dem von Chen und Kohn [8]. Die Hauptunterschiede bestehen darin, dass bei Chen und Kohn [8] der Dividendenprozess beobachtbar ist, Transaktionskosten vernachlässigt werden und die heterogenen Einschätzungen direkt über die Mean-Reversion-Parameter modelliert werden. Der Herkunft der Preisblasen wird dadurch zwar transparenter, die Analyse der Auswirkungen einzelner Modellparameter auf das Verhalten der Preisblase gegenüber Scheinkman und Xiong [28],[27] aber erschwert.

2 Statische Modelle

In einer Arbeit von Lintner [11] wird ein statisches Modell vorgestellt, auf dem aufbauend Miller [13] die Entstehung überhöhter Preise durch Heterogenität der Marktteilnehmer sowie Leerverkaufsverboten zu erklären versucht. Jarrow [5] hebt jedoch in einem Gegenbeispiel hervor, dass in einem Spezialfall des Lintner-Modells Leerverkaufsbedingungen nicht immer überhöhte Preise verursachen müssen, und somit die Argumentation von Miller allgemein nicht gelten muss. Scheinkman und Xiong [27] zeigen, wie es in einem anderen Spezialfall durch Leerverkaufsverbote und Heterogenität der Markteinschätzung zu überhöhten Preisen kommen kann.

2.1 Ein einfaches Modell

Scheinkman und Xiong [27] betrachten ein einperiodiges Modell mit m Investoren und beschränken sich auf ein risikobehaftetes Finanzgut. Der risikolose Zinssatz ist $r = 0$. Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt und Leerverkäufe sind erlaubt. Jeder Investor wählt sein Portfolio so, dass er den erwarteten Nutzen des Vermögens zum Ende der Periode maximiert. Alle Investoren verwenden die gleiche Nutzenfunktion

$$u(x) = -e^{-\gamma x}$$

mit der konstanten Risikoaversion $\gamma > 0$. Sei p_0 der Marktpreis des risikobehafteten Finanzguts. Der i -te Investor modelliert den Wert des Finanzguts zum Zeitpunkt 1 durch eine $N(\mu_i, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable X . Hat ein Investor das Anfangskapital W_0 und erwirbt er $x \geq 0$ Einheiten des Finanzguts, dann ist sein erwarteter Nutzen gleich

$$\mathbb{E}(u(W_0 + x(X - p_0))).$$

Lemma 2.1. Unter der Bedingung $x \geq 0$, die Leerverkäufe verbietet, ist der erwartete Nutzen bei

$$x(\mu_i) = \max\left(\frac{\mu_i - p_0}{\gamma\sigma^2}, 0\right)$$

maximal.

2 Statische Modelle

Beweis. Zuerst gilt es den erwarteten Nutzen zu berechnen. Dazu betrachtet man

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(u(W_0 + x(X - p_0))) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\exp(-\gamma(W_0 + x(\xi - p_0))) \exp\left(-\frac{(\xi - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi \\
 &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\gamma(W_0 - xp_0) - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\sigma^2\gamma x\xi + \xi^2 - 2\xi\mu_i}{2\sigma^2}\right) d\xi \\
 &= -\exp\left(-\gamma(W_0 - x_i p_0) - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2} + \frac{(\gamma x_i \sigma^2 - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\xi + \gamma x_i \sigma^2 - \mu_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right) d\xi \\
 &= -\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2 x^2 - \gamma(\mu_i x - p_0 x + W_0)\right).
 \end{aligned}$$

Der Exponent ist ein quadratisches Polynom in x , das bei

$$x(\mu_i) = \frac{\mu_i - p_0}{\gamma\sigma^2}$$

minimal wird. Um das Leerverkaufsverbot nicht zu verletzen, gilt klarerweise

$$x(\mu_i) = \max\left(\frac{\mu_i - p_0}{\gamma\sigma^2}, 0\right).$$

□

Daraus folgt, dass nur Marktteilnehmer mit $\mu_i \geq p_0$, das heißt jene mit höheren Erwartungen als Marktpreisen, überhaupt handeln werden. Wir denken uns jetzt mehrere Investoren, deren Einschätzung des zukünftigen Preises durch ein zufälliges $\mu_i \sim U(\mu - \kappa, \mu + \kappa)$ modelliert wird. Die erwartete Nachfrage eines dieser Investoren ist

$$\mathbb{E}(x(\mu_i)) = \int_{\mu - \kappa}^{\mu + \kappa} \frac{\max(\mu_i - p_0, 0)}{\gamma\sigma^2} \frac{1}{2\kappa} d\mu_i = \begin{cases} \frac{\mu - p_0}{\gamma\sigma^2} & \text{für } p_0 < \mu - \kappa, \\ \frac{(\mu + \kappa - p_0)^2}{4\kappa\gamma\sigma^2} & \text{für } p_0 \geq \mu - \kappa. \end{cases}$$

Sei nun Q das vorgegebene mittlere Angebot zum Preis p_0 pro Investor, dann heißt der Preis p_0 , für den

$$\mathbb{E}(x(\mu_i)) = Q$$

gilt, Gleichgewichtspreis. Unter dem Leerverkaufsverbot erhält man daher den Gleichgewichtspreis

$$p_0 = \begin{cases} \mu - \gamma\sigma^2 Q & \text{für } \kappa < \gamma\sigma^2 Q, \\ \mu + \kappa - 2\sqrt{\kappa\gamma\sigma^2 Q} & \text{für } \kappa \geq \gamma\sigma^2 Q. \end{cases}$$

Sind Leerverkäufe erlaubt, ist der Gleichgewichtspreis $p_0 = \mu - \gamma\sigma^2 Q$. Damit haben wir gezeigt, dass in diesem Modell das Verbot von Leerverkäufen gemeinsam mit hinreichender Heterogenität, also wenn $\kappa \geq \gamma\sigma^2 Q$ ist, zu höheren Preisen als ohne Leerverkaufsverbot führen kann. Es stellt daher einen einfachen Versuch dar, das Entstehen überhöhter Preise zu erklären (vgl. [27]).

2.2 Ein Modell von Jarrow

In einer Arbeit von Jarrow [5] findet man ein allgemeineres Ein-Perioden-Modell. Der risikolose Zinssatz r , zu dem Investoren Geld borgen oder leihen können, ist konstant. Es gibt n risikobehaftete Finanzgüter. Das 0-te Finanzgut sei das risikolose mit Preis p_0^0 zum Zeitpunkt 0 und $p_0^1 = 1$ zum Zeitpunkt 1. Betrachtet werden m Investoren, wobei der k -te Investor die Nutzenfunktion

$$u^k(x) = -\exp(-a_k x)$$

mit der konstanten Risikoaversion $a_k > 0$ verwendet und ein Anfangsvermögen W_0^k besitzt. Dieses Vermögen ist zur Gänze veranlagt als

$$W_0^k = \sum_{i=0}^n \bar{x}_i^k p_i^0,$$

wobei p_i^0 der Marktpreis des i -ten Finanzguts und \bar{x}_i^k der Anteil daran ist. Der Vektor der Preise $p^1 = (p_i^1)_{i=1,\dots,n}$ zum Zeitpunkt 1 wird als multivariat normalverteilt mit Erwartungswert $\mu^k = (\mu_i^k)_{i=1,\dots,n}$ und Kovarianzmatrix $\Sigma^k = (\sigma_{i,j}^k)_{i,j=1,\dots,n}$ angenommen. Das Portfolio des k -ten Investors beinhaltet x_i^k Anteile am i -ten Finanzgut. Jeder Investor wählt nun $x^k = (x_i^k)_{i=1,\dots,n}$ und x_0^k so, dass er den Nutzen seines Endvermögens maximiert, d.h.

$$\max_{(x_i^k)_{i=0,\dots,n}} \mathbb{E}^k \left(u^k \left(\sum_{i=1}^n x_i^k p_i^1 + x_0^k \right) \right)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} W_0^k &= \sum_{i=0}^n x_i^k p_i^0 \\ x_i^k &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Die erste Nebenbedingung bedeutet, dass der Investor sein Portfolio so konstruieren muss, dass er dabei sein gesamtes Vermögen veranlagt. Die Bedingung $x_i^k \geq 0$ stellt ein Leerverkaufsverbot dar.

Lemma 2.2. Der k -te Investor bestimmt die Zusammensetzung seines Portfolios aus dem nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\max_{(x_i^k)_{i=0,\dots,n}} \sum_{i=1}^n x_i^k \mu_i^k + x_0^k - \frac{a_k}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^k x_j^k \sigma_{ij}^k$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} W_0^k &= \sum_{i=0}^n x_i^k p_i^0, \\ x_i^k &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beweis. Zuerst berechnet man

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^k \left(u^k \left(\sum_{i=1}^n x_i^k p_i^1 + x_0^k \right) \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^k \left(\xi^T x^k + x_0^k \right) dF_{p^1}(\xi) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma^k)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{(-a_k \xi^T x^k - a_k x_0^k)} dF_{p^1}(\xi) \\
 &= -e^{-a_k x_0^k} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma^k)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-a_k \xi^T x^k)} dF_{p^1}(\xi) \\
 &= -e^{-a_k x_0^k} M_{p^1} \left(-a_k x^k \right) \\
 &= -e^{(-a_k x_0^k)} e^{((-a_k x^k)^T \mu^k + \frac{1}{2} (-a_k x^k)^T \Sigma^k (-a_k x^k))} \\
 &= -\exp \left(-a_k \left(x_0^k + (x^k)^T \mu^k - \frac{a_k}{2} (x^k)^T \Sigma^k x^k \right) \right),
 \end{aligned}$$

wobei $M_{p^1}(t)$ die momentenerzeugende Funktion bezeichnet. Der erwartete Nutzen ist maximal, wenn

$$x_0^k + (x^k)^T \mu^k - \frac{a_k}{2} (x^k)^T \Sigma^k x^k$$

maximal wird. □

Wesentlichen Einfluss auf die Zusammensetzung des Portfolios hat der Marktpreis $p^0 = (p_0^0, \dots, p_n^0)$. Unter der zusätzlichen Bedingung, dass von jedem Finanzgut zum Zeitpunkt 0 genau so viel angeboten wie nachgefragt wird, d.h.

$$\sum_{k=1}^m \bar{x}_i^k = \sum_{k=1}^m x_i^k \quad \forall i = 0, \dots, n,$$

nennt man den Marktpreis einen Gleichgewichtspreis. Mit $\tilde{p} = \left(\frac{p_i^0}{p_0^0} \right)_{i=0, \dots, n}$ bezeichnen wir den diskontierten Gleichgewichtspreis.

Lemma 2.3. Der diskontierte Gleichgewichtspreis \tilde{p} erfüllt die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^m \bar{x}^k \right), \\
 \lambda_i^k &\geq 0, \\
 x_i^k &\geq 0, \\
 x^k &= \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k - \tilde{p} + \lambda^k), \\
 x_0^k &= (\bar{x}^k - x^k)^T \tilde{p} + \bar{x}_0^k \lambda_i^k x_i^k.
 \end{aligned}$$

Beweis. Das konkave Maximierungsproblem aus Lemma 2.2 ist zu lösen. Zuerst stellt man die Lagrangenfunktion des k -ten Investors

$$L(x_0^k, x^k, \lambda_0^k, \lambda^k) = x^{kT} \mu^k + x_0^k - \frac{a_k}{2} x^{kT} \Sigma^k x^k + \lambda_0^k \left((\bar{x}^k - x^k)^T p^0 + (\bar{x}_0^k - x_0^k) p_0^0 \right) + \lambda^k x^k$$

2 Statische Modelle

auf und betrachtet die für ein Extremum notwendigen Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (vgl.S.889 in [14], S.243 in [25]), aus denen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_0^k} &= 1 - \lambda_0^k p_0^0 \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i^k} &= \mu_i^k - a_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^k \sigma_{ij}^k - \lambda_0^k p_i^0 + \lambda_i^k \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0^k} &= (\bar{x}^k - x^k)^T p^0 + (\bar{x}_0^k - x_0^k) p_0^0 \stackrel{!}{=} 0, \\ \lambda_i^k &\stackrel{!}{\geq} 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ x_i^k &\stackrel{!}{\geq} 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \lambda_i^k x_i^k &\stackrel{!}{=} 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

folgt. Daraus ergeben sich wiederum $\lambda_0^k = \frac{1}{p_0^0}$ und die Bedingungen $x_i^k \geq 0$, $\lambda_i^k \geq 0$ und $\lambda_i^k x_i^k = 0$. Unter Verwendung der Symmetrie von Kovarianzmatrizen erhält man

$$\mu - a_k \Sigma^k x^k - \frac{1}{p_0^0} p^0 + \lambda^k = \vec{0},$$

was sich zu

$$x^k = \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k - \tilde{p} + \lambda^k)$$

umformen lässt. Für das risikolose Finanzgut ergibt sich somit

$$x_0^k = (\bar{x}^k - x^k)^T \tilde{p} + \bar{x}_0^k.$$

Aus der Forderung, Angebot und Nachfrage seien für jedes Finanzgut gleich groß, folgt

$$\sum_{k=1}^m \bar{x}^k = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k - \tilde{p} + \lambda^k) \right).$$

Da es hier n lineare Gleichungen für n unbekannte Einträge des Vektors \tilde{p} gibt, kann man das System lösen und erhält

$$\tilde{p} = \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^m \bar{x}^k \right).$$

□

Lemma 2.4. Ohne die Leerverkaufsbedingungen $x_i^k \geq 0$ lässt sich \tilde{p} aus

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \mu^k - \sum_{k=1}^m \bar{x}^k \right), \\ x^k &= \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} (\mu^k - \tilde{p} + \lambda^k), \\ x_0^k &= (\bar{x}^k - x^k)^T \tilde{p} + \bar{x}_0^k\end{aligned}$$

bestimmen.

2 Statische Modelle

Beweis. Analog zu Lemma 2.3 unter Verwendung der Lagrange-Multiplikatorenregel. \square

Aus den beiden vorhergehenden Lemmata erkennt man, dass der Unterschied zwischen Gleichgewichtspreisen ohne und mit Leerverkaufsbedingungen

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\Sigma^k)^{-1} \lambda^k \right)$$

beträgt. Dieser Ausdruck kann sowohl positiv als auch negativ sein, was Millers Argumentation [13], Leerverkaufsbedingungen in Kombination mit heterogenen Markteinschätzungen würden stets zu überhöhten Preisen führen, widerspricht. Jarrow [5] veranschaulicht diese Tatsache auch anhand eines numerischen Beispiels. Wenn die Investoren jedoch homogene Ansichten über die Kovarianzmatrix haben und den Markt nur im Erwartungswert unterschiedlich einschätzen, ergibt sich nach Lemma 2.3 durch Einsetzen

$$\tilde{p} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} (\mu^k + \lambda^k) - \Sigma \sum_{k=1}^m \bar{x}^k \right).$$

Daraus resultiert, dass der Unterschied zwischen \tilde{p} ohne und mit Leerverkaufsbedingungen genau λ^k mit $\lambda_i^k \geq 0$ ist. Somit kommt es in diesem Fall, wie auch im Beispiel von Scheinkman und Xiong [27], zu überhöhten (oder zumindest gleich hohen) Preisen. Dieses Modell ist ebenso statisch und geht in keiner Weise auf die Dynamik des Handelns einzelner Marktteilnehmer ein, durch die die Preise noch weiter beeinflusst werden könnten.

3 Das Modell von Harrison und Kreps

3.1 Grundlagen

Das Modell von Harrison und Kreps (vgl. [9] [27]) ist diskret und die Marktteilnehmer können zu einem fixen Zinssatz $r > 0$ Geld leihen oder borgen. Mit $\gamma = \frac{1}{r+1}$ bezeichnet man den zugehörigen Diskontierungsfaktor. Es gebe ein risikobehaftetes Finanzgut, von dem eine Einheit zum Zeitpunkt $t > 0$ eine zufällige Dividende $D_t \geq 0$ ausbezahlt. Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt. Es gebe endlich viele Klassen von Marktteilnehmern mit je unendlich vielen Mitgliedern. Bezeichne A die Menge aller Klassen. Die Mitglieder der Klasse a betrachten D_t als einen stochastischen Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P^a)$. Außerdem sei für a und \bar{a} aus verschiedenen Klassen $P^a \sim P^{\bar{a}}$. Die Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(D_s : s \leq t)$ wird als ökonomische Information bezeichnet. Ein **Preis** $(p_t)_{t \geq 0}$ ist als ein an \mathcal{F}_t adaptierter nichtnegativer Prozess definiert. Wir nehmen an, dass die Investoren risikoneutral sind. Daher handeln sie so, dass sie den erwarteten, linearen Nutzen ihres Vermögens maximieren. Die Stoppzeit $T > t$ bezeichnen wir als t -zulässige Verkaufsstrategie. Die Gruppe a besitzt u_t^a Anteile des Finanzguts und verkauft $1 - u_t^a$ Anteile an eine andere Gruppe. Aufgrund des Leerverkaufsverbots ist $0 \leq u_t^a \leq 1$. Die Gruppe a stellt ihr Portfolio so zusammen, dass sie

$$\mathbb{E} \left(u_t^a \sup_{T \geq 0} \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \right) + (1 - u_t^a) p_t \right)$$

maximiert. Das Maximum von

$$u_t^a \sup_{T \geq 0} \mathbb{E} \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \right) + (1 - u_t^a) \mathbb{E}(p_t)$$

wird in $u_t^a = 0$ oder $u_t^a = 1$ angenommen. Somit hält stets genau eine Gruppe das Finanzgut. Als **Gleichgewichtspreis**¹ bezeichnen wir einen Preis, der

$$p_t = \max_{a \in A} \sup_{T > t} \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (3.1)$$

erfüllt, wobei das Supremum über alle t -zulässigen Verkaufsstrategien gebildet wird. Das Finanzgut wird stets von jener Investorengruppe gehalten, die ein größeres Vermögen erwartet. Da $\gamma < 1$ und $T = \infty$ zulässig ist, folgt

$$p_t \geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (3.2)$$

¹Bei Harrison und Kreps [9] werden Gleichgewichtspreise als konsistente Preise bezeichnet.

Eine strikte Ungleichung entspricht spekulativem Verhalten, da die rechte Seite der Ungleichung (3.2) genau jener maximaler Wert ist, den ein Käufer bereit wäre, zu bezahlen, wenn ein Wiederverkauf nicht möglich ist. Diesen maximalen, diskontierten Wert zukünftiger Dividenden nennt man auch **Sachwert**.

Wir wollen nun zeigen, dass spekulatives Verhalten entsteht, wenn eine Gruppe von Marktteilnehmern, die gegenwärtig das Finanzgut nicht hält, zu einem späteren Zeitpunkt mit positiver Wahrscheinlichkeit optimistischere Ansichten über zukünftige Dividenden hat. Seien $a, \bar{a} \in A$ verschiedene Klassen. Wir wählen ein Ereignis $F \in \mathcal{F}_t$ so, dass a in (3.2) für alle $\omega \in F$ das Maximum erreiche. In anderen Worten, die Marktteilnehmer aus a sind optimistischer und halten das Finanzgut. Betrachten wir einen späteren Zeitpunkt $t' > t$. Für ein Ereignis $F' \in \mathcal{F}_{t'}$ mit $F' \subset F$ und $P^a(F') > 0$ gelte für alle $\omega \in F'$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}^{\bar{a}} \left(\sum_{k=t'+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_{t'} \right) (\omega) > \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t'+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_{t'} \right) (\omega).$$

Zu Zeitpunkt t wird somit die Gruppe \bar{a} optimistischer. Dann folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) \\ &= \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{t'} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) + \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t'+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) \\ &= \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{t'} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) + \mathbb{E}^a \left(\mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t'+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_{t'} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) \\ &< \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{t'} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) + \mathbb{E}^a \left(\max_{b \in A} \mathbb{E}^b \left(\sum_{k=t'+1}^{\infty} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_{t'} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) \\ &\leq \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^{t'} \gamma^{k-t} D_k \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) + \mathbb{E}^a \left(\gamma^{t'-t} p_{t'} \middle| \mathcal{F}_t \right) (\omega) \leq p_t(\omega) \end{aligned}$$

für alle $\omega \in F$. Somit ist auch die Ungleichung auf F strikt und es kommt zu spekulativem Verhalten (vgl. [27]).

Lemma 3.1. Ein Preis p_t ist genau dann ein Gleichgewichtspreis, wenn

$$p_t = \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t)$$

für alle $t > 0$ gilt.

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Richtungen:

\Rightarrow : Sei p_t ein Gleichgewichtspreis. Setzt man $T = t + 1$ in 3.1 ein, erhält man

$$p_t \geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t).$$

Unter Verwendung der Definition eines Gleichgewichtspreises ergibt sich

$$\begin{aligned}
 p_t &\geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\gamma D_{t+1} + \gamma \max_{b \in A} \sup_{T > t+1} \mathbb{E}^b \left(\sum_{k=t+2}^T \gamma^{k-t-1} D_k + \gamma^{T-t-1} p_T \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &\geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\gamma \max_{b \in A} \sup_{T > t+1} \mathbb{E}^b \left(D_{t+1} + \sum_{k=t+2}^T \gamma^{k-t-1} D_k + \gamma^{T-t-1} p_T \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\max_{b \in A} \sup_{T > t+1} \mathbb{E}^b \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &\geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\sup_{T > t+1} \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &\geq \max_{a \in A} \sup_{T > t+1} \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \middle| \mathcal{F}_t \right) \geq p_t.
 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$p_t = \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t).$$

\Leftarrow : Erfülle p_t die obige Darstellung. Klarerweise gilt dann auch

$$p_t \geq \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t).$$

Der durch

$$y_t = \sum_{k=1}^t \gamma^k D_k + \gamma^t p_t$$

definierte Prozess ist wegen

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^a (y_{t+1} | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=1}^t \gamma^k D_k + \gamma^{t+1} D_{t+1} + \gamma^{t+1} p_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \sum_{k=1}^t \gamma^k D_k + \gamma^t \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t) \\
 &\leq \sum_{k=1}^t \gamma^k D_k + \gamma^t p_t = y_t
 \end{aligned}$$

ein nichtnegatives Supermartingal. Somit existiert auch der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t$. Nun wendet man das Optional-Sampling-Theorem für beliebige Stoppzeiten T und nichtnegative Supermartingale (vgl. S.70 in [31]) an und erhält

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^a (y_T | \mathcal{F}_t) &\leq y_t, \\
 \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=1}^T \gamma^k D_k + \gamma^T p_T \middle| \mathcal{F}_t \right) &\leq \sum_{k=1}^t \gamma^k D_k + \gamma^t p_t, \\
 \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=t+1}^T \gamma^{k-t} D_k + \gamma^{T-t} p_T \middle| \mathcal{F}_t \right) &\leq p_t.
 \end{aligned}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt sofort (3.1). \square

Lemma 3.2 (vgl. [9]). Der durch

$$\begin{aligned} p_t^0 &= 0, \\ p_t^n &= \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1}^{n-1} | \mathcal{F}_t), \\ p_t^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_t^n \end{aligned}$$

definierte Preis $(p_t^*)_{t \geq 0}$ ist der minimale Gleichgewichtspreis. Das heißt, $(p_t^*)_{t \geq 0}$ ist ein Gleichgewichtspreis und wenn $(p_t)_{t \geq 0}$ ebenso ein Gleichgewichtspreis ist, dann gilt $p_t \geq p_t^*$ für alle $t \geq 0$. Wenn $p_t^* = \infty$ ist, existiert kein endlicher Gleichgewichtspreis.

Beweis. Zuerst zeigt man, dass $(p_t^*)_{t \geq 0}$ ein Gleichgewichtspreis ist. Da diese Folge monoton wachsend ist, folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\begin{aligned} p_t^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_t^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1}^{n-1} | \mathcal{F}_t) \\ &= \max_{a \in A} \mathbb{E}^a \left(\gamma D_{t+1} + \gamma \lim_{n \rightarrow \infty} p_{t+1}^{n-1} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \max_{a \in A} \mathbb{E}^a (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1}^* | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1 folgt somit 3.1. Sei $(p_t)_{t \geq 0}$ ein Gleichgewichtspreis, dann beweist man $p_t \geq p_t^n$ durch Induktion nach n . Offensichtlich ist $p_t \geq 0 = p_t^0$. Sei $p_t \geq p_t^n$. Wegen Lemma 3.1 folgt damit

$$p_t^{n+1} = \max_{a \in A} \mathbb{E} (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1}^n | \mathcal{F}_t) \leq \max_{a \in A} \mathbb{E} (\gamma D_{t+1} + \gamma p_{t+1} | \mathcal{F}_t) = p_t$$

und daraus $p_t \geq p_t^n$ für alle n . Aufgrund der Monotonie von $(p_t^*)_{t \geq 0}$ erhält man letztendlich $p_t \geq \lim_{n \rightarrow \infty} p_t^n = p_t^*$. Gilt $p_t^* = \infty$, so ist auch $p_t = \infty$, womit kein endlicher Gleichgewichtspreis existiert. \square

Sei p_t^* der in Lemma 3.2 eingeführte minimale Gleichgewichtspreis und $c > 0$. Der durch $p_t = p_t^* + c\gamma^{-t}$ definierte Preis ist wegen Lemma 3.1 ebenso ein Gleichgewichtspreis. Gleichgewichtspreise sind also keineswegs eindeutig. Den Unterschied zwischen Sachwert und minimalem Gleichgewichtspreis wollen wir als **Preisblase**¹ auffassen, was durch das folgende Anwendungsbeispiel veranschaulicht wird.

3.2 Anwendungsbeispiel

Nehmen wir ein vereinfachtes Modell mit $A = \{g, \bar{g}\}$ an. Der Dividendenprozess $(D_t)_{t \geq 0}$ sei eine homogene Markovkette auf dem Zustandsraum $\{0, 1\}$. Für $a \in A$ hat man mit $q^a(x, y) = P^a(D_{t+1} = y | D_t = x)$ die Übergangsmatrix

$$Q^a = \begin{pmatrix} q^a(0, 0) & q^a(0, 1) \\ q^a(1, 0) & q^a(1, 1) \end{pmatrix}.$$

¹Harrison und Kreps bezeichnen den Unterschied zwischen einem beliebigen Gleichgewichtspreis und einem minimalen Gleichgewichtspreis als Preisblase (vgl. S.331 in [9]).

3 Das Modell von Harrison und Kreps

Bezeichnen wir den Markt zum Zeitpunkt t als im Zustand x , wenn $D_t = x$ ist. Seien $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ und $0 < \gamma < 1$. Mit der Bezeichnung $q^g(0, 0) = \alpha$, $q^g(1, 0) = \beta$ gilt

$$Q^g = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

Da D_t eine Markovkette ist, sind die Preise p_t^n und damit auch p_t^* aus Lemma 3.2 Funktionen von D_t . Es gilt also

$$p_t^n = p_{t,n}(D_t) \quad \text{und} \quad p_t^* = p_t(D_t)$$

mit Funktionen $p_{t,n}, p_t : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Da wir angenommen haben, dass D_t homogen ist, ergibt sich

$$\mathbb{E}^a(D_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^a(D_{t+1} | D_t) = (1 - \alpha)\mathbf{1}_{\{D_t=0\}} + (1 - \beta)\mathbf{1}_{\{D_t=1\}}.$$

Somit hängen die Funktionen $p_{t,n}$ und p_t nicht von t ab. Daher ist

$$p_t^* = p(D_t)$$

mit einer Funktion $p : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht von t abhängt. Lemma 3.1 liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p(0) &= \gamma \max(p(0)\alpha + (1 + p(1))(1 - \alpha), p(0)\bar{\alpha} + (1 + p(1))(1 - \bar{\alpha})), \\ p(1) &= \gamma \max(p(0)\beta + (1 + p(1))(1 - \beta), p(0)\bar{\beta} + (1 + p(1))(1 - \bar{\beta})), \end{aligned}$$

durch das $p(0)$ und $p(1)$ eindeutig festgelegt sind. Mit Fallunterscheidungen lässt sich eine eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems angeben. Sei dazu

$$\begin{aligned} p^0(x, y) &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{x - 1}{1 + \gamma y - \gamma x}, \\ p^1(x, y) &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{y + \gamma x - \gamma y - 1}{1 + \gamma y - \gamma x}, \end{aligned}$$

die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p^0(x, y) &= \gamma(p^0(x, y)x + (1 + p^1(x, y))(1 - x)), \\ p^1(x, y) &= \gamma(p^0(x, y)y + (1 + p^1(x, y))(1 - y)). \end{aligned}$$

Damit können vier mögliche Fälle als Lösung des Gleichungssystems für $p(0)$ und $p(1)$ eintreten. Im ersten Fall ist $p(0) = p^0(\alpha, \beta)$ und $p(1) = p^1(\alpha, \beta)$. Das bedeutet, es muss dafür

$$\begin{aligned} p(0)\alpha + (1 + p(1))(1 - \alpha) &\geq p(0)\bar{\alpha} + (1 + p(1))(1 - \bar{\alpha}), \\ p(0)\beta + (1 + p(1))(1 - \beta) &\geq p(0)\bar{\beta} + (1 + p(1))(1 - \bar{\beta}) \end{aligned}$$

gelten, was mit

$$\begin{aligned} (p(0) - p(1))(\alpha - \bar{\alpha}) &\geq (\alpha - \bar{\alpha}), \\ (p(0) - p(1))(\beta - \bar{\beta}) &\geq (\beta - \bar{\beta}) \end{aligned}$$

gleichbedeutend ist. Durch Widerspruch schließen wir die Werte für α , $\bar{\alpha}$, β , $\bar{\beta}$ aus, die dieses Ungleichungssystem nicht erfüllen können. Wenn $\alpha \geq \bar{\alpha}$ und $\beta \geq \bar{\beta}$ ist, dann folgt $p(0) \geq 1 + p(1)$ und daraus wiederum

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\alpha-1}{1+\gamma\beta-\gamma\alpha} &\geq \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\alpha-\frac{1}{\gamma}}{1+\gamma\beta-\gamma\alpha}, \\ \frac{\alpha-1}{1+\gamma\beta-\gamma\alpha} &\leq \frac{\alpha-\frac{1}{\gamma}}{1+\gamma\beta-\gamma\alpha}, \\ \alpha-1 &\leq \alpha-\frac{1}{\gamma}, \\ 1 &\geq \frac{1}{\gamma}, \end{aligned}$$

was jedoch im Widerspruch zu $\gamma < 1$ steht. Wenn nun $\alpha \leq \bar{\alpha}$ und $\beta \geq \bar{\beta}$ ist, dann ergibt sich $p(0) = 1 + p(1)$ und damit $\gamma = 1$, was ebenso einen Widerspruch bildet. Auch $\alpha \geq \bar{\alpha}$ und $\beta \leq \bar{\beta}$ führen zu $\gamma = 1$. Falls $\alpha \leq \bar{\alpha}$ und $\beta \leq \bar{\beta}$ ist, erhält man $p(0) \leq 1 + p(1)$, wofür $\gamma \leq 1$ sein muss. Das heißt, damit $p(0) = p^0(\alpha, \beta)$ und $p(1) = p^1(\alpha, \beta)$ erfüllt ist, muss $\alpha \leq \bar{\alpha}$ und $\beta \leq \bar{\beta}$ gelten. Die anderen drei Fälle lassen sich ähnlich behandeln und man kann zeigen, dass der **minimale Gleichgewichtspreis** durch

$$\begin{aligned} p(0) &= p^0(\min(\alpha, \bar{\alpha}), \min(\beta, \bar{\beta})) \\ p(1) &= p^1(\min(\alpha, \bar{\alpha}), \min(\beta, \bar{\beta})) \end{aligned}$$

gegeben ist. Es stellt sich nun die Frage, ob der minimale Gleichgewichtspreis und der maximale, erwartete, diskontierte Wert zukünftiger Dividenden, der sogenannte Sachwert, übereinstimmen. Da sich die Eigenwertzerlegung für $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$ einfach berechnen lässt, ergibt sich für $k \geq 0$ die k -stufige Übergangsmatrix

$$\begin{aligned} (Q^g)^k &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha-\beta)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\beta-\alpha+1} & \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+1} \\ \frac{-1}{\beta-\alpha+1} & \frac{1}{\beta-\alpha+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha+1} \begin{pmatrix} \beta - (\alpha-1)(\alpha-\beta)^k & (\alpha-1)((\alpha-\beta)^k - 1) \\ \beta(1 - (\alpha-\beta)^k) & \beta(\alpha-\beta)^k - (\alpha-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $d \in \{0, 1\}$ definieren wir

$$p_t^a(d) = \mathbb{E}^a \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k D_{t+k} \mid D_t = d \right)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} p_t^g(0) &= \mathbb{E}^g \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k D_{t+k} \mid D_t = 0 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k P^g(D_{t+k} = 1 \mid D_t = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \frac{(\alpha-1)((\alpha-\beta)^k - 1)}{\beta-\alpha+1} = \frac{(\alpha-1)}{\beta-\alpha+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\gamma(\alpha-\beta))^k - \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \right) \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta-\alpha+1} \left(\frac{1}{1-\gamma(\alpha-\beta)} - \frac{1}{1-\gamma} \right) = \frac{\gamma(\alpha-1)}{(1+\gamma\beta-\gamma\alpha)(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_t^g(1) &= \mathbb{E}^g \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k D_{t+k} \middle| D_t = 1 \right) - 1 = \frac{1}{\beta - \alpha + 1} \left(\frac{\beta}{1 - \gamma(\alpha - \beta)} - \frac{\alpha - 1}{1 - \gamma} \right) - 1 \\ &= \frac{\gamma(\beta - \gamma\beta - 1 + \gamma\alpha)}{(1 + \gamma\beta - \gamma\alpha)(\gamma - 1)}. \end{aligned}$$

Vollkommen analog lässt sich $p^{\bar{g}}(d)$ behandeln. Offensichtlich hängen $p_t^a(d)$ nicht von t ab und wir schreiben $p_t^a(d) = p^a(d)$. Den durch $\tilde{p}(d) = \max(p^g(d), p^{\bar{g}}(d))$ gegebenen Preis $\tilde{p}(D_t)$ bezeichnen wir als **Sachwert**.

Durch Einsetzen erkennt man, dass $\tilde{p}(D_t)$ bei homogener Markteinschätzung ein minimaler Gleichgewichtspreis ist. Auch in den heterogenen Fällen $\alpha \leq \bar{\alpha} \wedge \beta \leq \bar{\beta}$ sowie $\alpha \geq \bar{\alpha} \wedge \beta \geq \bar{\beta}$ kann man zeigen, dass $\tilde{p}(d)$ ein minimaler Gleichgewichtspreis ist, wobei hier das Finanzgut vom jeweils optimistischeren Marktteilnehmer gehalten wird. Es tritt also keine Spekulation auf. Der Sachwert $\tilde{p}(D_t)$ muss jedoch keineswegs stets ein minimaler Gleichgewichtspreis sein. Eine einfache Überlegung zeigt, wie durch spekulatives Verhalten Preisblasen auftreten können. Zu diesem Zweck betrachten wir eine andere Konstruktion des minimalen Gleichgewichtspreises als in Lemma 3.2. Seien zum Beispiel die Investoren aus der Klasse g optimistischer, was die Wahrscheinlichkeit betrifft, dass der Markt im Zustand 0 bleibt. Deren Wahrscheinlichkeit für das Verbleiben des Marktes im Zustand 1 seien hingegen pessimistischer. In anderen Worten, sei $\bar{\alpha} \geq \alpha \wedge \bar{\beta} \leq \beta$. Außerdem sei $p^{\bar{g}}(0) \geq p^g(0)$ und $p^{\bar{g}}(1) \geq p^g(1)$, was bei dieser Wahl der Übergangswahrscheinlichkeiten nicht unbedingt gelten muss. Damit folgt $\tilde{p}(d) = p^{\bar{g}}(d)$. Das Finanzgut wird also in jedem Fall von Investoren aus \bar{g} gehalten, weil diese immer bereit sind, mehr zu bezahlen. Es stellt sich die Frage, was geschehen wird, wenn Investoren aus g den höheren Preis $\tilde{p}(D_t)$ erwarten. Der Markt kommt aus dem Gleichgewicht. Ein Investor aus g kauft also, wenn der Markt im Zustand 0 ist, mit der Absicht, das Finanzgut so lange zu behalten, bis der Markt in den Zustand 1 übergeht, um es dann zum höheren Preis $p^{\bar{g}}(1)$ zu verkaufen. Den erwarteten Gewinn

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^g \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k (1 + p^{\bar{g}}(1)) \mathbf{1}_{\{D_{t+k}=1, D_{t+k-1}=0, \dots, D_{t+1}=0\}} \middle| D_t = 0 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k (1 + p^{\bar{g}}(1)) P(D_{t+k} = 1 | D_{t+k} = 0, \dots, D_t = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k (1 + p^{\bar{g}}(1)) \alpha^k (1 - \alpha) \\ &= \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma\alpha} \gamma (1 + p^{\bar{g}}(1)) = p_{(1)}(0) \end{aligned}$$

wäre er bereit zu bezahlen. Durch Einsetzen ergibt sich

$$p^{\bar{g}}(0) < \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma\alpha} \gamma (1 + p^{\bar{g}}(1)).$$

Die Investoren würden deswegen mehr als $\tilde{p}(0)$ zahlen und das nicht, weil sie mehr Dividendenauszahlungen erwarten, sondern lediglich, weil sie annehmen, dass die andere Klasse eine Dividendenzahlung positiv einschätzt. Andererseits sind Investoren aus \bar{g} optimistischer, wenn der Markt im Zustand 1 ist. Diese können daher das Finanzgut so lange halten,

wie der Markt im Zustand 1 ist und danach an die andere Investorenklasse zu einem höheren Preis verkaufen. Damit machen sie einen erwarteten Gewinn von

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^g \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k (\mathbf{1}_{\{D_{t+k}=1, \dots, D_{t+1}=1\}} + p^g(0) \mathbf{1}_{\{D_{t+k}=0, D_{t+k-1}=1, \dots, D_{t+1}=1\}}) \middle| D_t = 0 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k ((1 - \bar{\beta})^k + \bar{\beta}(1 - \bar{\beta})^{k-1} p_{(1)}(0)) = \frac{1 + \bar{\beta}\gamma p_{(1)}(0)}{1 - \gamma(1 - \bar{\beta})} - 1 = p_{(1)}(1). \end{aligned}$$

Auch hier lässt sich $p^{\bar{g}}(1) \leq p_{(1)}(1)$ zeigen. Das bedeutet, dass die Investorenklasse \bar{g} im Zustand 1 ebenso bereit ist, mehr als $\tilde{p}(1)$ zu bezahlen. Nun beeinflusst dieses Verhalten wiederum die Preise für g . Aus diesen Überlegungen heraus kann man die Preise nach n solchen Schritten als

$$\begin{aligned} p_{(n)}(0) &= \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma\alpha} \gamma(1 + p_{(n-1)}(1)) \\ p_{(n)}(1) &= \frac{1\bar{\beta}\gamma p_{(n)}(0)}{1 - \gamma(1 - \bar{\beta})} - 1 \end{aligned}$$

einführen, das, wie man induktiv zeigen kann,

$$\begin{aligned} p_{(n)}(0) &= \frac{\bar{\beta}^{n-1}(1 - \alpha)^n \gamma^{2n-1}}{((1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^{n-1}(1 - \gamma\alpha))^n} (1 + p^{\bar{g}}(1)) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\bar{\beta}^k (1 - \alpha)^{k+1} \gamma^{2k+1}}{((1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha))^{k+1}} \\ p_{(n)}(1) &= \frac{\bar{\beta}^n \gamma^{2n} (1 - \alpha)^n}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^n (1 - \gamma\alpha)^n} (1 + p^{\bar{g}}(1)) - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}^k \gamma^{2k} (1 - \alpha)^k}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^{k+1} (1 - \gamma\alpha)^k} \end{aligned}$$

entspricht. Jetzt stellt sich die Frage, wie sich die Grenzwerte $p_*(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{(n)}(0)$ und $p_*(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{(n)}(1)$ verhalten. Wegen

$$\begin{aligned} p_*(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\beta}^{n-1}(1 - \alpha)^n \gamma^{2n-1} (1 + p^{\bar{g}}(1))}{((1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^{n-1} (1 - \gamma\alpha))^n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\bar{\beta}^k (1 - \alpha)^{k+1} \gamma^{2k+1}}{((1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha))^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\beta}^k (1 - \alpha)^{k+1} \gamma^{2k+1}}{((1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha))^{k+1}} \\ &= \frac{(1 - \alpha)\gamma}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\beta} (1 - \alpha) \gamma^2}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha)} \right)^k \\ &= \frac{(1 - \alpha)\gamma}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta})) (1 - \gamma\alpha) - \bar{\beta} (1 - \alpha) \gamma^2} = p(0), \\ p_*(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\beta}^n \gamma^{2n} (1 - \alpha)^n (1 + p^{\bar{g}}(1))}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^n (1 - \gamma\alpha)^n} - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}^k \gamma^{2k} (1 - \alpha)^k}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^{k+1} (1 - \gamma\alpha)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\beta}^k \gamma^{2k} (1 - \alpha)^k}{(1 - \gamma(1 - \bar{\beta}))^{k+1} (1 - \gamma\alpha)^k} - 1 \\ &= \frac{1 - \gamma\alpha}{(1 - \gamma)(1 + \bar{\beta}\gamma - \alpha\gamma)} - 1 = p(1) \end{aligned}$$

3 Das Modell von Harrison und Kreps

sieht man, dass durch spekulatives Verhalten die Investoren tatsächlich bereit wären, den minimalen Gleichgewichtspreis $p(D_t)$ zu zahlen. Da diese strikt größer sind als der Sachwert, kann man also in solch einem Fall durchaus von einer Preisblase der Höhe $b(D_t = p(D_t) - \tilde{p}(D_t))$ sprechen.

Wählen wir zuletzt als numerisches Beispiel die Übergangswahrscheinlichkeiten $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\bar{\alpha} = \frac{2}{3}$ und $\bar{\beta} = \frac{1}{4}$. Der Diskontierungsfaktor sei $\gamma = 0.75$. Es ergibt sich $p^g(0) = \frac{4}{3} \approx 1.33$, $p^g(1) = \frac{11}{9} \approx 1.22$, $p^{\bar{g}}(0) = \frac{16}{11} \approx 1.45$ und $p^{\bar{g}}(1) = \frac{21}{11} \approx 1.91$. Der durch $\tilde{p}(0) = \frac{16}{11}$ und $\tilde{p}(1) = \frac{21}{11}$ gegebene Sachwert ist kein minimaler Gleichgewichtspreis. Der minimale Gleichgewichtspreis ist durch $p(0) = \frac{24}{13} \approx 1.85$ und $p(1) = \frac{27}{13} \approx 2.07$ gegeben. Die Größe der Preisblase ist damit durch $p(0) - \tilde{p}(0) = \frac{56}{143} \approx 0.39$ und $p(1) - \tilde{p}(1) = \frac{24}{143} \approx 0.17$ festgelegt. In Abbildung 3.1 werden die minimalen Gleichgewichtspreise unter Verwendung der obigen Übergangswahrscheinlichkeiten dargestellt. Es variiert je ein Wert, die anderen bleiben gleich. Die Preise sind in jeder dieser Komponenten monoton fallend, was man durch Ableiten auch zeigen kann. Wird also eine der Investorengruppen pessimistischer in einem der Marktzustände, dann sinken auch die minimalen Gleichgewichtspreise. Abbildung 3.2 zeigt die Größe der Preisblasen in Abhängigkeit von α und Abbildung 3.3 in Abhängigkeit von γ . Je größer hier γ wird, also je kleiner der Zinssatz r wird, desto größer wird die Preisblase.

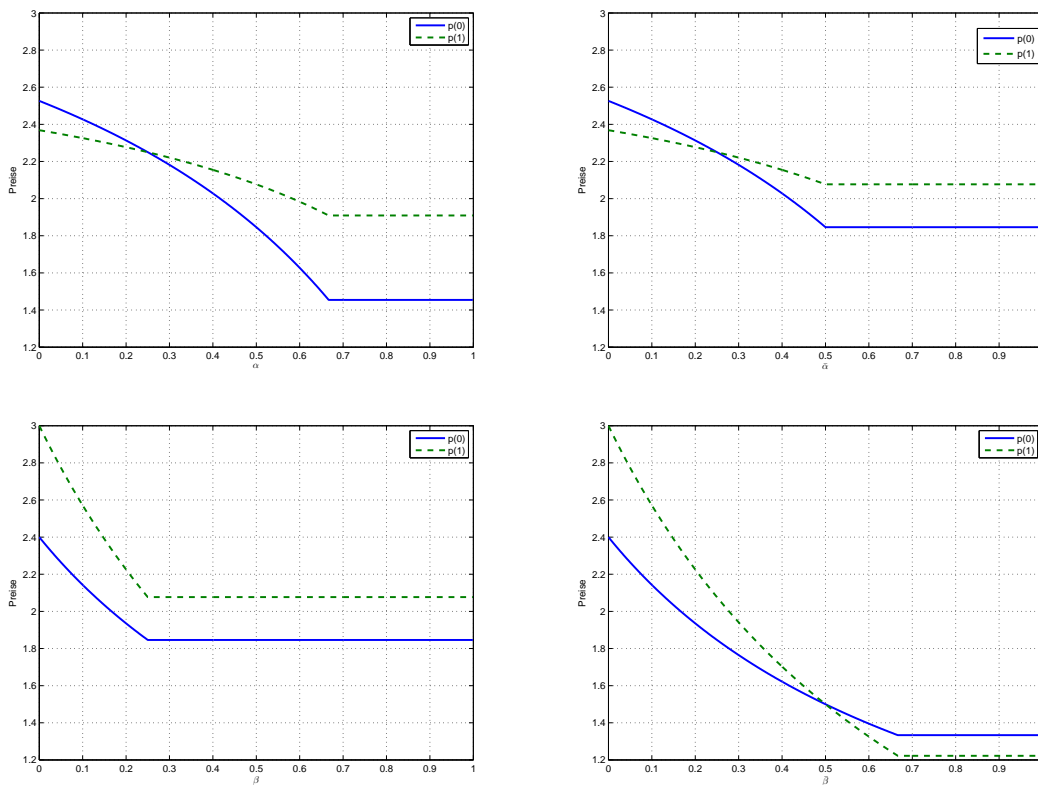


Abbildung 3.1: Der durch $p(0)$ sowie $p(1)$ gegebene minimale Gleichgewichtspreis in Abhängigkeit von je α , $\bar{\alpha}$, β sowie $\bar{\beta}$ unter Beibehaltung der anderen Parameterwerte.

3 Das Modell von Harrison und Kreps

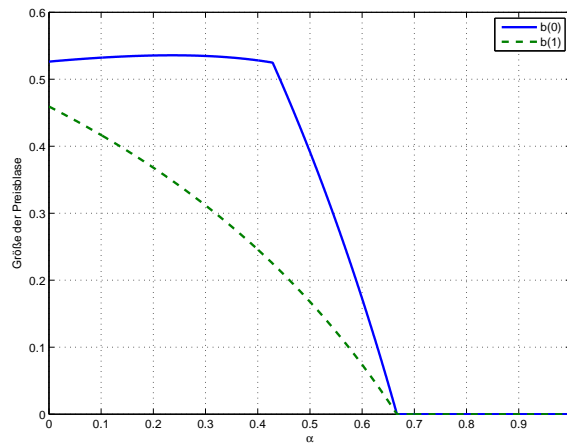


Abbildung 3.2: Die durch $b(0)$ und $b(1)$ gegebene Größe der Preisblase in Abhängigkeit von α unter Beibehaltung der anderen Parameterwerte.

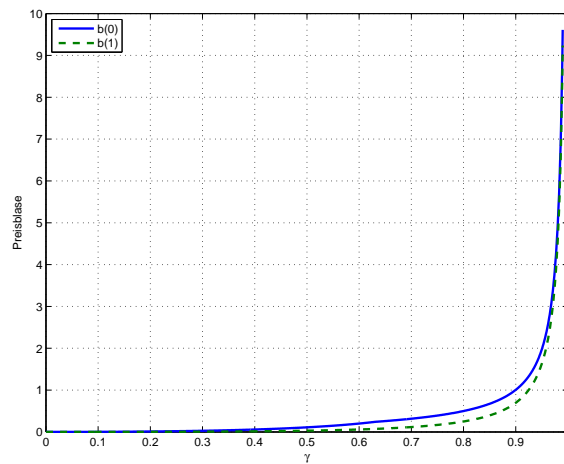


Abbildung 3.3: Die durch $b(0)$ und $b(1)$ gegebene Größe der Preisblase in Abhängigkeit von $\gamma \in [0, 0.99]$ unter Beibehaltung der anderen Parameterwerte.

4 Das Modell von Chen und Kohn

4.1 Grundlagen

Das Modell von Chen und Kohn [8] stellt eine stetige Verallgemeinerung des Modells von Harrison und Kreps [9] dar. Es gibt nur ein risikobehaftetes Finanzgut, von dem eine Einheit zum Zeitpunkt $t > 0$ eine zufällige Dividendenrate D_t auszahlt. Dabei betrachten die Mitglieder der Klasse $i \in \{1, 2\}$ die Dividendenrate als einen durch

$$dD_t = \lambda_i (\mu - D_t) dt + \sigma dW_t^i$$

gegebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (vgl. S.358 in [20], S.298 in [17]) mit den Parametern $\mu \geq 0$ sowie $\sigma > 0$ und unterschiedlichen Mean-Reversion-Parametern $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Sei $(W_t^1)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P^1)$. Nach dem Satz von Girsanov (vgl. S.190f in [20]) ist dann der durch

$$dW_t^2 = dW_t^1 + (\lambda_2 - \lambda_1) (\mu - D_t) dt$$

definierte Prozess $(W_t^2)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P^2)$, wobei P^2 ein zu P^1 äquivalentes Maß ist. Man kann also davon ausgehen, dass beide Klassen zur Modellierung denselben Messraum (Ω, \mathcal{A}) verwenden. Sie unterscheiden sich nur in der Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Mit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ bezeichnen wir die kanonische Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(D_s : s \leq t)$. Die stochastische Differentialgleichung ist ident mit dem Vašíček-Modell für die Spotrate (vgl. S.178ff in [6]). Folgendes Lemma wiederholt die wichtigsten Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

Lemma 4.1. Die stochastische Ornstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung der Form

$$dD_t = \lambda_i (\mu - D_t) dt + \sigma dW_t^i$$

mit der Anfangsbedingung $D_0 = x$ hat die Lösung

$$D_t = \mu + e^{-\lambda_i t} (x - \mu) + \sigma \int_0^t e^{\lambda_i(s-t)} dW_s^i.$$

Außerdem gibt es für $s < t$ die Darstellung

$$D_t = \mu + e^{-\lambda_i(t-s)} (D_s - \mu) + \sigma \int_s^t e^{\lambda_i(u-t)} dW_u^i.$$

Es gilt

$$D_t \sim N \left(\mu + e^{-\lambda_i t} (x - \mu), \frac{\sigma^2}{2\lambda_i} (1 - e^{-2\lambda_i t}) \right).$$

Beweis. Unter Anwendung der Itô-Formel mit $f(t, D_t) = e^{\lambda_i t} D_t$ ergibt sich

$$df(t, D_t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} D_t dt + e^{\lambda_i t} dD_t$$

und durch Einsetzen

$$de^{\lambda_i t} D_t = e^{\lambda_i t} (\lambda_i \mu dt + \sigma dW_t^i).$$

Durch Integrieren erhält man dann

$$e^{\lambda_i t} D_t - D_0 = \int_0^t \mu \lambda_i e^{\lambda_i s} ds + \int_0^t e^{\lambda_i s} \sigma dW_s^i$$

und daraus

$$D_t = e^{-\lambda_i t} x + \mu - \mu e^{-\lambda_i t} + \sigma \int_0^t e^{\lambda_i(s-t)} dW_s^i.$$

Mit derselben Argumentation folgt für $s < t$

$$e^{-\lambda_i t} D_t - e^{-\lambda_i s} D_s = \int_s^t \mu \lambda_i e^{\lambda_i u} du + \int_s^t e^{\lambda_i u} \sigma dW_u^i$$

und damit die zu beweisende Darstellung.

Betrachtet man nun den Prozess

$$X_t = \int_0^t e^{\lambda_i s} dW_s^i,$$

ergibt sich mit $Y_t = e^{iuX_t}$ durch Anwendung der Itô-Formel

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t iu Y_s dX_s + \int_0^t \frac{i^2 u^2}{2} Y_s d[X, X]_s = Y_0 + iu \int_0^t e^{\lambda_i t} Y_s dW_s^i - \frac{u^2}{2} \int_0^t Y_s e^{2\lambda_i s} ds.$$

Da $\int_0^t e^{\lambda_i t} Y_s dW_s^i$ ein Martingal ist, folgt

$$\mathbb{E}^{P^i}(Y_t) = \mathbb{E}^{P^i}(Y_0) - \frac{u^2}{2} \int_0^t \mathbb{E}^{P^i}(Y_s) e^{2\lambda_i s} ds$$

und durch Einsetzen der Darstellung von Y_t dann

$$\varphi_{X_t}(u) = \varphi_{X_0}(u) - \frac{u^2}{2} \int_0^t \varphi_{X_s}(u) e^{2\lambda_i s} ds = 1 - \frac{u^2}{2} \int_0^t \varphi_{X_s}(u) e^{2\lambda_i s} ds,$$

wobei $\varphi_{X_t}(u)$ die charakteristische Funktion von X_t ist. Durch Lösen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{X_t}(u) = -\frac{u^2}{2} e^{2\lambda_i t} \varphi_{X_t}(u)$$

erhält man die momentenerzeugende Funktion

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2} \frac{e^{2\lambda_i t} - 1}{2\lambda_i}\right),$$

weswegen X_t normalverteilt mit $\mathbb{E}^{P^i}(X_t) = 0$ und $\text{Var}(X_t) = \frac{e^{2\lambda_i t} - 1}{2\lambda_i}$ ist. Daraus ergibt sich

$$D_t \sim N\left(\mu + e^{-\lambda_i t}(x - \mu), \frac{\sigma^2}{2\lambda_i} (1 - e^{-2\lambda_i t})\right).$$

□

Wir nehmen an, die Marktteilnehmer können zu einem fixen Zinssatz $r > 0$ Geld leihen oder borgen. Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt und Leerverkäufe sind verboten. Man beschränkt sich auf zwei Klassen von Marktteilnehmern. Beide Klassen sind risikoneutral, das bedeutet, sie maximieren den erwarteten, linearen Nutzen ihres Vermögens. Ein Preis ist eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariable p_t . Die Stoppzeit $\tau \geq t$ nennen wir Handelszeitpunkt. Die Gruppe i hält u_t^i Anteile am Finanzgut und verkauft $1 - u_t^i$ Anteile an die andere Gruppe. Das Portfolio wird so gewählt, dass

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(u_t^i \sup_{\tau \geq t} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} p_\tau \right) + (1 - u_t^i) p_t \right)$$

maximal wird. Das Leerverkaufsverbot impliziert $0 \leq u_t^i \leq 1$. Das Maximum von

$$u_t^i \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} p_\tau \right) + (1 - u_t^i) \mathbb{E}^{P^i} (p_t)$$

wird entweder für $u_t^i = 0$ oder für $u_t^i = 1$ angenommen. Das Finanzgut wird somit immer von jener Investorengruppe gehalten, die es höher bewertet. Der **Sachwert** zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist nach Chen und Kohn [8] der maximale Preis, den ein Investor für alle zukünftigen, erwarteten, diskontierten Dividenden zu zahlen bereit ist, wenn kein Wiederverkauf möglich ist, das heißt

$$I(x, t) = \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \mid D_t = x \right).$$

Das folgende Lemma zeigt, dass der Sachwert nicht von t abhängt.

Satz 4.2 (vgl. [8]). *Der Sachwert hat die Darstellung*

$$I(x) = I(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{r+\lambda_1} + \frac{\mu\lambda_1}{r(r+\lambda_1)} & \text{für } x < \mu, \\ \frac{x}{r+\lambda_2} + \frac{\mu\lambda_2}{r(r+\lambda_2)} & \text{für } x \geq \mu. \end{cases}$$

Beweis. Mit Lemma 4.1 ergibt sich

$$\mathbb{E}^{P^i} (D_s \mid D_t = x) = \mu + e^{-\lambda_i(s-t)} (x - \mu)$$

für $s \geq t$ und eingesetzt damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \mid D_t = x \right) &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mathbb{E}^{P^i} (D_s \mid D_t = x) ds \\ &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \left(\mu + e^{-\lambda_i(s-t)} (x - \mu) \right) ds \\ &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mu + e^{-(\lambda_i+r)(s-t)} (x - \mu) ds \\ &= \frac{1}{r} \mu + \frac{1}{\lambda_i + r} (x - \mu). \end{aligned}$$

Da $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ist, erhält man durch Maximieren über $i = 1, 2$ klarerweise

$$I(x, t) = \begin{cases} \frac{\mu}{r} + \frac{x-\mu}{\lambda_1+r} & \text{für } x < \mu, \\ \frac{\mu}{r} + \frac{x-\mu}{\lambda_2+r} & \text{für } x \geq \mu. \end{cases}$$

□

Chen und Kohn [8] definieren einen **Gleichgewichtspreis** als eine stetige Funktion $P(x, t)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, die

$$P(x, t) \geq I(x)$$

und

$$P(x, t) = \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P(D_\tau, \tau) \middle| D_t = x \right)$$

erfüllt, wobei das Supremum über alle Stoppzeiten $\tau \geq t$ gebildet wird. Dabei setzen wir $|P(D_\infty, \infty)| < \infty$. Wie auch bei Harrison und Kreps [9] muss ein Gleichgewichtspreis nicht eindeutig sein. Ist $P(x, t)$ ein Gleichgewichtspreis, so ist für $c > 0$ der Preis $\tilde{P}(x, t) = P(x, t) + ce^{rt}$ offensichtlich ebenso ein Gleichgewichtspreis. Der minimale Gleichgewichtspreis hingegen ist eindeutig bestimmt.

4.2 Der minimale Gleichgewichtspreis

Satz 4.3 (vgl. [8]). Sei $P_0(x, t) = I(x)$ und für $k = 1, 2, \dots$ sei

$$P_k(x, t) = \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_{k-1}(D_\tau, \tau) \middle| D_t = x \right).$$

Dann ist $P_k(x, t)$ monoton steigend in k und

$$P_*(x) = P_*(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x, t)$$

ist der minimale Gleichgewichtspreis. Dieser ist eindeutig bestimmt und unabhängig von t .

Beweis. Nach Konstruktion hängt P_0 nicht von t ab. Für $h > 0$ hängt

$$\mathbb{E}^{P^i}(D_{t+h} | D_t = x) = \mu + e^{-\lambda_i h} (x - \mu)$$

nur von h und nicht von t ab. Daher sind $P_k(x) = P_k(x, t)$ für alle $k > 0$ und auch deren Grenzwert unabhängig von t . Mit der Wahl der Stoppzeit $\tau = t$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_k(x) &= \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_{k-1}(D_\tau) \middle| D_t = x \right) \\ &\geq \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^t e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(t-t)} P_{k-1}(D_t) \middle| D_t = x \right) \\ &= \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} (P_{k-1}(D_t) | D_t = x) = P_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(P_k(x))_{k \geq 0}$ monoton wachsend und aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt schließlich

$$P_*(x) = \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_*(D_\tau) \middle| D_t = x \right).$$

Somit ist $P_*(x)$ ein Gleichgewichtspreis. Zu zeigen bleibt die Minimalität. Sei $P(x, t)$ ein beliebiger Gleichgewichtspreis. Zuerst zeigt man induktiv, dass $P(x, t) \geq P_k(x)$ für alle

$k \geq 0$. Der Induktionsanfang ergibt sich aus der Definition des Gleichgewichtspreises, denn offensichtlich gilt $P(x, t) \geq I(x) = P_0(x)$. Sei nun $P(x) \geq P_{k-1}(x)$, so erhält man

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P(D_\tau) \middle| D_t = x \right) \\ &\geq \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_{k-1}(D_\tau) \middle| D_t = x \right) = P_k(x). \end{aligned}$$

Mit dem Grenzübergang folgt letztendlich $P(x, t) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = P_*(x)$, weshalb $P_*(x)$ tatsächlich ein minimaler Gleichgewichtspreis ist. \square

Lemma 4.4. Der minimale Gleichgewichtspreis ist strikt größer als der Sachwert, das heißt $P_*(x) > I(x)$.

Beweis. Es reicht aufgrund der Monotonie von $(P_k(D, t))_{k \geq 0}$ zu zeigen, dass $P_1(x, t) > I(x)$. Zuerst betrachtet man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^i} (I(D_{t+1}) | D_t = x) &= \mathbb{E}^{P^i} \left(\frac{\mu}{r} + \frac{D_{t+1} - \mu}{\lambda_1 + r} \mathbf{1}_{\{D_{t+1} < \mu\}} + \frac{D_{t+1} - \mu}{\lambda_2 + r} \mathbf{1}_{\{D_{t+1} \geq \mu\}} \middle| D_t = x \right) \\ &> \mathbb{E}^{P^i} \left(\frac{\mu}{r} + \frac{D_{t+1} - \mu}{\lambda_i + r} \mathbf{1}_{\{D_{t+1} < \mu\}} + \frac{D_{t+1} - \mu}{\lambda_i + r} \mathbf{1}_{\{D_{t+1} \geq \mu\}} \middle| D_t = x \right) \\ &= \mathbb{E}^{P^i} \left(\left(\frac{\mu}{r} + \frac{D_{t+1} - \mu}{\lambda_i + r} \right) \middle| D_t = x \right) \\ &= e^r \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_{t+1}^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x \right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile analog zum Beweis von Lemma 4.2 folgt. Die Ungleichung ist strikt, da sowohl $P^i(D_{t+1} < \mu) > 0$ als auch $P^i(D_{t+1} \geq \mu) > 0$. Mit der Wahl der Stoppzeit $\tau = t + 1$ folgt

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &= \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_0(D_\tau) \middle| D_t = x \right) \\ &\geq \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{t+1} e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(t+1-t)} I(D_{t+1}) \middle| D_t = x \right) \\ &> \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{t+1} e^{-r(s-t)} D_s ds + \int_{t+1}^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x \right) \\ &= \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x \right) = I(x). \end{aligned}$$

\square

Das vorhergehende Lemma besagt, dass Investoren stets bereit sind, mehr zu bezahlen als sie an Dividendenzahlungen erwarten. In diesem Zusammenhang scheint es gerechtfertigt, von einer Preisblase zu sprechen. Mit

$$B(x) = P_*(x) - I(x)$$

wird die Größe einer **Preisblase** definiert. B ist immer strikt positiv, das heißt, es handelt sich um eine nie verschwindende Preisblase. Um B explizit bestimmen zu können, müssen wir den minimalen Gleichgewichtspreis berechnen. Chen und Kohn [8] finden heraus, dass dieser eine Differentialgleichung erfüllt, indem sie die Differentialgleichung zuerst aufstellen und danach zeigen, dass ihre Lösung ein minimaler Gleichgewichtspreis ist. Das motiviert die Bestimmung der allgemeinen Lösung der Weberschen Differentialgleichung, mithilfe derer man die Differentialgleichung für den minimalen Gleichgewichtspreis lösen kann.

Lemma 4.5. Die Webersche Differentialgleichung (vgl. S.564 in [14], S.686ff in [21])

$$y''(x) - \left(\frac{x^2}{4} + a \right) y(x) = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \left(M \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2} \right) c_1 + x M \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2} \right) c_2 \right)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dabei ist

$$M(\alpha, \beta, z) = {}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{z^k}{k!}$$

die konfluente hypergeometrische Funktion (vgl. [1], S.504ff in [21]).

Beweis. Zuerst substituiert man $y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} v(x)$ und setzt

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-\frac{x^2}{4}} \left(v'(x) - \frac{x}{2} v(x) \right), \\ y''(x) &= e^{-\frac{x^2}{4}} \left(v''(x) - \frac{1}{2} v(x) - x v'(x) + \frac{x^2}{4} v(x) \right) \end{aligned}$$

in die Webersche Differentialgleichung ein, woraus sich

$$e^{-\frac{x^2}{4}} \left(v''(x) - x v'(x) - \left(a + \frac{1}{2} \right) v(x) \right) = 0$$

ergibt. Da $e^{-\frac{x^2}{4}} > 0$ für alle $x < \infty$ erhält man mit $\rho = \left(a + \frac{1}{2} \right)$ die Differentialgleichung

$$v''(x) - x v'(x) - \rho v(x) = 0,$$

die mit dem Eulerschen Potenzreihenansatz

$$v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j$$

gelöst werden kann. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} (\alpha_j (j)(j-1)) x^{j-2} - \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j j) x^j - \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j \rho) x^j &= 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} ((j+2)(j+1)\alpha_{j+2} - (j+\rho)\alpha_j) x^j + 2\alpha_2 - \rho\alpha_0 &= 0. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich die Rekursion

$$(j+2)(j+1)\alpha_{j+2} = (j+\rho)\alpha_j \quad \forall j \geq 0.$$

Induktiv kann man leicht zeigen, dass

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{(2k)!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+\rho) \alpha_0,$$

$$\alpha_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1+\rho) \alpha_1$$

für alle $k \geq 0$ mit beliebig wählbaren α_0 und α_1 gilt, womit schließlich

$$v(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} (\rho+2j) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) c_1 + \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} (\rho+2j+1) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) c_2$$

mit den Konstanten c_1 und c_2 folgt. Durch Einsetzen in $y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} v(x)$ ergibt sich die Lösung der Weberschen Differentialgleichung in Reihendarstellung. Diese lässt sich in die bereits in Kapitel 5 erwähnte Schreibweise von Pochhammer und Barnes überführen (vgl. S.686 in [21]). Da man induktiv zeigen kann, dass

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(a + \frac{1}{2} + 2j \right) = 2^k \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right)_k,$$

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(a + \frac{3}{2} + 2j \right) = 2^k \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} \right)_k,$$

$$(2k)! = 2^{2k} \left(\frac{1}{2} \right)_k k!,$$

$$(2k+1)! = 2^{2k} \left(\frac{3}{2} \right)_k k!$$

gilt, folgt die Darstellung

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right)_k}{\left(\frac{1}{2} \right)_k} \frac{\left(\frac{x^2}{2} \right)^k}{k!} c_1 + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} \right)_k}{\left(\frac{3}{2} \right)_k} \frac{\left(\frac{x^2}{2} \right)^k}{k!} c_2 \right)$$

und damit das zu Beweisende. □

Lemma 4.6. Sei $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $r > 0$ und $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Zur Differentialgleichung

$$\max(\lambda_1(\mu-x), \lambda_2(\mu-x)) \Phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi''(x) - r\Phi(x) + x = 0$$

existiert eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung mit $\Phi(x) = O(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Die Lösung hat die Darstellung

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda_1(\mu-x)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_1}(\mu-x)}{\sigma}\right) C_1 + \frac{x}{r+\lambda_1} + \frac{\mu\lambda_1}{r(r+\lambda_1)} & \text{für } x < \mu, \\ e^{\frac{\lambda_2(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_2}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_2}(x-\mu)}{\sigma}\right) C_2 + \frac{x}{r+\lambda_2} + \frac{\mu\lambda_2}{r(r+\lambda_2)} & \text{für } x \geq \mu \end{cases}$$

mit den Konstanten

$$C_1 = \frac{\sigma(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{2\lambda_1}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)}{2\sqrt{\pi}(\lambda_1 + r)(\lambda_2 + r)\left(\sqrt{\lambda_2}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\lambda_1}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)\right)},$$

$$C_2 = -\frac{\sigma(\lambda_2 - \lambda_1)\sqrt{2\lambda_2}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2} + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}(\lambda_1 + r)(\lambda_2 + r)\left(\sqrt{\lambda_2}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\lambda_1}\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)\right)}.$$

Hierbei bezeichnen $D_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z)$ die parabolischen Zylinderfunktionen (vgl. [1]), welche die Darstellung

$$D_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z) = e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_i}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_i} + \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{r}{\lambda_i} + 2j \right) \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) - \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_i}\right)} \left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{r}{\lambda_i} + 2j + 1 \right) \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \right)$$

mit $i = 1, 2$ besitzen. Die Funktion $\Phi(x)$ ist konvex, monoton wachsend und zweimal stetig differenzierbar. Es gilt außerdem

$$\frac{1}{r + \lambda_1} < \Phi'(x) < \frac{1}{r + \lambda_2}$$

für alle x .

Beweis. Die Idee des Beweises entnehmen Chen und Kohn [8] einer Arbeit von Levendorskiĭ [10] zur Bepreisung von Optionen in einem Ornstein-Uhlenbeck-Modell. Ein ähnliches Vorgehen findet man auch in [30], wo der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess zur Modellierung des Überschusses einer Firma im Rahmen einer Optimierung der Strategie der Dividendenzahlung herangezogen wird. Zuerst betrachtet man den Fall $x < \mu$. In die Gleichung

$$\lambda_1(\mu - x)\Phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi''(x) - r\Phi(x) + x = 0$$

setzt man

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \frac{x}{r + \lambda_1} + \frac{\mu\lambda_1}{r(r + \lambda_1)}$$

ein und erhält

$$\lambda_1 (\mu - x) \left(\Psi'(x) + \frac{1}{r + \lambda_1} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \Psi''(x) - r \left(\Psi(x) + \frac{x}{r + \lambda_1} + \frac{\mu \lambda_1}{r(r + \lambda_1)} \right) + x = 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \Psi''(x) + \lambda_1 (\mu - x) \Psi'(x) - r \Psi(x) = 0.$$

Danach substituiert man

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{2\lambda_1} (x - \mu)}{\sigma}.$$

Wegen $dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda_1}} d\tilde{x}$ ergibt sich nun

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \lambda_1 (\mu - x) \frac{d}{dx} \Psi(x) - r \Psi(x) = 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{2\lambda_1}{\sigma^2} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \Psi(x) - \lambda_1 \frac{\sigma \tilde{x}}{\sqrt{2\lambda_1}} \frac{\sqrt{2\lambda_1}}{\sigma} \frac{d}{d\tilde{x}} \Psi(x) - r \Psi(x) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \Psi(x) - \lambda_1 \tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} \Psi(x) - r \Psi(x) = 0.$$

Setzt man jetzt $\Psi(x) = \psi(\tilde{x}) \exp\left(\frac{\tilde{x}^2}{4}\right)$ ein, so folgt

$$\lambda_1 \left(\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \psi(\tilde{x}) + \tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} \psi(\tilde{x}) + \left(\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \right) \psi(\tilde{x}) \right) e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}}$$

$$- \lambda_1 \left(\tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} \psi(\tilde{x}) + \frac{\tilde{x}^2}{2} \psi(\tilde{x}) \right) e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} - r \psi(\tilde{x}) e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} = 0,$$

$$\lambda_1 e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} \left(\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \psi(\tilde{x}) - \left(\frac{\tilde{x}^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{r}{\lambda_1} \right) \psi(\tilde{x}) \right) = 0.$$

Da jedoch $\lambda_1 e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} > 0$ für alle $\tilde{x} > -\infty$ ist, folgt somit

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \psi(\tilde{x}) - \left(\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{r}{\lambda_1} - \frac{1}{2} \right) \psi(\tilde{x}) = 0.$$

Diese Webersche Differentialgleichung hat nach Lemma 4.5 die allgemeine Lösung

$$\psi(\tilde{x}) = e^{-\frac{\tilde{x}^2}{4}} \left(M \left(\frac{r}{2\lambda_1}, \frac{1}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2} \right) c_1 + \tilde{x} M \left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2} \right) c_2 \right).$$

Offensichtlich ist $\psi(-\tilde{x})$ ebenso eine Lösung. Um die parabolische Zylinderfunktion (siehe S.39 in [1]) als Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, setzt man

$$c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2^{\frac{r}{\lambda_1}} \Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)}},$$

$$c_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2^{\frac{r}{\lambda_1}} \Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)}} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ein und erhält die parabolische Zylinderfunktion

$$D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(\tilde{x}) = e^{-\frac{\tilde{x}^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)} M\left(\frac{r}{2\lambda_1}, \frac{1}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}\tilde{x}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)} M\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2}\right) \right)$$

als Lösung. Damit sind $D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(\tilde{x})$ und $D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(-\tilde{x})$ Lösungen. Anhand des gewünschten Grenzverhaltens kann man jetzt bereits eine Konstante bestimmen. Die Asymptotik der parabolischen Zylinderfunktionen wird auf S.93 in [1] untersucht. Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^{-\frac{r}{\lambda_1}} (1 + O(\tilde{x}^{-2})) \quad \text{für } \tilde{x} \rightarrow \infty, \\ e^{\frac{\tilde{x}^2}{4}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(-\tilde{x}) &= e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}} \tilde{x}^{-\frac{r}{\lambda_1}} (1 + O(\tilde{x}^{-2})) \quad \text{für } \tilde{x} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Um für $\tilde{x} \rightarrow -\infty$ beschränkt zu bleiben, muss die allgemeine Lösung dieser Weberschen Differentialgleichung also die Form

$$\psi(\tilde{x}) = D_{-\frac{r}{\lambda_1}}(-\tilde{x}) C_1$$

haben. Durch Rücksubstituieren ergibt sich somit

$$\Psi(x) = e^{\frac{\lambda_1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}\left(-\frac{\sqrt{2\lambda_1}(x-\mu)}{\sigma}\right) C_1.$$

Indem man nun $\Psi(x)$ einsetzt, folgt für $x < \mu$ schließlich

$$\Phi(x) = e^{\frac{\lambda_1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_1}(\mu-x)}{\sigma}\right) C_1 + \frac{x}{r+\lambda_1} + \frac{\mu\lambda_1}{r(r+\lambda_1)}.$$

Analog dazu kann man für $x \geq \mu$

$$\Phi(x) = e^{\frac{\lambda_2(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_2}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_2}(x-\mu)}{\sigma}\right) C_2 + \frac{x}{r+\lambda_2} + \frac{\mu\lambda_2}{r(r+\lambda_2)}$$

zeigen. Aus den Stetigkeitsbedingungen der ersten und zweiten Ableitung bestimmt man nun die Konstanten. Zunächst betrachtet man mit $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} D_{-\frac{r}{\lambda_j}}(0) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_j}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_j} + \frac{1}{2}\right)}, \\ \frac{d}{dx} D_{-\frac{r}{\lambda_1}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_1}(\mu-x)}{\sigma}\right) \Big|_{x=\mu} &= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1}} \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\sigma\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)}, \\ \frac{d}{dx} D_{-\frac{r}{\lambda_2}}\left(\frac{\sqrt{2\lambda_2}(x-\mu)}{\sigma}\right) \Big|_{x=\mu} &= -\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_2}} \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{\sigma\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)}, \end{aligned}$$

was man über den Zusammenhang mit den konfluenten hypergeometrischen Funktionen erhält (vgl. S.39 in [1]). Damit die Lösung der Differentialgleichung stetig im Punkt $x = \mu$ sein kann, muss also

$$\frac{\mu}{\lambda_1+r} + \frac{\mu\lambda_1}{r(\lambda_1+r)} + \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)} C_1 = \frac{\mu}{\lambda_2+r} + \frac{\mu\lambda_2}{r(\lambda_2+r)} + \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2} + \frac{1}{2}\right)} C_2$$

gelten. Für die Stetigkeit der ersten Ableitung muss wiederum

$$\frac{1}{\lambda_1 + r} + \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1}} \frac{2\lambda_1}{\sigma\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_1}\right)} C_1 = \frac{1}{\lambda_2 + r} - \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_2}} \frac{2\lambda_2}{\sigma\Gamma\left(\frac{r}{2\lambda_2}\right)} C_2$$

erfüllt sein. Aus diesen beiden in C_1 und C_2 linearen Gleichungen lassen sich nun die oben angeführten Konstanten bestimmen. Man kann mithilfe der Eigenschaften der Gammafunktion zeigen, dass es sich um dieselben Konstanten wie im Appendix von [8] handelt, auch wenn das auf den ersten Blick nicht ersichtlich ist. Letztendlich hat die Differentialgleichung somit eine eindeutige Lösung. Mithilfe der im Beweis von Lemma 4.5 gefundenen Reihendarstellung der Lösung der Weberschen Differentialgleichung erhält man leicht durch Einsetzen die Reihendarstellung von $\Phi(x)$.

Die Stetigkeit der zweiten Ableitung ergibt sich aus der Differentialgleichung, da der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \mu^-} \frac{\sigma^2}{2} \Phi''(x) = \lim_{x \rightarrow \mu^-} r\Phi(x) - x - \lambda_1(\mu - x)\Phi'(x) = r\Phi(\mu) - \mu$$

sowie auch der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \mu^+} \frac{\sigma^2}{2} \Phi''(x) = \lim_{x \rightarrow \mu^+} r\Phi(x) - x - \lambda_2(\mu - x)\Phi'(x) = r\Phi(\mu) - \mu$$

im Punkt μ übereinstimmen. Um die Konvexität von $\Phi(x)$ zu zeigen, genügt es diese für $F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z) = e^{\frac{z^2}{4}} D_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z)$ zu beweisen. Zunächst betrachtet man die Integraldarstellung (vgl. S.44 in [1])

$$F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{\lambda_i}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-tz} dt.$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung ergibt sich für $0 \leq \alpha \leq 1$ dann

$$\begin{aligned} F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{\lambda_i}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-t(\alpha z_1+(1-\alpha)z_2)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{\lambda_i}\right)} \int_0^\infty \left(t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-tz_1}\right)^\alpha \left(t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-tz_2}\right)^{1-\alpha} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{\lambda_i}\right)} \left(\int_0^\infty t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-tz_1} dt\right)^\alpha \left(\int_0^\infty t^{\frac{r}{\lambda_i}-1} e^{-\frac{1}{2}t^2-tz_2} dt\right)^{1-\alpha} \\ &= \left(F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z_1)\right)^\alpha \left(F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z_2)\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Die Funktion $F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z)$ ist daher logarithmisch konvex, was die Konvexität impliziert. Die Monotonie von $\Phi(x)$ ist aufgrund des Grenzverhaltens und der Konvexität offensichtlich. Da $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} F_{-\frac{r}{\lambda_i}}(z) = o(1)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{x}{r + \lambda_1} + \frac{\mu\lambda_2}{r(r + \lambda_2)} + o(1) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ \Phi(x) &= \frac{x}{r + \lambda_2} + \frac{\mu\lambda_2}{r(r + \lambda_2)} + o(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus sowie aus der Konvexität erhält man letztendlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{r + \lambda_1} < \Phi'(x) < \frac{1}{r + \lambda_2}.$$

□

Satz 4.7 (vgl. [8]). *Sei $\Phi(x)$ die in Lemma 4.6 gegebene Funktion. Dann ist $\Phi(x)$ ein Gleichgewichtspreis und die Wahl der Stoppzeit $\tau = t$ ist optimal.*

Beweis. Unter Verwendung der Itô-Formel mit $f(D_t, t) = \Phi(D_t) e^{-rt}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}\Phi(D_t)) &= -re^{-rt}\Phi(D_t) dt + e^{-rt}\Phi'(D_t) dD_t + \frac{1}{2}e^{-rt}\Phi''(D_t) (dD_t)^2 \\ &= e^{-rt} \left(-r\Phi(D_t) dt + \Phi'(D_t) (\lambda_i(\mu - D_t) dt + \sigma dW_t^i) + \frac{1}{2}\Phi''(D_t) \sigma^2 dt \right) \\ &= e^{-rt} \left(\left(\lambda_i(\mu - D_t) \Phi'(D_t) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi''(D_t) - r\Phi(D_t) \right) dt + \sigma^2 \Phi'(D_t) dW_t^i \right) \\ &\leq e^{-rt} (-D_t) dt + \sigma^2 e^{-rt} \Phi'(D_t) dW_t^i \end{aligned}$$

mit $i = 1, 2$, wobei die Ungleichung sofort aus der in Lemma 4.6 angeführten Differentialgleichung folgt. Nun sei $\tau \geq t$ eine beliebige Stoppzeit. Nach Lemma 4.6 ist $\Phi'(x)$ beschränkt und nichtnegativ. Daher folgt aufgrund der Eigenschaften des Itô-Integrals (vgl. Theorem 3.2.1 auf S.30 in [17]) aus

$$\int_0^\infty (e^{-ru}\Phi'(u))^2 du < \frac{1}{(r + \lambda_2)^2} \int_0^\infty e^{-2ru} du = \frac{1}{2r(r + \lambda_2)^2} < \infty$$

schließlich, dass

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-ru}\Phi'(u) dW_u^i \middle| D_t = x \right) = 0$$

ist. Somit erhält man die Ungleichung

$$\mathbb{E}^{P^i} (e^{-r\tau}\Phi(D_\tau) | D_t = x) \leq e^{-rt}\Phi(x) + \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-ru} (-D_u) du \middle| D_t = x \right)$$

und daraus wiederum

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-ru} (D_u) du + e^{-r\tau}\Phi(D_\tau) \middle| D_t = x \right) \leq e^{-rt}\Phi(x).$$

Die Ungleichung bleibt bestehen, wenn man über $i = 1, 2$ maximiert und das Supremum über die Stoppzeiten bildet, weswegen

$$\Phi(x) \geq \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} (D_u) du + e^{-r(\tau-t)}\Phi(D_\tau) \middle| D_t = x \right)$$

ist. Mit der Wahl $\tau = t$ folgt wegen

$$\Phi(x) \geq \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} (D_u) du + e^{-r(\tau-t)}\Phi(D_\tau) \middle| D_t = x \right) \geq \Phi(x)$$

Gleichheit. Setzt man $\tau = N$ mit $N \rightarrow \infty$, so ergibt sich

$$\Phi(x) \geq \max_{i=1,2} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\infty e^{-r(u-t)} (D_u) du \middle| D_t = x \right) = I(x).$$

Aus $\Phi(x) \geq I(x)$ sowie

$$\Phi(x) = \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} (D_u) du + e^{-r(\tau-t)} \Phi(D_\tau) \middle| D_t = x \right)$$

erkennt man, dass $\Phi(x)$ ein Gleichgewichtspreis ist und die Wahl $\tau = t$ optimal ist. \square

Das weitere Ziel besteht darin, zu zeigen, dass $\Phi(x)$ der minimale Gleichgewichtspreis ist. Um das zu erreichen, benötigt man einige Begriffe und Resultate aus der Theorie der Viskositätslösungen (vgl. [2] oder [12]). An dieser Stelle genügt es, sich auf den eindimensionalen Fall, das heißt auf den gewöhnlicher Differentialgleichungen, zu beschränken. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird als oberhalbstetig in x_0 definiert, wenn $\limsup_{y \rightarrow x_0} f(y) \leq f(x_0)$ ist, beziehungsweise als unterhalbstetig, wenn $\liminf_{y \rightarrow x_0} f(y) \geq f(x_0)$ ist. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Man betrachtet Differentialgleichungen der Form $F(x, u, u', u'') = 0$ mit der Abbildung $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir beschränken uns auf Funktionen, die

$$F(x, \eta, p, X) \leq F(x, \iota, p, Y) \quad \text{für } Y \leq X, \quad \eta \leq \iota$$

erfüllen. Diese nennt man passend. Insbesondere ist die Funktion

$$F(x, u, u', u'') = -\max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) u' - \frac{\sigma^2}{2} u'' + ru - x$$

passend. Ist u unterhalbstetig und ist für jedes $\varphi \in C^2(\Omega)$ sowie jede Minimalstelle $\hat{x} \in \Omega$ von $u - \varphi$ die Ungleichung

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \varphi'(\hat{x}), \varphi''(\hat{x})) \geq 0$$

erfüllt, dann nennt man u eine **Viskositätssuperlösung** von $F(x, u, u', u'') = 0$ in Ω . Eine Viskositätssuperlösung u der Differentialgleichung

$$\max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) u'(x) + \frac{\sigma^2}{2} u''(x) - ru(x) + x = 0$$

muss für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion φ und für jeden Minimalpunkt \hat{x} von $u - \varphi$ die Ungleichung

$$\max(\lambda_1(\mu - \hat{x}), \lambda_2(\mu - \hat{x})) \varphi'(\hat{x}) + \frac{\sigma^2}{2} \varphi''(\hat{x}) - ru(\hat{x}) \leq -\hat{x}$$

erfüllen. Ist u oberhalbstetig und ist für jedes $\varphi \in C^2(\Omega)$ und jede lokale Maximalstelle $\hat{x} \in \Omega$ von $u - \varphi$ die Ungleichung

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \varphi'(\hat{x}), \varphi''(\hat{x})) \leq 0$$

erfüllt, dann nennt man u eine **Viskositätssublösung** von $F(x, u, u', u'') = 0$ in Ω . Ist u eine Viskositätssublösung und eine Viskositätssuperlösung, so nennt man u eine **Viskositätslösung** (vgl. S.8 in [2]). Klassische Lösungen von Differentialgleichungen sind auch Viskositätslösungen.

Lemma 4.8. Es gilt $\Phi(x) \leq P_*(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) - P_*(x) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 4.6 ist $\Phi(x)$ ein Gleichgewichtspreis und $P_*(x)$ nach Satz 4.3 ein minimaler Gleichgewichtspreis. Daher ist $\Phi(x) \leq P_*(x)$ offensichtlich. Nach Konstruktion ist $P_*(x) \geq I(x)$. Sei $x < \mu$. Wegen

$$\Phi(x) = e^{\frac{\lambda_1(\mu-x)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}} \left(\frac{\sqrt{2\lambda_1}(\mu-x)}{\sigma} \right) C_1 + I(x)$$

ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) - I(x) = 0$. Dasselbe gilt für $x \geq \mu$ und $x \rightarrow \infty$. Damit folgt schließlich

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) - P_*(x) \leq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) - I(x) = 0.$$

□

Lemma 4.9 (vgl. [8]). $P_*(x)$ ist eine unterhalbstetige Funktion.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für jede Folge $(x_j)_{j \geq 0}$ mit $x_j \rightarrow x$ die Ungleichung

$$P_*(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} P_*(x_j)$$

erfüllt ist. Da $P_*(x)$ ein minimaler Gleichgewichtspreis ist, gilt

$$P_*(x) = \max_{i=1,2} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau-t)} P_*(D_\tau) \middle| D_t = x \right).$$

Bezeichne τ_j die Stoppzeit

$$\tau_j = \inf \{s \geq t : D_s = x, D_t = x_j\}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P_*(x_j) &\geq \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{\tau_j} e^{-r(s-t)} D_s ds + e^{-r(\tau_j-t)} P_*(x) \middle| D_t = x_j \right) \\ &= \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{\tau_j} e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x_j \right) + \mathbb{E}^{P^i} (e^{-r\tau_j} | D_t = x_j) P_*(x), \end{aligned}$$

was sich zu

$$P_*(x) \leq \frac{P_*(x_j) - \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{\tau_j} e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x_j \right)}{\mathbb{E}^{P^i} (e^{-r(\tau_j-t)} | D_t = x_j)}$$

umformen lässt. Wenn $x_j \rightarrow x$, dann strebt τ_j P^i -fast sicher gegen t . Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz ergibt sich somit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{P^i} (e^{-r(\tau_j-t)} | D_t = x_j) = \mathbb{E}^{P^i} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} e^{-r(\tau_j-t)} \middle| D_t = x \right) = 1.$$

Da

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} D_s ds \right) < \infty$$

ist, lässt sich erneut der Satz über die dominierte Konvergenz anwenden. Man erhält

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{\tau_j} e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x_j \right) = \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^t e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x \right) = 0$$

und daraus wiederum

$$P_*(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_*(x_j) - \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^{\tau_j} e^{-r(s-t)} D_s ds \middle| D_t = x_j \right)}{\mathbb{E}^{P^i} \left(e^{-r(\tau_j-t)} \middle| D_t = x_j \right)} = \lim_{j \rightarrow \infty} P_*(x_j).$$

□

Lemma 4.10 (vgl. [8]). $P_*(x)$ ist eine Viskositätssuperlösung von

$$- \left(\max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) u'(x) + \frac{\sigma^2}{2} u''(x) - ru(x) + x \right) = 0.$$

Beweis. Man nimmt an, $P_*(x)$ sei keine Viskositätssuperlösung, was nun zu einem Widerspruch führen muss. Es existiere eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ψ und eine reelle Zahl \hat{x} , sodass \hat{x} ein lokales Minimum von $P_*(x) - \psi(x)$, $\psi(\hat{x}) = P_*(\hat{x})$ und

$$- \left(\max(\lambda_1(\mu - \hat{x}), \lambda_2(\mu - \hat{x})) \psi'(\hat{x}) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(\hat{x}) - r\psi(\hat{x}) + \hat{x} \right) \leq -\delta$$

mit $\delta > 0$ beliebig ist. Man unterscheidet jetzt drei Fälle.

Zuerst betrachtet man den Fall $\hat{x} < \mu$. Nun wählt man ε so, dass $\hat{x} + \varepsilon < \mu$ und auf dem Intervall $[\hat{x} - \varepsilon, \hat{x} + \varepsilon]$ sowohl

$$\max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) \psi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(x) - r\psi(x) + x \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

als auch $P_*(x) - \psi(x) \geq 0$ erfüllt ist. Die Stoppzeit

$$\tau = \inf \{s > t : D_s = \hat{x} - \varepsilon \vee D_s = \hat{x} + \varepsilon\}$$

ist aufgrund von $\varepsilon > 0$ sicher strikt positiv. Da $\lambda_1 > \lambda_2$ sowie $\hat{x} + \varepsilon < \mu$ ist, folgt für $t \leq s \leq \tau$

$$\lambda_1(\mu - D_t) \psi'(D_t) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(D_t) - r\psi(D_t) + D_t \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Mit der Itô-Formel auf $f(t, D_t) = e^{-rt} \psi(D_t)$ angewandt resultiert

$$\begin{aligned} df(t, D_t) &= -re^{-rt} \psi(D_t) dt + e^{-rt} \psi'(D_t) dD_t + \frac{1}{2} e^{-rt} \psi''(D_t) (dD_t)^2 \\ &= e^{-rt} \left(\lambda_1(\mu - D_t) \psi'(D_t) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(D_t) - r\psi(D_t) \right) dt + \sigma e^{-rt} \psi'(D_t) dW_t^i. \end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt verwendet man

$$\mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} \psi'(D_s) dW_s^1 \middle| D_t = \hat{x} \right) = 0,$$

das sich ergibt, weil $|\psi'(D_s)|$ für $s \in [0, \tau]$ gleichmäßig beschränkt ist und deswegen

$$\mathbb{E}^{P^1} \left(\left(\int_t^\tau \sigma e^{-r(s-t)} \psi'(D_s) dW_s^1 \right)^2 \right) = \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau \sigma^2 e^{-2r(s-t)} (\psi'(D_s))^2 ds \right) < \infty$$

gilt. Durch Integrieren zeigt sich nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^1} (e^{-r\tau} \psi(D_\tau) | D_t = \hat{x}) &= \mathbb{E}^{P^1} \left(e^{-rt} \psi(D_t) + \int_t^\tau e^{-rs} (\lambda_1 (\mu - D_s) \psi'(D_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(D_s) - r\psi(D_s)) ds + \int_0^\tau e^{-rs} \psi'(D_s) dW_s^1 \Big| D_t = \hat{x} \right) \\ &= e^{-rt} \psi(\hat{x}) + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-rs} (\lambda_1 (\mu - D_s) \psi'(D_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(D_s) - r\psi(D_s)) \Big| D_t = \hat{x} \right) ds \\ &\geq e^{-rt} \psi(\hat{x}) + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-rs} \left(\frac{\delta}{2} - D_s \right) ds \Big| D_t = \hat{x} \right) \\ &= e^{-rt} \psi(\hat{x}) - \mathbb{E}^{P^1} \left(\frac{\delta}{2r} (e^{-r\tau} - e^{-rt}) - \int_t^\tau e^{-rs} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right), \end{aligned}$$

was sich zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^1} (e^{-r(\tau-t)} \psi(D_\tau) | D_t = \hat{x}) \\ \geq \psi(\hat{x}) - \frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^1} (e^{-r(\tau-t)} - 1 | D_t = \hat{x}) - \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) \end{aligned}$$

umformen lässt. Da $P_*(x)$ ein minimaler Gleichgewichtspreis und $\tau > t$ eine Stoppzeit ist, gilt

$$P_*(\hat{x}) \geq \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) + \mathbb{E}^{P^i} (e^{-r(\tau-t)} P_*(D_\tau) | D_t = \hat{x}),$$

was man wiederum als

$$-\mathbb{E}^{P^i} (e^{-r(\tau-t)} P_*(D_\tau) | D_t = \hat{x}) \geq \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) - P_*(\hat{x})$$

schreiben kann. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^1} (e^{-r\tau} (\psi(D_\tau) - P_*(D_\tau)) | D_t = \hat{x}) &\geq \psi(\hat{x}) - \frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^1} (e^{-r\tau} - 1 | D_t = \hat{x}) \\ &\quad - \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) \\ &\quad + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) - P_*(\hat{x}) \\ &= \frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^1} (1 - e^{-r(\tau-t)}). \end{aligned}$$

Da einerseits $\varepsilon > 0$, $\tau > t$ und $r > 0$ sind, sieht man sofort, dass

$$\frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^1} \left(1 - e^{-r(\tau-t)} \middle| D_t = \hat{x} \right) > 0$$

ist. Andererseits ergibt sich nach Konstruktion des Intervalls $[\hat{x} - \varepsilon, \hat{x} + \varepsilon]$, dass

$$\mathbb{E}^{P^1} \left(e^{-r(\tau-t)} (\psi(D_\tau) - P_*(D_\tau)) \middle| D_t = \hat{x} \right) \leq 0$$

ist, womit es zu einem Widerspruch kommt.

Der Fall $\hat{x} > \mu$ verläuft ähnlich. Allerdings wählt man hier ε so, dass $\hat{x} + \varepsilon > \mu$. Indem man lediglich λ_1 durch λ_2 sowie P^1 durch P^2 ersetzt, kommt man durch analoge Argumentation zum Widerspruch.

Im Fall $\hat{x} = \mu$ wählt man $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) \psi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(x) - r\psi(x) + x &\geq \frac{5\delta}{6}, \\ |\max(\lambda_1(\mu - x), \lambda_2(\mu - x)) \psi'(x)| &\leq \frac{\delta}{6}, \\ P_*(x) - \psi(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in [\hat{x} - \varepsilon, \hat{x} + \varepsilon]$ erfüllt ist. Daraus resultiert

$$\frac{\sigma^2}{2} \psi''(x) - r\psi(x) + x \geq \frac{2\delta}{3} > 0$$

auf dem Intervall $[\hat{x} - \varepsilon, \hat{x} + \varepsilon]$. Die Stopzeit

$$\tau = \inf \{s > t : D_s = \hat{x} - \varepsilon \vee D_s = \hat{x} + \varepsilon\}$$

ist offensichtlich strikt positiv. Da $|\psi'(D_s)|$ für $s \in [t, \tau]$ beschränkt ist, folgt

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} \psi'(D_s) dW_s^i \middle| D_t = \hat{x} \right) = 0.$$

Durch Anwenden der Itô-Formel auf $f(t, D_t) = e^{-rt} \psi(D_t)$ und anschließendes Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^i} (e^{-r\tau} \psi(D_\tau) \middle| D_t = \hat{x}) &= \mathbb{E}^{P^i} (e^{-rt} \psi(D_t) \\ &\quad + \int_t^\tau e^{-rs} (\max(\lambda_1(\mu - D_s), \lambda_2(\mu - D_s)) \psi'(D_s) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(D_s) - r\psi(D_s)) ds + \int_t^\tau e^{-rs} \psi'(D_s) dW_s^i \middle| D_t = \hat{x}) \\ &\geq e^{-rt} \psi(\hat{x}) + \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-rs} \left(-\frac{\delta}{6} + \frac{2\delta}{3} - D_s \right) ds \middle| D_t = \hat{x} \right) \\ &\geq e^{-rt} \psi(\hat{x}) - \mathbb{E}^{P^i} \left(\frac{\delta}{2r} (e^{-r\tau} - e^{-rt}) - \int_t^\tau e^{-rs} D_s ds \middle| D_t = \hat{x} \right), \end{aligned}$$

woraus sich durch Umformen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^i} \left(e^{-r(\tau-t)} \psi(D_\tau) \Big| D_t = \hat{x} \right) &\geq \\ \psi(\hat{x}) - \frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^i} \left(e^{-r(\tau-t)} - 1 \Big| D_t = \hat{x} \right) &- \mathbb{E}^{P^i} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} D_s ds \Big| D_t = \hat{x} \right) \end{aligned}$$

ergibt. Analog zu vorhin folgt

$$\mathbb{E}^{P^i} \left(e^{-r(\tau-t)} (\psi(D_\tau) - P_*(D_\tau)) \right) \geq \frac{\delta}{2r} \mathbb{E}^{P^i} \left(1 - e^{-r(\tau-t)} \right).$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist kleiner oder gleich Null, während die linke strikt positiv ist, was einen Widerspruch bildet.

Es kann somit kein $\delta > 0$ geben, sodass

$$- \left(\max(\lambda_1(\mu - \hat{x}), \lambda_2(\mu - \hat{x})) \psi'(\hat{x}) + \frac{\sigma^2}{2} \psi''(\hat{x}) - r\psi(\hat{x}) + \hat{x} \right) \leq -\delta.$$

Daher ist $P_*(x)$ eine Viskositätssuperlösung. □

Satz 4.11. $\Phi(x) = P_*(x)$ ist der minimale Gleichgewichtspreis.

Beweis. Im Beweis dieser Aussage in [8] wird ein Satz aus der Theorie der Viskositätslösungen angewandt, obwohl die Voraussetzungen streng genommen nicht erfüllt sind. In einem Erratum [7] korrigiert Kohn diesen Fehler und führt den Beweis wie hier angegeben. Wegen Satz 4.7 ist $P_*(x) \leq \Phi(x)$ klar. Zu zeigen bleibt $P_*(x) \geq \Phi(x)$. Man betrachtet $\inf_{x \in \mathbb{R}} \{P_*(x) - \Phi(x)\}$. Für $x \rightarrow \pm\infty$ ist der Minimalwert 0 nach Lemma 4.8. Wenn x beschränkt ist, existiert, weil $\Phi(x)$ stetig und $P_*(x)$ unterhalbstetig nach Lemma 4.9 ist, ein \hat{x} , an dem $P_*(x) - \Phi(x)$ sein Minimum annimmt. Einerseits gilt die Differentialgleichung

$$\max(\lambda_1(\mu - \hat{x}), \lambda_2(\mu - \hat{x})) \Phi'(\hat{x}) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi''(\hat{x}) - r\Phi(\hat{x}) + \hat{x} = 0$$

und andererseits ist $P_*(x)$ wegen Lemma 4.10 eine Viskositätssuperlösung und daher gilt

$$- \left(\max(\lambda_1(\mu - \hat{x}), \lambda_2(\mu - \hat{x})) \Phi'(\hat{x}) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi''(\hat{x}) - rP_*(\hat{x}) + \hat{x} \right) \geq 0.$$

Aus diesen beiden Tatsachen erkennt man, dass

$$rP_*(\hat{x}) - r\Phi(\hat{x}) \geq 0.$$

Da $r > 0$ ist, ergibt sich damit für $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$P_*(x) - \Phi(x) \geq P_*(\hat{x}) - \Phi(\hat{x}) \geq 0,$$

woraus

$$P_*(x) \geq \Phi(x)$$

folgt. □

Mithilfe des letzten Satzes lässt sich der minimale Gleichgewichtspreis explizit berechnen. Außerdem kann man damit auch die Größe der Preisblasen bestimmen. Eine Analyse des Monotonieverhaltens der Funktion $B(x)$ ist jedoch im Gegensatz zu Kapitel 5 schwierig. Da es nur zwei Investorengruppen gibt, besitzt stets jene Gruppe das Finanzgut, die bereit ist, dafür den Gleichgewichtspreis zu bezahlen. Nach Lemma 4.1 gilt

$$\mathbb{E}^{P^i}(D_{t'}|D_t = x) = \mu + e^{-\lambda_i t'}(x - \mu)$$

für $t' > t$. Wenn $x < \mu$ ist, erwartet offensichtlich die Invesorengruppe 1 eine höhere Dividende, das bedeutet, sie ist optimistischer. Für $x > \mu$ verhält es genau umgekehrt.

Lemma 4.12. Das Finanzgut wird stets vom optimistischeren Marktteilnehmer gehalten. Gehandelt wird zur Stoppzeit $\tau_\mu = \inf \{s > 0 : D_s = \mu\}$.

Beweis. Nehmen wir an, der Prozess $(D_t)_{t \geq 0}$ startet in $x \in \mathbb{R}$. Betrachten wir nun eine Fallunterscheidung. Sei $x < \mu$. Offensichtlich ist $\tau_\mu > 0$. Dann ist für alle $0 < u < \tau_\mu$ klarerweise

$$\begin{aligned} \max(\lambda_1(\mu - D_u), \lambda_2(\mu - D_u)) &= \lambda_1(\mu - D_u), \\ \max(\lambda_1(\mu - D_u), \lambda_2(\mu - D_u)) &> \lambda_2(\mu - D_u). \end{aligned}$$

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} e^{-rt}\Phi(D_t) &= \Phi(D_0) + \int_0^t e^{-ru} \left(-r\Phi(D_u) + \Phi'(D_u)\lambda_i(\mu - D_t) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi''(D_u) \right) du \\ &\quad + \sigma \int_0^t e^{-ru} dW_u^i \end{aligned}$$

und Lemma 4.6 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^1}(e^{-r\tau_\mu}\Phi(D_{\tau_\mu})|D_0 = x) &= \Phi(x) + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_0^{\tau_\mu} e^{-ru} (-r\Phi(D_u) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1(\mu - D_u)\Phi'(D_u) + \frac{1}{2}\Phi''(D_u)\sigma^2) du \middle| D_0 = x \right) \\ &= \Phi(x) + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_0^{\tau_\mu} e^{-ru} (-D_u) \middle| D_0 = x \right) \end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$\Phi(x) = \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_0^{\tau_\mu} e^{-ru} (D_u) du + e^{-r\tau_\mu}\Phi(D_{\tau_\mu}) \middle| D_0 = x \right).$$

Andererseits ergibt sich für eine beliebige Stoppzeit $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^2}(e^{-r\tau}\Phi(D_\tau)|D_0 = x) &= \Phi(x) + \mathbb{E}^{P^2} \left(\int_0^\tau e^{-ru} (-r\Phi(D_u) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2(\mu - D_u)\Phi'(D_u) + \frac{1}{2}\Phi''(D_u)\sigma^2) du \middle| D_0 = x \right) \\ &< \Phi(x) + \mathbb{E}^{P^1} \left(\int_0^\tau e^{-ru} (-D_u) \middle| D_0 = x \right) \end{aligned}$$

und daraus

$$\Phi(x) > \mathbb{E}^{P^2} \left(\int_0^\tau e^{-ru} (D_u) du + e^{-r\tau} \Phi(D_\tau) \middle| D_0 = x \right).$$

Da $\Phi(x)$ der minimale Gleichgewichtspreis ist, wird das Finanzgut also stets von Marktteilnehmern der Klasse 1 gehalten. Wenn $x < \mu$, ist wegen $\lambda_1 > \lambda_2$ die Klasse 2 die pessimistischere. Für den Fall $x > \mu$ folgt analog dazu, dass das Finanzgut von Marktteilnehmern der dann optimistischeren Klasse 2 gehalten wird. \square

Satz 4.13. *Die Größe der Preisblase hat die Darstellung*

$$B(x) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda_1(\mu-x)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_1}} \left(\frac{\sqrt{2\lambda_1}(\mu-x)}{\sigma} \right) C_1 & \text{für } x < \mu, \\ e^{\frac{\lambda_2(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D_{-\frac{r}{\lambda_2}} \left(\frac{\sqrt{2\lambda_2}(x-\mu)}{\sigma} \right) C_2 & \text{für } x \geq \mu \end{cases}$$

mit den Konstanten aus Lemma 4.6 und der dort näher beschriebenen parabolischen Zylinderfunktion $D_{-\frac{r}{\lambda_i}}(x)$.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus der Definition von Preisblasen, Lemma 4.6 und Satz 4.11. \square

Aus den Eigenschaften von C_1 und C_2 kann man Folgendes erkennen (vgl. [8]):

- Für $\lambda_1 - \lambda_2 \rightarrow 0$ verschwindet die Preisblase.
- Wird $\lambda_1 - \lambda_2$ größer, so wächst unter Beibehaltung der anderen Parameter die Preisblase.
- Wird σ größer, so wächst unter Beibehaltung der anderen Parameter die Preisblase.
- Wird r größer, so verringert sich unter Beibehaltung der anderen Parameter die Preisblase.

4.3 Numerisches Beispiel

In Abbildung 4.1 werden der minimale Gleichgewichtspreis $P_*(x) = \Phi(x)$ und der Sachwert $I(x)$ in Abhängigkeit von x für verschiedene λ_1 dargestellt. Man erkennt, dass sich bei gleich bleibenden anderen Parametern der Abstand zwischen Sachwert und Gleichgewichtspreis vergrößert. Das bedeutet, dass die Preisblase mit größerem $\lambda_1 - \lambda_2$ wächst, denn je heterogener die Markteinschätzungen sind, desto eher erzielen Marktteilnehmer durch Spekulation Gewinne. Abbildung 4.2 stellt hingegen die relative Größe der Preisblase in Prozent des Sachwerts, das heißt $\frac{100B(x)}{I(x)}$, für unterschiedliche r dar. Auch hier tritt das ein, was zu erwarten war. Höhere Zinsen r führen zu kleineren Preisblasen. Aus Abbildung 4.3 erkennt man deutlich das Verhalten der Größe der Preisblase $B(\mu)$. Wenn $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ ist $B(\mu) = 0$.

4 Das Modell von Chen und Kohn

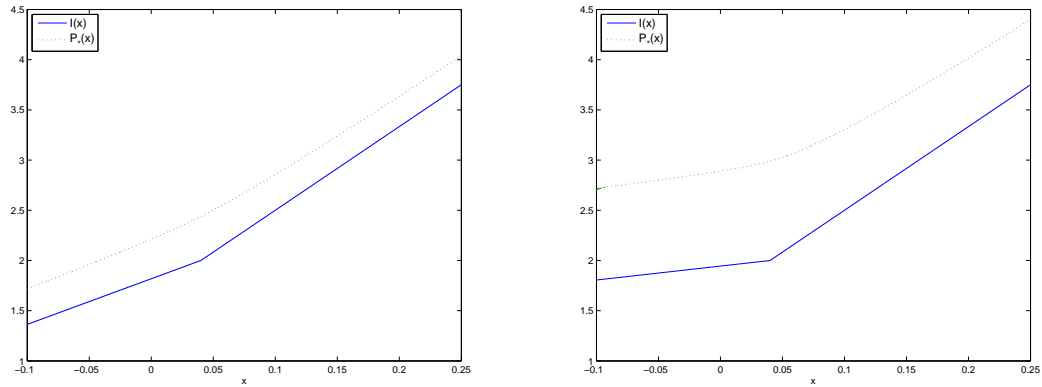


Abbildung 4.1: Minimaler Gleichgewichtspreis und Sachwert in Abhängigkeit von x links mit $\lambda_1 = 0.2$ und rechts mit $\lambda_1 = 0.7$. Die übrigen Parameter haben die Werte $\lambda_2 = 0.1$, $r = 0.02$, $\mu = 0.04$ und $\sigma = 0.02$.

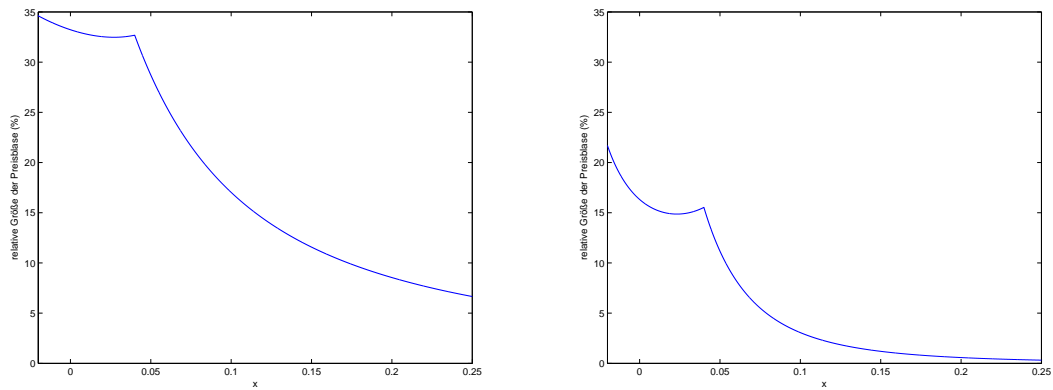


Abbildung 4.2: Die relative Größe der Preisblase in Prozent des Sachwerts in Abhängigkeit von x links mit $r = 0.02$ und rechts mit $r = 0.09$. Die übrigen Parameter haben die Werte $\lambda_1 = 0.12$, $\lambda_2 = 0.05$, $\mu = 0.04$ und $\sigma = 0.2$.

4 Das Modell von Chen und Kohn

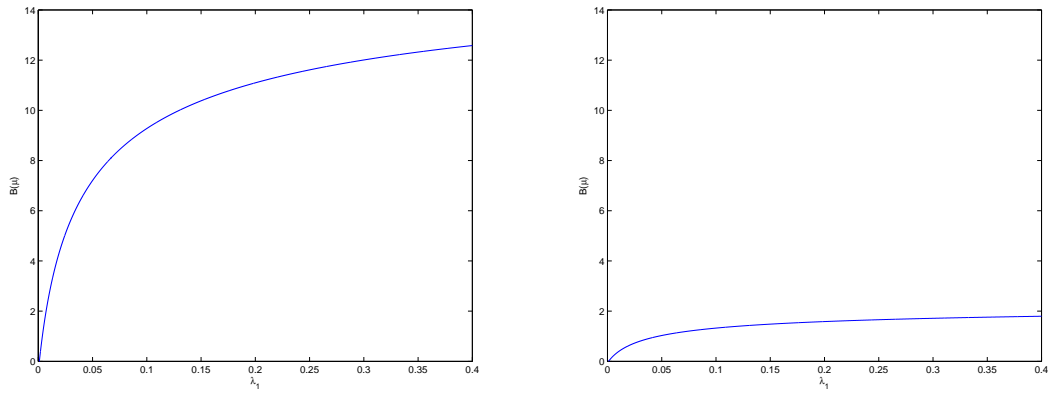


Abbildung 4.3: Die Größe der Preisblase $B(\mu)$ in Abhängigkeit von λ_1 links mit $\sigma = 0.01$ und rechts mit $\sigma = 0.07$. Die übrigen Parameter haben die Werte $\lambda_2 = 0.001$, $r = 0.02$ und $\mu = 0.04$.

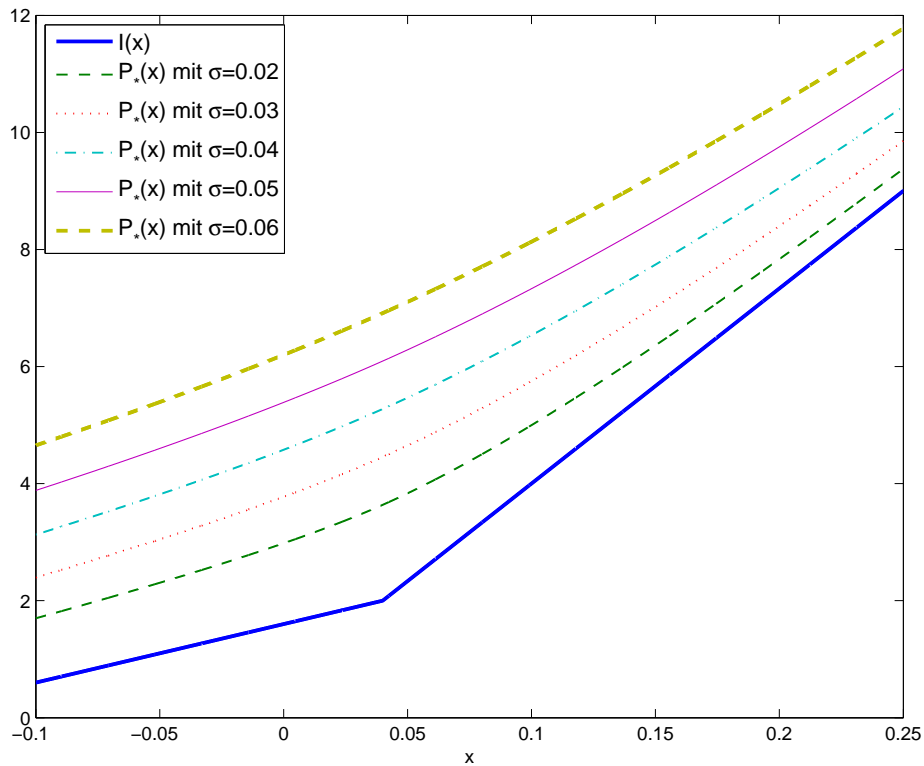


Abbildung 4.4: Minimaler Gleichgewichtspreis zu verschiedenen Werten für σ sowie Sachwert in Abhängigkeit von x mit den Parameterwerten $\lambda_1 = 0.08$, $\lambda_2 = 0.01$, $\mu = 0.04$ und $r = 0.02$.

5 Das Modell von Scheinkman und Xiong

5.1 Grundlagen

In zwei Arbeiten stellen José Scheinkman und Wei Xiong [27] [28] ihr Modell über die Entstehung von Preisblasen durch heterogene Markteinschätzung vor. Es enthält ein risikobehaftetes Finanzgut, das Dividenden auszahlt, und zwei Klassen risikoneutraler Marktteilnehmer. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) sei $(W_t^D, W_t^X, W_t^A, W_t^B)_{t \geq 0}^T$ eine vierdimensionale standard Brownsche Bewegungen bezüglich einer rechtsstetigen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Der Prozess der Dividendenrate $D = (D_t)_{t \geq 0}$ ist nicht direkt beobachtbar und folgt der stochastischen Differentialgleichung

$$dD_t = \lambda(\mu - D_t) dt + \sigma_D dW_t^D$$

mit dem Mean-Reversion-Parameter $\lambda \geq 0$, dem Langzeitmittel $\mu \in \mathbb{R}$ und dem Volatilitätsparameter $\sigma_D > 0$. Der kumulierte Dividendenprozess $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt

$$dX_t = D_t dt + \sigma_X dW_t^X$$

mit dem Volatilitätsparameter $\sigma_X > 0$ und ist beobachtbar. Außerdem können zwei sogenannte Signale, die durch

$$\begin{aligned} ds_t^A &= D_t dt + \sigma_s dW_t^A, \\ ds_t^B &= D_t dt + \sigma_s dW_t^B \end{aligned}$$

mit $\sigma_s > 0$ gegebenen Prozesse s^A und s^B , beobachtet werden. Jede Gruppe von Marktteilnehmern unterstellt einem der Signale eine verfälschte Dynamik und dem anderen die korrekte. Diese verfälschten Signale $s^{v,A}$ und $s^{v,B}$ erfüllen

$$\begin{aligned} ds_t^{v,A} &= D_t dt + \sigma_s \phi dW_t^D + \sigma_s \sqrt{1 - \phi^2} dW_t^A, \\ ds_t^{v,B} &= D_t dt + \sigma_s \phi dW_t^D + \sigma_s \sqrt{1 - \phi^2} dW_t^B, \end{aligned}$$

wobei $0 < \phi < 1$ ist. Die Gruppe A interpretiert die Realisation des Signals s^A als Realisation von $s^{v,A}$ und die Realisation des Signals s^B richtig als Realisation von s^B . Die Gruppe B hingegen interpretiert die Realisation des Signals s^A korrekt als Realisation von s^A und die Realisation des Signals $s^{v,B}$ fälschlicherweise als Realisation von s^B . Das bedeutet, dass die Marktteilnehmer der Gruppe A den Prozess $\xi^A = (s^{v,A}, s^B, X)^T$ beobachten und jene aus B den Prozess $\xi^B = (s^A, s^{v,B}, X)^T$. Der Informationsverlauf von A wird durch die von ξ^A erzeugte Filtration

$$\mathcal{F}^A = \mathcal{F}^{\xi^A}$$

und der von B durch $\mathcal{F}^B = \mathcal{F}^{\xi^B}$ beschrieben. Bezeichne $g \in \{A, B\}$ die Klasse der gegenwärtigen Besitzer des Finanzguts und \bar{g} die andere. Die Transaktionskosten $c \geq 0$ werden

dem Käufer auferlegt. Wir nehmen an, dass Leerverkäufe des risikobehafteten Finanzguts verboten sind, jeder Investor zum selben konstanten Zinssatz r Geld borgen oder leihen kann und dass es ein endliches Angebot des Finanzguts sowie eine unendliche Anzahl zukünftiger Käufer gibt. Eine \mathcal{F}_t^g -messbare Zufallsvariable p_t^g bezeichnen wir als einen Preis, den ein Marktteilnehmer aus g zum Zeitpunkt t für eine Einheit des Finanzguts zu bezahlen bereit ist. Da die Marktteilnehmer risikoneutral sind, maximieren sie den linearen Nutzen ihres erwarteten Vermögens. Die Gruppe g stellt ihr Portfolio so zusammen, dass sie u_t^g Anteile des Finanzguts zum Zeitpunkt t behält und $1 - u_t^g$ Anteile an \bar{g} verkauft. Aufgrund des Leerverkaufsverbots ist $0 \leq u_t^g \leq 1$. Die Stoppzeit $\tau \geq t$ nennen wir Handelszeitpunkt. Jeder Marktteilnehmer aus g wählt sein Portfolio so, dass

$$\mathbb{E} \left(u_t^g \sup_{\tau \geq t} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} dX_s + e^{-r(\tau-t)} (p_\tau^{\bar{g}} - c) \right) + (1 - u_t^g) (p_t^{\bar{g}} - c) \right)$$

maximal wird. Das ist gleichbedeutend mit

$$\max_{u_t^g} u_t^g \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)} dX_s + e^{-r(\tau-t)} (p_\tau^{\bar{g}} - c) \right) + (1 - u_t^g) \mathbb{E} (p_t^{\bar{g}} - c).$$

Der Ausdruck nimmt sein Maximum entweder in $u_t^g = 0$ oder in $u_t^g = 1$ an. Das bedeutet, dass stets eine Investorengruppe das gesamte Angebot des Finanzguts hält. Jedes Paar von Preisen $(p_t^g, p_t^{\bar{g}})$, das

$$p_t^g = \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} dX_u + e^{-r(\tau-t)} (p_\tau^{\bar{g}} - c) \middle| \mathcal{F}_t^g \right)$$

erfüllt, wobei das Supremum über alle Stoppzeiten $\tau \geq t$ gebildet wird, heißt **Paar von Gleichgewichtspreisen**. Solche Paare sind nicht eindeutig. Ist zum Beispiel M ein \mathcal{F}_t^g -Martingal und ein $\mathcal{F}_t^{\bar{g}}$ -Martingal, dann wird durch $\tilde{p}_t^g := p_t^g + e^{rt} M_t$ wieder ein Paar von Gleichgewichtspreisen festgelegt. Die Bestimmung eines Paares von Gleichgewichtspreisen motiviert, wie sich herausstellen wird, die Schätzung

$$\hat{D}_t^g = \mathbb{E} (D_t | \mathcal{F}_t^g)$$

und damit ein lineares Filtrierungsproblem. Satz 5.2 beschreibt diese bedingte Erwartung als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung.

Im mehrdimensionalen **linearen Filtrierungsproblem** (vgl. S.81ff in [15], [19]) sind einerseits ein nicht beobachtbares System

$$d\theta_t = \left(a^{(0)} + a^{(1)}\theta_t \right) dt + b^{(0)} dW_t^0 + b^{(1)} dW_t^1 \quad (5.1)$$

und andererseits die Beobachtungen

$$d\xi_t = \left(A^{(0)} + A^{(1)}\theta_t \right) dt + B^{(0)} dW_t^0 + B^{(1)} dW_t^1. \quad (5.2)$$

für $0 \leq t \leq T$ gegeben.¹ Die Fragestellung des Filtrierungsproblems lautet: Welche Gestalt hat der beste Schätzer $\hat{\theta}_t$ für den Zustand des Systems θ_t im Sinn der L^2 -Approximation

¹Ein lineares Filtrierungsproblem lässt sich noch allgemeiner (vgl. [19]) formulieren, indem $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, B^{(1)}$ sowohl von t als auch von ξ abhängen dürfen.

basierend auf den durch (5.2) beschriebenen Beobachtungen? Zu diesem Zweck müssen wir das Problem mathematisch präziser formulieren. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit rechtsstetiger Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sei $(W_t^0)_{t \geq 0}$ eine k -dimensionale und $(W_t^1)_{t \geq 0}$ eine l -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich der selben Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wobei beide Brownschen Bewegungen von einander unabhängig seien. Für $k, l \in \mathbb{N}$ führen wir

- $a^{(0)}$ als k -dimensionalen Spaltenvektor,
- $A^{(0)}$ als l -dimensionalen Spaltenvektor,
- $a^{(1)}$ als eine $k \times k$ -Matrix,
- $A^{(1)}$ als eine $l \times k$ -Matrix,
- $b^{(0)}$ als eine $k \times k$ -Matrix,
- $B^{(0)}$ als eine $l \times k$ -Matrix,
- $b^{(1)}$ als eine $k \times l$ -Matrix,
- $B^{(1)}$ als eine $l \times l$ -Matrix

ein. Außerdem definieren wir

$$\begin{aligned} B \circ B &= B^{(0)} \left(B^{(0)} \right)^T + B^{(1)} \left(B^{(1)} \right)^T \in \mathbb{R}^{l \times l}, \\ b \circ B &= b^{(0)} \left(B^{(0)} \right)^T + b^{(1)} \left(B^{(1)} \right)^T \in \mathbb{R}^{k \times l}, \\ b \circ b &= b^{(0)} \left(b^{(0)} \right)^T + b^{(1)} \left(b^{(1)} \right)^T \in \mathbb{R}^{k \times k}. \end{aligned}$$

Gesucht ist ein \mathcal{F}_t^ξ -messbarer Schätzer, wobei $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\xi_s : s \leq t)$ die von den Beobachtungen erzeugte Filtration ist. Unter dem besten Schätzer versteht man die \mathcal{F}_t^ξ -messbare Zufallsvariable $\hat{\theta}_t$, für die

$$\mathbb{E} \left(\left| \theta_t - \hat{\theta}_t \right|^2 \right) = \inf_{Y \in \mathcal{K}} \mathbb{E} \left(\left| \theta_t - Y \right|^2 \right)$$

gilt, wobei das Infimum über $\mathcal{K} = \left\{ Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, Y \in L^2(\Omega, P), Y \text{ ist } \mathcal{F}_t^\xi\text{-messbar} \right\}$ gebildet wird. Man kann zeigen (vgl. S.127f in [16]), dass

$$\hat{\theta}_t = \mathbb{E} \left(\theta_t \middle| \mathcal{F}_t^\xi \right).$$

Ziel ist es, eine stochastische Differentialgleichung für den Prozess $\hat{\theta}$ zu finden. Wir verwenden für die bedingte Varianz die Notation

$$\gamma_t = \mathbb{E} \left(\left(\theta_t - \hat{\theta}_t \right) \left(\theta_t - \hat{\theta}_t \right)^T \middle| \mathcal{F}_t^\xi \right).$$

Als Lösung des linearen Filtrierungsproblem lässt sich folgender Satz herleiten (vgl. [19]).

Satz 5.1. Ist die Matrix $B \circ B$ invertierbar und gilt $\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^k (\theta_0^{(j)})^4 \right) < \infty$, dann ist $(\hat{\theta}_t, \gamma_t)_{t \geq 0}$ die eindeutige, stetige und \mathcal{F}_t^ξ -messbare Lösung des Systems

$$\begin{aligned} d\hat{\theta}_t &= \left(a^{(0)} + a^{(1)}\hat{\theta}_t \right) dt + \left(b \circ B + \gamma_t \left(A^{(1)} \right)^T \right) (B \circ B)^{-1} \left(d\xi_t - \left(A^{(0)} + A^{(1)}\hat{\theta}_t \right) dt \right) \\ \frac{d\gamma_t}{dt} &= a^{(1)}\gamma_t + \gamma_t \left(a^{(1)} \right)^T + b \circ b - \left(b \circ B + \gamma_t \left(A^{(1)} \right)^T \right) (B \circ B)^{-1} \left(b \circ B + \gamma_t \left(A^{(1)} \right)^T \right)^T \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\hat{\theta}_0 = \mathbb{E}(\theta_0 | \xi_0)$ und $\gamma_0 = \mathbb{E} \left((\theta_0 - \hat{\theta}_0) (\theta_0 - \hat{\theta}_0)^T \middle| \xi_0 \right)$. Wenn γ_0 positiv definit ist, dann ist es auch γ_t für alle $0 \leq t \leq T$.

Beweis. Siehe Satz 12.7 aus [19]. Da wir uns auf konstante Koeffizienten beschränken, sind alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. \square

Durch Anwenden von Satz 5.1 bestimmen wir eine stochastische Differentialgleichung für \hat{D}_t^g . Der dreidimensionale Prozess ξ^A der Beobachtungen der Klasse A erfüllt

$$d\xi_t^A = \begin{pmatrix} ds_t^{v,A} \\ ds_t^B \\ dX_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} D_t dt + \begin{pmatrix} \phi \sigma_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t^D + \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi^2} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^A \\ dW_t^B \\ dW_t^X \end{pmatrix}.$$

Der von B beobachtete Prozess ξ^B erfüllt

$$d\xi_t^B = \begin{pmatrix} ds_t^A \\ ds_t^{v,B} \\ dX_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} D_t dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \sigma_s \\ 0 \end{pmatrix} dW_t^D + \begin{pmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \phi^2} \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^A \\ dW_t^B \\ dW_t^X \end{pmatrix}.$$

Aus technischen Gründen fordern wir zusätzlich $\mathbb{E}(D_0^4) < \infty$.

Lemma 5.2. Der bedingte Erwartungswert $\hat{D}_t^g = \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g)$ und die bedingte Varianz $\gamma_t^g = \mathbb{E} \left((D_t - \hat{D}_t^g)^2 \middle| \mathcal{F}_t^g \right)$ erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} d\hat{D}_t^g &= \lambda \left(\mu - \hat{D}_t^g \right) dt + \frac{\phi \sigma_s \sigma_D + \gamma_t^g}{\sigma_s^2} \left(ds_t^{v,g} - \hat{D}_t^g dt \right) + \frac{\gamma_t^g}{\sigma_s^2} \left(ds_t^{\bar{g}} - \hat{D}_t^g dt \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_t^g}{\sigma_X^2} \left(dX_t - \hat{D}_t^g dt \right), \\ \frac{d}{dt} \gamma_t^g &= \left(-\frac{2}{\sigma_s^2} - \frac{1}{\sigma_X^2} \right) (\gamma_t^g)^2 + \left(-2\lambda - \frac{2\sigma_D \phi}{\sigma_s} \right) \gamma_t^g + (1 - \phi^2) \sigma_D^2. \end{aligned}$$

Beweis. Die Voraussetzungen von Satz 5.1 müssen überprüft werden. Dabei haben wir $\mathbb{E}(D_0^4) < \infty$ angenommen. Betrachten wir zuerst das Filtrierungsproblem für $g = A$. Die Konstanten des Filtrierungsproblems lauten $a^{(0)} = \lambda\mu$, $A^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, $a^{(1)} = -\lambda$, $A^{(1)} = (1, 1, 1)^T$, $b^{(0)} = \sigma_D$, $B^{(0)} = (\phi\sigma_s, 0, 0)^T$, $b^{(1)} = (0, 0, 0)$ und

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi^2} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} B \circ B &= \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X^2 \end{pmatrix}, \\ b \circ B &= (\sigma_D \sigma_s \phi, 0, 0), \\ b \circ b &= \sigma_D^2. \end{aligned}$$

Die Matrix $B \circ B$ ist offensichtlich invertierbar. Nach Satz 5.1 sind jetzt γ_t^A und \hat{D}_t^A die eindeutige \mathcal{F}_t^A -messbare Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} d\hat{D}_t^A &= \left(\lambda\mu - \lambda\hat{D}_t^A \right) dt + ((\sigma_D \sigma_s \phi, 0, 0) + \gamma_t^A(1, 1, 1)) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sigma_s^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X^{-2} \end{pmatrix} \left(d\xi_A^t - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} D_t^A \right) dt \right), \\ \frac{d}{dt}\gamma_t^A &= -\lambda\gamma_t^A - \lambda\gamma_t^A + \sigma_D^2 - ((\sigma_D \sigma_s \phi, 0, 0) + \gamma_t^A(1, 1, 1)) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sigma_s^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X^{-2} \end{pmatrix} ((\sigma_D \sigma_s \phi, 0, 0) + \gamma_t^A(1, 1, 1))^T. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} d\hat{D}_t^A &= \lambda \left(\mu - \hat{D}_t^A \right) dt + \frac{\phi \sigma_s \sigma_D + \gamma_t^A}{\sigma_s^2} \left(ds_t^{v,A} - \hat{D}_t^A dt \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_t^A}{\sigma_s^2} \left(ds_t^B - \hat{D}_t^A dt \right) + \frac{\gamma_t^A}{\sigma_X^2} \left(dX_t - \hat{D}_t^A dt \right), \\ \frac{d}{dt}\gamma_t^A &= -2\lambda\gamma_t^A + \sigma_D^2 - \frac{(\gamma_t^A + \sigma_D \sigma_s \phi)^2}{\sigma_s^2} - \frac{(\gamma_t^A)^2}{\sigma_s^2} - \frac{(\gamma_t^A)^2}{\sigma_X^2}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das Filtrierungsproblem für $g = B$. Die Konstanten sind $a^{(0)} = \lambda\mu$, $A^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, $a^{(1)} = -\lambda$, $A^{(1)} = (1, 1, 1)^T$, $b^{(0)} = \sigma_D$, $B^{(0)} = (0, \phi\sigma_s, 0)^T$, $b^{(1)} = (0, 0, 0)$ und

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \phi^2} \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} B \circ B &= \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X^2 \end{pmatrix}, \\ b \circ B &= (0, \sigma_D \sigma_s \phi, 0), \\ b \circ b &= \sigma_D^2. \end{aligned}$$

Auch für dieses Filtrierungsproblem ist die Matrix $B \circ B$ invertierbar. Nach Satz 5.1 sind γ_t^B und \hat{D}_t^B die eindeutige \mathcal{F}_t^B -messbare Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} d\hat{D}_t^B &= -\lambda \left(\hat{D}_t^B - \mu \right) dt + \frac{\gamma_t^B}{\sigma_s^2} \left(ds_t^A - \hat{D}_t^B dt \right) + \frac{\phi \sigma_s \sigma_D + \gamma}{\sigma_s^2} \left(ds_t^{v,B} - \hat{D}_t^B dt \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{\sigma_X^2} \left(dX_t - \hat{D}_t^B dt \right), \\ \frac{d}{dt} \gamma_t^B &= -2\lambda \gamma_t^B + \sigma_D^2 - \frac{(\gamma_t^B + \sigma_D \sigma_s \phi)^2}{\sigma_s^2} - \frac{(\gamma_t^B)^2}{\sigma_s^2} - \frac{(\gamma_t^B)^2}{\sigma_X^2}. \end{aligned}$$

□

Die Gleichung für die bedingte Varianz ist eine Riccatische Differentialgleichung (vgl. S.508 in [14]) der Form

$$\frac{d}{dt} \gamma_t^g = \left(-\frac{2}{\sigma_s^2} - \frac{1}{\sigma_X^2} \right) (\gamma_t^g)^2 + \left(-2\lambda - \frac{2\sigma_D \phi}{\sigma_s} \right) \gamma_t^g + (1 - \phi^2) \sigma_D^2.$$

Definieren wir

$$\kappa = \sqrt{\left(\lambda + \frac{\phi \sigma_D}{\sigma_s} \right)^2 + (1 - \phi^2) \sigma_D^2 \left(\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2} \right)}$$

und

$$\alpha_{\pm} = \frac{\pm \kappa - \left(\lambda + \frac{\phi \sigma_D}{\sigma_s} \right)}{\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2}},$$

dann erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \gamma_t^g = - \left(\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2} \right) (\gamma_t^g - \alpha_+) (\gamma_t^g - \alpha_-).$$

Diese lässt sich elementar lösen.¹ Mittels Integration durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} \ln \left(\frac{\gamma_t^g - \alpha_+}{\gamma_t^g - \alpha_-} \right) = - \left(\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2} \right) (x + C)$$

mit $C \in \mathbb{R}$ und daraus die allgemeine Lösung

$$\gamma_t^g = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{1 - \exp \left(- \left(\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2} \right) (x + C) \right)} + \alpha_-.$$

Wir wählen die Anfangsbedingung $\gamma_0^g = \gamma_0^{\bar{g}}$. Damit hängt γ_t^g nicht mehr von g ab und wir schreiben $\gamma_t = \gamma_t^g$. Da $\alpha_+ > \alpha_-$, sieht man sofort, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = \alpha_+ = \frac{\kappa - \left(\lambda + \frac{\phi \sigma_D}{\sigma_s} \right)}{\frac{2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_X^2}}.$$

¹Um die weitere Analyse zu vereinfachen, treffen Scheinkman und Xiong [27] die Annahme, dass $\gamma_0^g = \alpha_+$. Die Wahl der Anfangsbedingung $\gamma_0^g = \alpha_-$ scheidet aus, weil $\alpha_- < 0$. Damit folgt $\gamma_t^g = \alpha_+$ für alle $t \geq 0$.

Fasst man α_+ als Funktion von ϕ auf, so kann man durch Ableiten zeigen, dass α_+ monoton fallend in ϕ ist. Ein größeres ϕ führt also zu einer genaueren Schätzung von D_t . Aus diesem Grund wird ϕ als Überschätzungsparameter bezeichnet.

Wir benötigen nun folgendes Lemma, das besagt, wann ein mehrdimensionaler Itô-Prozess eine Brownsche Bewegung ist.

Lemma 5.3. Sei W_t eine Brownsche Bewegung und

$$dY_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t$$

ein n -dimensionaler Itô-Prozess und sei $\mathcal{F} = \sigma(Y_s : s \leq t)$. Der Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ ist genau dann eine Brownsche Bewegung, wenn $\mathbb{E}(u(t, \cdot) | \mathcal{F}_t) = 0$ und $v(t, \omega)v(t, \omega)^T$ die n -dimensionale Einheitsmatrix für fast alle (t, ω) ist (vgl. S.145 in [15]).

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 8.4.3 auf S.143 in [15]. □

Definiert man den Itô-Prozess $(W_t^{g,g})_{t \geq 0}$ durch

$$\begin{aligned} dW_t^{g,g} &= \frac{ds_t^{v,g} - \hat{D}_t^g dt}{\sigma_s} \\ &= \frac{\left(D_t dt + \sigma_s \phi dW_t^D + \sigma_s \sqrt{1 - \phi^2} dW_t^g \right) - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g) dt}{\sigma_s} \\ &= \frac{D_t - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g)}{\sigma_s} dt + \phi dW_t^D + \sqrt{1 - \phi^2} dW_t^g \\ &= \frac{D_t - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g)}{\sigma_s} dt + \begin{pmatrix} \phi \\ \sqrt{1 - \phi^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dW_t^D \\ dW_t^g \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so erkennt man, dass $W^{g,g}$ wegen $\mathbb{E}(D_t - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g) | \mathcal{F}_t^g) = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \phi & \sqrt{1 - \phi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \sqrt{1 - \phi^2} \end{pmatrix} = \phi^2 + 1 - \phi^2 = 1$$

nach Lemma 5.3 eine Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration \mathcal{F}^g , aber keine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F} oder \mathcal{F}^B ist. Die durch

$$dW_t^{g,\bar{g}} = \frac{ds_t^{\bar{g}} - \hat{D}_t^g dt}{\sigma_s} = \frac{D_t - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g)}{\sigma_s} dt + dW_t^{\bar{g}}$$

und

$$dW_t^{g,X} = \frac{dX_t - \hat{D}_t^g dt}{\sigma_X} = \frac{D_t - \mathbb{E}(D_t | \mathcal{F}_t^g)}{\sigma_X} dt + dW_t^X$$

definierten Prozesse $(W_t^{g,\bar{g}})_{t \geq 0}$ und $(W_t^{g,X})_{t \geq 0}$ sind aus demselben Grund ebenso Brownsche Bewegungen bezüglich \mathcal{F}^g . Man erhält eine dreidimensionale Brownsche Bewegung der Form

$$d\vec{W}_t^g = \begin{pmatrix} dW_t^{g,g} \\ dW_t^{g,\bar{g}} \\ dW_t^{g,X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{v,g} - \hat{D}_t^g dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{\bar{g}} - \hat{D}_t^g dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_X} \left(dX_t - \hat{D}_t^g dt \right) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die Prozesse der bedingten Erwartungen die Darstellung

$$d\hat{D}_t^g = -\lambda \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) dt + \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T d\vec{W}_t^g.$$

Mitglieder der Gruppe g wissen, dass Investoren aus \bar{g} die Schätzung

$$\hat{D}_t^{\bar{g}} = \mathbb{E} \left(D_t | \mathcal{F}_t^{\bar{g}} \right) = h^{\bar{g}} \left((\xi_u^{\bar{g}})_{u \leq t} \right)$$

verwenden. Aus Sicht von g verwendet die Gruppe \bar{g} tatsächlich

$$\hat{D}_t^{\bar{g},g} = h^{\bar{g}} \left((\xi_u^g)_{u \leq t} \right),$$

weil sie $(s^{v,g}, s^{\bar{g}})$ für das korrekte Signalpaar hält. Wir setzen daher

$$Y_t^g = \hat{D}_t^{\bar{g},g} - \hat{D}_t^g$$

und nennen den \mathcal{F}^g -messbaren Prozess Y^g die Differenz der Einschätzung aus Sicht von g .

Lemma 5.4 (vgl. [27]). Die Differenz der Einschätzung erfüllt

$$dY_t^g = -\rho_t Y_t^g dt + \sigma_Y dW_t^{g,Y}$$

mit $W_t^{g,Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_t^{g,\bar{g}} - W_t^{g,g})$, $\rho_t = \lambda + \frac{\phi\sigma_D}{\sigma_s} + \left(\frac{2}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_X} \right) \gamma_t$ und $\sigma_Y = \sqrt{2}\phi\sigma_D^1$. Dabei ist $W^{g,Y}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F}^g .

Beweis. Indem man s_t^g durch $s_t^{v,g}$ und $s_t^{v,\bar{g}}$ durch $s_t^{\bar{g}}$ in der Darstellung von $\hat{D}_t^{\bar{g}}$ ersetzt, erhält man die Gleichung

$$d\hat{D}_t^{\bar{g},g} = -\lambda \left(\hat{D}_t^{\bar{g},g} - \mu \right) dt + \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{\bar{g}} - \hat{D}_t^{\bar{g},g} dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{v,g} - \hat{D}_t^{\bar{g},g} dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_X} \left(dX_t - \hat{D}_t^{\bar{g},g} dt \right) \end{pmatrix}$$

für $\hat{D}_t^{\bar{g},g}$. Andererseits hat \hat{D}_t^g die Darstellung

$$d\hat{D}_t^g = -\lambda \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) dt + \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{v,g} - \hat{D}_t^g dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_s} \left(ds_t^{\bar{g}} - \hat{D}_t^g dt \right) \\ \frac{1}{\sigma_X} \left(dX_t - \hat{D}_t^g dt \right) \end{pmatrix}.$$

¹Bei der von Scheinkman und Xiong [27] getroffenen Wahl der Startbedingung $\gamma_t^g = \alpha_+$ ist $\rho_t = \kappa$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 dY_t^A &= d\hat{D}_t^{\bar{g},g} - d\hat{D}_t^g \\
 &= -\lambda \left(\hat{D}_t^{\bar{g},g} - \hat{D}_t^g \right) dt - \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s} (ds_t^{\bar{g}} - ds_t^{v,g}) \\ \frac{1}{\sigma_s} (ds_t^{v,g} - ds_t^{\bar{g}}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_s} \left(\hat{D}_t^{\bar{g},g} - \hat{D}_t^g \right) dt \\ \frac{1}{\sigma_s} \left(\hat{D}_t^{\bar{g},g} - \hat{D}_t^g \right) dt \\ \frac{1}{\sigma_X} \left(\hat{D}_t^{\bar{g},g} - \hat{D}_t^g \right) dt \end{pmatrix} \\
 &= -\left(\lambda + \frac{\phi\sigma_D}{\sigma_s} + \frac{2\gamma_t}{\sigma_s} + \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \right) Y_t^g dt - \frac{\phi\sigma_D}{\sigma_s} (ds_t^{v,g} - ds_t^{\bar{g}}) \\
 &= -\rho_t Y_t^g dt - \frac{\phi\sigma_D}{\sigma_s} \left(\sigma_s \phi dW_t^D + \sigma_s \sqrt{1 - \phi^2} dW_t^g + \sigma_s dW_t^{\bar{g}} \right) \\
 &= -\rho_t Y_t^g dt + \phi\sigma_D \sqrt{2} \left(\frac{dW^{g,\bar{g}} - dW^{g,g}}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= -\rho_t Y_t^g dt + \sigma_Y dW_t^{g,Y}.
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.3 ist $(W_t^{g,Y})_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F}^g . □

Im Allgemeinen ist

$$Y_t^g \neq -Y_t^{\bar{g}},$$

weil

$$\begin{aligned}
 Y_t^g &= h^{\bar{g}}(\xi^g) - h^g(\xi^g) = (h^{\bar{g}} - h^g)(\xi^g), \\
 -Y_t^{\bar{g}} &= -(h^g(\xi^{\bar{g}}) - h^{\bar{g}}(\xi^{\bar{g}})) = (h^{\bar{g}} - h^g)(\xi^{\bar{g}}).
 \end{aligned}$$

Da jedoch g die Realisation $s^g(\omega)$ als Realisation von $s^{v,g}$ interpretiert, stimmen die Realisationen von Y^g und $-Y^{\bar{g}}$ überein.

5.2 Gleichgewichtspreise

Lemma 5.5 (vgl. [27]). Für $\tau \geq t$ gilt

$$\mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} dX_u \middle| \mathcal{F}_t^g \right) = \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{-\lambda(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du \middle| \mathcal{F}_t^g \right).$$

Beweis. Da wie schon gezeigt

$$dW_u^{g,X} = \frac{dX_u - \hat{D}_u^g du}{\sigma_X}$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F}^g ist, kann man X als

$$dX_u = \hat{D}_u^g dt + \sigma_X dW_u^{g,X}$$

darstellen. Der Prozess \hat{D}^g erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$d\hat{D}_t^g = -\lambda \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) dt + \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T d\vec{W}_t^g.$$

Indem man die Formel von Itô auf $f(t, \hat{D}_t^g) = e^{\lambda t} \hat{D}_t^g$ anwendet, ergibt sich

$$df(t, \hat{D}_t^g) = \lambda e^{\lambda t} \hat{D}_t^g dt + e^{\lambda t} d\hat{D}_t^g = \mu \lambda e^{\lambda t} dt + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T d\vec{W}_t^g$$

und für $u \geq t \geq 0$ folgt daraus durch Integrieren

$$\hat{D}_u^g = e^{-\lambda u} \left(e^{\lambda t} \hat{D}_t^g + \mu (e^{\lambda u} - e^{\lambda t}) + \int_t^u e^{\lambda v} \begin{pmatrix} \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \\ \frac{\gamma_t}{\sigma_X} \end{pmatrix}^T d\vec{W}_v^g \right).$$

Umgeformt erhält man die Darstellung

$$\hat{D}_u^g = \mu + e^{\lambda(t-u)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) + N_{t,u},$$

wobei für

$$N_{t,u} = e^{-\lambda u} \left(\int_t^u \frac{\phi\sigma_s\sigma_D + \gamma_v}{\sigma_s} e^{\lambda v} dW_v^{g,g} + \int_t^u \frac{\gamma_v}{\sigma_s} e^{\lambda v} dW_v^{g,\bar{g}} + \int_t^u \frac{\gamma_v}{\sigma_X} e^{\lambda v} dW_v^{g,X} \right)$$

klarerweise $\mathbb{E}(N_{t,u} | \mathcal{F}_t^g) = 0$ gilt, weil \vec{W}^g eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F}^g ist. Setzt man nun in die Darstellung von X ein, so folgt

$$dX_u = \left(\mu + e^{\lambda(t-u)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) + N_{t,u} \right) du + \sigma_X dW_u^{g,X}$$

und daraus wiederum

$$\begin{aligned} \int_t^\tau e^{-r(u-t)} dX_u &= \int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{\lambda(t-u)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) + N_{t,u} \right) du \\ &\quad + \int_t^\tau e^{-r(u-t)} \sigma_X dW_u^{g,X} \\ &= \int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{\lambda(t-u)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du + M_\tau \end{aligned}$$

mit $\mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_t^g) = 0$. Somit folgt

$$\mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} dX_u \middle| \mathcal{F}_t^g \right) = \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{-\lambda(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du \middle| \mathcal{F}_t^g \right).$$

□

Aufgrund von Lemma 5.5 erfüllt ein Paar von Gleichgewichtspreisen

$$p_t^g = \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{-\lambda(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du + e^{-r(\tau-t)} (p_\tau^{\bar{g}} - c) \middle| \mathcal{F}_t^g \right).$$

Stellen wir uns vor, die Investorengruppe g würde das Finanzgut für immer halten. Den zukünftigen Wert der Dividenden aus der Sicht des gegenwärtigen Besitzers bezeichnet man dann als **Sachwert** $p_t^{g,\infty}$. Mit der Stoppzeit $\tau = \infty$ folgt nach Lemma 5.5

$$\begin{aligned} p_t^{g,\infty} &= \mathbb{E} \left(\int_t^\infty e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{-\lambda(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \mathbb{E} \left(- \left(\frac{1}{r} e^{-r(u-t)} \mu + \frac{1}{r+\lambda} e^{-(\lambda+r)(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) \bigg|_{u=t}^\infty \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{r+\lambda}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Zerlegung eines Gleichgewichtspreises

$$p_t^g = \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{r+\lambda} + q_t^g,$$

wobei q_t^g Wiederverkaufswert aus Sicht von g genannt wird.

Lemma 5.6 (vgl. [27]). Der Wiederverkaufswert kann als

$$q_t^g = \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda+r} + q_\tau^{\bar{g}} - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right)$$

dargestellt werden.

Beweis. Unter Verwendung der Darstellung von p_t^g aus Lemma 5.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} p_t^g &= \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-r(u-t)} \left(\mu + e^{-\lambda(u-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) \right) du + e^{-r(\tau-t)} (p_\tau^{\bar{g}} - c) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(\frac{\mu}{r} \left(1 - e^{-r(\tau-t)} \right) + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{\lambda+r} \left(1 - e^{-(\lambda+r)(\tau-t)} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_\tau^{\bar{g}} - \mu}{\lambda+r} + q_\tau^{\bar{g}} - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{\lambda+r} + \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{\hat{D}_\tau^{\bar{g}} - \mu - e^{-\lambda(\tau-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right)}{\lambda+r} + q_\tau^{\bar{g}} - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{\lambda+r} + \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{\hat{D}_\tau^{\bar{g}} - \hat{D}_\tau^g}{\lambda+r} + q_\tau^{\bar{g}} - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\ &= \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{\lambda+r} + \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda+r} + q_\tau^{\bar{g}} - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right). \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt hierbei durch die im Beweis von Lemma 5.5 hergeleitete Darstellung

$$\hat{D}_\tau^g = \mu + e^{-\lambda(\tau-t)} \left(\hat{D}_t^g - \mu \right) + N_{t,\tau},$$

indem man einsetzt und $\mathbb{E}(N_{t,\tau} | \mathcal{F}_t^g) = 0$ verwendet. \square

Gesucht werden bei Scheinkman und Xiong [27] ausschließlich Gleichgewichtspreise der Form

$$p_t^g = \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{r + \lambda} + q(Y_t^g), \quad (5.3)$$

wobei $q(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Verwenden wir zunächst die zusätzliche Annahme, dass $\gamma_t^g = \alpha_+$ ist, weswegen $\rho_t = \kappa$ für alle $t \geq 0$ gilt.¹ Aufgrund von Lemma 5.6 lassen sich Gleichgewichtspreise als

$$p_t^g = \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{r + \lambda} + \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda + r} + q(Y_\tau^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right)$$

darstellen. Den Wiederverkaufswert $q(Y_t^g)$ kann man auch als Wert einer Wiederverkaufsoption auffassen, bei deren Ausüben zum Zeitpunkt τ der gegenwärtige Besitzer den Ausübungspreis

$$\frac{Y_\tau^g}{\lambda + r} + q(Y_\tau^g)$$

minus die Transaktionskosten c bekommt. Gesucht wird eine optimale Ausübungsstrategie, das bedeutet jene Stoppzeit τ^* , bei der Wert der Wiederverkaufsoption maximal wird. Stellen wir uns vor, dass die Option dann ausgeübt wird, wenn erstmals $Y_t^g \geq k^*$ ist, wobei wir mit $k^* > 0$ den minimalen Handel auslösenden Unterschied der Einschätzungen bezeichnen. Das Intervall $(-\infty, k^*)$ nennen wir Fortsetzungsregion und das Intervall $[k^*, \infty)$ Stoppregion. Um $q(x)$ und k^* zu bestimmen, errät man $q(x)$ und k^* zuerst und zeigt danach, dass diese das Geforderte auch tatsächlich erfüllen (vgl. [28]). Dazu benötigt man zuvor einige Lemmata und Sätze aus der Theorie der speziellen Funktionen.

Die Kummersche (oder auch konfluente hypergeometrische) Differentialgleichung ist als

$$xy''(x) + (b - x)y'(x) - ay(x) = 0$$

definiert (vgl. S.504 in [21], S.2 in [1]). Zwei linear unabhängige Lösungen davon sind für $b \notin \mathbb{Z}^-$ die sogenannten **Kummerfunktionen**

$$M(a, b, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{(b)_k k!}$$

und

$$U(a, b, x) = \frac{\pi}{\sin(b\pi)} \left(\frac{M(a, b, x)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - x^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} (a)_n &= a(a+1) \dots (a+n-1), \\ (a)_0 &= 1 \end{aligned}$$

¹Ohne diese Annahme hängt $q(x)$ auch von t ab und Satz 5.10 kann in dieser Form nicht gelten.

die steigende Faktorielle und $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion bezeichnet. In der Schreibweise von Pochhammer und Barnes mit

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_p; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k z^k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k k!}$$

ist $M(a, b, x) = {}_1F_1(a; b; z)$ und $U(a, b, x) = e^{-a} {}_2F_0(a, 1+a-b; ; -\frac{1}{z})$ (vgl. [21]). Ebenfalls oft angeführt werden die mit dem Eulerschen Potenzreihenansatz (vgl. [1]) gefundenen, linear unabhängigen Lösungen ${}_1F_1(a; b; z)$ und $x^{1-b} {}_1F_1(1+a-b; 2-b; z)$, jedoch verwenden Scheinkman und Xiong die Lösungen und die Notation aus Abramowitz und Stegun [21].

Satz 5.7 (vgl. [27]). *Jede strikt positive sowie auf $(-\infty, 0)$ monoton wachsende Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} y''(x) - \kappa x y'(x) - r y(x) = 0$$

hat die Form $y(x) = \beta_1 h(x)$, wobei $\beta_1 > 0$ ist und

$$h(x) = \begin{cases} U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}) \Gamma(\frac{1}{2})} M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) - U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

eine auf $(-\infty, 0)$ strikt positive und monoton wachsende Funktion ist. Die Funktion $h(x)$ löst die Differentialgleichung, wobei

$$h(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa})}.$$

Beweis. Sei $y(x) = v\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)$ und $\tilde{x} = \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}$. Man setzt

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{dv\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{dx} = \frac{dv\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}} \frac{2\kappa x}{\sigma_Y^2}, \\ \frac{d^2y(x)}{dx^2} &= \frac{d^2v\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}^2} \frac{4\kappa^2 x^2}{\sigma_Y^4} + \frac{dv\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}} \frac{2\kappa}{\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

in die obige Differentialgleichung ein und es ergibt sich

$$\frac{d^2v\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}^2} \frac{2\kappa^2 x^2}{\sigma_Y^4} + \frac{dv\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}} \kappa - \frac{dv\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{d\tilde{x}} \frac{2\kappa x^2}{\sigma_Y^2} - r v\left(\frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) = 0,$$

woraus

$$v''(\tilde{x}) 2\kappa \tilde{x} + v'(\tilde{x}) \kappa - v'(\tilde{x}) 2\tilde{x} - r v(\tilde{x}) = 0$$

folgt, das sich zur Kummerschen Differentialgleichung

$$v''(\tilde{x}) \tilde{x} + \left(\frac{1}{2} - \tilde{x}\right) v'(\tilde{x}) - \frac{r}{2\kappa} v(\tilde{x}) = 0$$

umformen lässt. Deren allgemeine Lösung ist

$$v(\tilde{x}) = \alpha M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \tilde{x}\right) + \beta U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \tilde{x}\right).$$

Als Lösung von

$$\frac{\sigma_Y^2}{2}y''(x) - \kappa xy'(x) - ry(x) = 0$$

erhält man

$$y(x) = \begin{cases} \alpha_1 M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) + \beta_1 U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x < 0, \\ \alpha_2 M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) + \beta_2 U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit einer regulären Singularität in $x = 0$. Unter Verwendung der Darstellung der n -ten Ableitungen (vgl. S.507 in [21])

$$\begin{aligned} \frac{d^n M(a, b, x)}{dx^n} &= \frac{(a)_n}{(b)_n} M(a + n, b + n, x), \\ \frac{d^n U(a, b, x)}{dx^n} &= (-1)^n (a)_n U(a + n, b + n, x) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} M'\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) &= \frac{\frac{r}{2\kappa} 2\kappa x}{\frac{1}{2} \sigma_Y^2} M\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) = \frac{2rx}{\sigma_Y^2} M\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right), \\ U'\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) &= (-1) \frac{r}{2\kappa} \frac{2\kappa x}{\sigma_Y^2} U\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) = -\frac{rx}{\sigma_Y^2} U\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right), \end{aligned}$$

woraus man erkennt, dass $\alpha_1 = 0$ sein muss, damit die Funktion auf $(-\infty, 0)$ monoton wachsend sein kann. Für $x < 0$ ist nämlich $M'\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) < 0$ und $U'\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) > 0$. Aufgrund dessen erhält man

$$y(x) = \begin{cases} \beta_1 U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x < 0, \\ \alpha_2 M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) + \beta_2 U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Damit $y(x)$ für $x < 0$ strikt positiv ist, muss zusätzlich $\beta_1 > 0$ sein. Nun müssen die Grenzwerte der Funktion $y(x)$ und ihrer ersten Ableitung gegen Null von rechts und von links übereinstimmen. Auch hier verwendet man die bekannten Darstellungen der ersten

Ableitungen, um die Grenzwerte zu berechnen und erhält

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right)} \beta_1, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) &= \alpha_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right)} \beta_2, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{rx}{\sigma_Y^2} U\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) \beta_1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{rx}{\sigma_Y^2} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \left(\frac{M\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\kappa}(-x)} \frac{M\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \beta_1 \\
 &= \frac{r\pi}{\sigma_Y^2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \frac{M\left(\frac{r}{2\kappa} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\kappa}} \frac{M\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \beta_1 \\
 &= \frac{r\pi}{\sigma_Y^2} \left(\frac{\sigma_Y}{\sqrt{\kappa}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \beta_1 = \frac{\sqrt{\kappa}\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sigma_Y} \beta_1, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) &= -\frac{\sqrt{\kappa}\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sigma_Y} \beta_2
 \end{aligned}$$

unter Verwendung der Eigenschaften der Gammafunktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sowie $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (vgl. S.478 in [14]). Daraus folgt $\beta_1 = -\beta_2$ sowie

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \beta_1$$

und somit resultiert $y(x) = \beta_1 h(x)$ mit

$$h(x) = \begin{cases} U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} M\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) - U\left(\frac{r}{2\kappa}, \frac{1}{2}, \frac{\kappa x^2}{\sigma_Y^2}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Eine so konstruierte Funktion $h(x)$ erfüllt klarerweise die Differentialgleichung (vgl. [27]), weswegen

$$h''(x) = \frac{2}{\sigma_Y^2} (\kappa x h'(x) + r h(x))$$

gilt. Aus diesem Grund sind kritische Punkte mit $h(x) < 0$ stets Maxima und solche mit $h(x) > 0$ stets Minima. Somit ist $h(x)$ monoton wachsend für $x < 0$ und nach Konstruktion positiv für $x < 0$. \square

Lemma 5.8 (vgl. [28]). Die Funktion $h(x)$ hat die Eigenschaften:

- (1) $h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- (2) $h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- (3) $h''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(4) \quad h^{(n)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x) = 0.$$

Beweis. Sei $\alpha = \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ und $\beta = \frac{r}{\kappa}$. Da $\kappa > 0$ und $r > 0$ ist, sind $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Die Funktion $h(x)$ ist eine auf $(-\infty, 0)$ positive, monoton wachsende Lösung der Differentialgleichung

$$\alpha h''(x) - xh'(x) - \beta h(x) = 0.$$

Wegen $h''(x) = \frac{x}{\alpha}h'(x) + \frac{\beta}{\alpha}h(x)$ kann die Funktion kein lokales Maximum mit $h(x) > 0$ haben, was (1) impliziert. Die Monotonie (2) folgt dann daraus, dass einerseits $h'(x) > 0$ für $x < 0$ sowie andererseits $h''(x) > 0$ für $x \geq 0$ und damit wegen der Differentialgleichung dort auch $h'(x) > 0$ ist. Die Konvexität (3) ist für $x \geq 0$ klar. Für $x < 0$ nimmt man an, es existiere ein $\check{x} < 0$ sodass $h''(\check{x}) \leq 0$. Es würde dann

$$\alpha h'''(\check{x}) = \frac{x}{\alpha}h''(\check{x}) - \frac{\beta + 1}{\alpha}h(\check{x}) > 0$$

gelten, was einen Widerspruch darstellt, und damit gilt $h''(\check{x}) < 0$ für $x < \check{x}$. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich induktiv zeigen, dass höhere Ableitungen ebenso monoton steigend und konvex sind (4). Daraus und aus den Eigenschaften der Kummerfunktionen (vgl. [21]) folgt (5). \square

Betrachten wir die Funktion

$$q(x) = \begin{cases} \beta_1 h(x) & \text{für } x < k^*, \\ \frac{x}{r+\lambda} + \beta_1 h(-x) - c & \text{für } x \geq k^*. \end{cases}$$

Lemma 5.9 (vgl. [27]). Es existiert ein eindeutig bestimmtes Paar (β_1, k^*) , für das $q(x)$ stetig differenzierbar ist. Dabei ist k^* die eindeutige Lösung der Gleichung

$$(k^* - c(r + \lambda)) (h'(k^*) + h'(-k^*)) - h(k^*) + h(-k^*) = 0$$

und

$$\beta_1 = \frac{1}{(r + \lambda) (h'(k^*) + h'(-k^*))} \quad (5.4)$$

Wenn $c = 0$, dann ist $k^* = 0$, und wenn $c > 0$, dann ist $k^* > c(r + \lambda)$.

Beweis. Aufgrund der Annahme, dass $q(x)$ im Punkt k^* stetig differenzierbar ist, muss

$$\beta_1 h(k^*) - \frac{k^*}{r + \lambda} - \beta_1 h(-k^*) + c = 0, \quad (5.5)$$

$$\beta_1 h'(k^*) - \frac{1}{r + \lambda} + \beta_1 h'(-k^*) = 0 \quad (5.6)$$

gelten. (5.6) liefert (5.4). (5.5) ist genau dann erfüllt, wenn $f(k^*) = 0$, wobei

$$f(k) = (k - c(r + \lambda)) (h'(k) + h'(-k)) - h(k) + h(-k).$$

Wir zeigen, dass f eine eindeutige Nullstelle hat. Betrachten wir zuerst den Fall $c = 0$. Aus den in Lemma 5.8 gezeigten Eigenschaften von $h(x)$ folgt, dass $f'(k) = k (h''(k) - h''(-k)) >$

0 für $k \neq 0$. f ist aber streng monoton steigend und $k^* = 0$ die einzige Nullstelle. Wenn $c > 0$ ist, dann ist $f(k) < 0$ für $k \leq c(r + \lambda)$. Da nach Lemma 5.8 $h''(x) > 0$ und $h'''(x) > 0$ sind, ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} f'(k) &= (k - c(r + \lambda)) (h''(k) - h''(-k)) > 0, \\ f''(k) &= (k - c(r + \lambda)) (h'''(k) - h'''(-k)) + h''(k) + h''(-k) > 0 \end{aligned}$$

für alle $k > c(r + \lambda)$. Somit ist f streng monoton steigend und konvex für $k > c(r + \lambda)$. Daraus folgt, dass f eine eindeutige Nullstelle hat, und diese muss größer als $c(r + \lambda)$ sein. \square

Satz 5.10 (vgl. [27]). *Durch die Festlegung $q_t^g = q(Y_t^g)$ und*

$$p_t^g = \frac{\mu}{r} + \frac{\hat{D}_t^g - \mu}{r + \lambda} + q_t^g$$

ist ein Paar (p_t^A, p_t^B) von Gleichgewichtspreisen gegeben, wobei $Y_t^g = \hat{D}_t^{g,g} - \hat{D}_t^g$. Die optimale Ausübungsstrategie für dieses Paar von Gleichgewichtspreisen ist $\tau^ = \inf \{s \geq t : Y_s^g \geq k^*\}$.*

Beweis. Im ersten Schritt zeigt man die Ungleichungen

$$q(x) \geq \frac{x}{\lambda + r} + q(-x) - c, \quad (5.7)$$

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} q''(x) - \kappa x q'(x) - r q(x) \leq 0. \quad (5.8)$$

Wir werden sogar beweisen, dass in der Fortsetzungsregion in (5.7) strenge Ungleichheit und in (5.8) Gleichheit gilt. Mit der Bezeichnung $b = q(-k^*)$ folgt aus Lemma 5.9 durch Einsetzen

$$b = \frac{h(-k^*)}{(r + \lambda)(h'(k^*) + h'(-k^*))}$$

und

$$q(-x) = \begin{cases} \frac{b}{h(-k^*)} h(-x) & \text{für } x > -k^* \\ \frac{-x}{r+\lambda} + \frac{b}{h(-k^*)} h(x) - c & \text{für } x \leq -k^*. \end{cases}$$

Sei $f(x) = q(x) - \frac{x}{\lambda+r} - q(-x) + c$, dann ist $f(x) \geq 0$ gleichbedeutend mit (5.7). Durch Einsetzen ergibt sich

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{h(-k^*)} h(x) - \frac{x}{r+\lambda} - \left(\frac{-x}{r+\lambda} + \frac{b}{h(-k^*)} h(x) - c\right) + c & \text{für } x < -k^* \\ \frac{b}{h(-k^*)} h(x) - \frac{x}{r+\lambda} - \left(\frac{b}{h(-k^*)} h(-x)\right) + c & \text{für } -k^* \leq x \leq k^* \\ \frac{x}{r+\lambda} + \frac{b}{h(-k^*)} h(-x) - c - \frac{x}{r+\lambda} - \frac{b}{h(-k^*)} h(-x) + c & \text{für } x > k^* \end{cases}$$

und daraus

$$f(x) = \begin{cases} 2c & \text{für } x < -k^* \\ \frac{b}{h(-k^*)} (h(x) - h(-x)) - \frac{x}{r+\lambda} + c & \text{für } -k^* \leq x \leq k^* \\ 0 & \text{für } x > k^*. \end{cases}$$

Damit gilt $f(x) \geq 0$ in der Stoppregion (k^*, ∞) . Um die Ungleichung auch für die Fortsetzungsregion zu zeigen, betrachtet man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{b}{h(-k^*)}(h'(x) + h'(-x)) - \frac{1}{r + \lambda}, \\ f''(x) &= \frac{b}{h(-k^*)}(h''(x) - h''(-x)) \end{aligned}$$

mit $-k^* \leq x \leq k^*$. Durch Einsetzen sieht man, dass $f(k^*) = f(-k^*) = 0$ ist. Aus der in Lemma 5.8 gezeigten Monotonie von $h''(x)$ folgt, dass $f''(x) > 0$ für $0 < x < k^*$ und $f''(x) < 0$ für $-k^* < x < 0$. Damit ist $f'(x)$ monoton steigend für $0 < x < k^*$ und monoton fallend für $-k^* < x < 0$. Deswegen ist $f'(x) < 0$ für $-k^* \leq x \leq k^*$. Da $f(x)$ in $-k^* \leq x \leq k^*$ monoton fallend ist und $f(-k^*) = 2c > 0$ sowie $f(k^*) = 0$ gilt, ist $f(x) > 0$ in der Fortsetzungsregion $(-\infty, k^*)$. Damit ist (5.7) bewiesen. Nun bleibt (5.8) zu zeigen. In der Fortsetzungsregion ist (5.8) nach Konstruktion mit Gleichheit erfüllt. Deswegen ist es hinreichend, die Ungleichung für die Stoppregion (k^*, ∞) zu zeigen. Für $x \geq k^*$ gilt

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x}{r + \lambda} + \frac{b}{h(-k^*)}h(-x) - c, \\ q'(x) &= \frac{1}{r + \lambda} - \frac{b}{h(-k^*)}h'(-x), \\ q''(x) &= \frac{b}{h(-k^*)}h''(-x). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und unter der Verwendung von $x \geq k^* > c(r + \lambda)$ aus Lemma 5.9 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_Y^2}{2}q''(x) - \kappa xq'(x) - rq(x) &= \frac{\sigma_Y^2}{2} \left(\frac{b}{h(-k^*)}h''(-x) \right) - \kappa x \left(\frac{1}{r + \lambda} - \frac{b}{h(-k^*)}h'(-x) \right) \\ &\quad - r \left(\frac{x}{r + \lambda} + \frac{b}{h(-k^*)}h(-x) - c \right) \\ &= \frac{b}{h(-k^*)} \left(\frac{\sigma_Y^2}{2}h''(-x) - \kappa xh'(-x) + h(-x) \right) - \frac{r + \kappa}{r + \lambda}x + rc \\ &= -\frac{r + \kappa}{r + \lambda}x + rc < -(r + \kappa)c + rc = -\kappa c < 0, \end{aligned}$$

womit auch (5.8) bewiesen ist.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass aus (5.7) und (5.8) die Darstellung des Wertes der Wiederverkaufsoption $q(Y_t^g)$ aus Lemma 5.6 folgt. Unter Anwendung der Itô-Formel auf $F(t, x) = e^{-rt}q(x)$ und der Darstellung von dY_t^g aus Lemma 5.4 erhält man

$$\begin{aligned} F(t, Y_t^g) &= F(0, Y_0^g) - \int_0^t re^{-ru}q(Y_u^g) du + \int_0^t e^{-ru}q'(Y_u^g) dY_u^g \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-ru}q''(Y_u^g) d[Y^g, Y^g]_u \\ &= q(Y_0^g) - \int_0^t re^{-ru}q(Y_u^g) du - \int_0^t \kappa Y_u^g e^{-ru}q'(Y_u^g) du + \int_0^t \sigma_Y e^{-ru}q'(Y_u^g) dW_u^{g,Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-ru} q''(Y_u^g) \sigma_Y^2 du \\
 & = q(Y_0^g) + \int_0^t e^{-ru} \left(\frac{\sigma_Y^2}{2} q''(Y_u^g) - \kappa q'(Y_u^g) Y_u^g - r q(Y_u^g) \right) du \\
 & + \int_0^t \sigma_Y e^{-ru} q'(Y_u^g) dW_u^{g,Y}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 e^{-rt} q(Y_t^g) & = q(Y_0^g) + \int_0^t e^{-ru} \left(\frac{\sigma_Y^2}{2} q''(Y_u^g) - \kappa q'(Y_u^g) Y_u^g - r q(Y_u^g) \right) du \\
 & + \int_0^t \sigma_Y e^{-ru} q'(Y_u^g) dW_u^{g,Y}.
 \end{aligned}$$

Da $q'(x)$ streng monoton wachsend, positiv und offensichtlich durch $\frac{1}{r+\lambda}$ beschränkt ist, ist

$$\int_0^t \sigma_Y e^{-ru} q'(Y_u^g) dW_u^{g,Y}$$

ein Martingal bezüglich \mathcal{F}^g . Somit ist $e^{-rt} q(Y_t^g)$ wegen (5.8) ein positives Supermartingal. Für beliebige Stoppzeiten $t \leq \tau$ folgt

$$\mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda+r} + q(-Y_\tau^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \leq e^{-rt} \mathbb{E} \left(e^{-r\tau} q(Y_\tau^g) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \leq q(Y_t^g),$$

wobei sich die erste Ungleichung aus (5.7) und die zweite aus dem Optimal-Sampling-Theorem für positive Supermartingale (vgl. S.10 in [17]) ergibt. Der Wert der Wiederverkaufsoption ist also höchstens $q(Y_t^g)$. Nun zeigt man, dass diese Schranke für die Stoppzeit τ^* angenommen wird. Da Y_t^g ein Mean-Reverting-Prozess ist, ist $P(\tau^* < \infty) = 1$. Der bei τ^* gestoppte Prozess $(e^{-rt} q(Y_t^g))^{\tau^*}$ ist ein Martingal, da die Werte dieses gestoppten Prozesses ausschließlich in der Fortsetzungsregion liegen, wo (5.8) mit Gleichheit gilt. Aus der Definition von k^* in Lemma 5.9 ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{k^*}{r+\lambda} - c \right) (h'(k^*) - h'(-k^*)) & = \frac{h(k^*) - h(-k^*)}{r+\lambda}, \\
 \frac{k^*}{r+\lambda} - c & = b(h(k^*) - h(-k^*)), \\
 \frac{k^*}{r+\lambda} + bh(-k^*) - c & = bh(k^*), \\
 \frac{k^*}{r+\lambda} + q(-k^*) - c & = q(k^*).
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Optional-Sampling-Theorems für Martingale folgt für eine Stoppzeit $t \leq \tau^*$

$$\mathbb{E} \left(e^{-r(\tau^*-t)} \left(\frac{Y_{\tau^*}^g}{\lambda+r} + q(-Y_{\tau^*}^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) = \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau^*-t)} \left(\frac{k^*}{\lambda+r} + q(-k^*) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau^*-t)} q(k^*) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\
 &= e^{rt} \mathbb{E} \left(e^{-r\tau^*} q(Y_{\tau^*}^g) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\
 &= e^{rt} \mathbb{E} \left((e^{-r \cdot} q(Y^g))_{\tau^*}^{\tau^*} \middle| \mathcal{F}_t^g \right) = e^{rt} (e^{-r \cdot} q(Y^g))_t^{\tau^*} \\
 &= e^{rt} e^{-rt} q(Y_t^g) = q(Y_t^g).
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich letztendlich

$$\begin{aligned}
 \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau-t)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda+r} + q(Y_\tau^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) &= \max_{\tau \geq t} \mathbb{E} \left(e^{r(t-\tau)} \left(\frac{Y_\tau^g}{\lambda+r} + q(-Y_\tau^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(e^{-r(\tau^*-t)} \left(\frac{Y_{\tau^*}^g}{\lambda+r} + q(-Y_{\tau^*}^g) - c \right) \middle| \mathcal{F}_t^g \right) \\
 &= q(Y_t^g).
 \end{aligned}$$

□

Verzichten wir auf die Annahme, dass ρ_t konstant ist, kann die Funktion $q(x, t)$ nicht mehr leicht explizit angegeben werden. Die Funktion $q(x, t)$ muss in der Fortsetzungsregion eine partielle Differentialgleichung erfüllen, damit nach der Itô-Formel der zum Handelszeitpunkt gestoppte Prozess $(e^{-rt} q(Y_t^g, t))^{\tau^*}$ ein Martingal ist. Die Schwierigkeit besteht nun darin, eine stetig differenzierbare Funktion $u(x, t)$ mit strikt positiven höheren Ableitungen nach x zu finden, die die parabolische Differentialgleichung

$$u_t(x, t) + \frac{\sigma_Y^2}{2} u_{xx}(x, t) - \rho_t x u_x(x, t) - r u(x, t) = 0$$

erfüllt, und damit $q(x, t)$ zu konstruieren.

5.3 Preisblasen

Nach Konstruktion beschreibt der Wert der Wiederverkaufsoption $q(Y_t^g)$ den Unterschied zwischen dem erwarteten Wert der zukünftigen Dividenden aus Sicht des gegenwärtigen Besitzers und einem Gleichgewichtspreis p_t^g . Diese Differenz kann man auch als Preisblase auffassen (vgl. [27]). Wir bezeichnen $q(Y_t^g)$, wobei

$$q(x) = \begin{cases} \frac{b}{h(-k^*)} h(x) & \text{für } x < k^*, \\ \frac{x}{r+\lambda} + \frac{b}{h(-k^*)} h(-x) - c & \text{für } x \geq k^* \end{cases}$$

und

$$b = \frac{h(-k^*)}{(r+\lambda)(h'(k^*) + h'(-k^*))},$$

ab nun als **Preisblase**. Nach Satz 5.10 hat Y_t^g nur Werte in $(-\infty, k^*)$. Erreicht der Prozess k^* , wird gehandelt und der Prozess startet neu bei $-k^*$. Daher definieren wir die **Größe der Preisblase zum Handelszeitpunkt** als $b = q(-k^*)$. Im Folgenden untersuchen wir, wie sich die Modellparameter auf die Größe der Preisblase auswirken.

Lemma 5.11 (vgl. [27]). Sind die Transaktionskosten $c = 0$, dann ist die Größe der Preisblase zum Handelszeitpunkt

$$b = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y}{4(\lambda + r)\sqrt{\kappa}\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Die Größe der Preisblase zum Handelszeitpunkt ist monoton steigend in σ_Y sowie κ und monoton fallend in r .

Beweis. Aus Lemma 5.9 folgt, dass für $c = 0$ auch $k^* = 0$ ist. Damit ist

$$b = \frac{h(0)}{2(\lambda + r)h'(0)}.$$

Unter Verwendung der im Beweis von Satz 5.7 hergeleiteten Darstellungen von $y'(0) = \beta_1 h'(0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}, \\ h'(0) &= \frac{\sqrt{\kappa}\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sigma_Y} = \frac{2\sqrt{\kappa}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)\sigma_Y} \end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$b = \frac{1}{2(\lambda + r)} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y}{2\sqrt{\kappa}\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Offensichtlich ist b monoton wachsend in σ_Y . Für die Monotonieeigenschaften bezüglich κ sowie r betrachtet man die ersten Ableitungen. Sei

$$f(x) = \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{x},$$

wobei $\psi^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \ln(\Gamma(x))$ die k -te Polygammafunktion (siehe S.260 in [21]) ist. Für $x > 0$ ist die Digammafunktion $\psi^{(0)}(x)$ monoton steigend und die Trigammafunktion $\psi^{(1)}(x)$ monoton fallend. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{2}\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \frac{1}{2}\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{x^2} \leq \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 0$$

ist $f'(x)$ monoton fallend. Da $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ist, ergibt sich $f(x) \geq 0$, woraus wenn man für $x = \frac{r}{2\kappa}$ einsetzt,

$$\psi\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{r}{2\kappa}\right) - \frac{\kappa}{r} \geq 0$$

folgt. Wegen

$$\frac{\partial b}{\partial \kappa} = \frac{\sigma_Y \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)}{8\sqrt{\kappa^5}(\lambda + r)\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)} \left(r\psi\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right) - r\psi\left(\frac{r}{2\kappa}\right) - \kappa \right) \geq 0$$

ist b monoton steigend in κ . Ähnlich geht man für die Monotonie in r vor. Aus der Monotonie der Digammafunktion folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial r} &= \frac{\sigma_Y \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)}{8\sqrt{\kappa^3}(\lambda+r)^2 \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)} \left((\lambda+r)\psi\left(\frac{r}{2\kappa}\right) - (\lambda+r)\psi\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right) - 2\kappa \right) \\ &\leq \frac{\sigma_Y \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)}{8\sqrt{\kappa^3}(\lambda+r)\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{r}{2\kappa}\right) - \psi\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right) \right) \leq 0, \end{aligned}$$

weswegen b monoton fallend in r ist. \square

Satz 5.12 (vgl. [27]). *Sei $c = 0$, dann ist $q(x)$ in der Fortsetzungsregion $(-\infty, 0)$ monoton wachsend in σ_Y sowie κ und monoton fallend in r . Die Preisblase wächst also mit steigendem σ_Y sowie κ und verringert sich mit steigendem r .*

Beweis. Aus Lemma 5.11 folgen die Monotonieeigenschaften von b . Zu zeigen bleibt die Monotonie von $h(x)$.

Sei $\tilde{\sigma}_Y > \sigma_Y$ und erfülle $\tilde{h}(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\tilde{\sigma}_Y^2}{2} \tilde{h}''(x) - \kappa x \tilde{h}'(x) - r \tilde{h}(x) = 0$$

mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{h}(x) = 0$ und

$$\tilde{h}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Nach Satz 5.7 wird

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} h''(x) - \kappa x h'(x) - r h(x) = 0$$

mit

$$h(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}$$

von $h(x)$ in der Fortsetzungsregion erfüllt. Sei $f(x) = \tilde{h}(x) - h(x)$. Die Annahme, es existiere ein lokales Minimum x^* auf $(-\infty, 0)$ mit $f(x^*) < 0$ muss zu einem Widerspruch führen. Ein solches Minimum müsste $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \geq 0$ erfüllen. Nach Lemma 5.8 ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) = 0$. Aus

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}_Y^2 \tilde{h}''(x) - \sigma_Y^2 h''(x) \right) - \kappa x f'(x) - r f(x) = 0$$

ergibt sich jedoch

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}_Y^2 \tilde{h}''(x^*) - \sigma_Y^2 h''(x^*) \right) = r f(x^*) < 0$$

und daraus $\tilde{\sigma}_Y^2 \tilde{h}''(x^*) < \sigma_Y^2 h''(x^*)$. Da $\sigma_Y < \tilde{\sigma}_Y$ ist, folgt $\tilde{h}''(x^*) < h''(x^*)$ und daraus wiederum $f''(x^*) < 0$, was einen Widerspruch zu $f''(x^*) \geq 0$ bildet. Somit ist $f(x) > 0$ für $x < 0$ und infolge dessen ist $\tilde{h}(x) > h(x)$ für $x < 0$. Daher ist $q(x)$ in der Fortsetzungsregion

monoton wachsend in σ_Y .

Sei nun $\tilde{\kappa} > \kappa$ und erfülle $\tilde{h}(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} \tilde{h}''(x) - \tilde{\kappa} x \tilde{h}'(x) - r \tilde{h}(x) = 0$$

mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{h}(x) = 0$ und

$$\tilde{h}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\tilde{\kappa}} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Sei auch hier $f(x) = \tilde{h}(x) - h(x)$. Wie vorhin nehmen wir an, es existiere auf $(-\infty, 0)$ ein lokales Minimum x^* mit $f(x^*) < 0$. Für dieses würde $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \geq 0$ gelten. Aus

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} f''(x) - x \left(\tilde{\kappa} \tilde{h}'(x) - \kappa h'(x) \right) - r f(x) = 0$$

und

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} f''(x^*) - x \kappa f'(x^*) - r f(x^*) = x^* (\tilde{\kappa} - \kappa) \tilde{h}'(x^*)$$

folgt $\tilde{h}'(x^*) < 0$, was jedoch im Widerspruch zu $\tilde{h}'(x) \geq 0$ steht. Daraus ergibt sich analog zu vorhin, dass $q(x)$ monoton wachsend in κ ist.

Um zu zeigen, dass $q(x)$ monoton fallend in r ist, sei $\tilde{r} < r$ und erfülle $\tilde{h}(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} \tilde{h}''(x) - \kappa x \tilde{h}'(x) - \tilde{r} \tilde{h}(x) = 0$$

mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{h}(x) = 0$ und

$$\tilde{h}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\tilde{r}}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Sei erneut $f(x) = \tilde{h}(x) - h(x)$. Nehmen wir an, es existiere auf $(-\infty, 0)$ ein lokales Minimum x^* mit $f(x^*) > 0$. Für dieses würde $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \geq 0$ gelten. Eingesetzt erhält man

$$\frac{\sigma_Y^2}{2} f''(x^*) - x \kappa f'(x^*) - r f(x^*) = (\tilde{r} - r) \tilde{h}(x^*)$$

und daraus folgt $(\tilde{r} - r) \tilde{h}(x^*) > 0$ und damit schließlich $\tilde{h}(x^*) < 0$, was einen Widerspruch darstellt. Es ergibt sich wie vorhin, dass $q(x)$ monoton fallend in r ist. \square

Lemma 5.13 (vgl. [27]). Sei $c > 0$ mit $c \rightarrow 0$, dann ist $q(x)$ in der Fortsetzungsregion $(-\infty, k^*)$ monoton wachsend in σ_Y sowie κ und monoton fallend in r . Das heißt, für hinreichend kleine c wächst die Preisblase mit steigendem σ_Y sowie κ und verringert sich mit steigendem r .

Beweis. Man betrachtet nun k^* und $h(x)$ in Abhängigkeit von x und vom Modellparameter $\zeta \in \{\sigma_Y, \kappa\}$ als $k^*(\zeta, c)$ und als $h(x, \zeta)$. Durch implizites Differenzieren der Gleichung

$$(k^* - c(r + \lambda)) \left(\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta) \right) - h(k^*, \zeta) + h(-k^*, \zeta) = 0$$

erhält man

$$\frac{\partial k^*}{\partial \zeta} = - \frac{(k^* - c(r + \lambda)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} h(k^*, \zeta) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} h(-k^*, \zeta) \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} h(-k^*, \zeta)}{(k^* - c(r + \lambda)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(k^*, \zeta) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(-k^*, \zeta) \right)}.$$

Da für $c \rightarrow 0$ sofort $k^* \rightarrow 0$ folgt und damit aber Nenner und Zähler Null werden, betrachtet die aus Satz 5.7 bekannte explizite Darstellung der Funktion

$$h(x, \zeta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right)} - \frac{2\sqrt{\kappa\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y} x + \frac{\sqrt{\pi} r}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y^2} x^2 - \frac{2\sqrt{\kappa\pi}(\kappa + r)}{3\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y^3} x^3 + o(x^4)$$

bis zu den Gliedern dritter Ordnung. Setzt man diese Darstellung von $h(x, \zeta)$ ein, ergibt sich

$$\lim_{k^* \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \zeta} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} h(-k^*, \zeta) - \frac{h(k^*, \zeta) - h(-k^*, \zeta)}{\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} h(k^*, \zeta) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} h(-k^*, \zeta) \right)}{\frac{h(k^*, \zeta) - h(-k^*, \zeta)}{\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(k^*, \zeta) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(-k^*, \zeta) \right)} = 0.$$

Daher ist $\frac{\partial k^*(\zeta, c)}{\partial \zeta} = o(k^*)$. Unter Verwendung dessen setzt man nun in

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \zeta} &= \frac{1}{(r + \lambda)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{h(-k^*, \zeta)}{\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta)} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \zeta} h(-k^*, \zeta) \left(\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta) \right) - h(-k^*, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta) \right)}{(r + \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta) \right)^2} \end{aligned}$$

die oben angegebene Reihendarstellung von $h(x, \zeta)$ ein und berechnet anschließend den Grenzwert $c \rightarrow 0$. Jedoch folgt aus $c \rightarrow 0$ einerseits $k^* \rightarrow 0$, andererseits ebenso $\frac{\partial k^*(\zeta, c)}{\partial \zeta} \rightarrow 0$, womit sich

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} h(k^*, \zeta) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\kappa}\right)}, \\ \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} h(k^*, \zeta) + \frac{\partial}{\partial x} h(-k^*, \zeta) \right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{4\sqrt{\kappa\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right) \sigma_Y} \end{aligned}$$

ergibt. Letztendlich folgt

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial b}{\partial \kappa} &= \frac{1}{(r + \lambda)} \frac{\frac{4\pi r \sqrt{\kappa} \psi^{(0)}\left(\frac{r+\kappa}{2\kappa}\right)}{2\kappa^2 \sigma_Y \Gamma\left(\frac{r+\kappa}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)} - \frac{2\pi(r\psi^{(0)}\left(\frac{r}{2\kappa}\right) + \kappa)}{\sqrt{\kappa^3} \sigma_Y \Gamma\left(\frac{r+\kappa}{2\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)} - \frac{16\kappa\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)^2 \sigma_Y^2}}{\frac{16\kappa\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)^2 \sigma_Y^2}} \\ &= \frac{\sigma_Y \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa}\right)}{8\sqrt{\kappa^5}(\lambda + r) \Gamma\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right)} \left(r\psi\left(\frac{r}{2\kappa} + \frac{1}{2}\right) - r\psi\left(\frac{r}{2\kappa}\right) - \kappa \right) = \frac{\partial b}{\partial \kappa} \geq 0, \end{aligned}$$

womit die Monotonieeigenschaften aus Lemma 5.11 für κ erhalten bleiben. Für die Monotonie bezüglich σ_Y geht man analog vor und mit ähnlicher Argumentation folgt schließlich auch die Monotonie bezüglich r . Die Monotonie von b ist damit bewiesen. Wie in Satz 5.12 lässt sich nun auch die Monotonie von $h(x)$ zeigen. \square

Lemma 5.14 (vgl. [27]). Der minimale Handel auslösende Unterschied der Einschätzungen k^* wird mit steigenden Transaktionskosten c größer.

Beweis. Das in Lemma 5.9 hergeleitete k^* hängt von den Transaktionskosten $c \geq 0$ ab. Da für $c = 0$ bereits $k^* = 0$ gezeigt wurde, betrachtet man $c > 0$. Durch implizites Differenzieren folgt

$$\frac{dk^*}{dc} = \frac{(r + \lambda)(h'(k^*) + h'(-k^*))}{(k^* - c(r + \lambda))(h''(k^*) - h''(-k^*))} > 0,$$

womit die Monotonie bewiesen ist. \square

Folgendes Lemma ermöglicht es, die erwartete Dauer zwischen zwei Handelszeitpunkten zu bestimmen.

Lemma 5.15 (vgl. [27]). Für $x \leq k$ sei $\tau(x, k) = \inf \{s \geq 0 : Y_{t+s}^g > k\}$, $Y_t^g = x$. Wenn $c > 0$ ist, dann ist die erwartete Dauer von einem Handelszeitpunkt zum nächsten

$$\mathbb{E}(\tau(-k^*, k^*)) = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{h(-k^*)}{h(k^*)} \Big|_{r=0}.$$

Ist $c = 0$, dann ist $\mathbb{E}(\tau(-k^*, k^*)) = 0$.

Beweis. Sei $w(-k^*, k^*, r) = \mathbb{E}(e^{-r\tau(x,k)} | x)$ die momentenerzeugende Funktion von τ . Man kann zeigen (S.234 in [24]), dass $w(x, k, r)$ eine strikt monotone, nichtnegative Lösung von

$$\frac{1}{2}\sigma_Y^2 w_{xx}(x, k, r) - \kappa x w_x(x, k, r) - r w(x, k, r) = 0$$

mit $w(k, k, x) = 1$ ist. Nach Satz 5.7 löst $y(x) = \beta_1 h(x)$ diese Gleichung. Hier muss $\beta_1 = \frac{1}{h(k)}$ gewählt werden, damit die Randbedingung erfüllt ist. Wenn $c > 0$ ist, ergibt sich, da $w(x, k, r)$ die momentenerzeugende Funktion ist,

$$\mathbb{E}(\tau(-k^*, k^*)) = -\frac{\partial}{\partial r} w(-k^*, k^*, r) \Big|_{r=0} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{h(-k^*)}{h(k^*)} \Big|_{r=0}.$$

Wenn $c = 0$ ist, dann ist wegen Lemma 5.9 auch $k^* = 0$ und damit $\mathbb{E}(\tau(-k^*, k^*)) = 0$. \square

5.4 Numerisches Beispiel

Scheinkman und Xiong betrachten in [27] und [26] zur Modellkalibrierung ökonomische und wirtschaftspsychologische Studien. Da sich die Volatilitäten σ_s , σ_X und σ_D aus realen Marktdaten schwer schätzen lassen, führen sie zusätzliche Informationssignale $i_s = \sigma_D/\sigma_s$ und $i_X = \sigma_D/\sigma_X$ ein, die aus realen Marktdaten geschätzt werden, und vereinfachen mit $\lambda = 0$ die Darstellung von κ . Ein anderes Problem ist die Kalibrierung des Überschätzungsparameters ϕ , der sich dort aus psychologischen Studien ergibt.

Um die theoretischen Ergebnisse anhand einiger numerischer Beispiele nun zu veranschaulichen, genügt es jedoch, diese mit beliebigen Parametern durchzurechnen. Da sich die Gleichung für k^* für $c > 0$ nicht exakt lösen lässt, muss dort auf numerische Methoden wie das Newtonverfahren zurückgegriffen werden. Im Fall $c = 0$ ist auch $k^* = 0$. Als erstes Beispiel wählen wir die Modellparameter: $\phi = 0.7$, $c = 0$, $\lambda = 0.2$, $r = 0.05$, $\sigma_s = \sqrt{2}$ und $\sigma_X = 1$. Betrachten wir die Größe der Preisblase b in Abhängigkeit von σ_D ergibt sich gerundet:

5 Das Modell von Scheinkman und Xiong

σ_D	0	0.5	1	1.5	2
b	0	9.6384	25.4288	45.6252	69.4192

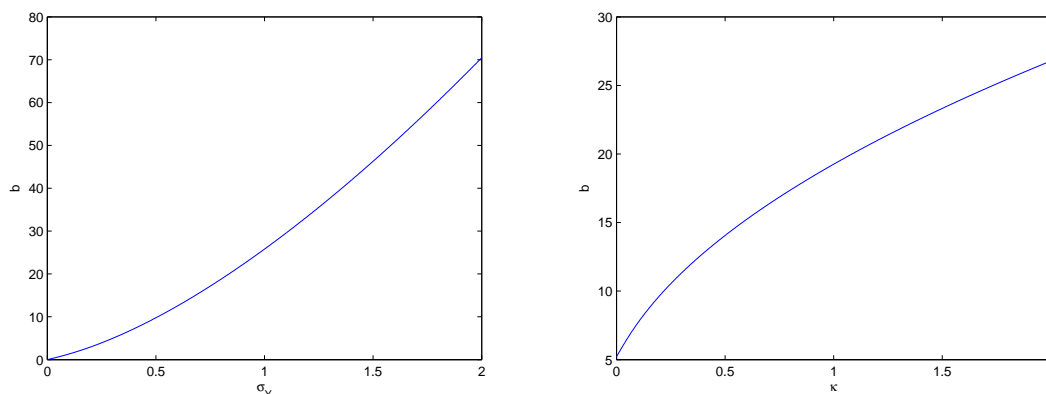


Abbildung 5.1: b in Abhängigkeit von σ_Y beziehungsweise von κ .

In Lemma 5.11 wurde die Monotonie von $\sigma_Y = \sqrt{2}\phi\sigma_D$ hergeleitet. Abbildung 5.1 zeigt deutlich, dass b fixem ϕ monoton steigend in σ_D ist.

Als nächstes Beispiel wählen wir die Modellparameter: $\phi = 0.7$, $c = 0$, $\lambda = 0.1$, $r = 0.05$ und $\sigma_D = 0.5$. Jetzt betrachten wir b in Abhängigkeit von $\kappa > 0$ und erhalten gerundet die Werte:

κ	10^{-3}	0.5	1	1.5	2
b	5.2436	14.0553	19.2547	23.3240	26.7823

In Abbildung 5.1 erkennt man gut, dass b monoton steigend in κ ist, was ebenso in Lemma 5.11 gezeigt wurde.

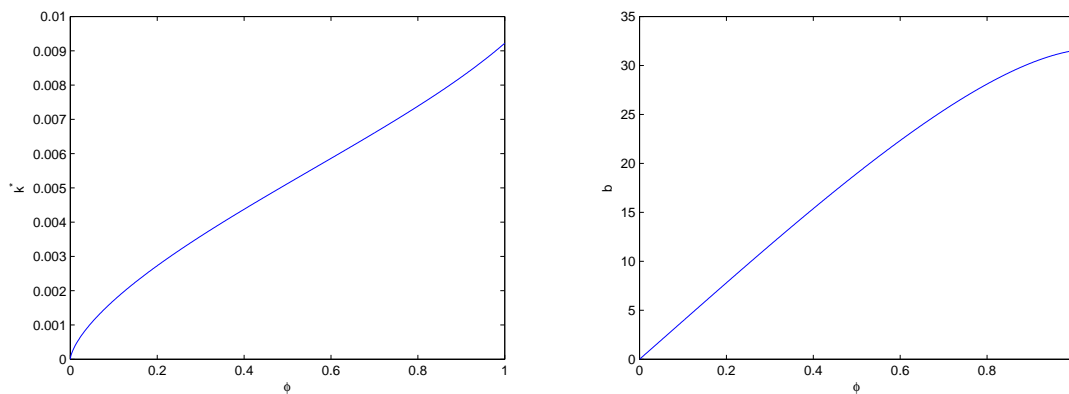


Abbildung 5.2: k^* und b in Abhängigkeit von ϕ

Untersuchen wir nun das Verhalten in Abhängigkeit des Überschätzungsparameters ϕ . Sei dazu: $c = 10^{-6}$, $\sigma_D = 1$, $\lambda = 0.2$, $r = 0.05$, $\sigma_s = \sqrt{2}$ und $\sigma_X = 1$. Aufgrund der Wahl von $c = 10^{-6}$ könnte man diese Transaktionskosten auch vernachlässigen und b exakt mit $c = 0$ und $k^* = 0$ berechnen. Für $\phi = 0$ wäre $b = 0$ und für $\phi = 1$ wäre $b = 31.5428$. Genau genommen erhält man k^* durch numerisches Lösen der Gleichung

$$(k^* - c(r + \lambda)) (h'(k^*) + h'(-k^*)) - h(k^*) + h(-k^*) = 0$$

und daraus ergibt sich dann:

ϕ	10^{-16}	0.25	0.5	0.75	1
k^*	$7.6811 \cdot 10^{-16}$	0.0032	0.0051	0.0070	0.0092
b	$2.4576 \cdot 10^{-14}$	9.7312	18.9613	26.8144	31.5232

In Abbildung 5.2 werden k^* und die davon abhängigen b dargestellt. Deutlich erkennt man, dass b monoton steigend in ϕ ist. Aus Lemma 5.13 folgt, dass b monoton wachsend in σ_Y und κ ist. Wächst jedoch ϕ , dann wachsen auch σ_Y und κ .

Zuletzt untersuchen wir die Abhängigkeit der Größe der Preisblase von den Transaktionskosten c . Sei dazu: $\sigma_D = 1$, $\phi = 0.7$, $\lambda = 0.2$, $r = 0.05$, $\sigma_s = \sqrt{2}$ und $\sigma_X = 1$. Für $c = 0$ ist $k^* = 0$ und man kann b exakt berechnen. Es ergibt sich $b = 25.4288$ und ein Unterschied zum numerisch berechneten b von $3.0786 \cdot 10^{-5}$. Ansonsten erhält man:

c	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
k^*	$1.5389 \cdot 10^{-5}$	0.3119	0.3971	0.4587	0.5090	0.5526
b	25.4288	21.9506	20.2040	18.8133	17.6228	16.5684

In Abbildung 5.3 werden erneut k^* und die davon abhängigen b dargestellt. Wie in Lemma 5.14 hergeleitet, ist die Größe der Preisblase monoton fallend in c .

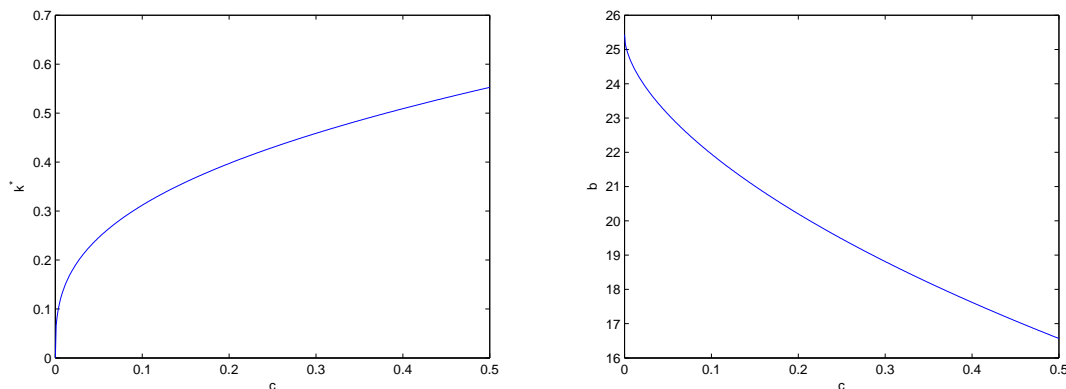


Abbildung 5.3: k^* und b in Abhängigkeit von c .

Literaturverzeichnis

- [1] Herbert Buchholz. *Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*. Springer, Berlin Göttingen Heidelberg, 1953.
- [2] Michael G. Crandall. Viscosity solutions: A primer. *Lecture Notes in Mathematics*, 1660:1–43, 1997.
- [3] Douglas E. French. *Early Speculative Bubbles and Increases in the Supply of Money*. Ludwig von Mises Institute, Auburn, 2.Auflage, 2009.
- [4] Alexander M. G. Cox, David G. Hobson. Local martingales, bubbles and option prices. *Finance and Stochastics*, 9(4):477–492, 2005.
- [5] Robert Jarrow. Heterogeneous expectations, restrictions on short sales, and equilibrium asset prices. *The Journal of Finance*, 35(5):1105–1113, 1980.
- [6] Rose-Anne Dana, Monique Jeanblanc. *Financial Markets in Continuous Time*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [7] Robert V. Kohn. Erratum concerning the article asset price bubbles from heterogeneous beliefs about mean reversion rates. Verfügbar auf <http://www.math.nyu.edu/faculty/kohn/papers/chen-kohn-erratum.pdf> (abgerufen am 18.1.2013).
- [8] Xi Chen, Robert V. Kohn. Asset price bubbles from heterogeneous beliefs about mean reversion rates. *Finance and Stochastics*, 15:221–241, 2011.
- [9] J. Michael Harrison, David M. Kreps. Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneous expectations. *The Quarterly Journal of Economics*, 92:323–336, 1978.
- [10] Sergei Levendorskiĭ. Perpetual american options and real options under mean-reverting processes, 2005. Verfügbar auf <http://ssrn.com/abstract=714321> (abgerufen am 18.1.2013).
- [11] John Lintner. The aggregation of investor’s diverse judgments and preferences in purely competitive security markets. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4(4):347–400, 1969.
- [12] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, Pierre-Louis Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27:1–67, 1992.
- [13] Edward Miller. Risk, uncertainty, and divergence of opinion. *The Journal of Finance*, 32:1151–1168, 1977.

- [14] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 6.Auflage, 2005.
- [15] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer, New York Heidelberg Berlin, 6.Auflage, 2010.
- [16] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 5.Auflage, 2002.
- [17] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2.Auflage, 2004.
- [18] Robert A. Jarrow, Kazuhiro Shimbo, Philip Protter. Asset price bubbles in incomplete markets. *Math. Finance*, 20(2):145–185, 2010.
- [19] Robert Liptser, Albert Shiryaev. *Statistics of Random Processes II. Applications*. Springer, New York Heidelberg Berlin, 1978.
- [20] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York Berlin Heidelberg, 2.Auflage, 1991.
- [21] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 10.Auflage, 1972.
- [22] Joseph E. Stiglitz. Symposium on bubbles. *The Journal of Economic Perspectives*, 4(2):13–18, 1990.
- [23] Jochen Schumann, Ulrich Meyer, Wolfgang Ströbele. *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*. Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 6.Auflage, 2011.
- [24] Samuel Karlin, Howard M. Taylor. *A second course in stochastic processes*. Academic Press, San Diego New York Boston, 1981.
- [25] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 7 edition, 2009.
- [26] José Scheinkman, Wei Xiong. *Overconfidence, Short-Sale Constraints, and Bubbles*. Princeton Economic Theory Working Papers, Princeton, 2002.
- [27] José Scheinkman, Wei Xiong. Overconfidence and speculative bubbles. *Journal of Political Economy*, 111:1183–1220, 2003.
- [28] José Scheinkman, Wei Xiong. Heterogeneous beliefs, speculation and trading in financial markets. *Lecture Notes in Mathematics. Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, 1847(4):217–250, 2004.
- [29] Wei Xiong. Bubbles, crises, and heterogeneous beliefs, 2012. Verfügbar auf <http://www.princeton.edu/wxiong/papers/review.pdf> (abgerufen am 5.2.2013).

Literaturverzeichnis

- [30] Jun Cail, Hans U. Gerber, Hailliang Yang. Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest. *North American Actuarial Journal*, 10(2):94–119, 2006.
- [31] Daniel Revuz, Marc Yor. *Contious Martingales and Brownain Motion*. Springer, Berlin Heidelberg, 3.Auflage, 1999.