

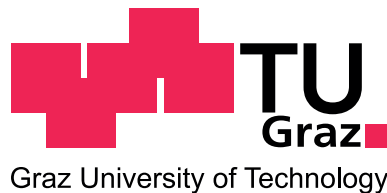
Stephan HAFNER

Mehrstufige Portfolio-Optimierung unter Verwendung von Szenariobäumen und HMCR-Risikomaßen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



Technische Universität Graz

Betreuer/in:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda DRAGOTI-ÇELA

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B)

Graz, im April 2013

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date
.....
(signature)

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Masterarbeit gibt zunächst eine Einführung in die mehrstufige Portfolio-Optimierung im Rahmen der stochastischen Optimierung. Anschließend werden stochastische Optimierungsprobleme in allgemeiner und diskreter Form sowie statistische Eigenschaften der Approximationen der Lösungen allgemeiner stochastischer Optimierungsprobleme durch die Lösungen diskretisierter Versionen dieser Optimierungsprobleme beschrieben.

Portfolio-Optimierungsmodelle berücksichtigen immer auch das Risiko eines Wertverlustes, daher werden anschließend verschiedene Risikomaße, insbesondere die Familie der Higher Moment Coherent Risk Measure (HMCR) und deren Implementierung in stochastischen Optimierungsproblemen besprochen.

Die Generierung diskreter Szenarien, welche die Prognosen über die zufälligen Parameter der stochastischen Optimierungsprobleme beinhalten, stellt einen kritischen Punkt bei der numerischen Lösung der Optimierungsprobleme dar. In dieser Arbeit werden verschiedene, auf Moment Matching basierende Methoden für die Generierung von Szenariobäumen über eine und mehrere Perioden beschrieben.

Der Fokus der Arbeit liegt auf der Implementierung und Testung eines mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodells, welches den erwarteten Portfoliowert in der letzten Stufe maximiert und gleichzeitig das Verlustrisiko durch unterschiedlich Risikomaße kontrolliert. Es wird eine vergleichende Analyse der Performance des Modells in numerischen Tests mit unterschiedlicher Wahl des Risikomaßes beschrieben. Konkret wird das Modell anhand eines Portfolios, bestehend aus einer risikolosen und einer risikobehafteten Investitionsmöglichkeit sowie anhand eines Portfolios, bestehend aus einer Anleihe und den 10 DAX-Aktien, mit den jeweils höchsten Werten der Kurtosis, getestet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ein-Perioden-Modell	1
1.2	Mehr-Perioden-Modell	3
2	Mehrstufige stochastische Optimierung	7
2.1	Beschreibung des allgemeinen Falls	7
2.2	Beschreibung des linearen Falls	9
2.3	Szenariobaum und Diskretisierung	11
2.4	Statistische Eigenschaften der Approximation durch Stichprobenmittel . .	15
2.4.1	Konsistenz der SAA-Schätzer	16
2.4.2	Asymptotik der SAA-Schätzer	18
2.4.3	Die SAA-Methode für mehrstufige Optimierungsprobleme	20
3	Risikomaße	24
3.1	Beispiele für Risikomaße	27
3.2	Conditional Value at Risk (CVaR)	29
3.3	Higher Moment Coherent Risk Measure (HMCR)	34
3.4	Implementierung der HMCR-Maße in stochastischen Optimierungsproblemen	39
4	Szenariogenerierung	42
4.1	Moment-Matching-Algorithmus für die Szenariogenerierung über eine Periode	42
4.1.1	Konzeptioneller Algorithmus	43
4.1.2	Modifizierter Algorithmus	47
4.2	Algorithmus für die Szenariogenerierung über mehrere Perioden	48
4.2.1	Szenariogenerierung mit Kontrolle über die unbedingten Verteilungen	49
4.2.2	Szenariogenerierung mit Kontrolle über die bedingten Verteilungen	55
5	Modellbeschreibung	57
5.1	Parameter und Variablen	58
5.2	Zielfunktion und Nebenbedingungen	60
5.3	Kompakte Version	65

6	Numerische Tests	67
6.1	Tests mit zwei Investitionsmöglichkeiten	69
6.1.1	In-Sample-Tests	71
6.1.2	Out-of-Sample-Tests	74
6.2	Tests mit einem Aktienportfolio	78
6.2.1	In-Sample-Tests	79
6.2.2	Out-of-Sample-Tests	84
7	Zusammenfassung und Ausblick	90
	Literaturverzeichnis	92

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schema eines Szenariobaumes über drei Perioden. Die hervorgehobenen Kanten und Knoten bilden den Teilbaum des Knotens k_3	12
3.1	Allgemeine Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z mit Value at Risk zu den Niveaus α und β	28
5.1	(erwartete) Wertentwicklung des Portfolios im Fall einstufiger Optimierung (grau) und mehrstufiger Optimierung (schwarz).	58
6.1	Verlauf der Zinssätze für Österreichische Bundesanleihen mit 10-jähriger Laufzeit. (Grafik von www.markt-daten.de)	70
6.2	DAX Index-Chart über den Zeitraum vom 29.09.2009 bis zum 26.03.2013.	70
6.3	Performances der Portfolios für unterschiedliche Risikomaße und Schranken im Vergleich zum DAX und der Anleihe im In-Sample-Fall.	72
6.4	Mittlere Wertzuwächse der Testportfolios als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall.	73
6.5	Risk-Return-Profile mit Var als Risikomaß im In-Sample-Fall.	74
6.6	Risk-Return-Profile mit den Risikomaßen CVaR und HMCR_2 im In-Sample-Fall.	74
6.7	Performances der Portfolios für unterschiedliche Risikomaße und Schranken im Vergleich zum DAX und der Anleihe im Out-of-Sample-Fall.	75
6.8	Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall.	76
6.9	Risk-Return-Profile mit den Risikomaßen CVaR und HMCR_2 im Out-of-Sample-Fall.	77
6.10	Börsenkurse der 10 DAX-Aktien über den Zeitraum vom 29.09.2009 bis zum 26.03.2013.	78
6.11	Skalierte Börsenkurse der 10 DAX-Aktien mit den höchsten Werten der Kurtosis	79
6.12	Performances der Portfolios für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$	80
6.13	Performances der Portfolios für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$	81
6.14	Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$	82
6.15	Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$	82

6.16	Die besten Performances für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	83
6.17	Die besten Performances für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	83
6.18	Die für alle drei Risikomaße optimale Portfoliogewichtung im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	83
6.19	Performances der Portfolios für die Risikomaße HMCR_2 und CVaR im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	84
6.20	Performance der Portfolios für das Risikomaße Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	85
6.21	Performances der Portfolios für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	85
6.22	Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	86
6.23	Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	86
6.24	Die besten Performances für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	87
6.25	Die besten Performances für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	87
6.26	Verläufe der für die jeweiligen Risikomaße optimalen Portfoliogewichtungen im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.	88
6.27	Verläufe der für die jeweiligen Risikomaße optimalen Portfoliogewichtungen im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.	89

1 Einleitung

Dieses Kapitel soll einerseits als kurze Einführung in das Thema der Portfolio-Optimierung dienen, andererseits sollen anhand der stark vereinfachten Problemstellungen aus der Portfolio-Optimierung die allgemeinen und theoretischen Betrachtungen über stochastische Optimierungsprobleme in den folgenden Kapiteln motiviert werden.

Hauptliteratur für das einleitende Kapitel und die Überlegungen über mehrstufige stochastische Optimierung im zweiten Kapitel sind: Shapiro, Dentscheva und Ruszczyński [25], Kall und Mayer [11] sowie Birge und Louveaux [2].

Notationskonventionen

Wir bezeichnen Zufallsvariablen mit Großbuchstaben (X, Y, Z, \dots) und deren Realisierungen mit Kleinbuchstaben (x, y, z, \dots).

Vektorwertige Größen werden durch Fettdruck gekennzeichnet ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$), skalarwertige Größen werden im Normaldruck geschrieben (x, y, z, \dots).

1.1 Ein-Perioden-Modell

Wir nehmen an, dass zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ das Kapital W_0 zur Gänze in n Aktien, genauer gesagt, Aktien von n Unternehmen investiert werden soll. Am Ende der Investitionsperiode, zum Zeitpunkt $t = 1$, erhalten wir von jeder Aktie die Rendite r_i , welche zum Anfangszeitpunkt unbekannt ist. Investieren wir am Anfang jeweils das Kapital $x_i \geq 0$ in die i -te Aktie, so hat das Aktienportfolio zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ die Werte

$$W_0 = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad W_1 = \sum_{i=1}^n x_i z_i,$$

wobei $z_i = 1 + r_i$. Wir nehmen dabei an, wir könnten beliebige Beträge in Aktien investieren, also auch Teile von Aktien erwerben. Wir betrachten die Aktienrenditen r_i als Realisierungen der Zufallsvariablen R_i und definieren $Z_i = 1 + R_i$. Da Aktien nie weniger als nichts wert sind, sollten die Zufallsvariablen Z_i realistischer Weise positiv sein. Die Maximierung der erwarteten Rendite des Gesamtinvestments führt zu dem Optimierungsproblem

$$\max_{x \geq 0} \mathbb{E}[W_1] \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = W_0. \quad (1.1)$$

Die einfache Lösung dieses Problems besteht darin, das gesamte Anfangskapital in die Aktie mit der höchsten erwarteten Rendite zu investieren. Der vorsichtige Investor wird sich jedoch bei dieser Strategie möglicherweise unwohl fühlen, da er bei einem Kurseinbruch dieser einen Aktie viel Geld verliert.

Alternativ dazu können wir den erwarteten *Nutzen*, den wir aus dem Investment ziehen, maximieren:

$$\max_{x \geq 0} \mathbb{E}[U(W_1)] \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = W_0, \quad (1.2)$$

wobei die sogenannte *Nutzenfunktion* $U(\cdot)$ meistens eine reellwertige, monoton wachsende und im Fall eines risikoaversen Investors, konkave Funktion ist. Die Idee der Nutzenmaximierung ist in der Volkswirtschaftslehre sehr beliebt, ein Nachteil liegt jedoch in der Bestimmung der passenden Nutzenfunktion. Der Autor ist sich zum Beispiel über seine Nutzenfunktion bei Geld nicht völlig sicher.

Ein weiterer Zugang ist, den erwarteten Wert des Portfolios zu maximieren und zugleich das Risiko des Wertverlustes zu kontrollieren. Für die Messung des *Risikos* gibt es viele Ansätze und wir werden darauf noch im Detail eingehen. Ein Ansatz ist zum Beispiel, das Risiko mit der Varianz des Portfoliowertes zu messen. Es gilt

$$\text{Var}(W_1) = \text{Var}(\mathbf{x}^T \mathbf{Z}) = \mathbf{x}^T \text{Var}(\mathbf{Z}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x},$$

wobei Σ die Kovarianzmatrix von \mathbf{Z} bezeichnet, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$. Wir erhalten damit das bekannte Markowitz-Modell

$$\max_{x \geq 0} \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Z_i] \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = W_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \leq \rho, \quad (1.3)$$

mit einer Risikoschranke $\rho > 0$. Die zulässige Menge ist kompakt und falls nicht leer, existiert daher eine optimale Lösung. Markowitz [16] beschrieb dieses Modell 1952 in einem Artikel und begründete damit die Theorie der Portfolio-Optimierung, wofür er 1990 auch mit dem Wirtschaftsnobelpreis ausgezeichnet wurde. Eine zu Modell (1.2) äquivalente Formulierung ist

$$\min_{x \geq 0} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = W_0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Z_i] \geq \kappa, \quad (1.4)$$

mit einer Wertuntergrenze κ , siehe Steinbach [26]. Wir können den optimalen erwarteten Portfoliowert in Modell (1.3) als Funktion des maximal zulässigen Risikos ρ auffassen, beziehungsweise umgekehrt das minimale Risiko in Problem (1.4) als Funktion des minimalen erwarteten Portfoliowertes κ definieren. Die beiden Funktionen sind zueinander invers und ihr Graph wird als *Efficient frontier* bezeichnet. Bei diesem Modellierungsansatz benötigen wir nicht die Kenntnis der gesamten Verteilung von \mathbf{Z} , es genügt die Kenntnis der ersten beiden Momente.

Ein weiterer Ansatz ist, das Risiko über eine probabilistische Nebenbedingung zu kontrollieren

$$\max_{x \geq 0} \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Z_i] \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = W_0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n x_i z_i \geq b\right) \geq 1 - \alpha. \quad (1.5)$$

Die Nebenbedingung beschränkt die Wahrscheinlichkeit, dass der Portfoliowert am Ende größer als b ist, auf mindestens $1 - \alpha$.

1.2 Mehr-Perioden-Modell

Wir nehmen wieder an, dass zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ das Kapital W_0 zur Gänze in n Aktien, also Aktien von n Unternehmen investiert werden soll. Im Unterschied zum Ein-Perioden-Modell betrachten wir die Wertentwicklung des Portfolios nicht über eine, sondern über T Perioden. Die Periode t sei dabei die Zeitspanne zwischen den Zeitpunkten $t - 1$ und t . In den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T - 1$ dürfen wir das Portfolio umschichten, allerdings ohne Kapital zuzuführen oder zu entnehmen. Für $t = 0, \dots, T - 1$ sei $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt})^\top$ der Vektor der nichtnegativen Kapitalmengen, die zum Zeitpunkt t in die einzelnen Aktien investiert sind. Wir betrachten die Aktienrenditen in den einzelnen Perioden wieder als Zufallsvariablen und bezeichnen für $i = 1, \dots, n$ und $t = 1, \dots, T$ die Rendite der Aktie i in Periode t mit R_{it} . Um die Notation zu vereinfachen definieren wir noch den *positiven* stochastischen Datenprozess $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$ mit $\mathbf{Z}_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{nt})$ durch $Z_{it} = 1 + R_{it}$. Wir können für die Entscheidung der Portfoliogewichtung zum Zeitpunkt t die Aktienrenditen bis zum Zeitpunkt t berücksichtigen, daher modellieren wir \mathbf{x}_t als Funktion des Prozesses \mathbf{Z} bis zum Zeitpunkt t :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(\mathbf{Z}_{[t]}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{Z}_{[t]} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_t), \quad t = 1, \dots, T - 1.$$

Wir nennen den Prozess $(\mathbf{x}_t)_{t=0}^{T-1}$, mit $x_{it} \geq 0$ eine *Handelsstrategie*. Die Portfoliogewichtung in der Anfangsstufe \mathbf{x}_0 hängt nicht von dem Datenprozess ab und ist im Gegensatz zu den Portfoliogewichtungen der restlichen Perioden keine Zufallsvariable. Das Aktienportfolio hat in diesem einfachen Modell zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ den Wert

$$W_t = \sum_{i=1}^n Z_{it} x_{i,t-1}(\mathbf{Z}_{[t-1]})$$

und zusätzlich gilt für $t = 0, \dots, T - 1$ die Gleichgewichtsbedingung

$$W_t = \sum_{i=1}^n x_{it}(\mathbf{Z}_{[t]}).$$

Wir suchen im Folgenden eine Handelsstrategie, welche für eine allgemeine Nutzenfunktion U , den erwarteten Nutzen des Portfoliowertes zum Endzeitpunkt T maximiert. Wir

untersuchen dazu die Problemstellung zeitlich gesehen von hinten nach vorne. Zum Zeitpunkt $T-1$, dem letzten, zu dem wir das Portfolio umschichten können, sind der aktuelle Wert des Portfolios W_{T-1} und eine konkrete Realisierung $\mathbf{z}_{[T-1]}$ des Datenprozesses \mathbf{Z} bis zum aktuellen Zeitpunkt $T-1$ bekannt. Wir haben daher das folgende Optimierungsproblem zu lösen:

$$o_{T-1}(W_{T-1}, \mathbf{z}_{[T-1]}) := \max_{\mathbf{x}_{T-1} \geq 0} \mathbb{E} [U(W_T) | \mathbf{Z}_{[T-1]} = \mathbf{z}_{[T-1]}] \quad (1.6)$$

$$\text{u.d.N. } W_T = \sum_{i=1}^n Z_{iT} x_{iT-1} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{iT-1} = W_{T-1},$$

wobei $\mathbb{E} [U(W_T) | \mathbf{Z}_{[T-1]} = \mathbf{z}_{[T-1]}]$ die bedingte Erwartung des Nutzens von W_T , bei gegebener Realisierung des Datenprozesses bezeichnet. $\mathbb{E} [U(W_T) | \mathbf{Z}_{[T-1]} = \mathbf{z}_{[T-1]}]$ ist keine Zufallsvariable und kann, aufgefasst als Funktion der Entscheidung \mathbf{x}_{T-1} , im herkömmlichen Sinn maximiert werden. Der optimale Wert des Problems (1.6) hängt vom aktuellen Portfoliowert und einer konkreten Realisierung des Datenprozesses ab. Wir fassen den optimalen Wert daher als Funktion von W_{T-1} und $\mathbf{z}_{[T-1]}$ auf und bezeichnen ihn mit $o_{T-1}(W_{T-1}, \mathbf{z}_{[T-1]})$. Um die Funktion o_{T-1} bestimmen zu können, muss das Problem (1.6) natürlich für alle möglichen Portfoliowerte und alle möglichen Realisierungen des Datenprozesses bestimmt werden.

So fortschreitend erhalten wir in der allgemeinen Stufe $t = T-2, \dots, 1$ das Optimierungsproblem

$$o_t(W_t, \mathbf{z}_{[t]}) := \max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \mathbb{E} [o_{t+1}(W_{t+1}, \mathbf{Z}_{[t+1]}) | \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}] \quad (1.7)$$

$$\text{u.d.N. } W_{t+1} = \sum_{i=1}^n Z_{it+1} x_{it} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{it} = W_t,$$

dessen optimalen Wert wir mit $o_t(W_t, \mathbf{z}_{[t]})$ bezeichnen. Die in der Praxis wichtige Portfoliogewichtung \mathbf{x}_0 in der Anfangsstufe $t = 0$ ist Lösung des abschließenden Optimierungsproblems

$$\max_{\mathbf{x}_0 \geq 0} \mathbb{E} [o_1(W_1, \mathbf{Z}_1)] \quad (1.8)$$

$$\text{u.d.N. } W_1 = \sum_{i=1}^n Z_{i1} x_{i0} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{i0} = W_0,$$

wobei für die Bestimmung der Funktion $o_1(\cdot, \cdot)$ die Kenntnis aller vorangegangenen Funktionen o_{T-1}, \dots, o_2 notwendig ist.

Die wachsende Komplexität der Optimierungsprobleme (1.6) - (1.8) stimmt nicht gerade hoffnungsvoll, auf analytischem Weg die optimale Anfangsgewichtung \mathbf{x}_0 finden zu können. Die Situation vereinfacht sich allerdings stark, wenn wir davon ausgehen, die Aktienrenditen einer Periode seien unabhängig von der Vorperiode. Damit ist der Datenprozess \mathbf{Z} stufenweise unabhängig, das bedeutet, \mathbf{Z}_t ist unabhängig von $\mathbf{Z}_{[t-1]}$ für

$t = 2, \dots, T$. In diesem Fall werden die bedingten Erwartungen jeweils zu unbedingten Erwartungen. Problem (1.6) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}_{T-1} \geq 0} \mathbb{E}[U(W_T)] \\ \text{u.d.N. } & W_T = \sum_{i=1}^n Z_{iT} x_{iT-1} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{iT-1} = W_{T-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

und dessen optimaler Wert $o_{T-1}(W_{T-1})$ hängt nur noch von dem Portfoliowert zum Zeitpunkt $T - 1$ ab. In der allgemeinen Stufe $t = 0, \dots, T - 2$ vereinfacht sich die Probleme (1.7) und (1.8) zu

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \mathbb{E}[o_{t+1}(W_{t+1})] \\ \text{u.d.N. } & W_{t+1} = \sum_{i=1}^n Z_{it+1} x_{it} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{it} = W_t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Eine andere Vereinfachung der Problemstellungen (1.6) - (1.8) ergibt sich, wenn wir für die Nutzenfunktion des Portfoliowertes die Logarithmusfunktion verwenden, Für das Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \mathbb{E} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^n Z_{it+1} x_{it} \right) \mid \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]} \right] \quad (1.11)$$

gilt die folgende Aussage:

\mathbf{x}_t ist genau dann eine Lösung von (1.11) unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{it} = 1$, wenn $W_t \mathbf{x}_t$ Lösung von (1.11) unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{it} = W_t$ ist.

Die Richtigkeit der Aussage ist leicht zu sehen indem wir bemerken, dass sich die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_t) &= \mathbb{E} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^n Z_{it+1} x_{it} \right) \mid \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]} \right] \quad \text{und} \\ g(\mathbf{x}_t) &= \mathbb{E} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^n Z_{it+1} W_t x_{it} \right) \mid \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]} \right] \end{aligned}$$

nur um die Konstante $\ln W_t$ unterscheiden.

Der optimale Wert des Problems (1.11) hat daher unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{it} = W_t$ die Darstellung

$$o_t(W_t, \mathbf{Z}_{[t]}) = o'_t(\mathbf{Z}_{[t]}) + \ln W_t, \quad (1.12)$$

wobei wir mit $o'_t(\mathbf{z}_{[t]}) = o_t(1, \mathbf{z}_{[t]})$ den optimalen Wert des Problems (1.11) unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{it} = 1$ bezeichnen. Für $t = 0$ wird die bedingte Erwartung in (1.11) zur unbedingten Erwartung.

In der Stufe $T - 1$ genügt es also, Problem (1.11) für $t = T - 1$ und unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{iT-1} = 1$ zu lösen. Der optimale Wert des Problems (1.6) hat die Darstellung $o_{T-1}(W_{T-1}, \mathbf{Z}_{[T-1]}) = o'_{T-1}(\mathbf{Z}_{[T-1]}) + \ln W_{T-1}$. In der Stufe $T - 2$ erhalten wir folglich das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}_{T-2} \geq 0} \mathbb{E} [o'_{T-1}(\mathbf{Z}_{[T-1]}) + \ln W_{T-1} | \mathbf{Z}_{[T-2]} = \mathbf{z}_{[T-2]}] \\ & \text{u.d.N. } W_{T-1} = \sum_{i=1}^n Z_{iT-1} x_{iT-2} \text{ und } \sum_{i=1}^n x_{iT-2} = W_{T-2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Der in (1.13) zu optimierende Ausdruck hat offensichtlich die Darstellung

$$\mathbb{E} [o'_{T-1}(\mathbf{Z}_{[T-1]}) | \mathbf{Z}_{[T-2]} = \mathbf{z}_{[T-2]}] + \mathbb{E} [\ln W_{T-1} | \mathbf{Z}_{[T-2]} = \mathbf{z}_{[T-2]}]$$

wobei der erste Summand nicht von \mathbf{x}_{T-2} abhängt. Es genügt daher auch in Stufe $T - 2$ das Problem (1.11) für $t = T - 2$ und unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{iT-2} = 1$ zu lösen. Für den optimale Wert des Problems (1.13) gilt

$$o_{T-2}(W_{T-2}, \mathbf{Z}_{[T-2]}) = \mathbb{E} [o'_{T-1}(\mathbf{Z}_{[T-1]}) | \mathbf{Z}_{[T-2]}] + o'_{T-2}(\mathbf{Z}_{[T-2]}) + \ln W_{T-2}.$$

Führen wir diese Argumentation weiter, erhalten wir für die optimalen Werte der Probleme (1.6), (1.7) und (1.8) die Darstellung

$$o_t(W_t, \mathbf{Z}_{[t]}) = \sum_{u=t+1}^{T-1} \mathbb{E} [o'_u(\mathbf{Z}_{[u]}) | \mathbf{Z}_{[u-1]}] + o'_t(\mathbf{Z}_{[t]}) + \ln W_t, \quad \text{für } t = 0, \dots, T-1. \quad (1.14)$$

Es genügt, in der Stufe $t = 0, \dots, T - 1$ Problem (1.11) unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_{it} = 1$ zu lösen. Sind $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{T-1}$ Minimalstellen dieser Probleme, dann bildet der stochastische Prozess $(W_0 \mathbf{x}'_0, \dots, W_{T-1} \mathbf{x}'_{T-1})$ eine optimale Handelsstrategie.

Ist der Datenprozess \mathbf{Z} stufenweise unabhängig, vereinfacht sich die Problemstellung weiter und wir finden eine optimale Handelsstrategie, indem wir in Stufe $t = 0, \dots, T - 1$ das folgende, schon sympathischere Optimierungsproblem lösen:

$$o'_t := \max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \mathbb{E} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^n Z_{it+1} x_{it} \right) \right] \text{ u.d.N. } \sum_{i=1}^n x_{it} = 1. \quad (1.15)$$

Die optimalen Werte der Probleme (1.6), (1.7) und (1.8) haben in diesem Fall die übersichtliche Darstellung

$$o_t(W_t) = \sum_{u=t}^{T-1} o'_u + \ln W_t, \quad \text{für } t = 0, \dots, T-1. \quad (1.16)$$

2 Mehrstufige stochastische Optimierung

2.1 Beschreibung des allgemeinen Falls

Ein mehrstufiges stochastisches Modell zeichnet sich dadurch aus, dass die Entscheidungen, die in den einzelnen Stufen oder Zeitpunkten zu treffen sind, von unsicheren Daten abhängen, die erst mit der Zeit bekannt werden. Wir modellieren die in der Stufe $t = 0, \dots, T$ zu treffenden Entscheidungen durch den Vektor $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$ und die beobachteten Daten der Periode $t = 1, \dots, T$ durch den Vektor $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^n$. Die t -te Periode ist dabei die Zeitspanne zwischen den Stufen $t-1$ und t . Der Entscheidungsablauf hat die Form

$$\begin{aligned} \text{Entscheidung } (\mathbf{x}_0) &\rightarrow \text{Beobachtung } (\mathbf{z}_1) \rightarrow \text{Entscheidung } (\mathbf{x}_1) \rightarrow \\ &\dots \rightarrow \text{Beobachtung } (\mathbf{z}_T) \rightarrow \text{Entscheidung } (\mathbf{x}_T). \end{aligned}$$

Wir betrachten die beobachteten Daten $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_T$ als Realisierung des stochastischen Datenprozesses $(\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$ und bezeichnen mit $\mathbf{Z}_{[t]} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_t)$ den Prozess bis zum Zeitpunkt t . Die Entscheidung zum Zeitpunkt t soll nur von den bis zum Zeitpunkt t beobachtbaren Daten abhängen und soll nicht auf zukünftige Informationen vorgreifen. Diese Bedingung wird in der Fachliteratur als *Nonanticipativity-Bedingung* bezeichnet. Wir modellieren daher \mathbf{x}_t als Funktion von $\mathbf{Z}_{[t]}$, womit auch der Entscheidungsprozess ein stochastischer Prozess wird. Nur die Entscheidung \mathbf{x}_0 am Anfang ist deterministisch. Der Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$ heißt *stufenweise unabhängig*, wenn \mathbf{Z}_t und $\mathbf{Z}_{[t-1]}$ für $t = 2, \dots, T$ stochastisch unabhängig sind und er heißt *Markovsch*, wenn für alle $t = 2, \dots, T$ die Eigenschaft

$$\mathbb{E}[\mathbf{Z}_t | \mathbf{Z}_{[t-1]}] = \mathbb{E}[\mathbf{Z}_t | \mathbf{Z}_{t-1}]$$

erfüllt ist. Ein stufenweise unabhängiger Prozess ist Markovsch.

Wir stellen im Folgenden ein allgemeines $(T+1)$ -stufiges stochastisches Optimierungsproblem in verschachtelter Form dar:

$$\min_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} f_0(\mathbf{x}_0) + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_1)} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{Z}_1) + \mathbb{E} \left[\dots + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_T \in \mathcal{X}_T(\mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{Z}_T)} f_T(\mathbf{x}_T, \mathbf{Z}_T) \right] \right] \right]. \quad (2.1)$$

Für $t = 1, \dots, T$ sei $f_t : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und \mathcal{X}_t bezeichne eine Funktion von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ in die Potenzmenge von \mathbb{R}^d . Die Bilder von $\mathcal{X}_t(\cdot, \cdot)$ seien abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^d und die Urbilder abgeschlossener Teilmengen seien messbar. Die

Funktion $f_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und \mathcal{X}_0 sei eine deterministische, abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^d . Das mehrstufige stochastische Optimierungsproblem heißt *linear*, falls die Funktionen f_t und \mathcal{X}_t linear sind. Dabei sind die Addition von Mengen in \mathbb{R}^d und die Multiplikation einer Menge mit einem Skalar elementweise zu verstehen. Eine typische Wahl für lineare f_t und \mathcal{X}_t ist

$$\begin{aligned} f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{Z}_t) &= \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_t, \\ \mathcal{X}_0 &= \{\mathbf{x}_0 | A_0 \mathbf{x}_0 = b_0, x_0 \geq 0\} \quad \text{und} \\ \mathcal{X}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Z}_t) &= \{\mathbf{x}_t | B_t \mathbf{x}_{t-1} + A_t \mathbf{x}_t = b_t, x_t \geq 0\} \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

wobei in diesem Fall $\mathbf{Z}_t = (\mathbf{c}_t, A_t, B_t, b_t)$ mit $\mathbf{c}_t \in \mathbb{R}^d$, $A_t \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $B_t \in \mathbb{R}^{m \times d}$ und $b_t \in \mathbb{R}^m$ gilt.

Wir nennen den Entscheidungsprozess $(\mathbf{x}_t)_{t=0}^T$ auch eine *Handlungsstrategie*. Die Handlungsstrategie heißt *zulässig*, wenn für $t = 1, \dots, T$ die Funktion \mathbf{x}_t messbar ist, mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{Z}_{[t]}(\omega)) \in \mathcal{X}_t(\mathbf{x}_{t-1}(\mathbf{Z}_{[t-1]}(\omega)), \mathbf{Z}_{[t]}(\omega))$$

gilt und $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ ist.

Eine zweite Formulierung des mehrstufigen stochastischen Optimierungsproblems (2.1) ist

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T} \quad & \mathbb{E} [f_0(\mathbf{x}_0) + f_1(\mathbf{x}_1(\mathbf{Z}_{[1]}), \mathbf{Z}_1) + \dots + f_T(\mathbf{x}_T(\mathbf{Z}_{[T]}), \mathbf{Z}_T)] \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_t(\mathbf{Z}_{[t]}) \in \mathcal{X}_t(\mathbf{x}_{t-1}(\mathbf{Z}_{[t-1]}), \mathbf{Z}_{[t]}) \text{ f.s.}, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Eine weitere Möglichkeit ist, das mehrstufige stochastische Optimierungsproblem, wie in dem einleitenden Kapitel, von hinten nach vorne zu untersuchen. In der letzten Stufe T ist das Optimierungsproblem

$$o_T(\mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{z}_T) := \min_{\mathbf{x}_T \in \mathcal{X}_T(\mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{z}_T)} f_T(\mathbf{x}_T, \mathbf{z}_T) \quad (2.3)$$

zu lösen. Sein optimaler Wert $o_T(\mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{z}_T)$ hängt von der Entscheidung \mathbf{x}_{T-1} und von der Realisierung \mathbf{z}_T des Zufallsvektors \mathbf{Z}_T ab. Um die Funktion $o_T(\mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{z}_T)$ angeben zu können, müssen wir natürlich das Optimierungsproblem (2.3) für alle möglichen Entscheidungen \mathbf{x}_{T-1} und alle möglichen Realisierungen von \mathbf{Z}_T lösen. In der Stufe $t = T - 1, \dots, 1$ ist das Problem

$$o_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_{[t]}) := \min_{\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t)} f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) + \mathbb{E} [o_{t+1}(\mathbf{x}_t, \mathbf{Z}_{[t+1]}) | \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}] \quad (2.4)$$

zu lösen, dessen optimaler Wert $o_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_{[t]})$ von der Entscheidung \mathbf{x}_{t-1} und von der Realisierung des Zufallsprozesses $\mathbf{Z}_{[t-1]}$ abhängt. In der Anfangsstufe $t = 0$ ist abschließend das Problem

$$\min_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} f_0(\mathbf{x}_0) + \mathbb{E} [o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_{[1]})] \quad (2.5)$$

zu lösen. Um die Funktion der optimalen Werte $o_1(\cdot, \cdot)$ angeben zu können, müssen wir zuvor Probleme (2.3) und (2.4) für alle möglichen Eingangsdaten lösen.

Die Handelsstrategie $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*(\mathbf{Z}_{[1]}), \dots, \mathbf{x}_T^*(\mathbf{Z}_{[T]}))$ ist genau dann *optimal*, wenn für $t = 1, \dots, T$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^*(\mathbf{Z}_{[t]}) \in & \arg \min_{\mathbf{x}_t^* \in \mathcal{X}_t(\mathbf{x}_{t-1}^*, \mathbf{z}_t)} f_t(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{Z}_t) + \mathbb{E}[o_{t+1}(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{Z}_{[t+1]}) | \mathbf{Z}_{[t]}], \text{ f.s.} \quad \text{und} \quad (2.6) \\ \mathbf{x}_0^* \in & \arg \min_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} f_0(\mathbf{x}_0) + \mathbb{E}[o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_{[1]})] \end{aligned}$$

gilt, wobei für $t = T$ die bedingte Erwartung verschwindet. Ist der Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$ Markovsch, dann hängen die bedingten Erwartungswerte und die optimalen Werte o_t nur von \mathbf{Z}_t anstatt von der ganzen Prozessvergangenheit $\mathbf{Z}_{[t]}$ ab. Ist der Datenprozess sogar stufenweise unabhängig, dann werden die bedingten Erwartungswerte zu unbedingten Erwartungen.

2.2 Beschreibung des linearen Falls

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein $(T + 1)$ -stufige lineares Programm in unterer Dreiecksform:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_0^\top \mathbf{x}_0 + c_1^\top \mathbf{x}_1 + c_2^\top \mathbf{x}_2 + \dots + c_T^\top \mathbf{x}_T & (2.7) \\ \text{u.d.N.} \quad & A_{00} \mathbf{x}_0 & = b_0, \\ & A_{10} \mathbf{x}_0 + A_{11} \mathbf{x}_1 & = b_1, \\ & A_{20} \mathbf{x}_0 + A_{21} \mathbf{x}_1 + A_{22} \mathbf{x}_2 & = b_2, \\ & \vdots & \vdots \\ & A_{T0} \mathbf{x}_0 + A_{T1} \mathbf{x}_1 + \dots + A_{TT-1} \mathbf{x}_{T-1} + A_{TT} \mathbf{x}_T & = b_T, \\ & \mathbf{x}_0 \geq 0, \quad \mathbf{x}_1 \geq 0, \quad \mathbf{x}_2 \geq 0, \quad \dots \quad \mathbf{x}_T \geq 0. \end{aligned}$$

Das lineare Programm wird zu einem $(T + 1)$ -stufigen, linearen stochastischen Optimierungsproblem, wenn wir davon ausgehen, dass die Datenvektoren und Matrizen \mathbf{c}_t , A_{t0}, \dots, A_{tt} und b_t zufällig sind und erst mit der Zeit bekannt werden. Der Entscheidungsablauf hat hier die Form

$$\begin{aligned} & \text{Entscheidung } (\mathbf{x}_0) \rightarrow \text{Beobachtung } \mathbf{z}_1 = (\mathbf{c}_1, A_{10}, A_{11}, b_1) \rightarrow \\ & \dots \rightarrow \text{Beobachtung } \mathbf{z}_T = (\mathbf{c}_T, A_{T0}, \dots, A_{TT}, b_T) \rightarrow \text{Entscheidung } (\mathbf{x}_T), \end{aligned}$$

die Daten in der Anfangsstufe $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{c}_0, A_{00}, b_0)$ sind deterministisch, die Daten in der t -ten Stufe $\mathbf{z}_t = (\mathbf{c}_t, A_{t0}, \dots, A_{tt}, b_t)$, $t = 1, \dots, T$ hingegen sind zufällig und werden erst zum Zeitpunkt t bekannt. Der Entscheidungsvektor \mathbf{x}_t hängt nur von den Daten $\mathbf{z}_{[t]}$ bis zum Zeitpunkt t ab und nicht von den Beobachtungen in den späteren Stufen.

Das unterscheidet die Problemstellung von deterministischen Optimierungsaufgaben, bei denen alle Daten bereits zum Zeitpunkt der Entscheidungsfindung bekannt sind.

Wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, gibt es mehrere Möglichkeiten, unsere Problemstellung mathematisch zu formulieren. Wir betrachten im Folgenden das Problem wieder zeitlich gesehen von hinten nach vorne. In der letzten Stufe T sind die Entscheidungen der restlichen Stufen und eine Realisierung des ganzen Datenprozesses bekannt und wir haben das Teilproblem

$$\min_{\mathbf{x}_T} \mathbf{c}_T^\top \mathbf{x}_T \quad \text{u.d.N.} \quad A_{T0} \mathbf{x}_0 + A_{T1} \mathbf{x}_1 + \dots + A_{TT} \mathbf{x}_T = b_T, \quad \mathbf{x}_T \geq 0 \quad (2.8)$$

zu lösen. Der optimale Wert des Teilproblems hängt von $\mathbf{x}_{[T]}$ und \mathbf{z}_T ab und wir bezeichnen ihn daher mit $o_T(\mathbf{x}_{[T]}, \mathbf{z}_T)$. In der allgemeinen Stufe $t = T - 1, \dots, 1$ ist das Problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_t + \mathbb{E} [o_{t+1}(\mathbf{x}_{[t]}, \mathbf{Z}_{[t+1]}) | \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}] \\ \text{u.d.N.} \quad A_{t0} \mathbf{x}_0 + A_{t1} \mathbf{x}_1 + \dots + A_{tt} \mathbf{x}_t = b_t, \quad \mathbf{x}_t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

zu lösen, dessen optimalen Wert wir mit $o_t(\mathbf{x}_{[t]}, \mathbf{z}_{[t]})$ bezeichnen. Schließlich erhalten wir den Entscheidungsvektor \mathbf{x}_0 als Lösung des Problems in der Anfangsstufe

$$\min_{\mathbf{x}_0} \mathbf{c}_0^\top \mathbf{x}_0 + \mathbb{E} [o_1(\mathbf{x}_{[0]}, \mathbf{Z}_1)] \quad \text{u.d.N.} \quad A_{00} \mathbf{x}_0 = b_0, \quad \mathbf{x}_0 \geq 0. \quad (2.10)$$

Wie im allgemeinen Fall gilt auch hier: ist der Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$ Markovsch, dann hängen die bedingten Erwartungswerte und die optimale Wert o_t nur von \mathbf{Z}_t anstatt von der ganzen Prozessvergangenheit $\mathbf{Z}_{[t]}$ ab. Ist der Datenprozess sogar stufenweise unabhängig, dann werden die bedingten Erwartungswerte zu unbedingten Erwartungen.

Liegt ein $(T + 1)$ -stufiges lineares Programm in Treppenform vor:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_0^\top \mathbf{x}_0 & + & c_1^\top \mathbf{x}_1 & + & c_2^\top \mathbf{x}_2 & + & \dots & + & c_T^\top \mathbf{x}_T & & (2.11) \\ \text{u.d.N.} \quad & A_0 \mathbf{x}_0 & & & & & & & & & = & b_0, \\ & B_1 \mathbf{x}_0 & + & A_1 \mathbf{x}_1 & & & & & & & = & b_1, \\ & & & B_2 \mathbf{x}_1 & + & A_2 \mathbf{x}_2 & & & & & = & b_2, \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & B_{T-1} \mathbf{x}_{T-1} & + & A_T \mathbf{x}_T & = & b_T, \\ \mathbf{x}_0 \geq 0, & \quad \mathbf{x}_1 \geq 0, & \quad \mathbf{x}_2 \geq 0, & \quad \dots & \quad \mathbf{x}_T \geq 0, \end{aligned}$$

dann hängen die optimalen Werte o_t der Teilprobleme (2.8), (2.9) und (2.10) nicht von allen vorangegangenen Entscheidungen $\mathbf{x}_{[t]}$, sonder nur von der Entscheidung in der Vorperiode \mathbf{x}_t ab. In manchen Fällen können wir ein lineares Programm in unterer

Dreiecksform (2.7) relativ einfach in die Treppenform (2.11) transformieren. Zum Beispiel können wir folgendes Problem in unterer Dreiecksform

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \min & c_0^\top \mathbf{x}_0 & + & c_1^\top \mathbf{x}_1 & + & c_2^\top \mathbf{x}_2 & + & \dots & + & c_T^\top \mathbf{x}_T & & (2.12) \\
 \text{u.d.N.} & A_{00}\mathbf{x}_0 & & & & & & & & & & = b_0, \\
 & B_0\mathbf{x}_0 & + & A_{11}\mathbf{x}_1 & & & & & & & & = b_1, \\
 & B_0\mathbf{x}_0 & + & B_1\mathbf{x}_1 & + & A_{22}\mathbf{x}_2, & & & & & & = b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & B_0\mathbf{x}_0 & + & B_1\mathbf{x}_1 & + & \dots & + & B_{T-1}\mathbf{x}_{T-1} & + & A_{TT}\mathbf{x}_T & = & b_T, \\
 & \mathbf{x}_0 \geq 0, & & \mathbf{x}_1 \geq 0, & & \mathbf{x}_2 \geq 0, & & \dots & & & & \mathbf{x}_T \geq 0
 \end{array}$$

vereinfachen, indem wir für $t = 1, \dots, T$ die Hilfsvariablen \mathbf{r}_t rekursiv durch $\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-1} + B_t\mathbf{x}_t$ und $\mathbf{r}_0 = B_0\mathbf{x}_0$ definieren. Die Hilfsvariable \mathbf{r}_t beinhaltet damit die Information des Entscheidungsprozesses bis zur Stufe t . Teilproblem (2.9) vereinfacht sich zu

$$\begin{array}{r}
 \min_{\mathbf{x}_t} \quad c_t^\top \mathbf{x}_t + \mathbb{E} [o_{t+1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{Z}_{[t+1]}) | \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}] \\
 \text{u.d.N.} \quad \mathbf{r}_{t-1} + A_{tt}\mathbf{x}_t = b_t, \mathbf{x}_t \geq 0 \quad \text{und} \\
 \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-1} + B_t\mathbf{x}_t
 \end{array} \quad (2.13)$$

und sein optimaler Wert hängt nur noch von der Hilfsvariablen \mathbf{r}_{t-1} und $\mathbf{z}_{[t]}$ ab.

2.3 Szenariobaum und Diskretisierung

Um ein mehrstufiges stochastisches Optimierungsproblem numerisch lösen zu können, muss der zugrundeliegende Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ diskret sein. Wir gehen daher in diesem Abschnitt davon aus, der Zufallsvektor \mathbf{Z}_t , $t = 1, \dots, T$ habe eine endliche Anzahl an möglichen Realisierungen und \mathbf{Z}_0 sei ein von Anfang an bekannter Datenvektor. Es ist üblich, die möglichen Realisierungen des Datenprozesses mithilfe eines Szenariobaumes zu veranschaulichen. Ein Szenariobaum besteht aus Knoten, die jeweils einer der Stufen $0, \dots, T$ zugeordnet sind und die durch Kanten miteinander verbunden sind. In der Stufe 0 befindet sich nur ein Knoten, die sogenannte *Wurzel* des Szenariobaumes. Diese Wurzel repräsentiert den bereits zu Beginn bekannten Datenvektor \mathbf{Z}_0 . Die Knoten der Stufe 1 entsprechen den möglichen Realisierungen des Zufallsvektors \mathbf{Z}_1 und sind alle durch einen Ast mit der Wurzel verbunden. Für jeden Knoten der Stufe $t = 1, \dots, T-1$ befinden sich in Stufe $t+1$ genau so viele Knoten, wie die Zufallsvariable \mathbf{Z}_{t+1} mögliche Realisierungen hat und diese Knoten sind durch Kanten mit ihrem Vorgängerknoten in Stufe t verbunden. Jeder Knoten der Stufe t ist mit genau einem Knoten der Stufe $t-1$ verbunden, seinem *direkten Vorgänger* und mit mehreren Knoten der Stufe $t+1$, seinen *direkten Nachkommen*. Die Knoten der letzten Stufe eines Szenariobaumes heißen *Blätter*. Jedes Szenario, also jede mögliche Realisierung des Datenprozesses $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ wird

durch genau einen Pfad von der Wurzel bis zu den Blättern des Baumes repräsentiert. Da jeder Knoten genau einen Vorgänger hat, stimmt die Anzahl der Blätter mit der Anzahl der möglichen Realisierungen des Datenprozesses, den Szenarien überein. Wir bezeichnen die Menge der Knoten in Stufe t , $t = 0, \dots, T$ mit K_t , den direkten Vorgänger des Knotens $k \in K_t$ mit $v(k) \in K_{t-1}$ und die Menge der direkten Nachkommen des Knotens $k \in K_t$ mit $N(k) \subseteq K_{t+1}$. Es gilt:

$$K_{t+1} = \bigcup_{k \in K_t} N(k) \quad \text{und} \quad N(k) \cap N(k') = \emptyset \quad \text{für} \quad k \neq k' \quad \text{und} \quad k, k' \in K_t.$$

Unter dem *Teilbaum des Knotens* $k \in K_t$ verstehen wir einen Szenariobaum über die Periode zwischen den Stufen t und $t+1$, wobei der Knoten k die Wurzel des Teilbaumes und $N(k) \subseteq K_{t+1}$ die Menge seiner Blätter ist.

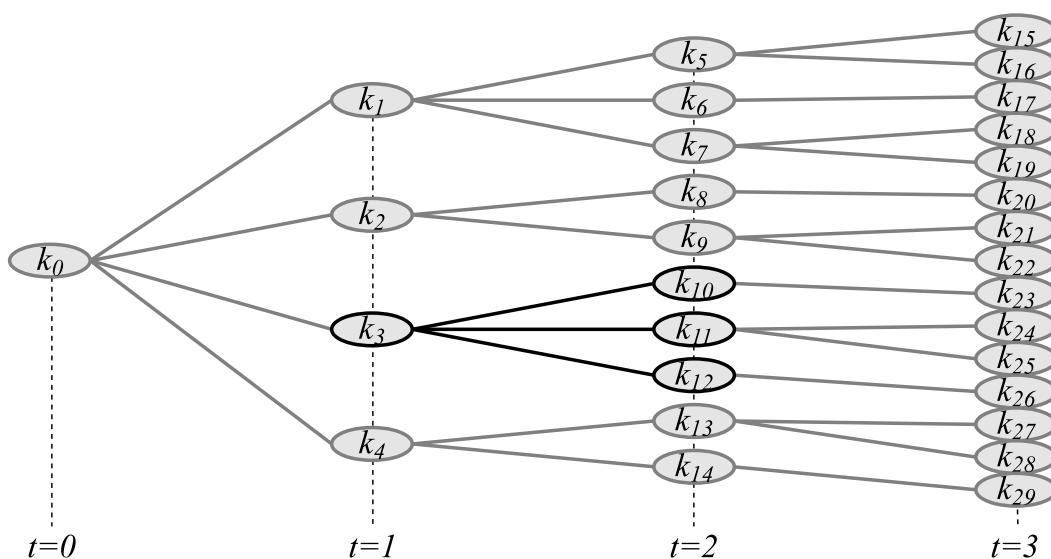


Abbildung 2.1: Schema eines Szenariobaumes über drei Perioden. Die hervorgehobenen Kanten und Knoten bilden den Teilbaum des Knotens k_3 .

Wir wollen nun dem Szenariobaum Wahrscheinlichkeiten zuordnen und betrachten dazu den Pfad $(k_0^*, k_1^* \dots, k_T^*)$ von der Wurzel bis zu den Blättern des Baumes. Dieser Pfad entspreche der Realisierung $(\mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_T^*)$ des Datenprozesses. Wir weisen dem Ast zwischen den Knoten k_t^* und k_{t+1}^* die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{k_t k_{t+1}} = \mathbb{P} \left\{ \mathbf{Z}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1}^* \mid \mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}^* \right\}$$

zu. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Blätter des Teilbaumes, ausgehend vom Knoten k_t^* , entspricht der bedingten Verteilung von \mathbf{Z}_{t+1} unter der Bedingung $\mathbf{Z}_{[t]} = \mathbf{z}_{[t]}^*$. Die Wahrscheinlichkeit des Szenarios $(\mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_T^*)$ ist das Produkt der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P} \left\{ (\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T = (\mathbf{z}_t^*)_{t=0}^T \right\} = p_{k_0 k_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{T-1} k_T}.$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten, also die Wahrscheinlichkeiten von einem Knoten zu einem seiner direkten Nachkommen zu gelangen, bestimmen die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Szenarien. Umgekehrt legen die Wahrscheinlichkeiten der Szenarien und damit der Pfade die bedingten Wahrscheinlichkeiten fest. Wir möchten die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_{v(k)k}$ bestimmen und bezeichnen dazu mit $p_{v(k)}$ beziehungsweise p_k die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die durch den Knoten $v(k)$ beziehungsweise den Knoten k führen. Da die Wahrscheinlichkeiten $p_{v(k)} \geq p_k > 0$ bekannt sind und $p_{v(k)}p_{v(k)k} = p_k$ gilt, können wir $p_{v(k)k}$ durch $p_{v(k)k} = p_k/p_{v(k)}$ berechnen.

Ist der Prozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ stufenweise unabhängig, dann ist die bedingte Verteilung von \mathbf{Z}_t bei gegebenem $\mathbf{z}_{[t-1]}$ gleich der unbedingten Verteilung von \mathbf{Z}_t , sie hängt also nicht von der Szenariovergangenheit ab. In diesem Fall sind die Teilbäume der Knoten $k \in N_t$ in der jeweiligen Stufe $t = 0 \dots, T - 1$ identisch. Zwei Teilbäume heißen identisch, wenn sie die gleichen Werte der Blätter haben und auch die Eintrittswahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

Zuletzt führen wir noch die von dem diskreten Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ erzeugte Filtration ein. Da jedem Szenario genau ein Blatt des Szenariobaumes entspricht, betrachten wir die Filtration auf der Menge der Blätter K_T . Die von dem ganzen Datenprozess erzeugte σ -Algebra \mathcal{F}_T ist einfach die Menge aller Teilmengen von K_T . Die vom Datenprozess bis zum Zeitpunkt $T - 1$ erzeugte σ -Algebra \mathcal{F}_{T-1} entspricht der von den disjunkten Teilmengen $N(k) \subseteq K_T$, $k \in K_{T-1}$ gebildeten σ -Algebra. Allgemein gilt für die vom Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ bis zum Zeitpunkt $t = 0, \dots, T$ erzeugte σ -Algebra \mathcal{F}_t : \mathcal{F}_t entspricht der von den disjunkten Teilmengen $K(k) \subseteq K_T$, $k \in K_t$ erzeugten σ -Algebra, wobei $K(k)$ die Menge jener Blätter bezeichnet, die sich an den Enden der Pfade durch den Knoten k befinden. Da alle Pfade mit der Wurzel des Baumes beginnen, besteht die σ -Algebra der Anfangsstufe \mathcal{F}_0 nur aus den Mengen K_T und \emptyset .

Diskretes lineares stochastisches Optimierungsproblem

Wir wollen nun ein lineares stochastisches Optimierungsproblem der Form (2.7) lösen und gehen dafür von einem diskreten Datenprozess $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_T)$ mit N möglichen Realisierungen aus. Wir bezeichnen die i -te Realisierung des Datenprozesses mit $\mathbf{z}^i = (\mathbf{z}_0^i, \dots, \mathbf{z}_T^i)$, wobei $\mathbf{z}_t^i = (\mathbf{c}_t, A_{t0}, \dots, A_{tt}, b_0)$ ist, und die Eintrittswahrscheinlichkeit von

\mathbf{z}^i mit p^i , $i = 1, \dots, N$. Es wäre falsch, die Minimalstellen des Problems

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^N p^i \left((c_0^i)^\top \mathbf{x}_0^i + (c_1^i)^\top \mathbf{x}_1^i + (c_2^i)^\top \mathbf{x}_2^i + \dots + (c_T^i)^\top \mathbf{x}_T^i \right) & (2.14) \\
 \text{u.d.N.} \quad & A_{00}^i \mathbf{x}_0^i & = b_0^i, \\
 & A_{10}^i \mathbf{x}_0^i + A_{11}^i \mathbf{x}_1^i & = b_1^i, \\
 & A_{20}^i \mathbf{x}_0^i + A_{21}^i \mathbf{x}_1^i + A_{22}^i \mathbf{x}_2^i & = b_2^i, \\
 & \vdots & \vdots \\
 & A_{T0}^i \mathbf{x}_0^i + A_{T1}^i \mathbf{x}_1^i + \dots + A_{TT-1}^i \mathbf{x}_{T-1}^i + A_{TT}^i \mathbf{x}_T^i & = b_T^i, \\
 & \mathbf{x}_0^i \geq 0, \quad \mathbf{x}_1^i \geq 0, \quad \mathbf{x}_2^i \geq 0, \quad \dots \quad \mathbf{x}_T^i \geq 0, \\
 & \quad \quad \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

zu bestimmen, denn dann würde die Entscheidung \mathbf{x}_t zum Zeitpunkt t jeweils vom ganzen Datenprozess abhängen. Stattdessen soll der Entscheidungsvektoren \mathbf{x}_t nur von den bis zum Zeitpunkt t bekannten Daten abhängen. Außerdem zerfällt die Problemstellung (2.14) in N Teilprobleme und jedes dieser Teilprobleme hängen nur von einer speziellen Realisierung \mathbf{z}^i des Datenprozesses ab.

Wir können diesen Fehler durch die folgenden Nebenbedingungen beheben. Die Entscheidung am Anfang ist unabhängig von den möglichen Realisierungen des Datenprozesses, daher formulieren wir die Nebenbedingung

$$\mathbf{x}_0^i = \mathbf{x}_0^j \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, N\}$$

Die Entscheidung in Stufe 1 soll nur von \mathbf{Z}_1 abhängen, sie ist also für all jene Szenarien gleich, die sich in Stufe 1 nicht unterscheiden. Wir stellen das durch die Nebenbedingung

$$\mathbf{x}_1^i = \mathbf{x}_1^j \quad \text{für alle } i, j \text{ mit } \mathbf{z}_1^i = \mathbf{z}_1^j$$

sicher. Allgemein ist die Entscheidung in der Stufe t für all jene Szenarien gleich, die sich bis zum Zeitpunkt t nicht unterscheiden:

$$\mathbf{x}_t^i = \mathbf{x}_t^j \quad \text{für alle } i, j \text{ mit } \mathbf{z}_{[t]}^i = \mathbf{z}_{[t]}^j, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (2.15)$$

Die Problemstellung (2.14) gemeinsam mit der Nonanticipativity-Nebenbedingung (2.15) beschreibt dann ein lineares $(T+1)$ -stufiges stochastisches Optimierungsproblem.

Betrachten wir den Entscheidungsprozess $(\mathbf{X}_t)_{t=0}^T$ als stochastischen Prozess, der auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum wie der Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ definiert ist, dann können wir drei alternative Formulierungen zur Nebenbedingung (2.15) angeben. Mithilfe des bedingten Erwartungswertes wird Gleichung (2.15) zu

$$\mathbf{X}_t = \mathbb{E}[\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{[t]}] \quad \text{für } t = 0, \dots, T, \quad (2.16)$$

beziehungsweise können wir auch auf die vom Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ erzeugte Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ bedingen:

$$\mathbf{X}_t = \mathbb{E}[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_t] \quad \text{für } t = 0, \dots, T. \quad (2.17)$$

Äquivalent dazu ist auch die Formulierung: Der Entscheidungsprozess $(\mathbf{X}_t)_{t=0}^T$ ist an die vom Datenprozess $(\mathbf{Z}_t)_{t=0}^T$ erzeugte Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ adaptiert.

2.4 Statistische Eigenschaften der Approximation durch Stichprobenmittel

Wir betrachten das folgende stochastische Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}), \quad \text{mit } f(\mathbf{x}) := \mathbb{E}[F(\mathbf{x}, \mathbf{Z})], \quad (2.18)$$

wobei \mathcal{X} eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^d , \mathbf{Z} ein \mathbb{R}^n -wertiger Zufallsvektor und $F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion ist. Wir nehmen an, $f(\cdot)$ sei wohldefiniert und endlich. Damit ist $F(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ natürlich für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich. Für $N \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen $\mathbf{Z}^1, \dots, \mathbf{Z}^N$ unabhängig und identisch verteilte Kopien der Zufallsvariable \mathbf{Z} und $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^N$ seien konkrete Realisierungen dieser Zufallsvariablen. Wir approximieren die Funktion $f(\cdot)$ durch das Stichprobenmittel und erhalten so die zu (2.18) alternative Problemstellung

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{f}_N(\mathbf{x}), \quad \text{mit } \hat{f}_N(\mathbf{x}) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, \mathbf{z}^i). \quad (2.19)$$

In der englischsprachigen Literatur heißt dieses Problem *sample average approximation problem* und daher nennen wir es im Folgende SAA-Problem.

Das SAA-Problem hängt von den Realisierungen der Zufallsvariablen $\mathbf{Z}^1, \dots, \mathbf{Z}^N$ ab, daher sind die Minimalstellen und der optimale Wert des SAA-Problems selbst Zufallsvariablen. Für eine konkrete Realisierung betrachten wir das SAA-Problem als einstufiges Optimierungsproblem mit den Szenarien $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^N$, welche alle mit Wahrscheinlichkeit $1/N$ eintreten. Wir bezeichnen den optimalen Wert beziehungsweise die Lösungsmenge des ursprünglichen Problems (2.18) mit o^* beziehungsweise L^* und den optimalen Wert beziehungsweise die Lösungsmenge des SAA-Problems (2.19) mit $\hat{o}_N = \hat{o}_N(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^N)$ beziehungsweise $\hat{L}_N = \hat{L}_N(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^N)$. Das starke Gesetz der großen Zahlen impliziert, dass die Folge der Zufallsfunktionen $(\hat{f}_N)_{N \geq 1}$ punktweise mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen die Funktion f konvergiert. Unter sehr allgemeinen Zusatzbedingungen an F , ist die Konvergenz sogar fast sicher gleichmäßig auf \mathcal{X} , siehe Shapiro, Dentscheva, Ruszczyński [25], Satz 7.48. Außerdem ist $\hat{f}_N(\mathbf{x})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $f(\mathbf{x})$. Wir können daher hoffen, dass auch der optimale Wert \hat{o}_N beziehungsweise die optimalen Lösungen \hat{L}_N gegen o^* beziehungsweise L^* konvergieren.

2.4.1 Konsistenz der SAA-Schätzer

In diesem Abschnitt betrachten wir statistische Eigenschaften der SAA-Schätzer $\hat{\theta}_N$ und \hat{L}_N . Die folgende Aussage ist dazu hilfreich.

Proposition 2.1. *Für die reellwertigen Funktionen $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_N : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $N = 1, 2, \dots$ sind die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent:*

- (a) *Für jede Folge $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1} \subseteq \mathcal{X}$ die gegen $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ konvergiert, konvergiert die Folge $(f_N(\mathbf{x}_N))_{N \geq 1}$ gegen $f(\mathbf{x})$.*
- (b) *Die Funktion f ist stetig und $(f_N)_{N \geq 1}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von \mathcal{X} gegen f .*

Beweis. (a) \Rightarrow (b) Wir zeigen zuerst die Stetigkeit von f . Sei dazu $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1} \in \mathcal{X}$ eine Folge, die gegen $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ konvergiert und $\varepsilon > 0$. Wegen (a) konvergiert für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_N(\mathbf{x}_i))_{N \geq 1}$ gegen $f(\mathbf{x}_i)$. Daher existiert eine wachsende Folge $(N_i)_{i \geq 1}$ mit $|f_j(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i)| < \varepsilon/2$ für alle $i \geq 1$ und $j \geq N_i$. Wir konstruieren nun die Folge $(\mathbf{x}'_j)_{j \geq N_1}$ durch $x'_j = x_i$ für $j \in \{N_i, \dots, N_{i+1} - 1\}$. Damit gilt $(\mathbf{x}'_j)_{j \geq N_1} \rightarrow \mathbf{x}$ und wegen (a) auch $f_j(\mathbf{x}'_j)_{j \geq 1} \rightarrow f(\mathbf{x})$. Es existiert also ein $I \in \mathbb{N}$ mit $|f_j(\mathbf{x}'_j) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/2$ für alle $j \geq N_I$. Wir können daher für alle $i \geq I$ ein $j \in \{N_i, \dots, N_{i+1} - 1\}$ wählen, so dass gilt:

$$|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x}_i) - f_j(\mathbf{x}_i)| + |f_j(\mathbf{x}'_j) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$$

Daraus folgt, $(f(\mathbf{x}_i))_{i \geq 1}$ konvergiert gegen $f(\mathbf{x})$ und $f(\cdot)$ ist stetig in \mathbf{x} .

Wir beweisen die zweite Eigenschaft durch Widerspruch und nehmen dazu an, $(f_N)_{N \geq 1}$ konvergiere nicht gleichmäßig auf der kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathcal{X}$ gegen f . Dann existiert eine Folge $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1}$ und $\varepsilon > 0$ mit $|f_N(\mathbf{x}_N) - f(\mathbf{x}_N)| > \varepsilon$ für alle N . Da K kompakt ist, finden wir eine Teilfolge $(\mathbf{x}_{N_k})_{k \geq 1}$, die gegen ein $\mathbf{x} \in K$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f ist $|f(\mathbf{x}_{N_k}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon/2$ und wegen (a) gilt $|f_{N_k}(\mathbf{x}_{N_k}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon/2$ für hinreichend großes k , womit wir einen Widerspruch konstruiert haben.

(b) \Rightarrow (a) Sei $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1} \in \mathcal{X}$ eine Folge die gegen $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ konvergiert und sei K eine kompakte Teilmenge von \mathcal{X} welche $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1}$ enthalte. In der Ungleichung

$$|f_N(\mathbf{x}_N) - f(\mathbf{x})| \leq |f_N(\mathbf{x}_N) - f(\mathbf{x}_N)| + |f(\mathbf{x}_N) - f(\mathbf{x})|$$

konvergiert der erste Term der rechten Seite aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz auf K gegen Null und der zweite wegen der Stetigkeit von f , womit wir Aussage (a) gezeigt haben. \blacklozenge

Definition 2.1.

1. Sei $(\hat{\theta}_N)_{N \geq 1}$ eine Folge von Schätzern für θ , die mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen θ konvergiert, dann nennen wir die Schätzfolge $(\hat{\theta}_N)_{N \geq 1}$ beziehungsweise die einzelnen Schätzer $\hat{\theta}_N$ *konsistent*.

2. Ist für $N \in \mathbb{N}$ der Schätzer $\hat{\theta}_N$ eine Menge von Zufallsvektoren im \mathbb{R}^n und θ eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , dann sagen wir, $(\hat{\theta}_N)_{N \geq 1}$ konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen θ , wenn $(\mathbb{D}(\hat{\theta}_N, \theta))_{N \geq 0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0 konvergiert. Das Abstandsmaß \mathbb{D} sei durch $\mathbb{D}(A, B) := \sup_{\mathbf{x} \in A} \text{dist}(\mathbf{x}, B)$ definiert, mit $\text{dist}(\mathbf{x}, B) := \inf_{\mathbf{x}' \in B} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$.
3. Sei $(\hat{f}_N)_{N \geq 1}$ eine Folge von Zufallsfunktionen mit $\hat{f}_N(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und f eine Funktion von \mathcal{X} nach \mathbb{R} . Wir sagen, $(\hat{f}_N)_{N \geq 1}$ konvergiert *fast sicher gleichmäßig* gegen f , wenn eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ mit Maß 1 existiert, sodass für alle $\omega \in M$ die Funktionenfolge $(\hat{f}_N(\cdot, \omega))_{N \geq 1}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 2.2. *Die Folge der Zufallsfunktionen $(\hat{f}_N)_{N \geq 1}$ konvergiere fast sicher gleichmäßig auf \mathcal{X} gegen die Funktion f . Dann ist \hat{o}_N ein konsistenter Schätzer für den optimalen Wert o^* .*

Beweis. Da $(\hat{f}_N)_{N \geq 1}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gleichmäßig auf \mathcal{X} gegen f konvergiert, gibt es laut Definition eine Menge $M \subseteq \Omega$ mit Maß 1, sodass für alle $\omega \in M$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\omega, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |\hat{f}_N(\mathbf{x}, \omega) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon, \text{ für alle } N \geq N_0(\omega, \varepsilon).$$

Daraus folgt direkt: $|\hat{o}_N(\omega) - o^*| \leq \varepsilon$ für alle $N \geq N_0(\omega, \varepsilon)$. Denn wäre zum Beispiel $\hat{o}_N(\omega) < o^* - \varepsilon$ mit $\hat{o}_N(\omega) = \hat{f}_N(\hat{\mathbf{x}}_N, \omega)$ für ein $N \geq N_0(\omega, \varepsilon)$, dann wäre $\hat{f}_N(\hat{\mathbf{x}}_N, \omega) < f(\hat{\mathbf{x}}_N) - \varepsilon$ im Widerspruch zu oben. \blacklozenge

Satz 2.3. *Sei $K \subseteq \mathcal{X}$ eine kompakte Menge, sodass gilt:*

- (i) *Die Lösungsmenge L^* des Problems (2.18) ist nicht leer und liegt in K .*
- (ii) *Die Lösungsmengen \hat{L}_N des SAA-Problems sind mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht leer und liegen in K .*
- (iii) *Für jede Folge $(\mathbf{x}_N)_{N \geq 1} \subseteq K$ die gegen $\mathbf{x} \in K$ konvergiert, konvergiert die Folge $(f_N(\mathbf{x}_N))_{N \geq 1}$ gegen $f(\mathbf{x})$.*

Dann ist \hat{o}_N ein konsistenter Schätzer für den optimalen Wert o^ und \hat{L}_N ein konsistenter Schätzer für L^* .*

Beweis. Wegen den Annahmen (i) und (ii) können wir das originale Problem (2.18) und das SAA-Problem auf die Menge $K \cap \mathcal{X}$ einschränken, und daher können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, \mathcal{X} sei kompakt. Proposition 2.1 besagt, die Annahme (iii) ist äquivalent zu der Annahme: f ist stetig und $(f_N)_{N \geq 1}$ konvergiert gleichmäßig auf \mathcal{X} gegen f . Folglich sind die Annahmen von Satz 2.2 erfüllt und \hat{o}_N ist ein konsistenter Schätzer für den optimalen Wert o^* . Wir zeigen die Konsistenz des Schätzers \hat{L}_N durch Widerspruch und nehmen dazu an, $\mathbb{D}(\hat{L}_N(\omega), L^*)$ konvergiere nicht gegen 0. Dabei sei $\omega \in \Omega$ so gewählt, dass die Lösungsmengen $\hat{L}_N(\omega)$ nicht leer sind und $(\hat{o}_N(\omega))_{N \geq 1}$

gegen o^* konvergiert. In diesem Fall existiert ein $\varepsilon > 0$ und zumindest eine Teilfolge $\hat{\mathbf{x}}_{N_k} \in \hat{L}_{N_k}(\omega)$ mit $\text{dist}(\hat{\mathbf{x}}_{N_k}, L^*(\omega)) > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von \mathcal{X} hat diese Teilfolge einen Häufungspunkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ mit $\hat{\mathbf{x}} \notin L^*$ und folglich $f(\hat{\mathbf{x}}, \omega) > o^*$. Aufgrund der Annahme (ii) konvergiert daher die Folge $(f_{N_k}(\hat{\mathbf{x}}_{N_k}, \omega))_{k \geq 1} = (\hat{o}_{N_k}(\omega))_{k \geq 1}$ gegen $f(\hat{\mathbf{x}}, \omega)$ im Widerspruch zu $(\hat{o}_{N_k}(\omega))_{k \geq 1} \rightarrow o^*$. \blacklozenge

2.4.2 Asymptotik der SAA-Schätzer

Die Konsistenz der SAA-Schätzer ist eine wünschenswerte Eigenschaft, die besagt, dass die Schätzfehler gegen 0 konvergieren. Konsistenz gibt aber keinen Aufschluss über die praxisrelevante Frage, wie schnell die Schätzfehler kleiner werden. Wir analysieren daher auch kurz das Asymptotische Verhalten der Schätzer \hat{f}_N und \hat{o}_N .

Zuerst betrachten wir für ein fixes $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ das Stichprobenmittel $\hat{f}_N(\mathbf{x})$. Es hat den Mittelwert $f(\mathbf{x})$ und die Varianz $\sigma^2(\mathbf{x})/N$ mit $\sigma^2(\mathbf{x}) := \text{Var}(F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}))$, welche wir als endlich annehmen. Der Zentrale Grenzwertungssatz besagt

$$\frac{\hat{f}_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})/\sqrt{N}} \xrightarrow{d.} Z(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

wobei $Z(\mathbf{x})$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und wir mit $\xrightarrow{d.}$ Konvergenz in Verteilung bezeichnen. Der Schätzer $\hat{f}_N(\mathbf{x})$ ist also asymptotisch normalverteilt mit Mittel $f(\mathbf{x})$ und Varianz $\sigma^2(\mathbf{x})/N$. Ein approximatives $100(1 - \alpha)\%$ Konfidenzintervall für $f(\mathbf{x})$ ist dann

$$\left[\hat{f}_N(\mathbf{x}) - z_{\alpha/2} \hat{\sigma}(\mathbf{x})/\sqrt{N}, \hat{f}_N(\mathbf{x}) + z_{\alpha/2} \hat{\sigma}(\mathbf{x})/\sqrt{N} \right],$$

wobei $z_{\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2)$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet und die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2(\mathbf{x})$ durch

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) := 1/(N - 1) \sum_{i=1}^N \left(F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^i) - \hat{f}_N(\mathbf{x}) \right)^2$$

definiert ist.

Definition 2.2. Seien $(X_k)_{k \geq 1}$ und $(Y_k)_{k \geq 1}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen. Wir sagen Y_k hat die Ordnung $O_{\mathbb{P}}(X_k)$ und schreiben $Y_k = O_{\mathbb{P}}(X_k)$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $c > 0$ existiert, sodass $\mathbb{P}(|Y_k/X_k| > c) \leq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Der Fehler des Schätzers $\hat{f}_N(\mathbf{x})$ hat folglich die Ordnung $O_p(1/\sqrt{N})$.

Nun betrachten wir den optimalen Wert des SAA-Problems \hat{o}_N , Schätzer für den optimalen Wert des Originalproblems o^* . Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ gilt $\hat{f}_N(\mathbf{x}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{f}_N(\mathbf{x}) = \hat{o}_N$.

Bilden wir auf beiden Seiten den Erwartungswert, haben wir $f(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[\hat{f}_N(\mathbf{x})] \geq \mathbb{E}[\hat{o}_N]$ und folglich

$$o^* = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \geq \mathbb{E}[\hat{o}_N]. \quad (2.21)$$

Der Erwartungswert des Schätzers \hat{o}_N ist also kleiner oder gleich dem optimalen Wert und wie der nächste Satz zeigt, nimmt die Differenz monoton ab.

Satz 2.4. *Die Folge $(\mathbb{E}[\hat{o}_N])_{N \geq 1}$ ist monoton wachsend.*

Beweis. Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ hat \hat{f}_{N+1} die Darstellung

$$\hat{f}_{N+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^j) = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^j)$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{o}_{N+1}] &= \mathbb{E} \left[\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{f}_{N+1}(\mathbf{x}) \right] = \mathbb{E} \left[\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^j) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left(\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^j) \right) \right] = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{E} \left[\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^j) \right] \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{E}[\hat{o}_N] = \mathbb{E}[\hat{o}_N]. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Wir treffen im Folgenden zwei Annahmen über die Funktion $F(\cdot, \cdot)$:

- (i) Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ist $\text{Var}[F(\mathbf{x}, \mathbf{Z})]$ endlich.
- (ii) Es existiert eine messbare Funktion $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, für die gilt:

$$\mathbb{E}[C(\mathbf{Z})^2] < \infty \quad \text{und} \quad |F(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) - F(\mathbf{x}', \mathbf{Z})| \leq C(\mathbf{Z}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \text{ f.s.}$$

Aus der Eigenschaft (ii) folgt $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq \mathbb{E}[C(\mathbf{Z})] \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$, also die Lipschitz-Stetigkeit von f . Ist \mathcal{X} kompakt, dann ist die Menge der Minimalstellen L^* von f nicht leer.

Satz 2.5. *Es seien die Annahmen (i) und (ii) erfüllt und \mathcal{X} eine kompakte Menge. Außerdem sei $Z(\mathbf{x})$ eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}))$ verteilte Zufallsvariable, mit*

$$\sqrt{N}(\hat{f}_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) \xrightarrow{d} Z(\mathbf{x}).$$

Dann gilt:

$$\hat{o}_N = \inf_{\mathbf{x} \in L^*} \hat{f}_N(\mathbf{x}) + o_p(\sqrt{N}) \quad \text{und} \quad (2.22)$$

$$\sqrt{N}(\hat{o}_N - o^*) \xrightarrow{d.} \inf_{\mathbf{x} \in L^*} Z(\mathbf{x}). \quad (2.23)$$

Insbesondere gilt in dem Fall $L^* = \{\mathbf{x}^*\}$

$$\sqrt{N}(\hat{o}_N - o^*) \xrightarrow{d.} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x})).$$

Beweis. Siehe zum Beispiel Shapiro, Dentscheva, Ruszczyński [25], S 165. ◆

2.4.3 Die SAA-Methode für mehrstufige Optimierungsprobleme

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein mehrstufiges Optimierungsproblem in der allgemeinen Form (2.1) und nehmen an, wir kennen die Verteilung des Datenprozesses $(\mathbf{Z}_t)_{t=1}^T$. Wir approximieren den Datenprozess durch einen diskreten Prozess, repräsentiert durch einen $(T + 1)$ -stufigen Szenariobaum.

Wir konstruieren den Szenariobaum stufenweise von der Wurzel bis zu seinen Blättern. Die Wurzel des Baumes entspricht einer von Anfang an bekannten Beobachtung \mathbf{z}_0 . Die Knoten der ersten Stufe werden durch N_1 Realisierungen $\mathbf{z}_1^1, \dots, \mathbf{z}_1^{N_1}$ der Zufallsvariablen \mathbf{Z}_1 gebildet. Gemeinsam mit der Wurzel des Baumes bilden diese Knoten den Teilbaum des Knotens \mathbf{z}_0 . Im nächsten Schritt konstruieren wir die Teilbäume der Knoten \mathbf{z}_1^i , $i = 1, \dots, N_1$. Wir ziehen dazu für jeden Knoten \mathbf{z}_1^i eine Stichprobe $\mathbf{z}_2^{i,1}, \dots, \mathbf{z}_2^{i,N_2}$ vom Umfang N_2 aus der bedingten Verteilung von \mathbf{Z}_2 bei gegebenem $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{z}_1^i$. Die Stichproben bilden die Blätter der Teilbäume und damit die $N_1 N_2$ Knoten der zweiten Stufe. Wir fahren auf diese Weise fort und generieren in der allgemeinen Stufe $t = 1, \dots, T$ für jeden Knoten \mathbf{z}_{t-1} der Stufe $t - 1$ eine Stichprobe vom Umfang N_t aus der bedingten Verteilung von \mathbf{Z}_t bei gegebenem $\mathbf{Z}_{[t-1]} = \mathbf{z}_{[t-1]}$. Die Realisierung $\mathbf{z}_{[t-1]}$ entspricht dabei dem Pfad von der Wurzel bis zum Knoten \mathbf{z}_{t-1} . Die Stichprobe bildet gemeinsam mit dem Knoten \mathbf{z}_{t-1} den Teilbaum des Knotens \mathbf{z}_{t-1} . So erzeugen wir einen Szenariobaum mit $N = \prod_{t=1}^T N_t$ Szenarien und wir ordnen jedem dieser Szenarien die Eintrittswahrscheinlichkeit $1/N$ zu.

Ist der Datenprozess stufenweise unabhängig, dann sind die bedingten Verteilungen von \mathbf{Z}_t bei gegebenem $\mathbf{Z}_{[t-1]} = \mathbf{z}_{[t-1]}$ alle gleich der unbedingten Verteilung von \mathbf{Z}_t . Ziehen wir aber in der Stufe t für jeden Knoten der Stufe $t - 1$ eine eigene Stichprobe und bilden daraus die Teilbäume, dann unterscheiden sich diese Teilbäume und der diskrete Prozess ist nicht mehr stufenweise unabhängig. Ziehen wir jedoch in jeder Stufe nur eine Stichprobe und bilden mit dieser Stichprobe alle Teilbäume der jeweiligen Stufe, dann ist der diskrete Prozess stufenweise unabhängig.

Wie oben im einstufigen Fall betrachten wir auch hier den optimalen Wert und die Lösungsmenge des diskretisierten Problems als Schätzer für den optimalen Wert und die Lösungsmenge des originalen Problems (2.1).

Um die Notation einfach zu halten, untersuchen wir nur ein dreistufiges stochastisches Problem. Das originale Problem hat in diesem Fall von hinten nach vorne betrachtet die Form

$$o_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2) := \min_{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2)} f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^d, \quad (2.24)$$

$$o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1) := \min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1)} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1) + \mathbb{E} [o_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{Z}_2) | \mathbf{Z}_1 = \mathbf{z}_1], \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d \quad (2.25)$$

und in der Anfangsstufe

$$o^* := \min_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} f^*(\mathbf{x}_0), \quad \text{mit } f^*(\mathbf{x}_0) := f_0(\mathbf{x}_0) + \mathbb{E} [o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_1)], \quad (2.26)$$

wobei wir die Lösungsmenge des Problems 2.26 mit $L^* \subseteq \mathcal{X}_0$ bezeichnen. Das diskretisierte dreistufige Optimierungsproblem hat die stufenweise Darstellung

$$\hat{o}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2^{ij}) := \min_{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2^{ij})} f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{z}_2^{ij}), \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad j = 1, \dots, N_2,$$

$$\hat{o}_{1,N_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i) := \min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i)} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1^i) + \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \hat{o}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2^{ij}), \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, N_1$$

und in der Anfangsstufe

$$\hat{o}_{N_1, N_2} := \min_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} \hat{f}_{N_1, N_2}(\mathbf{x}_0), \quad (2.27)$$

$$\text{mit } \hat{f}_{N_1, N_2}(\mathbf{x}_0) := f_0(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \hat{o}_{1, N_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i),$$

wobei wir mit $\hat{L}_{N_1, N_2} \subseteq \mathcal{X}_0$ die Lösungsmenge des Problems 2.27 bezeichnen.

Um die Konsistenz des Schätzers \hat{o}_{N_1, N_2} zu beweisen, genügt es nach Satz 2.2, die folgende Aussage zu zeigen:

$$\hat{f}_{N_1, N_2} \text{ konvergiert für } \min(N_1, N_2) \rightarrow \infty \text{ fast sicher gleichmäßig auf } \mathcal{X}_0 \text{ gegen } f^*. \quad (2.28)$$

Die Aussage 2.28 ist äquivalent zu

$$\lim_{\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} \left| \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \hat{o}_{1, N_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i) - \mathbb{E} [o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_1)] \right| = 0 \quad \text{f.s.} \quad (2.29)$$

Die Gleichung (2.29) folgt direkt aus den beiden Bedingungen

$$\lim_{\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} \left| \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i) - \mathbb{E}[o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{Z}_1)] \right| = 0 \text{ f.s.} \quad \text{und} \quad (2.30)$$

$$\lim_{\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0} \left| \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \hat{o}_{1, N_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i) - \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} o_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i) \right| = 0 \text{ f.s.} \quad (2.31)$$

Die Bedingung (2.30) lässt sich mit einer Version des Gesetzes der großen Zahlen zeigen. Der Nachweis der Bedingung (2.31) ist auch im Falle stufenweiser Unabhängigkeit des Datenprozesses schwierig und wir verweisen dafür auf [25], Seite 222 ff.

Beispiel 2.1 (Portfoliooptimierung).

Wir betrachten noch einmal das Mehrperiodenmodell aus der Einleitung, wobei wir uns zunächst auf eine dreistufige Problemstellung beschränken. Der den Datenprozess \mathbf{Z} approximierende Szenariobaum habe die Wurzel \mathbf{z}_0 , in der ersten Stufe die Knoten $\mathbf{z}_1^1, \dots, \mathbf{z}_1^{N_1}$ und in der zweiten Stufe die Blätter $\mathbf{z}_2^{i,1}, \dots, \mathbf{z}_2^{i, N_2}$, $i = 1, \dots, N_1$. Wir approximieren die Originalprobleme (1.6) - (1.8) stufenweise durch die diskreten SAA-Probleme. In Stufe 1 liegt für $i = 1, \dots, N_1$ das Problem

$$\hat{o}_{1, N_2}(W_1, \mathbf{z}_1^i) := \max_{\mathbf{x}_1 \geq 0} \left\{ \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} U \left((\mathbf{z}_2^{i,j})^\top \mathbf{x}_1 \right) \right\} \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{x}_1 = W_1 \quad (2.32)$$

vor und in Stufe 0 hat das Anfangsproblem die Form

$$\hat{o}_{N_1, N_2} := \max_{\mathbf{x}_0 \geq 0} \left\{ \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \hat{o}_{1, N_2} \left((\mathbf{z}_1^i)^\top \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_1^i \right) \right\} \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{x}_0 = W_0, \quad (2.33)$$

wobei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ jeweils den Vektor bestehend aus Einsen bezeichnet.

Wir wählen nun für die Nutzenfunktion U wie in der Einleitung die Logarithmusfunktion und nehmen darüber hinaus an, der ab nun wieder T -stufige Datenprozess sei stufenweise unabhängig. Der optimale Wert der Originalprobleme (1.6) - (1.8) in der Anfangsstufe hat in diesem Fall, siehe (1.16), die Darstellung

$$o^* = \sum_{t=0}^{T-1} o'_t + \ln W_0, \quad (2.34)$$

wobei o'_t den optimalen Wert des Problems

$$\max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \mathbb{E} \left[\ln \left(\mathbf{Z}_{t+1}^\top \mathbf{x}_t \right) \right] \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{x}_t = 1 \quad \text{für } t = 0, \dots, T-1, \quad (2.35)$$

bezeichnet. Nehmen wir an, der approximierende T -stufige Szenariobaum sei ebenfalls stufenweise unabhängig, dann hat das SAA-Problem in der Anfangsstufe den optimalen Wert

$$\hat{o}_{N_1, \dots, N_T} = \sum_{t=0}^{T-1} \hat{o}'_{N_t} + \ln W_0, \quad (2.36)$$

wobei \hat{o}'_{N_t} den optimalen Wert des Problems

$$\max_{\mathbf{x}_t \geq 0} \sum_{i=1}^{N_t} \ln \left((\mathbf{z}_t^i)^\top \mathbf{x}_t \right) \quad \text{u.d.N. } \mathbf{e}^\top \mathbf{x}_t = 1 \quad \text{für } t = 0, \dots, T-1, \quad (2.37)$$

bezeichnet. Wir betrachten $\hat{o}_{N_1, \dots, N_T}$ als Schätzer für o^* und wegen

$$\mathbb{E} [\hat{o}_{N_1, \dots, N_T}] - o^* = \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{E} (\hat{o}'_{N_t} - o'_t) \quad (2.38)$$

wächst der Schätzfehler des SAA-Schätzers in diesem Fall additiv mit der Anzahl der Perioden T . Da die einzelnen Stufen des Szenariobaumes unabhängig sind, gilt außerdem

$$\text{Var} (\hat{o}_{N_1, \dots, N_T}) = \sum_{t=0}^{T-1} \text{Var} (\hat{o}'_{N_t}) . \quad (2.39)$$

3 Risikomaße

Nach den allgemeinen Betrachtungen über mehrstufige stochastische Optimierung in dem vorigen Kapitel kehren wir in diesem Abschnitt zur Portfoliooptimierung zurück. Wie wir bereits im einleitenden Kapitel erwähnt haben, suchen wir in der Portfoliooptimierung nach einer Handelsstrategie, die nicht nur den erwarteten Portfoliowert maximiert, sondern auch das Risiko eines Wertverlustes kontrolliert. Um finanzielles Risiko mathematisch zu beschreiben, werden in der Finanzmathematik sogenannte *Risikomaße* verwendet. Im Folgenden modellieren wir den finanziellen Verlust durch eine reellwertige Zufallsvariable Z , wobei große Werte von Z aus Sicht des Investors „schlecht“ und kleine Werte von Z „gut“ sind.

Definition 3.1. Ein *Risikomaß* \mathcal{R} ist eine Abbildung

$$\mathcal{R} : \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^0$ einen Teilraum des Raums der auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierten Zufallsvariablen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.

In unserem Fall ist $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $1 \leq p \leq \infty$, wobei \mathcal{L}_1^p den Raum der reellwertigen Zufallsvariablen mit endlichem p -ten Moment bezeichnet und sich p aus dem Zusammenhang ergibt.

In der Fachliteratur finden wir verschiedenen Eigenschaften, welche Risikomaße in unterschiedlichen Kombinationen erfüllen sollen, damit sie dem intuitiven Gefühl von Risiko entsprechen.

Definition 3.2. Für ein Risikomaß \mathcal{R} seien die folgenden Eigenschaften definiert:

- (A1) *Monotonie:* $Z_1 \leq Z_2$ f.s. $\Rightarrow \mathcal{R}(Z_1) \leq \mathcal{R}(Z_2)$ für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$.
- (A2) *Translationsinvarianz:* $\mathcal{R}(Z + C) = \mathcal{R}(Z) + C$ für alle $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}$.
- (A3) *Subadditivität:* $\mathcal{R}(Z_1 + Z_2) \leq \mathcal{R}(Z_1) + \mathcal{R}(Z_2)$ für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$.
- (A4) *Positive Homogenität:* $\mathcal{R}(\lambda Z) = \lambda \mathcal{R}(Z)$ für alle $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$, $\lambda \geq 0$.
- (A5) *Konvexität:* $\mathcal{R}(\lambda Z_1 + (1 - \lambda)Z_2) \leq \lambda \mathcal{R}(Z_1) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(Z_2)$ für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$, $\lambda \in [0, 1]$.
- (A6) *Verschiebungsinvarianz:* $\mathcal{R}(Z + C) = \mathcal{R}(Z)$ für alle $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}$.

(A7) *Positivität*: $\mathcal{R}(Z) > 0$ für alle nicht konstanten $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$ und $\mathcal{R}(Z) = 0$ für alle konstanten $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$.

Wir gehen kurz darauf ein, wie diese Eigenschaften interpretiert werden können.

- Die Eigenschaft der Monotonie stellt sicher, dass wenn von zwei Portfolios eines in jedem Fall mehr Verlust macht, dessen Verlustrisiko höher eingestuft wird als das des anderen Portfolios .
- Aus der Translationsinvarianz folgt, dass das Verlustrisiko mit jenem Betrag identifiziert wird, um den der Investor seinen Verlust reduzieren muss, um das Gefühl zu haben, kein Risiko zu tragen.

$$\mathcal{R}(Z - \mathcal{R}(Z)) = \mathcal{R}(Z) - \mathcal{R}(Z) = 0.$$

Das Risiko entspricht damit in gewisser Weise einem Risiko- oder Eigenkapital, welches der Investor besitzen sollte, um potentiellen Verlust abfedern zu können. Durch gesetzliche Regeln wie Basel II werden Banken gezwungen, riskante Geschäfte mit Eigenkapital zu unterlegen. Da die Banken gerne über ein möglichst großes Geschäftsvolumen verfügen, versuchen sie, die Eigenkapitalanforderungen möglichst gering zu halten. So kann es kommen, dass Risiken in der Praxis auch schon einmal unterschätzt werden.

- Die Forderung der Subadditivität basiert auf dem gerne zitierten Investitionsprinzip, dass Diversifikation des Portfolios das Verlustrisiko reduziert.
- Die Eigenschaft der Positiven Homogenität besagt, dass wenn sich der potentielle Wertverlust um den positiven Faktor λ vergrößert, sich auch das Risiko um den Faktor λ erhöht. Diese Eigenschaft wird gerne zu Gunsten der etwas weniger einschränkenden Eigenschaft der Konvexität fallen gelassen.
- Verschiebungsinvariante Risikomaße sind Streuungsmaße, bei denen das Risiko nicht mit der Höhe eines potentiellen Verlustes verknüpft ist, sondern mit den Schwankungen des Wertes. Dieser Ansatz ist im Kontext der Portfoliooptimierung nicht ideal.

In Übereinstimmung mit den 1999 und 2000 erschienenen Artikeln von Artzner, Delbaen, Eber und Heath [1] sowie Delbaen [3], in denen zum ersten Mal ein axiomatischer Ansatz zur Risikomessung beschrieben wurde, geben wir die folgende Definition.

Definition 3.3. Ein Risikomaß \mathcal{R} heißt *kohärent*, wenn es die Eigenschaften (A1), (A2), (A3) und (A4) erfüllt.

In dem axiomatischen System von Föllmer und Schied [8] werden die Eigenschaften Subadditivität und Positive Homogenität durch die schwächere Eigenschaft der Konvexität ersetzt.

Definition 3.4. Ein Risikomaß \mathcal{R} heißt *konvex*, wenn es die Eigenschaften (A1), (A2) und (A5) erfüllt.

Bemerkung. Aus Subadditivität und Positiver Homogenität folgt Konvexität:

$$\mathcal{R}(\lambda Z_1 + (1 - \lambda)Z_2) \leq \mathcal{R}(\lambda Z_1) + \mathcal{R}((1 - \lambda)Z_2) \leq \lambda \mathcal{R}(Z_1) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(Z_2).$$

Aus Konvexität und Positiver Homogenität folgt wiederum Subadditivität:

$$\mathcal{R}(Z_1 + Z_2) \leq 2\mathcal{R}(1/2Z_1 + 1/2Z_2) \leq \mathcal{R}(Z_1) + \mathcal{R}(Z_2).$$

Kohärente Risikomaße sind also konvex und konvexe Risikomaße, die Positive Homogenität erfüllen, sind kohärent.

Das folgende axiomatisches System wurde von Rockafellar, Uryasev und Zabaranin [23] eingeführt.

Definition 3.5. Ein Risikomaß \mathcal{R} heißt *Abweichungsmaß (Deviation risk measure)*, wenn es die Eigenschaften (A3), (A4), (A6) und (A7) erfüllt.

Definition 3.6. Für eine auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierten Zufallsvariablen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir das *wesentliche* oder *essentielle Supremum von Z*, in Zeichen $\text{ess sup } Z$, durch

$$\text{ess sup } Z := \inf \{ S \geq 0 \mid \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) > S\}) = 0 \}. \quad (3.1)$$

Bemerkung.

1. Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen kohärenten Risikomaßen und Abweichungsmaßen, siehe [23]:

Ist $\mathcal{D}(Z)$ ein Abweichungsmaß mit $\mathcal{D}(Z) \leq \text{ess sup } Z - \mathbb{E}(Z)$ für alle Z , dann ist das durch $\mathcal{R}(Z) := \mathcal{D}(Z) - \mathbb{E}(Z)$ definierte Risikomaß kohärent.

Ist umgekehrt $\mathcal{R}(Z)$ ein kohärentes Risikomaß mit $\mathcal{R}(Z) > \mathbb{E}(Z)$ für alle nicht konstanten Z und $\mathcal{R}(Z) = \mathbb{E}(Z)$ für alle konstanten Z , dann ist das durch $\mathcal{D}(Z) := \mathcal{R}(Z - \mathbb{E}(Z))$ definierte Risikomaß ein Abweichungsmaß.

2. Wegen dem Unterschied zwischen der Translationsinvarianz und Verschiebungsinvarianz sind die Mengen der konvexen Risikomaße und der Abweichungsmaße disjunkt. Aus Sicht der Portfoliooptimierung sind konvexe Risikomaße vorteilhaft, da die auftretenden stochastischen Optimierungsprobleme dann auch konvex sein können.

3.1 Beispiele für Risikomaße

Wir geben in diesem Abschnitt einige Beispiele für gängige Risikomaße.

Im ersten Abschnitt haben wir im Rahmen des Markovitz-Modells bereits die Standardabweichung als ein mathematisch sehr einfaches Beispiel für Risikomaße kennengelernt. Die Standardabweichung

$$\sigma(Z) = \sqrt{\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]}$$

ist ein Abweichungsmaß, wobei die Subadditivität direkt aus der Minkowski-Ungleichung folgt. Für die Portfoliooptimierung ist dieses Risikomaß insbesondere deswegen nicht ideal geeignet, da es nicht zwischen „schlechten“ Abweichungen des Verlustes nach oben und „guten“ Abweichungen des Verlustes nach unten unterscheidet. Markovitz schlug später [17] selbst als naheliegende Verbesserung die einseitige Standardabweichung als Risikomaß vor. Die einseitige Standardabweichung

$$\sigma_+(Z) = \sqrt{\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])_+^2]} \quad \text{mit } (Z)_+ = \max(0, Z)$$

ist ebenfalls ein Abweichungsmaß und damit subadditiv, positiv homogen, verschiebungsinvariant und positiv.

Das wohl bekannteste und im Finanzsektor am häufigsten verwendete Risikomaß ist der Value at Risk. Diesem Risikomaße wird sogar die Ehre zuteil, Eingang in gesetzliche Vorschriften wie Basel II zu finden.

Definition 3.7. Das Risikomaß VaR_α , definiert durch

$$\text{VaR}_\alpha(Z) := \inf \{z \mid F_Z(z) \geq \alpha\}, \quad (3.2)$$

heißt *Value at Risk zum Niveau α* , wobei $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ die Verteilungsfunktion von Z bezeichnet. Wir definieren außerdem den *Oberen Value at Risk zum Niveau α* durch

$$\text{VaR}_\alpha^+(Z) := \inf \{z \mid F_Z(z) > \alpha\}. \quad (3.3)$$

Der Value at Risk zum Niveau α ist also einfach das untere α -Quantile der Verteilung von Z . Aufgrund der Rechtsstetigkeit der Verteilungsfunktion gilt: $F_Z(\text{VaR}_\alpha) \geq \alpha$ und in der Definition 3.3 kann Infimum durch Minimum ersetzt werden. Werden zum Beispiel die Verluste einer Bank durch die Zufallsvariable Z beschrieben, dann übersteigen die Verluste der Bank die Grenze VaR_α mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als $1 - \alpha$. Der VaR_α kann damit als das minimal erforderliche Eigenkapital angesehen werden, um mit Wahrscheinlichkeit größer gleich α ohne Verschuldung liquide zu sein. α hat typischerweise große Werte, wie 0,95 oder 0,99. Ein gravierender Nachteil des Value at Risk als Risikomaß ist, dass er nichts über die Höhe der Verluste, die in $(1 - \alpha)100\%$ der Fälle den VaR_α übersteigen, aussagt. Dieser Nachteil wiegt umso schwerer, je extremer die den VaR_α übersteigenden Verluste sind. Unglücklicherweise sind die Verteilungen von finanziell relevanten Größen meistens heavy-tailed und daher sind extreme Ereignisse

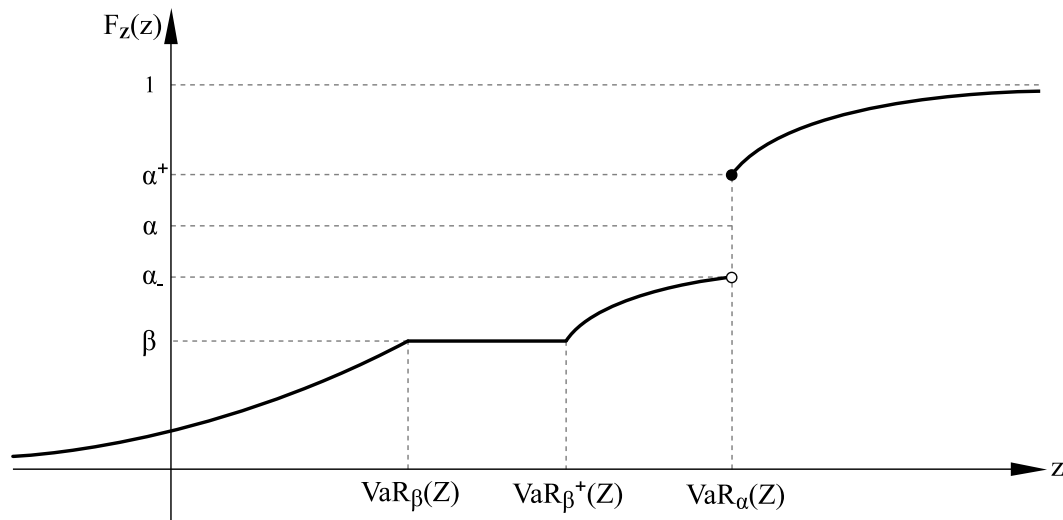


Abbildung 3.1: Allgemeine Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z mit Value at Risk zu den Niveaus α und β .

wesentlich wahrscheinlicher als zum Beispiel bei normalverteilten Größen. Daher versagt zum Beispiel das auf dem Value at Risk basierende Risikomanagement von Banken gerne vollständig.

Der Value at Risk ist offensichtlich monoton, translationsinvariant und positiv homogen. Er ist aber nicht subadditiv, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.1. Sei $\alpha = 0,95$ und Z_1, Z_2 zwei unabhängig und identisch verteilte Bernoulli-Variablen mit $\mathbb{P}(Z_i = 1) = 0,04$ und $\mathbb{P}(Z_i = 0) = 0,96$, für $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = 0) &= \mathbb{P}(Z_1 = 0)\mathbb{P}(Z_2 = 0) = 0,9216, \\ \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = 1) &= \mathbb{P}(Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_2 = 0) + \mathbb{P}(Z_1 = 0)\mathbb{P}(Z_2 = 1) = 0,0768 \text{ und} \\ \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = 2) &= \mathbb{P}(Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_2 = 1) = 0,0016. \end{aligned}$$

Daher ist $\text{VaR}_{0,95}(Z_1 + Z_2) = 1 > \text{VaR}_{0,95}(Z_1) + \text{VaR}_{0,95}(Z_2) = 0$, in Widerspruch zur Subadditivität.

Der Value at Risk ist daher auch nicht konvex, ein weiterer Nachteil dieses Risikomaßes. Einerseits verstößt er damit gegen das Prinzip der Risikoreduktion durch Diversifikation des Portfolios und andererseits ist er in der Portfoliooptimierung technisch unangenehm, da er nicht zu konvexen Optimierungsproblemen führt. Ein weiterer schwerwiegender Nachteil des VaR_α ist, dass er als Funktion von α nicht stetig ist, wie wir in Abbildung (3.1) leicht sehen können, indem wir β ein wenig erhöhen.

3.2 Conditional Value at Risk (CVaR)

Ein zum VaR alternatives Risikomaß, welches auf das Tail-verhalten der Verlustverteilung eingeht, ist der Conditional Value at Risk. Er ist ähnlich intuitiv zu interpretieren wie der VaR, hat aber keinen seiner Nachteile, wie fehlende Konvexität oder fehlende Stetigkeit bezüglich des Konfidenzniveaus α . Rockafellar und Urjasev (2000) haben für einen potentiellen Verlust Z mit *stetiger* Verteilungsfunktion den *Conditional Value at Risk zum Niveau α* als den Erwartungswert des Verlustes, der den VaR_α übersteigt, definiert.

$$\text{CVaR}_\alpha := \mathbb{E}[Z|Z > \text{VaR}_\alpha(Z)] . \quad (3.4)$$

Der CVaR wird insbesondere in der englischsprachigen Literatur auch *Expected shortfall* (ES), *Average Value at Risk* (AVaR) oder *Expected Tail Loss* (ETL) genannt.

Die obige Definition führt nur im Falle stetiger Verteilungen zu einem konvexen Risikomaß. Im Falle diskreter und gemischter Verteilungen ist die obige Definition nicht sinnvoll. Dieser Fall ist aber gerade in der Portfoliooptimierung, wo die tatsächlichen Verteilungen mit Hilfe von Szenariobäumen durch diskrete Verteilungen approximiert werden, besonders wichtig. Rockafellar und Urjasev (2002) haben den CVaR auch für allgemeine Verlustfunktionen eingeführt und wir stellen im Folgenden die in diesem Fall etwas subtilere Definition des CVaR und einige wichtige Resultate vor.

Definition 3.8. Das Risikomaß CVaR_α ist definiert als das Mittel über die α -Tail-Verteilung von Z

$$\text{CVaR}_\alpha(Z) := \int_{z=-\infty}^{\infty} z dF_{Z,\alpha}(z) ,$$

wobei die α -Tail-Verteilung von Z gegeben ist durch

$$F_{Z,\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < \text{VaR}_\alpha(Z) \\ (F_Z(z) - \alpha)/(1 - \alpha) & \text{für } z \geq \text{VaR}_\alpha(Z) \end{cases} .$$

Die α -Tail-Verteilung von Z entsteht anschaulich gesprochen aus der Verteilung F_Z , indem wir nur den über dem Niveau α liegenden Teil des Graphen von F_Z betrachten und diesen Streifen neu skalieren, sodass er sich anstatt über das Intervall $[\alpha, 1]$ über das Intervall $[0, 1]$ erstreckt. Aus der Definition von CVaR_α folgt sofort $\text{CVaR}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ und Gleichheit gilt nur dann, falls $\mathbb{P}(Z > \text{VaR}_\alpha(Z)) = 0$ ist.

Definition 3.9. Das Risikomaß CVaR_α^+ , definiert durch

$$\text{CVaR}_\alpha^+(Z) = \mathbb{E}[Z|Z > \text{VaR}_\alpha(Z)]$$

heißt *Oberer Conditional Value at Risk zum Niveau α* und das Risikomaß CVaR_α^- , definiert durch

$$\text{CVaR}_\alpha^-(Z) = \mathbb{E}[Z|Z \geq \text{VaR}_\alpha(Z)]$$

heißt *Unterer Conditional Value at Risk zum Niveau α* .

Die Definition von CVaR_α^+ ist nur dann sinnvoll, wenn $\mathbb{P}(Z > \text{VaR}_\alpha(Z)) > 0$. Der folgende Satz erklärt die Zusammenhänge zwischen den drei Risikomaßen CVaR_α , CVaR_α^+ und CVaR_α^- .

Satz 3.1. *Ist die Verteilungsfunktion F_Z an der Stelle $\text{VaR}_\alpha(Z)$ stetig, also $\mathbb{P}(Z = \text{VaR}_\alpha(Z)) = 0$, dann gilt:*

$$\text{CVaR}_\alpha^- = \text{CVaR}_\alpha = \text{CVaR}_\alpha^+. \quad (3.5)$$

Hat die Verteilungsfunktion F_Z an der Stelle $\text{VaR}_\alpha(Z)$ eine Sprungstelle, also $\mathbb{P}(Z = \text{VaR}_\alpha(Z)) > 0$, dann gilt einer der vier Fälle:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha^- &< \text{CVaR}_\alpha = \text{CVaR}_\alpha^+, & \text{falls } F_Z(\text{VaR}_\alpha(Z)) = \alpha < 1. \\ \text{CVaR}_\alpha^- &= \text{CVaR}_\alpha < \text{CVaR}_\alpha^+, & \text{falls } \lim_{z \nearrow \text{VaR}_\alpha} F_Z(z) = \alpha \text{ und } F_Z(\text{VaR}_\alpha(Z)) < 1. \\ \text{CVaR}_\alpha^- &< \text{CVaR}_\alpha < \text{CVaR}_\alpha^+, & \text{falls } \alpha < F_Z(\text{VaR}_\alpha(Z)) < 1. \\ \text{CVaR}_\alpha^- &= \text{CVaR}_\alpha, & \text{falls } F_Z(\text{VaR}_\alpha(Z)) = 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Beweis. Wie in Definition 3.8 haben CVaR_α^- und CVaR_α^+ die Darstellung

$$\text{CVaR}_\alpha^-(Z) := \int_{z=-\infty}^{\infty} z dF_{Z,\alpha}^-(z) \quad \text{und} \quad \text{CVaR}_\alpha^+(Z) := \int_{z=-\infty}^{\infty} z dF_{Z,\alpha}^+(z),$$

wobei die α -Tail-Verteilung $F_{Z,\alpha}^-$ und $F_{Z,\alpha}^+$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} F_{Z,\alpha}^-(z) &= \begin{cases} 0 & \text{für } z < \text{VaR}_\alpha(Z) \\ (F_Z(z) - \alpha^-)/(1 - \alpha^-) & \text{für } z \geq \text{VaR}_\alpha(Z) \end{cases} \quad \text{und} \\ F_{Z,\alpha}^+(z) &= \begin{cases} 0 & \text{für } z < \text{VaR}_\alpha(Z) \\ (F_Z(z) - \alpha^+)/(1 - \alpha^+) & \text{für } z \geq \text{VaR}_\alpha(Z) \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

α^+ und α^- bezeichnen den oberen und unteren Endpunkt des vertikalen Sprungs der Verteilungsfunktion F_Z an der Stelle VaR_α , vergleiche Abbildung 3.1. Formal ist $\alpha^+ = F_Z(\text{VaR}_\alpha)$ und $\alpha^- = \lim_{z \nearrow \text{VaR}_\alpha} F_Z(z)$. Hat die Verteilungsfunktion F_Z an der Stelle $\text{VaR}_\alpha(Z)$ keinen Sprung, dann gilt $\alpha^- = \alpha = \alpha^+$. Daher sind die α -Tail-Verteilungen $F_{Z,\alpha}^-$, $F_{Z,\alpha}$ und $F_{Z,\alpha}^+$ identisch, woraus Gleichung 3.5 folgt. Falls F_Z an der Stelle $\text{VaR}_\alpha(Z)$ einen Sprung hat, folgen die Gleichungen in (3.6) direkt aus den entsprechenden vier Fällen $\alpha^- < \alpha = \alpha^+ < 1$, $\alpha^- = \alpha < \alpha^+ < 1$, $\alpha^- < \alpha < \alpha^+ < 1$ und $\alpha^- \leq \alpha \leq \alpha^+ = 1$. \blacklozenge

Der folgende Satz zeigt eine weitere Verbindung zwischen CVaR_α und CVaR_α^+ .

Satz 3.2. *Sei $\lambda_\alpha := F_{Z,\alpha}(\text{VaR}_\alpha(Z))$ die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts der Höhe $Z = \text{VaR}_\alpha(Z)$ in der α -Tail-Verteilung von Z aus Definition (3.8).*

Im Falle $\mathbb{P}(Z > \text{VaR}_\alpha(Z)) > 0$ gilt $\lambda_\alpha < 1$, $\text{CVaR}_\alpha^+(Z)$ ist sinnvoll definiert und $\text{CVaR}_\alpha(Z)$ hat eine Darstellung als gewichtetes Mittel von VaR_α und CVaR_α^+ :

$$\text{CVaR}_\alpha(Z) = \lambda_\alpha \text{VaR}_\alpha(Z) + (1 - \lambda_\alpha) \text{CVaR}_\alpha^+(Z) \quad (3.8)$$

Im Falle $\mathbb{P}(Z > \text{VaR}_\alpha(Z)) = 0$ hingegen gilt:

$$\text{CVaR}_\alpha(Z) = \text{VaR}_\alpha(Z). \quad (3.9)$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus den Definitionen von CVaR_α und CVaR_α^+ . \blacklozenge

Wir fassen die obigen Definitionen und Resultate noch einmal für den in der Portfoliooptimierung wichtigen Fall einer diskreten Verlustverteilung zusammen.

Korollar 3.3. Sei Z eine diskrete Zufallsvariable, deren mögliche Realisierungen $z^1 < z^2 < \dots < z^N$ jeweils mit den positiven Wahrscheinlichkeiten p^1, \dots, p^N eintreten. Für $\alpha \in (0, 1)$ sei weiters i_α der eindeutig bestimmte Index mit $\sum_{i=1}^{i_\alpha-1} p^i < \alpha \leq \sum_{i=1}^{i_\alpha} p^i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(Z) &= z^{i_\alpha}, \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_{i=1}^{i_\alpha} p^i - \alpha \right), \\ \text{CVaR}_\alpha^-(Z) &= \frac{1}{\sum_{i=i_\alpha}^N p^i} \sum_{i=i_\alpha}^N p^i z^i, \quad \text{CVaR}_\alpha^+(Z) = \frac{1}{\sum_{i=i_\alpha+1}^N p^i} \sum_{i=i_\alpha+1}^N p^i z^i \quad \text{und} \\ \text{CVaR}_\alpha(Z) &= \frac{1}{1 - \alpha} \left(\left(\sum_{i=1}^{i_\alpha} p^i - \alpha \right) z^{i_\alpha} + \sum_{i=i_\alpha+1}^N p^i z^i \right). \end{aligned}$$

Der Grund, warum der CVaR ein Risikomaß mit vielen wünschenswerten theoretischen und praktischen Eigenschaften ist, liegt in dem folgenden zentralen Resultat.

Satz 3.4. Die Funktion $\Phi_{Z,\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi_{Z,\alpha}(z) = z + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[(Z - z)_+] \quad (3.10)$$

ist endlich und konvex und es gilt:

$$\text{CVaR}_\alpha(Z) = \min_z \Phi_{Z,\alpha}(z) \quad \text{und} \quad (3.11)$$

$$[\text{VaR}_\alpha(Z), \text{VaR}_\alpha^+(Z)] = \text{argmin}_z \Phi_{Z,\alpha}(z). \quad (3.12)$$

Insbesondere gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(Z) \in \text{argmin}_z \Phi_{Z,\alpha}(z) \quad \text{und} \quad \text{CVaR}_\alpha(Z) = \Phi_{Z,\alpha}(\text{VaR}_\alpha(Z)). \quad (3.13)$$

Beweis. $\Phi_{Z,\alpha}$ ist aufgrund der Voraussetzung $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ endlich. Aus der Konvexität der Funktion $(\cdot)_+$ folgt die Konvexität von $\mathbb{E}[(Z - z)_+]$ bezüglich z und damit die Konvexität von $\Phi_{Z,\alpha}$. Da Φ eine konvexe und endliche Funktion ist, existieren die links- und rechtsseitigen Ableitungen in allen Punkten z , siehe Rockafellar [20], Satz 23.1, und wir leiten diese im Folgenden her.

Zunächst haben wir

$$\frac{\Phi_{Z,\alpha}(z') - \Phi_{Z,\alpha}(z)}{z' - z} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E} \left[\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} \right]$$

Für $z' > z$ gilt:

$$\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} = \begin{cases} -1 & \text{für } Z > z', \\ 0 & \text{für } Z \leq z, \\ \in [-1, 0) & \text{für } z < Z \leq z'. \end{cases}$$

Daher existiert ein Wert $\zeta(z', z) \in [-1, 0)$ mit:

$$\mathbb{E} \left[\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} \right] = (-1) (1 - F_Z(z')) + \zeta(z', z) (F_Z(z') - F_Z(z)).$$

Wegen $\lim_{z' \searrow z} F_Z(z') = F_Z(z)$ folgt weiter

$$\lim_{z' \searrow z} \mathbb{E} \left[\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} \right] = -(1 - F_Z(z))$$

und damit erhalten wir den Wert für die rechtsseitige Ableitung von $\Phi_{Z,\alpha}$ im Punkt z

$$\frac{\partial^+ \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) = \lim_{z' \searrow z} \frac{\Phi_{Z,\alpha}(z') - \Phi_{Z,\alpha}(z)}{z' - z} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} (F_Z(z) - 1) = \frac{F_Z(z) - \alpha}{1 - \alpha}. \quad (3.14)$$

Die Herleitung der linksseitigen Ableitung verläuft analog. Für $z' < z$ gilt:

$$\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} = \begin{cases} -1 & \text{für } Z \geq z, \\ 0 & \text{für } Z \leq z', \\ \in [-1, 0) & \text{für } z' < Z < z. \end{cases}$$

Mit der Bezeichnung

$$F_Z(z^-) = \lim_{z' \nearrow z} F_Z(z')$$

ist $\mathbb{P}(Z \geq z) = 1 - F_Z(z^-)$ sowie $\mathbb{P}(z' < Z < z) = F_Z(z^-) - F_Z(z')$ und es folgt:

$$\lim_{z' \nearrow z} \mathbb{E} \left[\frac{(Z - z')_+ - (Z - z)_+}{z' - z} \right] = (-1) (1 - F_Z(z^-)),$$

Damit hat die linksseitige Ableitung von $\Phi_{Z,\alpha}$ im Punkt z die Darstellung

$$\frac{\partial^- \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) = \lim_{z' \nearrow z} \frac{\Phi_{Z,\alpha}(z') - \Phi_{Z,\alpha}(z)}{z' - z} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} (F_Z(z^-) - 1) = \frac{F_Z(z^-) - \alpha}{1 - \alpha}. \quad (3.15)$$

Die einseitigen Ableitung sind in z monoton wachsend, da $F_Z(z^-)$ und $F_Z(z)$ monoton wachsen und die Grenzwerte der einseitigen Ableitung für $z \rightarrow \pm\infty$ sind

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial^- \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial^+ \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) = 1 \quad \text{und} \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial^- \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial^+ \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) = -\frac{\alpha}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Daraus folgt, dass für alle c die Mengen $\{z \mid \Phi_{Z,\alpha}(z) \leq c\}$ beschränkt sind und daher ist $\operatorname{argmin}_z \Phi_{Z,\alpha}(z)$ ein nichtleeres, kompaktes Intervall. Die Werte $z \in \operatorname{argmin}_z \Phi_{Z,\alpha}(z)$ sind durch

$$\frac{\partial^- \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z) \leq 0 \leq \frac{\partial^+ \Phi_{Z,\alpha}}{\partial z}(z)$$

charakterisiert und mit den Darstellungen der einseitigen Ableitungen (3.14) und (3.15) ist diese Charakterisierung äquivalent zu $F_Z(z^-) \leq \alpha \leq F_Z(z)$, womit Aussage (3.12) folgt. Es bleibt noch Aussage (3.11) nachzurechnen. Aus (3.12) folgt

$$\min_z \left\{ z + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(Z-z)_+] \right\} = \operatorname{VaR}_\alpha(Z) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(Z - \operatorname{VaR}_\alpha(Z))_+] \quad (3.17)$$

Der Erwartungswert lässt sich zerlegen in

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z - \operatorname{VaR}_\alpha(Z))_+] &= \int_{z \geq \operatorname{VaR}_\alpha(Z)} z dF_Z(z) - \int_{z \geq \operatorname{VaR}_\alpha(Z)} \operatorname{VaR}_\alpha(Z) dF_Z(z) \\ &= (\alpha^+ - \alpha^-) \operatorname{VaR}_\alpha(Z) + (1 - \alpha^+) \operatorname{CVaR}_\alpha^+(Z) - \operatorname{VaR}_\alpha(Z)(1 - \alpha^-) \end{aligned}$$

und durch einsetzen dieser Darstellung in Gleichung (3.17) erhalten wir

$$\begin{aligned} \min_z \left\{ z + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(Z-z)_+] \right\} &= \frac{\alpha^+ - \alpha}{1-\alpha} \operatorname{VaR}_\alpha(Z) + \left(1 - \frac{\alpha^+ - \alpha}{1-\alpha} \right) \operatorname{CVaR}_\alpha^+(Z) \\ &= \lambda_\alpha \operatorname{VaR}_\alpha(Z) + (1 - \lambda_\alpha) \operatorname{CVaR}_\alpha^+(Z) = \operatorname{CVaR}_\alpha(Z), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus Satz 3.2 folgt. \blacklozenge

Die entscheidende Aussage des Satzes ist, dass wir $\operatorname{VaR}(Z)$ und $\operatorname{CVaR}(Z)$ gleichzeitig bestimmen können, indem wir das konvexe Optimierungsproblem $\min_z \Phi_{Z,\alpha}(z)$ lösen. Mit diesem zentralen Resultat lassen sich auch wichtige Eigenschaften des CVaR leicht herleiten.

Satz 3.5. $\operatorname{CVaR}_\alpha$ ist eine kohärentes Risikomaß und ist als Funktion des Niveaus α stetig.

Beweis. Die Kohärenz des CVaR_α wird im Satz 3.6 in allgemeinerem Rahmen nachgewiesen. Um die Stetigkeit bezüglich α zu zeigen, definieren wir die Funktionen

$$\theta_z(\gamma) = z + \gamma \mathbb{E}[(Z - z)_+] \quad \text{und} \quad \theta(\gamma) = \min_z \theta_z(\gamma).$$

Aus Satz 3.4 folgt $\text{CVaR}_\alpha = \theta(1/(1 - \alpha))$. Die Funktion θ ist das punktweise Minimum der affinen Funktionen θ_z und daher ist θ konvex. Als endliche und konvexe Funktion ist θ stetig, siehe [20], und damit ist auch CVaR_α als Hintereinanderausführung von $\alpha \rightarrow 1/(1 - \alpha)$ und θ stetig. \blacklozenge

3.3 Higher Moment Coherent Risk Measure (HMCR)

Die Darstellung des CVaR als Lösung eines speziellen konvexen Optimierungsproblems lässt sich verallgemeinern und führt zu einer Methode zur Konstruktion kohärenter Risikomaße, wie sie in Krokmal [14] vorgestellt wurde.

Definition 3.10.

1. Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. f heißt *im Punkt x_0 unterhalbstetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 existiert, so dass $f(y) > f(x_0) - \varepsilon$ für alle $y \in U$ gilt. f heißt *unterhalbstetig*, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ unterhalbstetig ist.
2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe, unterhalbstetige Funktion. Analog zu Rockafellar [20], Satz 8.5 nennen wir die Funktion f_0^+ , definiert durch

$$f_0^+(y) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}, \quad \text{für beliebiges } x \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

die *Resseccion-Funktion* von f .

Satz 3.6. Sei \mathcal{R} ein Risikomaß mit den Eigenschaften (A1) Monotonie, (A3) Subadditivität und (A4) Positive Homogenität. \mathcal{R} sei weiters unterhalbstetig mit $\mathcal{R}(z) > z$ für alle reellen $z \neq 0$. Dann ist das Risikomaß Φ , definiert durch den optimale Wert des konvexen Optimierungsproblems

$$\Phi(Z) = \min_{z \in \mathbb{R}} \{z + \mathcal{R}(Z - z)\} \quad (3.19)$$

ein kohärentes Risikomaß und die Menge $\text{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z - z) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

Beweis. Wegen der Konvexität und Unterhalbstetigkeit von \mathcal{R} ist auch die Funktion $\mathcal{R}_Z(z) = z + \mathcal{R}(Z - z)$ für ein fixes Z konvex und unterhalbstetig. Wir wollen zeigen, dass das Infimum von $\mathcal{R}_Z(z)$ in einem endlichen Punkt angenommen wird. Es reicht

dafür, die Positivität der *Recession-Funktion* $\mathcal{R}_Z 0^+$ für alle reellen $y \neq 0$ nachzuweisen. Aufgrund der positiven Homogenität von \mathcal{R} gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Z 0^+(y) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_Z(z + \lambda y) - \mathcal{R}_Z(z)}{\lambda} = y + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}(Z - z - \lambda y)}{\lambda} \\ &= y + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{R}\left(\frac{Z - z}{\lambda} - y\right) = y + \mathcal{R}(-y) > 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Voraussetzung $\mathcal{R}(z) > z$ für alle reellen $z \neq 0$ folgt. Damit ist das Risikomaß Φ sinnvoll definiert und aufgrund der Unterhalbstetigkeit von \mathcal{R}_Z ist die Menge $\operatorname{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z - z) \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen. Im Folgende überprüfen wir, ob Φ die Eigenschaften (A1) - (A4) erfüllt.

(A1) Wegen der Monotonie von \mathcal{R} gilt für $Z_1 \leq Z_2$ f.s.

$$\Phi(Z_1) \leq z + \mathcal{R}(Z_1 - z) \leq z + \mathcal{R}(Z_2 - z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}$$

und daraus folgt:

$$\Phi(Z_1) \leq \min_{z \in \mathbb{R}} \{z + \mathcal{R}(Z_2 - z)\} = \Phi(Z_2).$$

(A2) Für alle $C \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \Phi(Z + C) &= \min_{z \in \mathbb{R}} \{z + \mathcal{R}(Z + C - z)\} = C + \min_{z \in \mathbb{R}} \{(z - C) + \mathcal{R}(Z - (z - C))\} \\ &= C + \Phi(Z). \end{aligned}$$

(A3) Für ein beliebiges $Z \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$ sei $z_Z \in \operatorname{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z - z)$. Aus der Subadditivität von \mathcal{R} folgt

$$\begin{aligned} \Phi(Z_1 + Z_2) &= z_{Z_1 + Z_2} + \mathcal{R}(Z_1 + Z_2 - z_{Z_1 + Z_2}) \\ &\leq z_{Z_1} + z_{Z_2} + \mathcal{R}(Z_1 + Z_2 - (z_{Z_1} + z_{Z_2})) \\ &\leq z_{Z_1} + \mathcal{R}(Z_1 - z_{Z_1}) + z_{Z_2} + \mathcal{R}(Z_2 - z_{Z_2}) = \Phi(Z_1) + \Phi(Z_2) \end{aligned}$$

(A4) Für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\Phi(\lambda Z) = \min_{z \in \mathbb{R}} \{z + \mathcal{R}(\lambda Z - z)\} = \lambda \min_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{z}{\lambda} + \mathcal{R}\left(Z - \frac{z}{\lambda}\right) \right\} = \lambda \Phi(Z).$$

Daher ist Φ ein kohärentes Risikomaß. ◆

Bemerkung. Das Risikomaß \mathcal{R} im vorigen Satz darf wegen der Bedingung $\mathcal{R}(z) > z$ selbst nicht kohärent sein.

Satz 3.7. Sei \mathcal{R} wie in Satz 3.6 ein Risikomaß mit den Eigenschaften (A1), (A3) und (A4), unterhalbstetig und mit $\mathcal{R}(z) > z$ für alle reellen $z \neq 0$. Dann ist das durch

$$\Psi(Z) := \operatorname{Argmin}_z \{ z + \mathcal{R}(Z - z) \}, \quad (3.20)$$

$$\text{mit } \operatorname{Argmin}_z f(z) := \min \{ y \mid y \in \operatorname{argmin}_z f(z) \} \quad (3.21)$$

definierte Risikomaß translationsinvariant und positiv homogen. Ist außerdem $\mathcal{R}(Z) = 0$ für alle $Z \leq 0$ f.s., dann ist $\Psi(Z) \leq 0$ für alle $Z \leq 0$ f.s. und es gilt $\Psi(Z) \leq \Phi(Z)$, wobei Φ das durch (3.19) definierte Risikomaß ist.

Beweis. Die Voraussetzungen bezüglich \mathcal{R} garantieren laut Satz 3.6 die Abgeschlossenheit der Menge $\operatorname{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z - z)$ und daher ist die Definition von Ψ sinnvoll erklärt. Die Translationsinvarianz von Ψ ergibt sich direkt aus seiner Konstruktion:

$$\begin{aligned} \Psi(Z + C) &= \operatorname{Argmin}_z z + \mathcal{R}(Z + C - z) = \operatorname{Argmin}_z -C + (z + \mathcal{R}(Z + C - z)) \\ &= \operatorname{Argmin}_z (z - C) + \mathcal{R}(Z - (z - C)) = C + \operatorname{Argmin}_z z + \mathcal{R}(Z - z) = C + \Psi(Z). \end{aligned}$$

Die Positive Homogenität folgt aus der von \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda Z) &= \operatorname{Argmin}_z z + \mathcal{R}(\lambda Z - z) = \operatorname{Argmin}_z \frac{1}{\lambda} (z + \mathcal{R}(\lambda Z - z)) \\ &= \operatorname{Argmin}_z \frac{z}{\lambda} \mathcal{R}(Z - \frac{z}{\lambda}) = \lambda (\operatorname{Argmin}_z z + \mathcal{R}(\lambda Z - z)) = \lambda \Psi(Z). \end{aligned}$$

Wir zeigen noch die restlichen Behauptungen und nehmen dazu $\mathcal{R}(Z) = 0$ für alle $Z \leq 0$ f.s. an. \mathcal{R} ist in diesem Fall für alle Z positiv

$$\mathcal{R}(Z) \geq \mathcal{R}(\min(0, Z)) = 0$$

und daher gilt

$$\Psi(Z) \leq \Psi(Z) + \mathcal{R}(Z - \Psi(Z)) \leq \Phi(Z).$$

Für ein $Z \leq 0$ f.s. ist

$$\Psi(Z) + \mathcal{R}(Z - z) \leq 0 + \mathcal{R}(Z - 0) = 0$$

und da \mathcal{R} positiv ist, folgt schließlich

$$\Psi(Z) \leq -\mathcal{R}(Z - z) \leq 0. \quad \blacklozenge$$

Beispiel 3.2. Wählen wir für \mathcal{R} die Funktion $\mathcal{R}(Z) = (1 - \alpha)^{-1} \mathbb{E}[(Z)^+]$, dann erfüllt \mathcal{R} die Voraussetzungen des vorigen Satzes. Wegen Satz 3.4 ist das so konstruierte Risikomaß

$$\Phi(Z) = \min_z \left\{ z + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[(Z - z)_+] \right\}$$

mit dem $\operatorname{CVaR}_\alpha(Z)$ identisch und das durch

$$\Psi(Z) = \operatorname{Argmin}_z \left\{ z + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[(Z - z)_+] \right\}$$

definierte Risikomaß entspricht dem $\operatorname{VaR}_\alpha(Z)$.

Beispiel 3.3. Ein weiteres Beispiel für die Wahl von \mathcal{R} ist

$$\mathcal{R}^*(Z) = \begin{cases} 0 & \text{für } Z \leq 0 \text{ f.s.} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wieder erfüllt \mathcal{R}^* die Voraussetzungen des vorigen Satzes und wir erhalten in diesem Fall das kohärente Risikomaß

$$\Phi(Z) = \min_z \{z + \mathcal{R}^*(Z - z)\} = \operatorname{ess\,sup}_\alpha(Z).$$

Beispiel 3.4. Für $i = 1, \dots, n$ sei \mathcal{R}_i ein Risikomaß, welches die Voraussetzungen aus Satz 3.6 erfüllt. Dann ist das zusammengesetzte Risikomaß Φ_n , definiert durch

$$\Phi_n(Z) = \min_{\substack{z_i \in \mathbb{R}, \\ i=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n (z_i + \mathcal{R}_i(Z - z_i))$$

ebenfalls ein kohärentes Risikomaß.

Wir führen im Folgenden eine Familie von kohärenten Risikomaßen ein, die höhere Momente der Verlustverteilung einbeziehen und als Spezialfall von Satz 3.6 entstehen.

Definition 3.11. Das Risikomaß $\operatorname{HMCR}_{p,\alpha}$, definiert durch

$$\operatorname{HMCR}_{p,\alpha}(Z) = \min_z z + \frac{1}{1-\alpha} \|(Z - z)^+\|_p \quad \text{für } p \geq 1 \text{ und } \alpha \in (0, 1), \quad (3.22)$$

heißt *Higher-Moment-Coherent-Risk-Maß* oder kurz *HMCR-Maß*, wobei $\|Z\|_p = (\mathbb{E}[|Z|^p])^{1/p}$ ist.

Bemerkung. $\mathcal{R}(Z) = (1 - \alpha)^{-1} \|(Z)^+\|_p$, ist offensichtlich monoton, positiv homogen und wegen der Minkowski-Ungleichung auch subadditiv. \mathcal{R} erfüllt also die Voraussetzungen des Satzes 3.6 und die durch (3.22) definierten Risikomaße sind wirklich kohärent.

Bemerkung. Der CVaR ist Teil der HMCR-Familie. Für $p = 1$ ist $\operatorname{HMCR}_{p,\alpha}(\cdot) = \operatorname{CVaR}_\alpha(\cdot)$.

Bemerkung. Die HMCR-Maße sind bezüglich der Ordnung p monoton wachsend. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt die Monotonie der \mathcal{L}^p -Normen

$$\|Z\|_p \leq \|Z\|_q \quad \text{für } 1 \leq p < q,$$

und daraus folgt direkt

$$\operatorname{HMCR}_{p,\alpha}(Z) \leq \operatorname{HMCR}_{q,\alpha}(Z) \quad \text{für } 1 \leq p < q.$$

Die Risikomaße aus der Familie der Higher-Moment-Coherent-Risk-Measures sind nicht die einzigen Risikomaße, welche höhere Momente der Verlustverteilung einbeziehen. Weitere bekannte Beispiele sind die Familie der oberen partiellen Momente, siehe zum Beispiel Fishburn [7], und die Familie der Semi-Moment Coherent Risk Measures, wie sie in Fischer [6] und Rockafellar, Uryasev und Zabaranin [24] eingeführt wurden.

Definition 3.12. Die Familie der *oberen partiellen Momente* (OPM) ist definiert durch

$$\text{OPM}_{p,z}(Z) = \mathbb{E} \left[((Z - z)^+)^p \right] \quad \text{für } p \geq 1 \text{ und } z \in \mathbb{R}.$$

Definition 3.13. Die Familie der *Semi-Moment Coherent Risk Measures* (SMCR) ist definiert durch

$$\text{SMCR}_{p,\beta}(Z) = \mathbb{E}[Z] + \beta \mathbb{E} \left[((Z - \mathbb{E}[Z])^+)^p \right] \quad \text{für } p \geq 1 \text{ und } \beta \geq 0.$$

Die oberen partiellen Momente sind konvex, aber nicht translationsinvariant und nicht positiv homogen. Die Semi-Moment Coherent Risk Measures hingegen sind, wie der Name schon verrät, kohärente Risikomaße. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der SMCR-Familie und der HMCR-Familie besteht darin, dass die Risikomaße der SMCR-Familie auf den partiellen Momenten bezüglich dem fixen Punkt $\mathbb{E}[Z]$ basieren, wohingegen die Risikomaße der HMCR-Familie sogenannte Tail-Risikomaße sind. Die partiellen Momente werden bei ihnen ab dem Punkt $z_{p,\alpha}$ berechnet und die Lage von $z_{p,\alpha}$ wird durch den Parameter α bestimmt, wie der nächste Satz erklärt.

Satz 3.8. Die Risikomaße der HMCR-Familie sind Tail-Risikomaße, das heißt für $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ gilt $z_{p,\alpha_1}(Z) \leq z_{p,\alpha_2}(Z)$, wobei $z_{p,\alpha}(\cdot)$ durch

$$z_{p,\alpha}(Z) = \text{Argmin}_z \left\{ z + (1 - \alpha)^{-1} \mathbb{E}[(Z - z)_+] \right\}$$

definiert ist. In dem Fall $\text{ess sup } Z < \infty$ gilt außerdem $\lim_{\alpha \rightarrow 1} z_{p,\alpha}(Z) = \text{ess sup } Z$.

Beweis. Sei $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Per Definition von $z_{p,\alpha}(Z)$ gilt

$$z_{p,\alpha_1}(Z) + \frac{1}{1 - \alpha_1} \|(Z - z_{p,\alpha_1}(Z))^+\|_p \leq z_{p,\alpha_2}(Z) + \frac{1}{1 - \alpha_1} \|(Z - z_{p,\alpha_2}(Z))^+\|_p. \quad (3.23)$$

Wir zeigen $z_{p,\alpha_1}(Z) \leq z_{p,\alpha_2}(Z)$ durch Widerspruch. Aus der Annahme $z_{p,\alpha_1}(Z) > z_{p,\alpha_2}(Z)$ folgt mit Gleichung (3.23)

$$\begin{aligned} 0 < z_{p,\alpha_1}(Z) - z_{p,\alpha_2}(Z) &\leq \frac{1}{1 - \alpha_1} (\|(Z - z_{p,\alpha_2}(Z))^+\|_p - \|(Z - z_{p,\alpha_1}(Z))^+\|_p) \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha_2} (\|(Z - z_{p,\alpha_2}(Z))^+\|_p - \|(Z - z_{p,\alpha_1}(Z))^+\|_p). \end{aligned}$$

Durch Umformung erhalten wir

$$z_{p,\alpha_1}(Z) + \frac{1}{1 - \alpha_2} \|(Z - z_{p,\alpha_1}(Z))^+\|_p \leq z_{p,\alpha_2}(Z) + \frac{1}{1 - \alpha_2} \|(Z - z_{p,\alpha_2}(Z))^+\|_p,$$

in Widerspruch zur Definition von z_{p,α_2} .

Um das Grenzverhalten von $z_{p,\alpha}$ zu zeigen, nehmen wir $\text{ess sup } Z < \infty$ an. Zuerst bemerken wir, dass aufgrund der Monotonie von $z_{p,\alpha}$ der Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow 1} z_{p,\alpha}(Z)$ in $\mathbb{R} \cup \infty$ existiert. Zweitens können wir den Grenzwert nach oben beschränken:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} z_{p,\alpha}(Z) &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{HMCR}_{p,\alpha}(Z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \inf_z \left\{ z + \frac{1}{1-\alpha} \|(Z-z)^+\|_p \right\} \\ &\leq \inf_z \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ z + \frac{1}{1-\alpha} \|(Z-z)^+\|_p \right\} = \inf_z \{ z + \mathcal{R}^*((Z-z)^+) \} = \text{ess sup } Z, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{R}^* das Risikomaß aus Beispiel 3.3 bezeichnet. Drittens folgt aus der Annahme $\lim_{\alpha \rightarrow 1} z_{p,\alpha}(Z) = \text{ess sup } Z - \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{HMCR}_{p,\alpha}(Z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ z_{p,\alpha}(Z) + \frac{1}{1-\alpha} \|(Z - z_{p,\alpha}(Z))^+\|_p \right\} = \infty.$$

Die letzte Aussage steht im Widerspruch zu $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{HMCR}_{p,\alpha}(Z) \leq \text{ess sup } Z < \infty$ und daher gilt $\lim_{\alpha \rightarrow 1} z_{p,\alpha}(Z) = \text{ess sup } Z$. \blacklozenge

3.4 Implementierung der HMCR-Maße in stochastischen Optimierungsproblemen

Wir betrachten in diesem Abschnitt einstufige stochastische Optimierungsprobleme der Form

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad \Phi(Z(\mathbf{x})) \leq c, \quad (3.24)$$

wobei \mathbf{x} den Entscheidungsvektor bezeichne, die deterministische Funktion $f(\cdot)$ auf \mathcal{X} konvex sei, die Zufallsvariable Z ebenfalls konvex von \mathbf{x} abhängt und Φ ein Risikomaß bezeichne. Wählen wir für Φ das in Satz 3.6 eingeführte kohärente Risikomaß $\Phi(Z) = \min_z z + \mathcal{R}(Z - z)$, wobei \mathcal{R} alle Voraussetzungen aus Satz 3.6 erfülle, dann gilt

Satz 3.9. *Die beiden konvexen Optimierungsprobleme*

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad \Phi(Z(\mathbf{x})) \leq c \quad \text{und} \quad (3.25)$$

$$\min_{(x,z) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad z + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}) - z) \leq c \quad (3.26)$$

sind äquivalent, das heißt, ihre optimalen Werte werden an den gleichen Stellen \mathbf{x} angenommen und stimmen überein. Ist die Risikoschranke in (3.25) scharf, das heißt für die Optimallösung \mathbf{x}^* ist $\Phi(Z(\mathbf{x}^*)) = c$, dann gilt außerdem: (\mathbf{x}^*, z^*) ist genau dann eine Minimalstelle von (3.26), wenn \mathbf{x}^* eine Minimalstelle von (3.25) ist und $z^* \in \text{argmin}_z \{z + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}^*) - z)\}$ gilt.

Beweis. Wie bezeichnen die zulässigen Mengen von (3.25) beziehungsweise (3.26) mit

$$M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \Phi(Z(\mathbf{x})) \leq c\} \quad \text{beziehungsweise} \quad (3.27)$$

$$M_2 = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid z + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}) - z) \leq c\}. \quad (3.28)$$

Sei $\mathbf{x}^* \in M_1$ eine optimale Lösung von (3.25). Dann existiert ein z^* mit $(\mathbf{x}^*, z^*) \in M_2$. Sei $(\mathbf{x}', z') \in M_2$ beliebig gewählt. Wegen $\Phi(\mathbf{x}') \leq z' + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}') - z') \leq c$ ist $\mathbf{x}' \in M_1$ und daher gilt $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}')$. Folglich ist (\mathbf{x}^*, z^*) eine optimale Lösung von (3.26). Sei umgekehrt $(\mathbf{x}^*, z^*) \in M_2$ eine optimale Lösung von (3.26). Da für ein beliebiges $\mathbf{x}' \in M_1$ immer ein z' existiert, mit $(\mathbf{x}', z') \in M_2$, gilt $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}')$ und folglich ist \mathbf{x}^* eine optimale Lösung von (3.25).

Um die restliche Aussage zu zeigen, nehmen wir an, die Risikoschranke in (3.25) sei scharf, das heißt, für die optimale Lösung \mathbf{x}^* in (3.25) gilt $\Phi(Z(\mathbf{x}^*)) = c$. Sei (\mathbf{x}^*, z^*) eine optimale Lösung von (3.26). Wie wir gerade gezeigt haben, ist dann \mathbf{x}^* eine optimale Lösung von (3.25) und aus $c = \Phi(Z(\mathbf{x}^*)) \leq z^* + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}^*) - z^*) \leq c$ folgt $z^* \in \operatorname{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}^*) - z)$. Sei umgekehrt \mathbf{x}^* eine optimale Lösung von (3.25) und $z^* \in \operatorname{argmin}_z z + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}^*) - z)$. Wegen $z^* + \mathcal{R}(Z(\mathbf{x}^*) - z^*) = \Phi(Z(\mathbf{x}^*)) = c$ liegt (\mathbf{x}^*, z^*) in M_2 und ist, wie wir oben gezeigt haben, eine optimale Lösung von (3.26). \blacklozenge

Im Folgenden formulieren wir das stochastische Optimierungsproblem (3.24) in dem für die Portfoliooptimierung besonders wichtigen Fall einer diskreten Verlustverteilung. Als Risikomaß verwenden wir ein Higher Moment Coherent Risk Measure der Ordnung p . Die möglichen Realisierungen von $Z(\mathbf{x})$ seien $z^1(\mathbf{x}), \dots, z^N(\mathbf{x})$ mit den jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten p^1, \dots, p^N . Das Problem (3.24) hat damit wegen Satz 3.9 die Darstellung

$$\min_{\mathbf{x}, z} f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad z + \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_{i=1}^N p^i (z^i(\mathbf{x}) - z)_+^p \right)^{1/p} \leq c. \quad (3.29)$$

Durch Einführung der nichtnegativen Hilfsvariablen w^1, \dots, w^N erhalten wir das zu den Optimierungsproblem (3.24) beziehungsweise (3.29) äquivalente Problem

$$\min_{\mathbf{x}, z, y, w^1, \dots, w^N} f(\mathbf{x}), \quad (3.30)$$

$$\text{u.d.N.} \quad z + \frac{1}{1 - \alpha} y \leq c, \quad (3.31)$$

$$y \geq ((w^1)^p + \dots + (w^N)^p)^{1/p}, \quad (3.32)$$

$$w^i \geq (p^i)^{1/p} (z^i(\mathbf{x}) - z), \quad \text{für } i = 1 \dots, N, \quad (3.33)$$

$$w^i \geq 0, \quad \text{für } i = 1 \dots, N, \quad (3.34)$$

wobei äquivalent hier bedeutet, dass die optimalen Werte an den gleichen Stellen angenommen werden und übereinstimmen. Sind die einzelnen Realisierungen $z^1(\mathbf{x}), \dots, z^N(\mathbf{x})$ konvexe Funktionen des Entscheidungsvektors \mathbf{x} , dann ist die zulässige

Menge \mathcal{X} konvex. \mathcal{X} ist dabei die Menge aller \mathbf{x} , für die z , y und w^1, \dots, w^N existieren, sodass der Vektor $(\mathbf{x}, z, y, w^1, \dots, w^N)$ die Nebenbedingungen (3.31) - (3.34) erfüllt. Die Nebenbedingung (3.32) definiert den konvexen Kegel der Ordnung p

$$\left\{ (\mathbf{w}, y) \mid ((w^1)^p + \dots + (w^N)^p)^{1/p} \leq y \right\} \subset \mathbb{R}^{N+1}, \quad (3.35)$$

der für die praktische Implementierung der Risikomaße aus der HMCR-Familie eine entscheidende Rolle spielt.

Für $p = 1$ entspricht $\text{HMCR}_{p,\alpha}$ dem CVaR und die Nebenbedingung (3.32) wird zu der linearen Nebenbedingung

$$y \geq w^1 + \dots + w^N.$$

Dieser Fall wird ausführlich in Rockafellar und Urjasev [21] und [22] besprochen. Hängen f und die Realisierungen $z^1(\mathbf{x}), \dots, z^N(\mathbf{x})$ linear von \mathbf{x} ab, was in der Portfoliooptimierung der Fall ist, dann hat das stochastische Optimierungsproblem (3.24) die Form eines linearen Programms.

Für $p = \infty$ ist $\|\mathbf{Z}\|_\infty = \text{ess sup}_i w^i$ und die Nebenbedingung (3.32) reduziert sich zu einem System von N linearen Ungleichungen

$$y \geq w^i, \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Im Fall $p = 2$ liegt ein Second-order Cone Programming (SOCP)-Problem vor, für welches effiziente Lösungsmethoden, wie die Innere-Punkte-Verfahren, existieren.

Für den allgemeine Fall $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ beschreibt Krokmal und Soberanis [15] ein Lösungsverfahren, in dem der Kegel (3.35) durch ein konvexes Polytop approximiert wird, was wieder zu linearen Nebenbedingungen und zu einer effizienten Berechnungsmethode führt.

4 Szenariogenerierung

Eine gute Übersicht über die wichtigsten Methoden der Szenariogenerierung ist zum Beispiel in Mitra [19] zu finden. Eine Einführung in das Thema Szenariogenerierung sowie Anwendungen in der Finanzwirtschaft bieten zum Beispiel eine Publikation von Dupačová, Consigli und Wallace [4] als auch das Buch von Dupačová, Hurl und Štěpán [5].

4.1 Moment-Matching-Algorithmus für die Szenariogenerierung über eine Periode

Der hier vorgestellte Algorithmus orientiert sich stark an den Publikationen von Høyland und Wallace [10] sowie von Høyland, Kaut und Wallace [9]. Die grundlegende Idee des Moment-Matching-Algorithmus wird im Folgenden kurz umrissen:

Wir erzeugen einen n -dimensionalen, diskreten Zufallsvektor, dessen Komponenten möglichst unabhängig sind und vorab festgelegte statistische Eigenschaften erfüllen. In unserem Fall werden die ersten vier Momente der Verteilungen vorab festgelegt. Danach transformieren wir den Zufallsvektor so, dass seine Korrelationsmatrix unserer Vorgabe entspricht. Da bei der Transformation die Momente verändert werden, starten wir mit modifizierten Momenten und erhalten danach einen diskreten Zufallsvektor mit korrekten Zielmomenten und Korrelationen.

Wären die Komponenten des n -dimensionalen, diskreten Zufallsvektors zu Beginn unabhängig, würde dieser Algorithmus exakt zu den angestrebten Zielmomenten und Korrelationen führen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Anzahl der Realisierungen der diskreten Zufallsvariablen gegen unendlich geht. Um auch bei wenigen Realisierungen die statistischen Vorgaben (annähernd) zu erfüllen, wenden wir ein iteratives Verfahren an.

Notation

Für die weitere Beschreibung des Modells verwenden wir folgende Notation:

n ... Anzahl der Zufallsvariablen beziehungsweise Aktienunternehmen im Portfolio

N ... Anzahl der Szenarien

\mathbf{Z} ... allgemeiner n -dimensionaler Zufallsvektor

$\tilde{\mathbf{Z}}$... diskreter, n -dimensionaler Zufallsvektor, seine Realisierungen definieren die möglichen Szenarien

\mathbb{Z} ... $n \times N$ -dimensionale Matrix, jede Spalte von \mathbb{Z} entspricht einer möglichen Realisierung von $\tilde{\mathbf{Z}}$ und damit einem Szenario

\mathbf{P} ... Zeilenvektor der Szenariowahrscheinlichkeiten, in unserem Modell ist $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_N) = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$

$\mathbb{E}(\mathbf{Z})$... Mittelwertvektor des Zufallsvektors \mathbf{Z}

$\mathbb{Kov}(\mathbf{Z})$... Kovarianzmatrix des Zufallsvektors \mathbf{Z}

$\mathbb{Kor}(\mathbf{Z})$... Korrelationsmatrix des Zufallsvektors \mathbf{Z}

$TARMOM$... $n \times 4$ -Matrix der Zielmomente
($TARMOM$ steht für „target moments“)

R ... $n \times n$ -Matrix der Zielkorrelationen

Bemerkung. Der diskrete Zufallsvektors $\tilde{\mathbf{Z}}$ ist durch den Vektor der Eintrittswahrscheinlichkeiten \mathbf{P} und die Matrix der möglichen Realisierungen \mathbb{Z} vollständig bestimmt.

Ziel des Algorithmus über eine Periode ist die Erzeugung einer Szenariomatrix \mathbb{Z} , so dass der durch \mathbb{Z} und \mathbf{P} definierte diskrete Zufallsvektor $\tilde{\mathbf{Z}}$ die Momente $TARMOM$ und die Korrelationsmatrix R besitzt.

4.1.1 Konzeptioneller Algorithmus

Im Folgenden beschreiben wir die wesentlichen Schritte des Algorithmus:

Im ersten Schritt legen wir die Input-Parameter $n, N, TARMOM$ und R fest. Die vier Spalten von $TARMOM$ beinhaltet jeweils die Erwartungswerte μ , die Varianzen σ^2 , die Schiefe γ bzw. die Kurtosis δ der eindimensionalen Randverteilungen. Die Matrix R definiert die Korrelationen der einzelnen Randverteilungen und muss zwei Bedingungen erfüllen. Erstens muss R , um eine mögliche Korrelationsmatrix sein zu können, symmetrisch positiv semidefinit sein und eine Hauptdiagonale bestehend aus Einsen besitzen. Zweitens muss R regulär sein, um den Fall kollinearer Zufallsvariablen auszuschließen. Zusammengefasst muss R also positiv definit sein.

Im zweiten Schritt modifizieren wir die Matrix $TARMOM$, indem wir die erste Spalte auf Null und die zweite Spalte auf Eins setzen. Die so erzeugte Matrix heiße MOM . Da sich Schiefe, Kurtosis und Korrelationen bei linearer Transformation nicht ändern,

genügt es, zuerst einen standardisierten Zufallsvektor $\tilde{\mathbf{Y}}$ mit Momenten *MOM* und Korrelationsmatrix R zu generieren und danach den Vektor $\tilde{\mathbf{Z}}$ komponentenweise durch

$$\tilde{Z}_i = TARMOM_{i1} + \sqrt{TARMOM_{i2}} \tilde{Y}_i$$

zu berechnen.

Für das Verständnis des nächsten Schrittes sind folgende Sätze hilfreich:

Satz 4.1. *Sei \mathbf{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit folgenden Eigenschaften: die eindimensionalen Komponenten X_i, X_j sind unabhängig für $i \neq j$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\text{Var}(X_i) = 1$ und $\mathbb{E}(X_i^k)$ existiert für $k = 1, \dots, 4$ und $i, j = 1, \dots, n$. Sei weiters R eine Korrelationsmatrix und L eine untere Dreiecksmatrix mit $LL^\top = R$. Dann gilt für $\mathbf{Y} = L\mathbf{X}$:*

1. $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, $\mathbb{E}(Y_i^2) = 1$, $\mathbb{E}(Y_i^3) = \sum_{j=1}^i L_{ij}^3 \mathbb{E}(X_j^3)$,
 $\mathbb{E}(Y_i^4) = 3 + \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 (\mathbb{E}(X_j^4) - 3)$ für $i = 1, \dots, n$ und
2. \mathbf{Y} hat die Korrelationsmatrix R .

Beweis. ad 1)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E}(L\mathbf{X}) = L\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \\ \mathbb{Kov}(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top) = \mathbb{E}(L\mathbf{X}\mathbf{X}^\top L^\top) = L\mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)L^\top = LL^\top = R, \\ \mathbb{E}(Y_i^3) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^i L_{ij}X_j\right)^3 = \sum_{j,k,l=1}^i L_{ij}L_{ik}L_{il}\mathbb{E}(X_jX_kX_l) = \sum_{j=1}^i L_{ij}^3\mathbb{E}(X_j^3), \end{aligned}$$

da wegen der stochastischen Unabhängigkeit von X_j, X_k, X_l für $j \neq k \neq l$ $\mathbb{E}(X_jX_kX_l) = \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0$ und $\mathbb{E}(X_jX_k^2) = \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k^2) = 0$ gilt.

$$E(Y_i^4) = \sum_{j,k,l,m=1}^i L_{ij}L_{ik}L_{il}L_{im}\mathbb{E}(X_jX_kX_lX_m),$$

wobei wegen der stochastischen Unabhängigkeit alle Terme wegfallen, bis auf jene mit vier gleichen Indizes und jene mit zwei Paaren gleicher Indizes. Es gibt drei Möglichkeiten, aus einer Vierergruppe zwei Paare zu bilden, daher ist

$$\begin{aligned} E(Y_i^4) &= \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 \mathbb{E}(X_j^4) + 3 \sum_{j=1}^i L_{ij}^2 \sum_{k=1, k \neq j}^i L_{ik}^2 \\ &= \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 \mathbb{E}(X_j^4) + 3 \sum_{j=1}^i L_{ij}^2 (1 - L_{ij}^2) = \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 \mathbb{E}(X_j^4) + 3 \left(1 - \sum_{j=1}^i L_{ij}^4\right), \end{aligned}$$

wobei wir $\sum_{j=1}^i L_{ij}^2 = (LL^\top)_{ii} = R_{ii} = 1$ benützt haben.

ad 2) Aus 1) folgt direkt $\mathbb{Kor}(\mathbf{Y}) = \mathbb{Kov}(\mathbf{Y}) = R$. \blacklozenge

Satz 4.2. \mathbf{X}, R und L haben die gleichen Eigenschaften wie in Satz 4.1 und R sei zusätzlich regulär. Dann besitzen die dritten und vierten Momente von \mathbf{X} folgende Darstellung:

1. $\mathbb{E}(X_i^3) = \frac{1}{L_{ii}^3} \left(\mathbb{E}(Y_i^3) - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^3 \mathbb{E}(X_j^3) \right)$ und
2. $\mathbb{E}(X_i^4) = 3 + \frac{1}{L_{ii}^4} \left(\mathbb{E}(Y_i^4) - 3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^4 (\mathbb{E}(X_j^4) - 1) \right)$, für $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Die Aussagen folgen durch Umformen direkt aus den jeweiligen Resultaten aus Satz 4.1. Wegen der vorausgesetzten Regularität von R ist auch L regulär und daher sind die Diagonaleinträge von L ungleich Null. \blacklozenge

Folgerung. Um einen Zufallsvektor \mathbf{Y} mit vordefinierten ersten vier Momenten MOM und Korrelationen R zu erhalten, genügt es, zuerst einen standardisierten Zufallsvektor \mathbf{X} mit unabhängigen Komponenten und dritten bzw. vierten Momenten wie in Satz 4.2 beschrieben zu generieren und anschließend $\mathbf{Y} = L\mathbf{X}$ zu berechnen.

In dem nächsten Schritt führen wir daher eine Cholesky-Zerlegung der Matrix R durch und erhalten dabei eine untere Dreiecksmatrix L mit der Eigenschaft $LL^\top = R$. Diese Zerlegung existiert, da R symmetrisch positiv definit ist. Mithilfe von L transformieren wir die Matrix MOM nach den Regeln des Satzes 4.2 und nennen die so erhaltene Matrix $TRSFMOM$. Die Einträge der Matrix $TRSFMOM$ haben damit die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} TRSFMOM(i, 1) &= 0, \\ TRSFMOM(i, 2) &= 1, \\ TRSFMOM(i, 3) &= \frac{1}{L_{ii}^3} \left(MOM(i, 3) - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^3 TRSFMOM(j, 3) \right) \text{ und} \\ TRSFMOM(i, 4) &= 3 + \frac{1}{L_{ii}^4} \left(MOM(i, 3) - 3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^4 (TRSFMOM(j, 4) - 1) \right), \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$.

Der vierte Schritt umfasst die Erzeugung von unabhängigen, eindimensionalen, diskreten Zufallsvariablen \tilde{X}_i mit jeweils N Realisierungen und ersten vier Momenten $TRSFMOM_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dieses Problem können wir für jedes $i = 1, \dots, n$ auf folgende Weise lösen: Zuerst ziehen wir eine Stichprobe \tilde{X}_i vom Umfang N aus einer

beliebigen Verteilung, zB. einer $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung. (Die einzige Bedingung an die Verteilung ist, dass die ersten 12 Momente existieren und bekannt sind.) Danach verwenden wir eine kubische Transformation

$$\tilde{Y}_i = a + b\tilde{X}_i + c\tilde{X}_i^2 + d\tilde{X}_i^3$$

und versuchen dabei die Parameter a, b, c und d der kubischen Transformation so zu bestimmen, dass die ersten vier Momente von \tilde{Y}_i mit der i -ten Zeile von $TRSFMOM$ übereinstimmen. Die Zusammenhänge können durch das folgende System nichtlinearer Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}(\tilde{Y}_i) &= \mathbb{E}(a + b\tilde{X}_i + c\tilde{X}_i^2 + d\tilde{X}_i^3) = & \mathcal{P}_{i,1}(a, b, c, d) & (4.1) \\ 1 = \mathbb{E}(\tilde{Y}_i^2) &= \mathbb{E}((a + b\tilde{X}_i + c\tilde{X}_i^2 + d\tilde{X}_i^3)^2) = & \mathcal{P}_{i,2}(a, b, c, d) \\ TRSFMOM_{i3} &= \mathbb{E}(\tilde{Y}_i^3) = \mathbb{E}((a + b\tilde{X}_i + c\tilde{X}_i^2 + d\tilde{X}_i^3)^3) = & \mathcal{P}_{i,3}(a, b, c, d) \\ TRSFMOM_{i4} &= \mathbb{E}(\tilde{Y}_i^4) = \mathbb{E}((a + b\tilde{X}_i + c\tilde{X}_i^2 + d\tilde{X}_i^3)^4) = & \mathcal{P}_{i,4}(a, b, c, d), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_{i,j}(a, b, c, d)$ mit $j = 1, \dots, 4$ ein Polynom j -ten Grades in den Variablen a, b, c und d ist. Die Koeffizienten dieser Polynome beinhalten die ersten 12 Momente von \tilde{X}_i . Um eine geeignete kubische Transformation zu erhalten, suchen wir keine exakte (möglicherweise komplexe) Lösung des Systems (4.1), sondern minimieren die Summe der quadratischen Abstände der Polynome von den angestrebten Momenten. Eine mögliche Minimierungsmethode wäre zum Beispiel die von Levenberg-Marquardt, siehe zum Beispiel [18]. Wir erhalten damit unter allen kubischen Transformationen von \tilde{X} jene, deren Momente (leider nur lokal) minimalen Abstand zu den Zielmomenten haben.

Im fünften Schritt fassen wir die zuvor generierten, eindimensionalen, diskreten Zufallsvariablen \tilde{X}_i mit jeweils N Realisierungen zu einem Zufallsvektor $\tilde{\mathbf{X}}$ zusammen und transformieren diesen zu

$$\tilde{\mathbf{Y}} = L\tilde{\mathbf{X}}.$$

Die Momente und Korrelationen von $\tilde{\mathbf{Y}}$ stimmen nach den Sätzen 4.1 und 4.2 mit MOM bzw. R überein.

Zuletzt berechnen wir den Vektor $\tilde{\mathbf{Z}}$ komponentenweise durch

$$\tilde{Z}_i = TARMOM_{i1} + \sqrt{TARMOM_{i2}} \tilde{Y}_i,$$

womit $\tilde{\mathbf{Z}}$ die Momente $TARMOM$ und die Korrelationsmatrix R besitzt.

An dieser Stelle fassen wir die wesentlichen Schritte des konzeptionellen Algorithmus kurz und übersichtlich zusammen:

1. Definition der Input-Parameter $n, N, TARMOM$ und R .
2. Bestimmung der normalisierten Momente MOM .
3. Berechnung von L und der transformierten Matrix $TRSFMOM$.

4. Generierung eines n -dimensionalen, diskreten Zufallsvektors $\tilde{\mathbf{X}}$ mit möglichst unabhängigen Komponenten und ersten vier Momenten $TRSFMOM$.
5. Transformierung von $\tilde{\mathbf{X}}$ zu $\tilde{\mathbf{Y}} = L\tilde{\mathbf{X}}$, um die Korrelationen anzupassen.
6. Lineare Transformation von $\tilde{\mathbf{Y}}$ zu $\tilde{\mathbf{Z}}$.

4.1.2 Modifizierter Algorithmus

Wie wir bereits bemerkt haben, erzeugt der konzeptionelle Algorithmus einen Zufallsvektor mit exakt richtigen Momenten und Korrelationen, falls die eindimensionalen Zufallsvariablen \tilde{X}_i voneinander unabhängig sind. Da wir endlich viele Szenarien generieren, sind die diskreten Zufallsvariablen \tilde{X}_i nicht unabhängig, ihre Korrelationsmatrix ist nicht die Einheitsmatrix und der Algorithmus ist daher nur eine Approximation. Wir modifizieren den konzeptionelle Algorithmus zu einem iterativen Algorithmus, der zwar wieder nur eine Approximation darstellt, dessen Ergebnis aber innerhalb einer vordefinierter Fehlerschranke liegt.

Dazu führen wir eine Schleife zwischen Schritt 5 und 6 ein, die erst abbricht, wenn die Fehlerschranke erreicht oder eine maximale Anzahl von Wiederholungen überschritten ist. Wir starten bei Schritt 5 mit $\tilde{\mathbf{Y}} = L\tilde{\mathbf{X}}$. Wegen der fehlenden Unabhängigkeit sind weder die Korrelationen noch die Momente von $\tilde{\mathbf{Y}}$ korrekt. Wir geben im Folgenden einen Pseudocode der Schleife an.

1. Definiere eine Fehlerschranke ε , setze $p = 1$ und lege eine maximale Anzahl von Iterationen *maxiter* fest.
2. Berechne $MOM_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ und $R_{\tilde{\mathbf{Y}}}$, die Momente bzw. die Korrelationsmatrix von $\tilde{\mathbf{Y}}$.
3. Falls die Aussage $\left((\text{dist}(MOM, MOM_{\tilde{\mathbf{Y}}}) > \varepsilon \text{ oder } \text{dist}(R, R_{\tilde{\mathbf{Y}}}) > \varepsilon) \text{ und } p < \text{maxiter} \right)$ wahr ist, gehe weiter zu Schritt 4 der Schleife, ansonsten beende die Schleife und fahre mit Schritt 6 des konzeptionellen Algorithmus fort.

Das Abstandsmaß $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ sei für zwei $n \times m$ Matrizen A, B folgendermaßen definiert:

$$\text{dist}(A, B) := \sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A_{ij} - B_{ij})^2}. \quad (4.2)$$

4. Führe die Cholesky-Zerlegung $L_{\tilde{\mathbf{Y}}}L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^T = R_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ durch.
5. Berechne die Rückwertstransformation $\tilde{\mathbf{Y}}^* = L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^{-1}\tilde{\mathbf{Y}}$.
Die Korrelationsmatrix von $\tilde{\mathbf{Y}}^*$ ist damit I , denn

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{Y}}^* \tilde{\mathbf{Y}}^{*\top}) = L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^{-1} \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T) (L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^{-1})^T = L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^{-1} R_{\tilde{\mathbf{Y}}} (L_{\tilde{\mathbf{Y}}}^{-1})^T = I.$$

6. Berechne die Vorwärtstransformation $\tilde{\mathbf{Y}}^{**} = L\tilde{\mathbf{Y}}^*$.
Die Korrelationsmatrix von $\tilde{\mathbf{Y}}^{**}$ ist damit R .
7. Bestimme die kubische Transformation von $\tilde{\mathbf{Y}}^{**}$ mit Zielmomenten MOM und bezeichne den erzeugten Zufallsvektor mit $\tilde{\mathbf{Y}}$.
Die kubische Transformation verändert die Korrelationen von $\tilde{\mathbf{Y}}^{**}$. Da der Abstand der Startmomente zu MOM aber gering ist, erwarten wir, dass die Veränderungen der Korrelationen auch gering sind.
8. Setze $p = p + 1$, berechne $MOM_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ und $R_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ und gehe zu Schritt 3 der Schleife.

4.2 Algorithmus für die Szenariogenerierung über mehrere Perioden

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden für die Erzeugung von mehrstufigen Szenariobäumen basieren auf den Arbeiten von Hoyland und Wallace [10] sowie von Kaut und Wallace [12].

In den folgenden Abschnitten konstruieren wir Szenariobäume über T Perioden, indem wir sie, ausgehend von der Wurzel, aus Ein-Perioden-Teilbäumen zusammensetzen. Die einzelnen Teilbäume werden mit der Methode aus Kapitel 1 generiert, das heißt, wir legen die ersten vier Momente und die Korrelationen der bedingten Verteilungen fest. Damit können wir auch bestimmte Abhängigkeiten zwischen den Perioden kontrollieren.

Unser Ziel ist es, Szenariobäume für n -dimensionale Aktienpreisprozesse zu generieren. Wir betrachten dazu sowohl die arithmetischen als auch die geometrischen Zuwächse der Aktienpreisprozesse. Zuerst generieren wir Szenariobäume für die Prozesse der Zuwächse und dann berechnen wir daraus die Werte der Szenarien für die Preisprozesse. Der Grund für dieses Vorgehen liegt darin, dass die Verteilungen der Zuwächse zum Zeitpunkt $t + 1$ als unabhängig von den Werten der Preisprozesse zum Zeitpunkt t angenommen werden können. Gleiche Verteilungen in allen Ein-Perioden-Teilbäumen innerhalb eines Mehr-Perioden-Baumes für den Zuwachsprozess führen jedoch zu komplizierten Abhängigkeiten innerhalb des Mehr-Perioden-Baumes für den Preisprozess.

Wir beschreiben in den folgenden beiden Abschnitten zwei mögliche Methoden für Szenariogenerierung in einem Mehr-Perioden-Baum. Die erste Methode erlaubt uns eine Kontrolle über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Blätter des Baumes. Die zweite Methode hingegen legt die Verteilungen der einzelnen Teilbäume und Abhängigkeiten zwischen den Perioden fest.

4.2.1 Szenariogenerierung mit Kontrolle über die unbedingten Verteilungen

Wir konstruieren Mehr-Perioden-Szenariobäume durch Zusammensetzung mehrerer Ein-Perioden-Teilbäume. Die Verteilung der Blätter des Mehr-Perioden-Szenariobaumes soll vorab festgelegte erste vier Momente und Korrelationen haben. Wir müssen dazu die Momente und Korrelationen der Verteilungen der Teilbaumblätter bestimmen. Zuerst beschränken wir uns auf den Fall ohne Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Perioden, das heißt, die Verteilungen der Teilbäume hängen nicht von den Werten ihrer Vorfahren ab. In diesem Fall geben wir Formeln für die Momente und Korrelationen der Teilbaumverteilungen an, welche exakt zu den gewünschten Zielmomenten und Korrelationen der Blätterverteilungen führen. Die Annahme unabhängiger Zuwächse bei Aktienpreisprozessen entspricht nicht völlig der Realität, daher korrigieren wir danach die Teilbaumverteilungen so, dass Abhängigkeiten entstehen, ohne aber die Mittelwerte und Varianzen der Verteilungen in den Stufen zu verändern.

Unabhängige Zuwächse

Wir gehen in diesem Abschnitt von der Annahme unabhängiger und identischer Verteilungen der Teilbäume aus und verwenden folgende Notation: T sei die Anzahl der Perioden, μ, σ^2, γ und δ seien Mittel, Varianz, Schiefe und Kurtosis der Blätterverteilung im Mehr-Perioden-Baum und $\mu_p, \sigma_p^2, \gamma_p$ und δ_p bezeichne die jeweiligen Momente der Teilbaumverteilungen. Für die Korrelationen der Blätterverteilung im Mehr-Perioden-Baum bzw. für die Korrelationen in den Teilbaumverteilungen verwenden wir zusätzlich Superskripte, zum Beispiel ρ_p^{XY} , um deutlich zu machen, dass es sich um die Korrelation der Zufallsvariablen X und Y handelt.

Definition 4.1. Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler Aktienpreisprozess. Wir definieren den Prozess seiner *arithmetischen Zuwächse* $(R_t)_{t \geq 0}$ durch

$$R_t := P_t/P_{t-1} - 1.$$

Der arithmetische Zuwachs des Aktienpreises über alle T Perioden $P_T/P_0 - 1$ hat damit die Darstellung

$$P_T/P_0 - 1 = \prod_{t=1}^T P_t/P_{t-1} - 1 = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1.$$

Satz 4.3. Zwischen den ersten vier Momenten der Verteilung des arithmetischen Gesamtwachses $P_T/P_0 - 1$ und den ersten vier Momenten der identisch und unabhängig

verteilten arithmetischen Zuwächse R_t besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\mu_p &= (1 + \mu)^{1/T} - 1, \\ \sigma_p^2 &= ((1 + \mu)^2 + \sigma^2)^{1/T} - (1 + \mu_p)^2, \\ \gamma_p &= \sigma_p^{-3} \left(((1 + \mu^3) + 3(1 + \mu)\sigma^2 + \sigma^3\gamma)^{1/T} - (1 + \mu_p)^3 - 3(1 + \mu_p)\sigma_p^2 \right) \text{ und} \\ \delta_p &= \sigma_p^{-4} \left(((1 + \mu^4) + 6(1 + \mu^2)\sigma^2 + 4(1 + \mu)\sigma^3\gamma + \sigma^4\delta)^{1/T} \right. \\ &\quad \left. - (1 + \mu_p)^4 - 6(1 + \mu_p^2)\sigma_p^2 - 4(1 + \mu_p)\sigma_p^3\gamma_p \right).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Außerdem gilt für die Korrelation $\rho^{X,Y}$ zweier Gesamtwächse $P_T^X/P_0^X - 1$ und $P_T^Y/P_0^Y - 1$ und für die Korrelation $\rho_p^{X,Y}$ ihrer Teilwächse R_t^X und R_t^Y die Gleichung

$$\rho_p^{X,Y} = \frac{1}{\sigma_p^X \sigma_p^Y} \left(((1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) + \sigma^X \sigma^Y \rho^{X,Y})^{1/T} - (1 + \mu_p^X)(1 + \mu_p^Y) \right). \quad (4.4)$$

Beweis. Wir leiten exemplarisch die Formeln für μ_p und σ_p^2 her, die Herleitungen für γ_p und δ_p verlaufen analog.

Für die Herleitung sind folgende Gleichungen nützlich:

(Wir benützen hier die Annahme unabhängiger, identisch verteilter Zuwächse.)

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right) &= \prod_{t=1}^T \mathbb{E}(1 + R_t) = \prod_{t=1}^T (1 + \mathbb{E}(R_t)) = \prod_{t=1}^T (1 + \mu_p) \\ &= (1 + \mu_p)^T \\ \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t)^2 \right) &= \prod_{t=1}^T \mathbb{E}((1 + R_t)^2) = \prod_{t=1}^T \mathbb{E}((1 + 2R_t + R_t^2)) \\ &= \prod_{t=1}^T (1 + 2\mu_p + \sigma_p^2 + \mu_p^2) = (1 + 2\mu_p + \sigma_p^2 + \mu_p^2)^T \\ &= ((1 + 2\mu_p)^2 + \sigma_p^2)^T.\end{aligned}$$

Damit ergeben sich sofort die Gleichungen für die ersten zwei Momente:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1 \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right) - 1 = (1 + \mu_p)^T - 1 \\ \Leftrightarrow \mu_p &= (1 + \mu)^{1/T} - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \text{Var} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1 \right) = \text{Var} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right)^2 \right) - \left(\mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right) \right)^2 \\
 &= ((1 + 2\mu_p)^2 + \sigma_p^2) - (1 + \mu)^2 \\
 \Leftrightarrow \sigma_p^2 &= ((1 + 2\mu)^2 + \sigma^2)^{1/T} - (1 + \mu_p)^2.
 \end{aligned}$$

Zuletzt die Formel für die Korrelationen:

$$\begin{aligned}
 \sigma^X \sigma^Y \rho^{X,Y} &= \mathbb{Kov} \left(\prod_{t=1}^p (1 + R_t^X) - 1, \prod_{t=1}^p (1 + R_t^Y) - 1 \right) \\
 &= \mathbb{Kov} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t^X), \prod_{t=1}^T (1 + R_t^Y) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t^X) \prod_{t=1}^T (1 + R_t^Y) \right) - \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t^X) \right) \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t^Y) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\prod_{t=1}^T (1 + R_t^X)(1 + R_t^Y) \right) - (1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) \\
 &= \prod_{t=1}^T \mathbb{E} ((1 + R_t^X)(1 + R_t^Y)) - (1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) \\
 &= \prod_{t=1}^T \left(\mathbb{E} ((1 + R_t^X)) \mathbb{E} ((1 + R_t^Y)) + \mathbb{Kov}(R_t^X, R_t^Y) \right) - (1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) \\
 &= ((1 + \mu_p^X)(1 + \mu_p^Y) + \sigma_p^X \sigma_p^Y \rho_p)^T - (1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) \\
 \Leftrightarrow \rho_p^{X,Y} &= \frac{1}{\sigma_p^X \sigma_p^Y} \left(((1 + \mu^X)(1 + \mu^Y) + \sigma^X \sigma^Y \rho^{X,Y})^{1/T} - (1 + \mu_p^X)(1 + \mu_p^Y) \right). \quad \blacklozenge
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Sind die arithmetischen Gesamtwüchse zum Beispiel standardnormalverteilt, also $\mu = 0, \sigma^2 = 1, \gamma = 0$ und $\delta = 3$, dann gilt für die Einzelwüchse

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= 0, \quad \sigma_p^2 = 2^{1/T} - 1, \quad \gamma_p = (2^{1/T} - 1)^{-1/2} (2^{1/T} - 2) \quad \text{und} \\
 \delta_p &= (2^{1/T} - 1)^{-2} (10^{1/T} - 4 \cdot 4^{1/T} + 6 \cdot 2^{1/T} - 3). \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Die Schiefe bzw. die Kurtosis der Einzelwüchse strebt für $T \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ bzw. ∞ . Außerdem sind die Einzelwüchse genau dann unkorreliert, wenn die Gesamtwüchse unkorreliert sind, das heißt $\rho_p^{X,Y} = 0$ ist äquivalent zu $\rho^{X,Y} = 0$.

Definition 4.2. Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler Aktienpreisprozess. Wir definieren den Prozess seiner *geometrischen Zuwächse* $(R_t)_{t \geq 0}$ durch

$$R_t := \ln(P_t/P_{t-1}).$$

Der geometrische Zuwachs des Aktienpreises über alle T Perioden $\ln(P_T/P_0)$ hat damit die Darstellung

$$\ln(P_T/P_0) = \ln\left(\prod_{t=1}^T P_t/P_{t-1}\right) = \ln\left(\prod_{t=1}^T e^{R_t}\right) = \sum_{t=1}^T R_t.$$

Satz 4.4. Zwischen den ersten vier Momenten der Verteilung des geometrischen Gesamtwachses $\ln(P_T/P_0)$ und den ersten vier Momenten der identisch und unabhängig verteilten geometrischen Zuwächse R_t besteht folgender Zusammenhang:

$$\mu_p = T^{-1}\mu, \quad \sigma_p^2 = T^{-1}\sigma^2, \quad \gamma_p = \sqrt{T}\gamma \quad \text{und} \quad \delta_p = T(\delta - 3) + 3 \quad (4.6)$$

Außerdem gilt für die Korrelation $\rho^{X,Y}$ zweier Gesamtwächse $\ln(P_T^X/P_0^X)$ und $\ln(P_T^Y/P_0^Y)$ und für die Korrelation $\rho_p^{X,Y}$ ihrer Einzelzuwächse R_t^X und R_t^Y Gleichheit, also

$$\rho^{X,Y} = \rho_p^{X,Y}. \quad (4.7)$$

Beweis. Wir leiten exemplarisch die Formeln für μ_p und σ_p^2 her, die Herleitungen für γ_p und δ_p verlaufen analog. (Wir benützen hier die Annahme unabhängiger, identisch verteilter Zuwächse.)

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T R_t\right) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(R_t) = T \mu_p \\ &\iff \mu_p = T^{-1}\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{t=1}^T R_t\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T R_t R_u\right) = \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^T \mathbb{E}(R_t R_u) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\mathbb{E}(R_t) \sum_{u=1, u \neq t}^T \mathbb{E}(R_u) + \mathbb{E}(R_t^2)\right) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\mathbb{E}(R_t) \left(\sum_{u=1}^T \mathbb{E}(R_u) - \mathbb{E}(R_t)\right) + \mathbb{E}(R_t^2)\right) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\mathbb{E}(R_t)\mu - (\mathbb{E}(R_t))^2 + \mathbb{E}(R_t^2)\right) = \sum_{t=1}^T (\mathbb{E}(R_t)\mu + \sigma_p^2) = \mu^2 + T\sigma_p^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var} \left(\sum_{t=1}^T R_t \right) = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{t=1}^T R_t \right)^2 \right) - \left(\mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T R_t \right) \right)^2 = \mu^2 + T\sigma_p^2 - \mu^2 = T\sigma_p^2 \\ &\iff \sigma_p^2 = T^{-1}\sigma^2.\end{aligned}$$

Zuletzt die Formel für die Korrelationen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left(\sum_{t=1}^T R_t^X \right) \left(\sum_{t=1}^T R_t^Y \right) \right) &= \sum_{t,u=1}^T \mathbb{E} (R_t^X R_u^Y) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\sum_{u=1, u \neq t}^T \mathbb{E}(R_t^X) \mathbb{E}(R_u^Y) + \mathbb{E}(R_t^X R_t^Y) \right) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\mathbb{E}(R_t^X) \left(\sum_{u=1}^T \mathbb{E}(R_u^Y) - \mathbb{E}(R_t^Y) \right) + \mathbb{E}(R_t^X R_t^Y) \right) \\ &= \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(R_t^X) \sum_{u=1}^T \mathbb{E}(R_u^Y) + \sum_{t=1}^T (\mathbb{E}(R_t^X R_t^Y) - \mathbb{E}(R_t^X) \mathbb{E}(R_t^Y)) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T R_t^X \right) \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T R_t^Y \right) + \sum_{t=1}^T \mathbb{Kov}(R_t^X, R_t^Y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^X \sigma^Y \rho^{X,Y} &= \mathbb{Kov} \left(\sum_{t=1}^T R_t^X, \sum_{t=1}^T R_t^Y \right) = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{t=1}^T R_t^X \right) \left(\sum_{t=1}^T R_t^Y \right) \right) \\ &\quad - \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T R_t^X \right) \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T R_t^Y \right) = \sum_{t=1}^T \mathbb{Kov}(R_t^X, R_t^Y) = T\sigma_p^X \sigma_p^Y \rho_p^{X,Y} \\ &\iff \rho_p^{X,Y} = \frac{\sigma^X \sigma^Y}{T\sigma_p^X \sigma_p^Y} \rho^{X,Y} = \frac{\sqrt{T} \sigma_p^X \sqrt{T} \sigma_p^Y}{T\sigma_p^X \sigma_p^Y} \rho^{X,Y} = \rho^{X,Y}.\end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Bemerkung. Anders als bei den arithmetischen Zuwächsen sind die unabhängigen geometrischen Einzelzuwächse genau dann normal-verteilt, wenn der Gesamtzuwachs normal-verteilt ist. Außerdem konvergiert die Verteilung des Gesamtzuwachses nach dem zentralen Grenzwertungssatz, unabhängig von der Verteilung der Einzelzuwächse, gegen die Normalverteilung.

Abhängige Zuwächse

Wir führen hier eine einfache Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Zuwächsen ein, welche die ersten zwei Momente der unbedingten Verteilungen der Zuwächse nicht verändert, leider jedoch die höheren Momente schon. Die Verteilungen der Zuwächse R_t der Aktienpreisprozesse sind hier nicht unabhängig, sondern hängen von den

jeweiligen Werten der Zuwächse in den Vorperioden R_{t-1} ab, womit der Prozess $(R_t)_{t \geq 0}$ eine Autokorrelation erster Ordnung besitzt. Wir implementieren diese Autokorrelation erster Ordnung bei der Generierung des Mehr-Perioden-Baumes, indem wir die Verteilungsvorgaben (Momente und Korrelationen) nicht für alle Teilbäume gleichsetzen, sondern von ihren jeweiligen Wurzeln abhängig machen. Wie diese Verteilungsvorgaben aussehen müssen, damit einerseits Erwartungswerte, Varianzen und Korrelationen der unbedingten Verteilungen nicht verändert werden und andererseits eine bestimmte Korrelation zwischen den Zuwächsen zweier aufeinander folgender Perioden besteht, zeigt der nächste Satz.

Satz 4.5. *Seien R_t und R_{t+1} zwei eindimensionale Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(R_t) = \mu$, $\text{Var}(R_t) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t) = \mu + \rho(R_t - \mu)$ und $\text{Var}(R_{t+1}|R_t) = (1 - \rho^2)\sigma^2$. Dann ist*

$$\mathbb{E}(R_{t+1}) = \mu, \quad \text{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{Kor}(R_{t+1}, R_t) = \rho. \quad (4.8)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{t+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)) = \mathbb{E}(\mu + \rho(R_t - \mu)) = \mu, \\ \text{Var}(R_{t+1}) &= \mathbb{E}(R_{t+1}^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)^2) - \mathbb{E}(R_{t+1})^2 \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}^2|R_t) - \mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t))^2 \\ &= \mathbb{E}(\text{Var}(R_{t+1}|R_t)) + \text{Var}(\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)) \\ &= \mathbb{E}((1 - \rho^2)\sigma^2) + \text{Var}(\mu + \rho(R_t - \mu)) = (1 - \rho^2)\sigma^2 + \rho^2\sigma^2 = \sigma^2 \quad \text{und} \\ \mathbb{Kor}(R_{t+1}, R_t) &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}(R_{t+1}R_t) - \mu^2) = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}(R_t\mathbb{E}(R_{t+1}|R_t)) - \mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}(\mu R_t + \rho(R_t^2 - \mu R_t)) - \mu^2) = \frac{1}{\sigma^2} (\mu^2 + \rho\sigma^2 - \mu^2) = \rho. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Satz 4.6. *Seien R_t und R_{t+1} zwei unabhängige eindimensionale Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(R_t) = \mathbb{E}(R_{t+1}) = \mu$ und $\text{Var}(R_t) = \text{Var}(R_{t+1}) = \sigma^2$. Dann hat die durch*

$$R_{t+1}^{neu} := \mu + \rho(R_t - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2}(R_{t+1} - \mu)$$

definierte Zufallsvariable die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{t+1}^{neu}|R_t) &= \mu + \rho(R_t - \mu), \quad \text{Var}(R_{t+1}^{neu}|R_t) = (1 - \rho^2)\sigma^2, \\ \mathbb{E}(R_{t+1}^{neu}) &= \mu, \quad \text{Var}(R_{t+1}^{neu}) = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{Kor}(R_{t+1}^{neu}, R_t) = \rho. \end{aligned}$$

Beweis. Aus der Unabhängigkeit von R_t und R_{t+1} folgen direkt die Aussagen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_{t+1}^{neu}|R_t) &= \mu + \rho(R_t - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2}\mathbb{E}(R_{t+1} - \mu) = \mu + \rho(R_t - \mu), \\ \text{Var}(R_{t+1}^{neu}|R_t) &= \mathbb{E}((R_{t+1}^{neu} - \mathbb{E}(R_{t+1}^{neu}|R_t))^2|R_t) = \mathbb{E}\left(\left(\sqrt{1 - \rho^2}(R_{t+1} - \mu)\right)^2|R_t\right) \\ &= (1 - \rho^2)\sigma^2, \\ \mathbb{E}(R_{t+1}^{neu}) &= \mu + \rho\mathbb{E}(R_t - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2}\mathbb{E}(R_{t+1} - \mu) = \mu, \\ \text{Var}(R_{t+1}^{neu}) &= \rho^2\text{Var}(R_t - \mu) + (1 - \rho^2)\text{Var}(R_{t+1} - \mu) = \sigma^2 \text{ und} \\ \mathbb{Kor}(R_{t+1}^{neu}, R_t) &= \rho\mathbb{Kor}(R_t - \mu, R_t) + \sqrt{1 - \rho^2}\mathbb{Kor}(R_{t+1} - \mu, R_t) = \rho + 0. \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

Bemerkung. Haben R_t und R_{t+1} beide gleiche Kurtosis γ und Schiefe δ , dann hat, wie man leicht sieht, die transformierte Zufallsvariable R_{t+1}^{neu} die Kurtosis $(\rho^3 + (1 - \rho^2)^{3/2})\gamma$ und die Schiefe $(\rho^4 + (1 - \rho^2)^2)\delta$, bei der Transformation verändern sich also unweigerlich die dritten und vierten Momente.

Die beiden vorigen Sätze legen zwei äquivalente Methoden, Autokorrelation einzuführen, nahe. In der ersten Methode generieren wir die Teilbäume einzeln, mit spezifischen Vorgaben für Erwartungswerte und Varianzen. Die dritten und vierten Momente, sowie die Korrelationen bleiben hingegen für alle gleich. Wir beginnen mit dem Teilbaum in der ersten Periode, generieren danach alle Teilbäume der zweiten Periode usw. bis zur letzten Periode. Hat die Wurzel eines Teilbaums den Wert $\tilde{\mathbf{r}}_t$, dann sind nach Satz 4.5 die Vorgaben für den Erwartungswert und die Varianz der Blätterverteilung des Teilbaumes

$$\mu + \rho(\tilde{\mathbf{r}}_t - \mu) \quad \text{bzw.} \quad (1 - \rho^2)\sigma^2.$$

In der zweiten Methode generieren wir alle Teilbäume mit den gleichen Vorgaben und transformieren sie hinterher wie in Satz 4.6 beschrieben. Hat die Wurzel eines Teilbaums den Wert $\tilde{\mathbf{r}}_t$ und seine Blätter die Werte $\tilde{\mathbf{r}}_{t+1}^j$ für $j = 1, \dots, N_{t+1}$, dann haben die Blätter des transformierten Teilbaumes die Werte

$$\tilde{\mathbf{r}}_{t+1}^{j,neu} = \mu + \rho(\tilde{\mathbf{r}}_t - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2}(\tilde{\mathbf{r}}_{t+1}^j - \mu) \quad \text{für } j = 1, \dots, N_{t+1}.$$

Beide Methoden verändern Erwartungswerte, Varianzen und Korrelationsmatrizen der unbedingten Verteilungen der Zuwächse in den einzelnen Perioden nicht, jedoch sehr wohl deren höhere Momente.

4.2.2 Szenariogenerierung mit Kontrolle über die bedingten Verteilungen

Wie im vorigen Abschnitt konstruieren wir auch in diesem Abschnitt Mehr-Perioden-Szenarioabäume durch Zusammensetzung von Ein-Perioden-Teilbäumen. Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt konzentrieren wir uns jedoch hier auf die Abhängigkeiten zwischen den Perioden und nicht auf die unbedingten Verteilungen der verschiedenen Stufen.

Wir kontrollieren dazu wieder die ersten vier Momente und die Korrelationen der bedingten Verteilungen der Stufen, also der Verteilungen der einzelnen Teilbäume. Wie wir oben bereits bemerkt haben, ist die Annahme unabhängiger Zuwächse bei Aktienpreisprozessen unrealistisch. Wir geben hier ein einfaches Beispiel für eine Abhängigkeitsstruktur, die bei der Modellierung der Zuwächse von Aktienpreisprozessen häufig verwendet wird. Wir modellieren einerseits das Phänomen *Volatility Clustering* und andererseits implementieren wir den Effekt der *Mittelwertrückkehr (Mean Reversion)* für Aktienpreiszuwächse. Volatility Clustering bezieht sich auf eine Beobachtung von Mandelbrot (1963), dass in einem Aktienpreisprozess auf betragsmäßig große Abweichungen tendenziell große Abweichungen folgen und auf kleine Abweichungen tendenziell kleine Abweichungen folgen. Wir modellieren diese Beobachtung, indem wir die bedingten Varianzen der eindimensionalen Zuwächse durch

$$\text{Var}(R_{i,t+1}|R_{i,t}) = \left(vc_i |R_{i,t} - TARMOM(i, 1)| + (1 - vc_i) \sqrt{TARMOM(i, 2)} \right)^2$$

festlegen, wobei $vc_i \in [0, 1]$ den Volatility-Clustering-Parameter bezeichnet. Ein hoher Wert von vc_i bewirkt eine starke Abhängigkeit der bedingten Varianz von der Vorperiode. $TARMOM(i, 1)$ bezeichnet die ursprüngliche Vorgabe für den Erwartungswert der Preiszuwächse der i -ten Aktie und $TARMOM(i, 2)$ die ursprüngliche Vorgabe für die Varianz der Preiszuwächse der i -ten Aktie .

Der Begriff Mittelwertrückkehr oder Mean Reversion bedeutet bei einem stochastischen Prozess, dass der Prozess „langfristig“ zu seinem Gleichgewichtsniveau tendiert. Das heißt zum Beispiel, die Pfade des Prozesses gehen nicht gegen unendlich, sondern kehren wieder zu einem Gleichgewichtsniveau zurück. Wir modellieren diesen Effekt, indem wir den bedingten Erwartungswert der eindimensionalen Zuwächse durch

$$\mathbb{E}(R_{i,t+1}|R_{i,t}) = mr f_i \cdot TARMOM(i, 1) + (1 - mr f_i) R_{i,t}$$

definieren, wobei $mr f_i \in [0, 1]$ den Mean-Reversion-Faktor bezeichnet. Ein hoher Wert von $mr f_i$ bewirkt eine schnelle Rückkehr des Zuwachsprozesses zum Gleichgewichtsniveau des Preiszuwachses der i -ten Aktie $TARMOM(i, 1)$.

5 Modellbeschreibung

In diesem Kapitel beschreiben wir im Detail ein mehrstufiges Portfolio-Optimierungsmodell, welches wir im nächsten Kapitel numerischen Tests unterziehen. In unserem Modell soll der erwartete Portfoliowert in der letzten Periode maximiert werden, unter der Nebenbedingung, dass das Risiko eines Wertverlustes in den einzelnen Perioden beschränkt sei. Das für einen Investor relevante Ergebnis ist die optimale Portfoliogewichtung in der Anfangsstufe. Denn möchte ein Investor sein Geld über mehrere Perioden anlegen, dann löst er am Beginn *jeder* Periode das mehrstufige Portfolio-Optimierungsproblem mit aktualisierten Eingangsdaten, schichtet sein Portfolio dem Ergebnis der Anfangsstufe entsprechend um und hält es über die ganze Periode. Die Anzahl der Perioden im mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodell hängt daher auch nicht direkt von der Anzahl der Perioden, über die ein Investor sein Portfolio optimieren möchte, ab. Der gegenüber den einstufigen Portfolio-Optimierungsmodellen erheblich höhere Aufwand der mehrstufigen Modelle kann insbesondere in Handelssituationen mit Transaktionskosten gerechtfertigt werden. Wir geben ein einfaches Beispiel, in dem der Unterschied zwischen einstufigen und mehrstufigen Ansätzen deutlich wird.

Beispiel 5.1. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus einer Aktie und einer Anleihe. Unsere Prognose für die Wertentwicklung der Aktie sei die Folgende: in der ersten Periode, zwischen $t = 0$ und $t = 1$, verliert die Aktie 1,5%, in der darauffolgenden Periode gewinnt sie 4% an Wert und in allen weiteren Perioden bleibt sie konstant. Der prognostizierte Wert der Anleihe bleibt über alle Perioden konstant. In der Stufe $t = 0$ sind 100€ in die Aktie und 0€ in die Anleihe investiert. In den Stufen $t = 0$ und $t = 1$ darf das Portfolio umgeschichtet werden, es fallen jedoch Transaktionskosten in Höhe von 1% der Transaktionshöhe an.

In einstufigen Portfolio-Optimierungsmodellen soll der erwartete Portfoliowert am Periodenende maximiert werden, daher ergeben deren Lösungen in der Stufe 0 eine Umschichtung des gesamten Kapitals auf die Anleihe. Die Transaktion kostet 1€ und der erwartete Portfoliowert in Stufe 1 beträgt daher 99€. Bleibt das Kapital zur Gänze in der Aktie investiert, beträgt der erwartete Portfoliowert lediglich 98,5€. Entwickeln sich die Werte der Aktie und Anleihe in der ersten Periode tatsächlich wie prognostiziert, dann entscheiden die einstufigen Portfolio-Optimierungsmodelle in der ersten Stufe auf eine Umschichtung des gesamten Kapitals auf die Anleihe. Dabei entstehen Transaktionskosten in der Höhe von 0,99€ und der erwartete Portfoliowert in Stufe 2 beträgt 101,9304€. Abbildung 5.1 zeigt die prognostizierte Wertentwicklung des Portfolios.

Die Lösung eines mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodells, welches den erwarteten Portfoliowert in der letzten Stufe maximiert, ergibt eine Handelsstrategie, bei der das gesamte Kapital in der Aktie investiert bleibt. Der erwartete Portfoliowert in der Stufe 2 beziehungsweise in späteren Stufen beträgt 102.44€. Entwickeln sich die Werte der Aktie und Anleihe in der ersten Periode wie prognostiziert, dann entspricht die Lösung eines weiteren mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodells, für welches Stufe 1 die Anfangsstufe darstellt, einer Handelsstrategie, in der erneut das gesamte Kapital in der Aktie investiert bleibt. Der erwartete Portfoliowert beträgt in der Stufe 2 beziehungsweise in späteren Stufen nach wie vor 102.44€. Entwickeln sich die Werte der Aktie und Anleihe

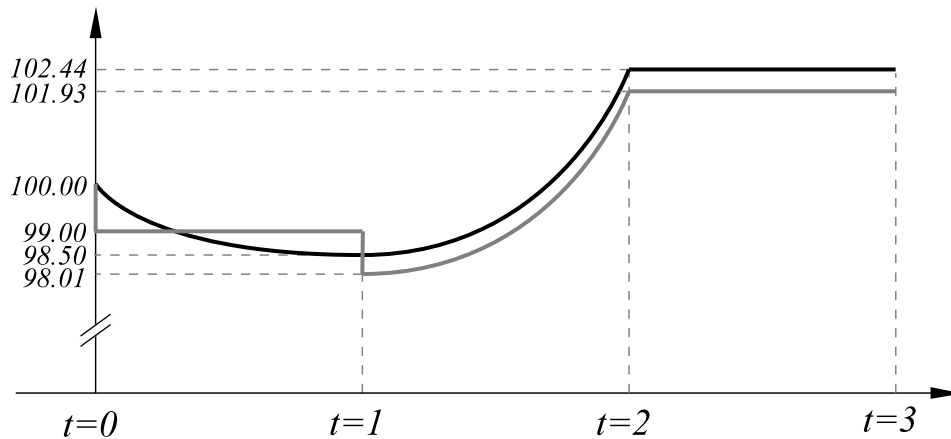


Abbildung 5.1: (erwartete) Wertentwicklung des Portfolios im Fall einstufiger Optimierung (grau) und mehrstufiger Optimierung (schwarz).

in allen Perioden wie prognostiziert, performen Mehr-Perioden-Modelle in diesem Fall deutlich besser als Ein-Perioden-Modelle.

5.1 Parameter und Variablen

Wir teilen die Eingabeparameter für das Portfolio-Modell der Übersicht halber in drei Gruppen auf.

1. Ökonomische Parameter

Diese Parameter sollten den realen Gegebenheiten entsprechen.

ϵ ... Transaktionskosten

r_0 ... Zinssatz der „risikolosen“ Anleihe

2. Benutzer-spezifische Parameter

Diese Parameter müssen vom Benutzer individuell gewählt werden.

n ... Anzahl der Aktienunternehmen im Portfolio

T ... Anzahl der Stufen im Szenariobaum

N ... Anzahl der generierten Szenarien beziehungsweise Blätter des Szenariobaumes

$\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_n)$... Vektor der nichtnegativen Kapitalmengen, die zu Beginn in die Anleihe (h_0) und die einzelnen Aktien (h_i , $i = 1, \dots, n$) investiert sind. Insbesondere bei wiederholter Anwendung des Modells kann \mathbf{h} auch exogen gegeben sein

p ... Ordnung des HMCR, $p = 1, 2$

α ... Signifikanzniveau des HMCR, $\alpha \in (0, 1)$

s_R ... Parameter zur Steuerung der Höhe der Risikoschranke S_R , $s_R \in (0, 1)$

s^o ... obere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, $s^o \in (0, 1)$

s_u ... untere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, $s_u \in (0, 1)$

3. Parameter des Szenariobaums

Diese im Vorfeld generierten Parameter beinhalten eine Prognose über die Zukunft.

$\mathbf{r}^i = (\mathbf{r}_0^i, \dots, \mathbf{r}_T^i)$... konkrete Realisierung des Datenprozesses, wobei $\mathbf{r}_t^i = (r_{t,0}^i, \dots, r_{t,n}^i)$ den Vektor der arithmetischen Zuwächse der Anleihe beziehungsweise der Aktien im Szenario i und in der Stufe t bezeichnet. Da die Anleihe als risikolose Investitionsmöglichkeit angenommen wird, setzen wir $r_{t,0}^i = r_{t,0}$, für $i = 1, \dots, N$.

p^i ... Eintrittswahrscheinlichkeit des Szenarios \mathbf{r}^i , $i = 1, \dots, N$

Modellvariablen

Anders als bei den Parametern des Modells werden die Werte der Modellvariablen erst durch die Lösung des Portfolio-Optimierungsproblems bestimmt.

$\mathbf{x}_t^i = (x_{t,0}^i, \dots, x_{t,n}^i)$... Vektor der Kapitalmengen, die im Szenario i und in Periode t in die Anleihe beziehungsweise in die jeweiligen Aktien investiert sind, $i = 1, \dots, N$, $t = 0, \dots, T - 1$

$\mathbf{xk}_t^i = (xk_{t,0}^i, \dots, xk_{t,n}^i)$... Vektor der Kapitalmengen, um die im Szenario i und zum Zeitpunkt t die Anleihe beziehungsweise Aktien gekauft werden, $i = 1, \dots, N$, $t = 0, \dots, T - 1$

$\mathbf{xv}_t^i = (xv_{t,0}^i, \dots, xv_{t,n}^i)$... Vektor der Kapitalmengen, um die im Szenario i und zum Zeitpunkt t die Anleihe beziehungsweise Aktien verkauft werden, $i = 1, \dots, N$, $t = 0, \dots, T - 1$

W_t^i ... Wert des Aktienportfolios im Szenario i und zum Zeitpunkt t , $i = 1, \dots, N$, $t = 0, \dots, T$

$S_{R,t}$... Risikoschranke für die Periode t , $t = 1, \dots, T$

ω_t^i ... Hilfsvariable, $i = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$

y_t ... Hilfsvariable, $t = 1, \dots, T$

z_t ... Hilfsvariable, $t = 1, \dots, T$

5.2 Zielfunktion und Nebenbedingungen

Zielfunktion

Wie wir am Anfang dieses Kapitels bereits erwähnt haben, ist das Ziel bei mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodellen üblicherweise, den erwarteten Portfoliowert in der letzten Stufe zu maximieren:

$$\max \sum_{i=1}^N p^i W_T^i, \quad (5.1)$$

wobei W_T^i , der Portfoliowert in der letzten Stufe und im Szenario i , in einer Nebenbedingung bestimmt wird.

Nebenbedingungen der Portfoliowerte

Die Portfoliowerte am Anfang und in den folgenden Stufen (jeweils bevor das Portfolio umgeschichtet wird) sind im Szenario i , $i = 1, \dots, N$ gegeben durch die Gleichungen

$$W_0 = \sum_{j=0}^n h_j, \quad (5.2)$$

$$W_t^i = \sum_{j=0}^n x_{t-1,j}^i (1 + r_{t,j}^i), \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.3)$$

Aktien- und Geldgleichgewichtsbedingungen

Die Gleichung

$$x_{0,j} = h_j + xk_{0,j} - xv_{0,j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

verknüpft die für den Investor relevante Portfoliogewichtung am Anfang \mathbf{x}_0 mit der Startverteilung \mathbf{h} , sowie mit den Kauf- und Verkaufsvariablen \mathbf{xk}_0 und \mathbf{xv}_0 . In der Periode t , $t = 1, \dots, T - 1$ und im Szenario $i = 1, \dots, N$ gilt für die Portfoliogewichtung \mathbf{x}_t^i die Gleichgewichtsbedingung

$$x_{t,j}^i = x_{t-1,j}^i(1 + r_{t,j}^i) + xk_{t,j}^i - xv_{t,j}^i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Durch die nächste Gleichung wird sichergestellt, dass sich in der Stufe t , $t = 0, \dots, T - 1$ die Einnahmen durch den Verkauf von Anleihen und Aktien und die Ausgaben durch den Kauf von Anleihen und Aktien die Waage halten. Es handelt sich somit um eine „selbstfinanzierende“ Handelsstrategie, wobei bei jeder Transaktion Gebühren in der Höhe von ε mal Transaktionshöhe entstehen.

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j=0}^n xv_{t,j}^i = (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^n xk_{t,j}^i, \quad (5.6)$$

Dynamische Risikokontrolle

In mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodellen ist die zu maximierende Größe meistens der erwartete Portfoliowert in der letzten Stufe. Wie bei allen Investmentstrategien sollte das durch die Handelsentscheidung entstehende Verlustrisiko abgeschätzt und kontrolliert werden. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, die Verlustfunktion zu definieren. Eine naheliegende Möglichkeit ist es, den Verlust für ein Szenario als die Differenz zwischen dem Ursprünglichen Portfoliowert und dem Portfoliowert, der in dem speziellen Szenario in der letzten Stufe erreicht wird, zu definieren. Verwenden wir nur diese Verlustfunktion, dann kontrollieren wir den Wertverlust am Ende des Betrachtungszeitraumes und tolerieren hohe Verluste in den dazwischenliegenden Perioden. Für einen Investor, der sein Geld über einen längeren Zeitraum anlegen möchte und dafür das Optimierungsmodell in jeder Periode aufs neue anwendet, ist nur die Portfoliogewichtung am Anfang entscheidend. Das Verlustrisiko in der ersten Periode wird jedoch durch diese Wahl der Verlustfunktion nicht kontrolliert, was zu großen Abweichungen des tatsächlichen Risikos von dem eigentlich gewünschten Risikoniveau führen kann. Eine weitere naheliegende Möglichkeit der Risikokontrolle, ohne den eben beschriebenen Nachteil ist, den Verlust in jeder Periode separat zu betrachten. Wir definieren den Verlust in einer Periode für ein konkretes Szenario als die Differenz des Portfoliowertes am Periodenanfang und des Portfoliowertes am Ende der Periode. Das Verlustrisiko wird in jeder Periode einzeln durch eine für jede Periode einzeln wählbare Risikoschranke kontrolliert, was einen weiteren Freiheitsgrad in das Modell bringt.

Wir verwenden diese Methode für unser Portfolio-Optimierungsmodell und daher hat die Risikorestriktion in der Stufe t , $t = 1, \dots, T$ die Form

$$\mathcal{R}(W_{t-1}^i - W_t^i) \leq S_{R,t}, \quad (5.7)$$

wobei \mathcal{R} ein beliebiges Risikomaß und $S_{R,t}$ eine vom Benutzer individuell gewählte Risikoschranke ist. Wir wählen für die numerische Umsetzung unseres Modells die Risikomaße CVaR, HMCR der Ordnung $p = 2$ und die Varianz Var . Für die Risikoschranke wählen wir einen fixen Anteil an dem Portfoliowert am Anfang.

$$S_{R,t} = s_R W_0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.8)$$

Wählen wir als Risikomaß ein HMCR der Ordnung p , $p = 1, 2, 3$, dann wird die Risikorestriktion (5.7), wie wir im Abschnitt 3.4 gezeigt haben, zu

$$z_t + \frac{1}{1-\alpha} y_t \leq S_{R,t}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.9)$$

$$y_t \geq ((\omega_t^1)^p + \dots + (\omega_t^N)^p)^{1/p}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.10)$$

$$\omega_t^i \geq (p^i)^{1/p} (W_{t-1}^i - W_t^i - z_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.11)$$

$$\text{mit den Einschränkungen} \quad (5.12)$$

$$\omega_t^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.13)$$

$$y_t, z_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.14)$$

Je nachdem, welche Ordnung p das Risikomaß aus der HMCR-Familie hat, ist unser Modell entweder ein lineares Programm, ein quadratisches oder ein kubisches Optimierungsproblem. Wählen wir für \mathcal{R} die Varianz des Wertverlustes, dann ist unser Modell ein quadratisches Optimierungsproblem und Nebenbedingung (5.7) hat die Gestalt

$$\sum_{i=1}^N p^i (W_{t-1}^i - W_t^i - \bar{W}_t)^2 \leq S_{R,t}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.15)$$

$$\bar{W}_t = \sum_{i=1}^N p^i (W_{t-1}^i - W_t^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.16)$$

Nonanticipativity-Bedingungen

Die Nonanticipativity-Bedingungen (siehe Abschnitt 2.3) stellen sicher, dass für Szenarien, die bis zum Zeitpunkt t übereinstimmen, auch die Entscheidungsvariablen \mathbf{x} , \mathbf{x}^k und \mathbf{x}^v bis zum Zeitpunkt t übereinstimmen. Die Bedingungen hängen natürlich von der Form des Szenarioabbaues ab und haben die Gestalt

$$x_{t,j}^k = x_{t,j}^i, \quad \text{für alle } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.17)$$

$$xk_{t,j}^k = xk_{t,j}^i, \quad \text{für alle } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.18)$$

$$xv_{t,j}^k = xv_{t,j}^i, \quad \text{für alle } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (5.19)$$

Einschränkungen der zulässigen Bereiche

Um eine gewisse Portfoliodiversifikation sicherzustellen, werden in Portfolio-Optimierungsmodellen typischerweise untere und obere Schranken für die Kapitalmengen, die in die Anleihe und die einzelnen Aktien investiert werden dürfen, inkludiert. Wir führen diese Schranken als Anteile an dem Portfoliowert in der jeweiligen Periode und im jeweiligen Szenario ein:

$$x_{t,j}^i \leq s^o W_t^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (5.20)$$

$$x_{t,j}^i \geq s_u W_t^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1. \quad (5.21)$$

Die folgenden Einschränkungen der zulässigen Bereiche der Entscheidungsvariablen sind sinnvoll:

$$x_{t,j}^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (5.22)$$

$$xk_{t,j}^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (5.23)$$

$$xv_{t,j}^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1. \quad (5.24)$$

Durch die Einschränkung (5.22) werden in unserem Modell sogenannte Leerverkäufe verhindert. Bei einem Leerverkauf verkauft ein Spekulant ein Aktienpaket, das er sich leiht und zu einem späteren Zeitpunkt zurückgeben muss. Ist der Aktienkurs zu dem späteren Zeitpunkt niedriger als beim Verkauf, macht der Spekulant einen Gewinn in der Höhe der Kursdifferenz, und ist daher bezüglich der gehandelten Aktie in der Short-Position. Dieser Vorgang könnte durch ein negatives $xk_{t,j}^i$ modelliert werden.

Wir fassen im Folgenden das ganze Modell, mit HMCR der Ordnung p als Wahl für das Risikomaß, in einer übersichtlichen Form zusammen.

Portfolio-Optimierungsmodell mit dem Risikomaß $\text{HMCR}_{p,\alpha}$

$$\max \sum_{i=1}^N p^i W_T^i \quad (5.25)$$

$$\text{u.d.N. } W_0 = \sum_{j=0}^n h_j, \quad (5.26)$$

$$W_t^i = \sum_{j=0}^n x_{t-1,j}^i (1 + r_{t,j}^i), \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.27)$$

$$x_{0,j}^i = h_j + x k_{0,j}^i - x v_{0,j}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad (5.28)$$

$$x_{t,j}^i = x_{t-1,j}^i (1 + r_{t,j}^i) + x k_{t,j}^i - x v_{t,j}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (5.29)$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j=0}^n x v_{t,j}^i = (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^n x k_{t,j}^i, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.30)$$

$$S_R = s_R W_0, \quad (5.31)$$

$$z_t + \frac{1}{1 - \alpha} y_t \leq S_R, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.32)$$

$$y_t \geq ((\omega_t^1)^p + \dots + (\omega_t^N)^p)^{1/p}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.33)$$

$$\omega_t^i \geq (p^i)^{1/p} (W_{t-1}^i - W_t^i - z_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.34)$$

$$\omega_t^i \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.35)$$

$$x_{t,j}^k = x_{t,j}^i, \quad \text{für } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.36)$$

$$x v_{t,j}^k = x v_{t,j}^i, \quad \text{für } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.37)$$

$$x k_{t,j}^k = x k_{t,j}^i, \quad \text{für } k \text{ mit } \mathbf{r}_{[t]}^k = \mathbf{r}_{[t]}^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.38)$$

$$x_{t,j}^i \leq s^o W_t^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.39)$$

$$x_{t,j}^i \geq s_u W_t^i, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.40)$$

$$x_{t,j}^k \geq 0, \quad x k_{t,j}^k \geq 0, \quad x v_{t,j}^k \geq 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (5.41)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

5.3 Kompakte Version

Wir bringen unser Modell in diesem Abschnitt auf eine etwas kompaktere Form. Diese Version ist insbesondere für die Implementierung in mathematischen Modellierungssprachen wie GAMS oder AMPL geeignet. Der wesentliche Unterschied zu der obigen Version ist, dass die Entscheidungsvariablen \mathbf{x} , \mathbf{xk} und \mathbf{xv} nicht für alle Perioden und Szenarios definiert sind, sondern nur für die Knoten des Szenariobaumes. Dadurch entfallen die Nonanticipativity-Bedingungen, und wir müssen bei der Implementierung lediglich für jeden Knoten k seinen Vorgänger $v(k)$ definieren. Wir geben vor der Modellbeschreibung wieder die Liste der Eingabeparameter und Modellvariablen an.

Parameter

ε ... Transaktionskosten

r_0 ... Zinssatz der „risikolosen“ Anleihe

n ... Anzahl der Aktienunternehmen im Portfolio

T ... Anzahl der Stufen im Szenariobaum

K_t ... Menge der Knoten in der Stufe t , $t = 0, \dots, T$, $K_0 = \{0\}$

$\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_n)$... Vektor der nichtnegativen Kapitalmengen, die zu Beginn in die Anleihe (h_0) und die einzelnen Aktien (h_i , $i = 1, \dots, n$) investiert sind. Insbesondere bei wiederholter Anwendung des Modells kann \mathbf{h} auch exogen gegeben sein

p ... Ordnung des HMCR, $p = 1, 2$

α ... Signifikanzniveau des HMCR, $\alpha \in (0, 1)$

s_R ... Parameter zur Steuerung der Höhe der Risikoschranke S_R , $s_R \in (0, 1)$

s^o ... obere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, $s^o \in (0, 1)$

s_u ... untere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, $s_u \in (0, 1)$

$\mathbf{r}^k = (r_1^k, \dots, r_n^k)$... jene Realisierung des Datenprozesses in einer Stufe, die dem Knoten k im Szenariobaum entspricht, r_j^k bezeichnet dabei den Return der j -ten Aktie, $k \in K_0 \cup \dots \cup K_T$

p^k ... Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die durch den Knoten k führen, $k \in K_0 \cup \dots \cup K_T$

$v(k)$... direkter Vorgänger des Knotens k im Szenariobaum, $k \in K_1 \cup \dots \cup K_T$

Variablen

$\mathbf{x}^k = (x_0^k, \dots, x_n^k)$... Vektor der Kapitalmengen, die im Knoten k in die Anleihe und die jeweiligen Aktien investiert sind, $k \in K_0 \cup \dots \cup K_{T-1}$

$\mathbf{x}k^k = (xk_0^k, \dots, xk_n^k)$... Vektor der Kapitalmengen, um die im Knoten k die Anleihe und Aktien gekauft werden, $k \in K_0 \cup \dots \cup K_{T-1}$

$\mathbf{x}v^k = (xv_0^k, \dots, xv_n^k)$... Vektor der Kapitalmengen, um die im Knoten k die Anleihe und Aktien verkauft werden, $k \in K_0 \cup \dots \cup K_{T-1}$

W^k ... Wert des Aktienportfolios im Knoten k , $k \in K_0 \cup \dots \cup K_T$

ω^k, y_t, z_t ... Hilfsvariablen, $k \in K_1 \cup \dots \cup K_T$ und $t = 1, \dots, T$

Portfolio-Optimierungsmodell, kompakte Version

$$\max \sum_{k \in K_T} p^k W^k \quad (5.42)$$

$$\text{u.d.N. } W^0 = \sum_{j=1}^n h_j, \quad W^k = \sum_{j=1}^n x_j^{v(k)} (1 + r_j^k), \quad k \in \bigcup_{t=1}^T K_t, \quad (5.43)$$

$$x_j^0 = h_j + xk_j^0 - xv_j^0, \quad j = 0, \dots, n, \quad (5.44)$$

$$x_j^k = x_j^{v(k)} (1 + r_j^k) + xk_j^k - xv_j^k, \quad j = 0, \dots, n, \quad k \in \bigcup_{t=1}^{T-1} K_t, \quad (5.45)$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j=0}^n xv_j^k = (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^n xk_j^k, \quad k \in \bigcup_{t=0}^{T-1} K_t, \quad (5.46)$$

$$S_R = s_R W^0, \quad (5.47)$$

$$z_t + \frac{1}{1 - \alpha} y_t \leq S_R, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.48)$$

$$y_t \geq \left(\sum_{k \in K_t} (\omega^k)^p \right)^{1/p}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.49)$$

$$\omega^k \geq (p^k)^{1/p} (W^{v(k)} - W^k - z_t), \quad k \in K_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.50)$$

$$\omega^k \geq 0, \quad k \in \bigcup_{t=1}^T K_t, \quad (5.51)$$

$$x_j^k \leq s^o W^k, \quad x_j^k \geq s_u W^k, \quad j = 0, \dots, n, \quad k \in \bigcup_{t=0}^{T-1} K_t, \quad (5.52)$$

$$x_j^k \geq 0, \quad xk_j^k \geq 0, \quad xv_j^k \geq 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad k \in \bigcup_{t=0}^{T-1} K_t. \quad (5.53)$$

6 Numerische Tests

In diesem Kapitel präsentieren wir numerische Ergebnisse der Implementierung unseres mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodells. Die für die Implementierung notwendigen Szenariobäume werden nach einer der im Kapitel 4 beschriebenen Methoden generiert. Wir gehen im Folgenden auf Details der Implementierung, wie den verwendeten Parametern und Programmen ein.

Wahl der Parameter

Sowohl der Algorithmus für die Generierung der Szenariobäume, als auch unser Portfolio-Optimierungsmodell beinhalten mehrere Parameter, die hier aufgelistet und beschrieben sind.

- Wir konstruieren die Szenariobäume durch Zusammensetzung mehrerer Ein-Perioden-Teilbäume. Die Teilbäume werden alle mit der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Methode generiert. Die Vorgaben für die ersten 4 Momente $TARMOM$ und die Korrelationen R werden mit historischen Wertzuwächsen von den Aktien im Portfolio innerhalb eines konkreten Zeitfensters berechnet. Als Abhängigkeitsstruktur führen wir eine Autokorrelation, wie sie in Satz 4.5 beschrieben ist, ein. Der Parameter der Autokorrelation $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ wird mit den selben Zuwächsen wie die Input-Parameter $TARMOM$ und R bestimmt und n entspricht der Anzahl der Aktien im Portfolio.
- Wir generieren für unsere Tests Szenariobäume mit $T = 3$ Perioden. Da die Anzahl der Knoten mit der Anzahl der Perioden exponentiell wächst, verlängern sich die Laufzeiten der Algorithmen bei Zunahme der Periodenzahl stark.
- Für die erste Testserie mit nur zwei Investitionsmöglichkeiten beträgt die Anzahl der Knoten der Teilbäume in der ersten Periode 100, in der zweiten Periode 50 und in der dritten Periode 20. Das ergibt zusammen $100 \times 50 \times 20 = 100000$ Szenarien beziehungsweise $1 + 100 + 5000 + 100000 = 105101$ Knoten. Für die Tests mit 10 Aktien und einer Anleihe generieren wir Teilbäume mit 50 Knoten für die erste Periode, 25 Knoten für die zweite Periode und 20 für die dritte, was zusammen $50 \times 25 \times 20 = 25000$ Szenarien beziehungsweise $1 + 50 + 1250 + 25000 = 26301$ Knoten ergibt.

Eine Verdopplung der Gesamtzahl der Knoten führt ungefähr zu einer Verdreifachung der Laufzeiten der Lösungsalgorithmen für das Optimierungsproblem. Für

100000 Knoten und nur zwei Investments beträgt die Laufzeit für die Szenariogenerierung und die Lösung des Optimierungsproblems zusammen im Schnitt ungefähr 20 Sekunden.

Bei der Generierung von Szenariobäumen für stochastische Optimierungsprobleme ist es üblich, für die erste Stufe mehr Knoten als für die folgenden Stufen zu erzeugen. Der Grund dafür ist insbesondere der, dass sich in jeder Stufe des Baumes eine gewisse Mindestanzahl an Knoten befinden soll, wobei die Anzahl der Knoten in jeder Stufe aufgrund der Konstruktion mindestens so hoch wie in der ersten Stufe ist. In unserem Kontext ist außerdem gerade die Prognose für die Entwicklung der Kurse in der ersten Periode entscheidend. Weiters ist eine Risikokontrolle über Tail-Risikomaße erst bei einer höheren Anzahl an Daten sinnvoll.

- Die Knotenwahrscheinlichkeiten sind für alle Knoten einer Stufe gleich und daher hat die Wahrscheinlichkeit p^k des Knotens k aus der Stufe t den Wert $(\text{Anzahl der Knoten in der Stufe } t)^{-1}$.
- Die Funktion $v(k)$, die den Knoten des Szenariobaumes ihre direkten Vorgänger zuweist, hängt natürlich vom Design des Baumes ab. Wir betrachten einen Baum über drei Perioden der in der ersten Stufe N_1 Knoten hat, dessen Teilbäume in der zweiten Periode alle jeweils N_2 Blätter und in der dritten Periode jeweils N_3 Blätter haben. Wir nummerieren die Knoten des Baumes wie in Abbildung 2.1 gezeigt von 0 bis $N_1 + N_1N_2 + N_1N_2N_3$ durch. Damit hat die Funktion $v(\cdot)$ in diesem Fall die Form

$$v(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < k \leq N_1, \\ l & \text{für } N_1 + (l-1)N_2 < k \leq N_1 + lN_2 \quad \text{und} \\ & 0 < l \leq N_1, \\ N_1 + m & \text{für } N_1 + N_1N_2 + (m-1)N_3 < k \leq N_1 + N_1N_2 + mN_3 \quad \text{und} \\ & 0 < m \leq N_1N_2. \end{cases}$$

- Die Transaktionskosten ε betragen in unserem Modell 10 Basispunkte. Zum Vergleich betragen die Xetra-Handelskosten rund 0.4 Basispunkte.
- Die Startverteilung \mathbf{h} , also der Vektor der Kapitalmengen, die zu Beginn in die Anlagemöglichkeiten investiert werden, hängt von dem gewählten Testportfolio ab. Bei unseren Tests beträgt das Anfangskapital in der ersten Periode immer 100€ und wird gleichmäßig auf das Portfolio verteilt. Wird der Algorithmus für aufeinanderfolgende Perioden wiederholt, entspricht die Startverteilung der Kapitalverteilung in der Vorperiode, aktualisiert mit den jeweiligen Wertzuwächsen über die Vorperiode.
- Wir testen den Algorithmus in diesem Abschnitt für unterschiedliche Werte des Parameters s_R . Der Parameter steuert die Höhe der Risikoschranke S_R .
- Wir testen unser Modell mit unterschiedlichen Risikomaßen und variieren zwischen Var, CVaR und HMCR der Ordnung 2.

- α , das Signifikanzniveau des CVaR beziehungsweise des HMCR, setzen wir auf 0.9.
- s^o , die obere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, setzen wir für die Tests mit nur zwei Investitionsmöglichkeiten auf 1. Für die Tests mit einem Aktienportfolio setzen wir s^o in der ersten Testserie ebenfalls auf 1 und in der zweiten Testserie auf 0.4.
- s_u , die untere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, setzen wir in allen Tests auf 0.

Wahl der Programme

Der Algorithmus für die Szenariogenerierung wird in **MATLAB** implementiert. Wir lesen mit **MATLAB** ein **Excel**-File ein, welches die täglichen DAX-Kurse über den Zeitraum vom 03.01.2007 bis zum 23.03.2013 beinhaltet. Mit diesen Daten berechnen wir die sich überlappenden, arithmetischen Kurszuwächse über jeweils 2 Geschäftstage. Mit einer konkreten Auswahl von 400 aufeinanderfolgenden 2-tägigen Zuwächsen bestimmen wir die Eingangsdaten für den Algorithmus, nämlich die ersten vier Momente und die Korrelationen der Zuwächse, und generieren anschließend die Szenarien. Das Ergebnis, welches den Szenariobaum, die Knotenwahrscheinlichkeiten und die Werte der Funktion v beinhaltet, speichern wir in einem Datenfile.

Unser Portfolio-Optimierungsmodell implementieren wir in seiner kompakten Version in **AMPL**. Dabei werden die Daten aus dem zuvor erstellten Datenfile eingelesen, danach wird das Modell von **AMPL** übersetzt und anschließend von dem eingebundenen Solver **Cplex** gelöst. Die Lösung beinhaltet alle Werte für die Entscheidungsvariablen \mathbf{x} , \mathbf{xk} und \mathbf{xv} . Wir speichern davon nur den Vektor \mathbf{x}^0 , der die für einen Investor relevante Information der Portfoliogewichtung am Anfang beinhaltet.

6.1 Tests mit zwei Investitionsmöglichkeiten

Sowohl das mehrstufige Portfolio-Optimierungsmodell, als auch die Methoden zur Szenariogenerierung aus Kapitel 4 sind für Portfolios mit vielen Aktien und Anleihen geeignet. In diesem Abschnitt verwenden wir jedoch ein Portfolio, in dem sich nur zwei Investitionsmöglichkeiten befinden, eine „risikolose“ und eine riskante Anlagemöglichkeit. Diese einfache Wahl des Portfolio ist für Testzwecke sinnvoll, da so die Einflüsse der verschiedenen Modellparameter auf die numerischen Ergebnisse leichter zu sehen sind als bei einem stark diversifizierten Portfolio.

Für die risikolose Investitionsmöglichkeit verwenden wir eine fiktive Anleihe, deren jährliche Renditen in Tabelle 6.1 aufgelistet sind. Die Zinssätze entsprechen den jährlichen Durchschnittswerten der Renditen für Österreichische Bundesanleihen mit 10-jähriger

Laufzeit. Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf der Zinssätze für Österreichische Bundesanleihen mit 10-jähriger Laufzeit. Die für die fiktive Anleihe gewählten Renditen liegen außerdem im Bereich der durchschnittlich im Euroraum verwendeten Basiszinssätze, siehe [13].

Tabelle 6.1: Zinssätze der risikolosen Anleihe.

	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährliche Zinsen in %	4.0	4.0	4.5	3.5	3.0	3.0	2.5



Abbildung 6.1: Verlauf der Zinssätze für Österreichische Bundesanleihen mit 10-jähriger Laufzeit. (Grafik von www.markt-daten.de)

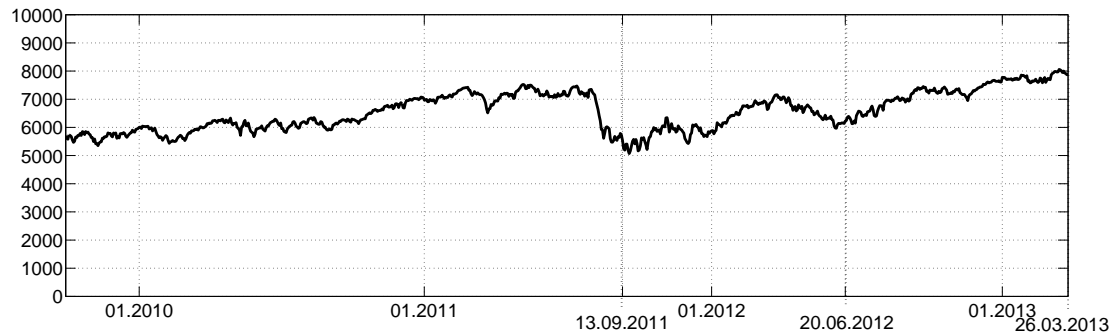


Abbildung 6.2: DAX Index-Chart über den Zeitraum vom 29.09.2009 bis zum 26.03.2013.

Als risikobehaftete Investitionsmöglichkeit wählen wir stellvertretend für eine konkrete Aktie den Aktienindex DAX aus. Abbildung 6.2 zeigt den Verlauf des DAX-Kurses über die letzten Jahre. Wir wählen als Zeitspanne für eine Investitionsperiode 2 Geschäftstage. Daher betrachten wir die arithmetischen, 2-tägigen Zuwächse unserer fiktiven Anleihe und des DAX. Für die Szenariogenerierung zu einer bestimmten Periode

verwenden wir 400 sich überlappende, 2-tägige Zuwächse aus einem Zeitfenster, welches 401 aufeinanderfolgende Geschäftstage umfasst. Von diesen 400 Zuwächsen werden die ersten 4 Momente bestimmt, welche als Eingangsdaten für den Algorithmus dienen. Da die Anleihe als risikolos angenommen wird, ist ihr Wert für die eine Periode bereits am Periodenanfang bekannt und wir müssen den Szenariobaum nur für ein Asset, den DAX, generieren. Daher entfällt auch die Bestimmung der Korrelationen zwischen den Zuwächsen der Anleihe und des DAX.

6.1.1 In-Sample-Tests

Durchführung der Tests

Das Ziel der In-Sample-Tests ist die Untersuchung der Wertentwicklung der Portfolios über 100 aufeinanderfolgende Perioden, für unterschiedliche Risikomaße und unterschiedliche Risikoschranken. Das Zeitfenster, aus dem die Daten für die Szenariogenerierungen berechnet werden, ist für alle 100 Perioden das selbe und beinhaltet insbesondere diese 100 Perioden. Daher sprechen wir zurecht von In-Sample-Tests.

Wir wählen konkret das Zeitfenster vom 13.09.2011 bis zum 26.03.2013, welches 401 Geschäftstage und damit 400 sich überlappende, 2-tägige Perioden umfasst. Wir bestimmen die ersten 4 Momente der arithmetischen Zuwächse des DAX über diese 400 Perioden und bilden daraus die Matrix $TARMOM$, welche den Input für die Generierung aller Szenariobäume darstellt. Weiters bestimmen wir die Autokorrelation ρ der Zuwächse mit den Zuwächsen aus der Vorperiode.

Wir beginnen die In-Sample-Tests, jeweils für eine bestimmte Auswahl des Risikomaßes und der Risikoschranke, mit dem 202-ten Geschäftstag. Wir investieren 100€ in unser Portfolio, die Hälfte in die Anleihe und die andere Hälfte in den DAX. Anschließend generieren wir einen Szenariobaum und lösen das Optimierungsmodell für die gewählte Startverteilung und die vorher getroffene Auswahl der Modellparameter. Wir schichten das Portfolio dem Ergebnis entsprechend um und halten das Portfolio vom 202-ten bis zum 204-ten Geschäftstag. Der Wert des Portfolios verändert sich in diesen 2 Geschäftstagen um die Zuwächse dieser Periode. Die aktualisierte Portfolioverteilung zu Beginn des 204-ten Geschäftstages bildet die Startverteilung für den nächsten Schritt.

Am 204-ten Geschäftstag generieren wir erneut einen Szenariobaum und lösen das Optimierungsmodell für die aktualisierte Startverteilung. Wir schichten das Portfolio dem Ergebnis entsprechend um und halten das Portfolio vom 204-ten bis zum 206-ten Geschäftstag.

Wir wiederholen diesen Vorgang weitere 98 mal für die Geschäftstage 206, 208, ..., 400, jeweils mit aktualisierten Anfangsportfolios. Abschließend speichern wir für alle 100 Perioden die Portfoliowerte zu Periodenbeginn W^0 und die Entscheidungsvariablen der Portfoliogewichtungen \mathbf{x}^0 in einem Datenfile.

Performanceanalyse

Unser Optimierungsmodell beinhaltet viele Parameter, was eine Modelltestung, bei der alle Parameter variiert werden, mühsam macht. Wir konzentrieren uns in diesem Abschnitt nur auf die Variation des Parameters s_R . Wir führen die In-Sample-Tests mit den Risikomaßen Var , CVaR und HMCR der Ordnung 2, jeweils mit unterschiedlicher Höhe der Risikoschranke S_R durch. Dadurch können wir für jedes der drei Risikomaße ein Risk-Return-Profil erstellen. Bei den Testdurchläufen mit dem Risikomaß HMCR_2 wählen wir für den Parameter s_R die Werte 0.002, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, bei den Testdurchläufen mit dem Risikomaß CVaR die Werte 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.05 und für das Risikomaß Var die Werte 0.002, 0.005, 0.0125, 0.025, 0.04 und 0.05.

Abbildung 6.3 zeigt die Entwicklung der Portfoliowerte für die drei Risikomaße mit jeweils drei verschiedenen Werten für den Parameter s_R . Zum Vergleich sind außerdem die Wertentwicklungen der risikolosen Anleihe und des DAX abgebildet.

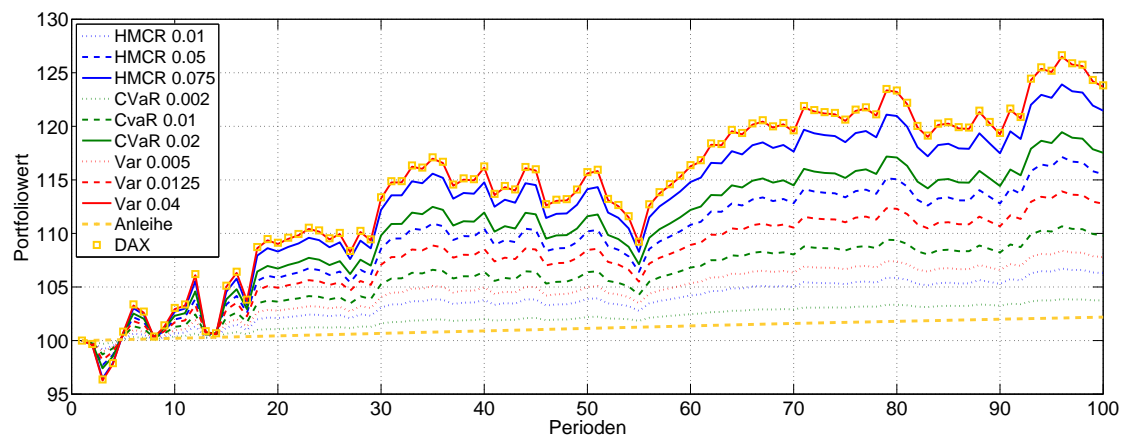


Abbildung 6.3: Performances der Portfolios für unterschiedliche Risikomaße und Schranken im Vergleich zum DAX und der Anleihe im In-Sample-Fall.

Wie zu erwarten war, steigt mit der Höhe des Parameters s_R und damit der Risikoschranke S_R der Anteil des Kapitals, der in den risikobehafteten, aber im Mittel ertragreicheren DAX investiert wird. Damit ähneln die Performances der Portfolios mit steigendem s_R immer mehr der des DAX und ab einer gewissen, vom Risikomaß abhängigen Höhe der Risikoschranke, wird in jeder Periode das gesamte Kapital in den DAX investiert. Der Portfolio-Optimierungsalgorithmus stellt in Abhängigkeit vom Risikomaß und der Risikoschranke ein bestimmtes Verhältnis der Kapitalmengen, die in die Anleihe beziehungsweise in den DAX investiert werden, ein. Dieses Verhältnis bleibt über alle 100 Perioden annähernd konstant, da die Szenariobäume alle mit den selben Input-Daten generiert werden und daher auch das Optimierungsmodell, abgesehen von den sich verändernden Startverteilungen, sehr ähnliche Szenariobäume als Inputs erhält. Der Algorithmus rea-

giert nicht auf vorübergehende Kursveränderungen des DAX und daher können sich die Werte der Portfolios auch nicht besser entwickeln als der DAX.

In Abbildung 6.4 werden die Entwicklungen der durchschnittlichen Wertzuwächse der Testportfolios über die 100 Testperioden in Abhängigkeit des Parameters s_r für die drei Risikomaße dargestellt. Die Funktionen sind monoton wachsend, da eine Erhöhung

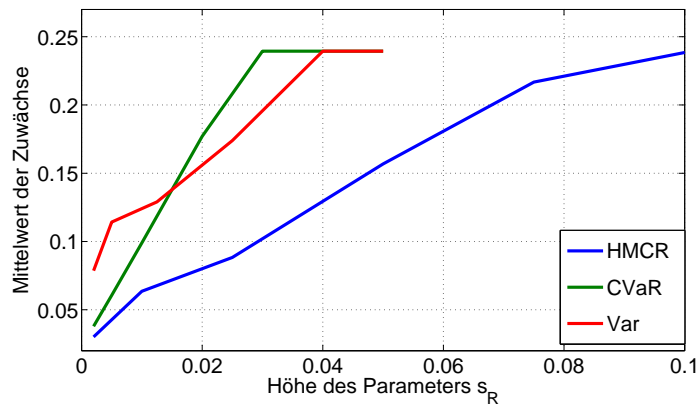
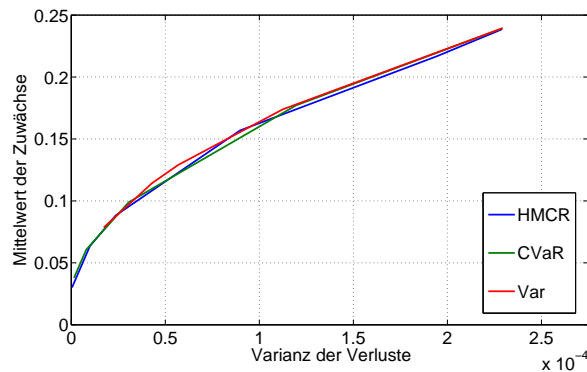
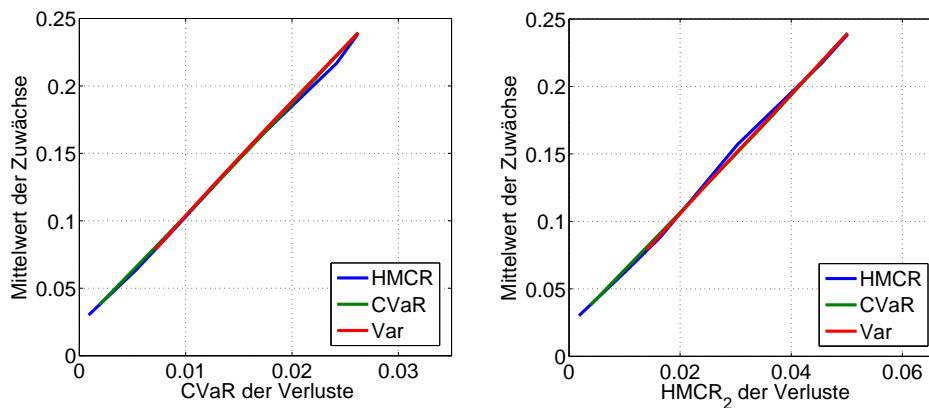


Abbildung 6.4: Mittlere Wertzuwächse der Testportfolios als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall.

von s_R zu einer Erhöhung des in den DAX investierten Anteils am Gesamtkapital und damit zu einer Steigerung der mittleren Zuwächse führt. Die s_R -Werte, ab denen die Funktionen konstant bleiben, sind die Grenzen, ab denen jeweils das ganze Kapital in den DAX investiert wird und die Risikorestriktionen keine Rolle mehr spielen. Wir sehen, dass bei gleicher Höhe von s_R und damit der Risikoschranke, die Methoden mit den Risikomaßen CVaR und Var höhere mittlere Erträge erzielen als die mit dem Risikomaß HMCR. Dies ist nicht verwunderlich, da das Risikomaß HMCR für die auftretenden Verlustverteilungen immer deutlich höhere Werte als die beiden andere Maße aufweist und daher die Risikokontrolle mittels HMCR strenger ist.

Im Folgenden vergleichen wir die Performances der verschiedenen Optimierungsmodelle mithilfe von Risk-Return-Profilen. Die Punkte auf den Risk-Return-Profilen entsprechen den, mit den jeweiligen Optimierungsmethoden erzielbaren Kombinationen von durchschnittlichem Wertzuwachs und beobachtetem Risiko. Wir messen das beobachtete Risiko auch mit den drei Maßen HMCR₂, CVaR und Var. Der Verlust des Portfoliowertes innerhalb einer Periode sei definiert durch $(W_t - W_{t+1})/W_t$, wobei W_t und W_{t+1} die Portfoliowerte am Anfang und am Ende der Periode bezeichnen. Wie wir in den Abbildungen 6.5 und 6.6 sehen, unterscheiden sich die Risk-Return-Profile der jeweiligen Risikomaße nicht sehr stark voneinander. Die Wahl des Risikomaßes hat daher auf die Performances der Optimierungsmodelle in den In-Sample-Tests, bei nur zwei Investitionsmöglichkeiten, keinen Einfluss.

Abbildung 6.5: Risk-Return-Profile mit Var als Risikomaß im In-Sample-Fall.Abbildung 6.6: Risk-Return-Profile mit den Risikomaßen CVaR und HMCR_2 im In-Sample-Fall.

6.1.2 Out-of-Sample-Tests

Durchführung der Tests

Ziel der Out-of-Sample-Tests ist wie im vorigen Abschnitt die Untersuchung der Wertentwicklung der Portfolios über 100 aufeinanderfolgende Perioden, für unterschiedliche Risikomaße und unterschiedliche Risikoschranken. Die Out-of-Sample-Tests verlaufen analog zu den In-Sample-Tests, allerdings mit dem wesentlichen Unterschied, dass das Zeitfenster, aus dem die Daten für die Szenariogenerierung erhoben werden, nicht fix ist, sondern gleitet und insbesondere nicht die Perioden beinhaltet, für welche die Szenarien generiert werden. Wir simulieren damit die reale Situation, bei der für Entscheidungen über die Portfoliogewichtung nur Daten aus der Vergangenheit zur Verfügung stehen.

Wir beginnen die Out-of-Sample-Tests, jeweils für eine bestimmte Auswahl des Risikomaßes und der Risikoschranke, am 20.06.2012. Das gleitende Zeitfenster umfasst die 401 davorliegenden Geschäftstage und damit, wie im In-Sample-Fall, 400 sich überlap-

pende, 2-tägige Perioden. Wir bestimmen aus den Zuwächsen des DAX über diese 400 Perioden die Matrix $TARMOM$ sowie den Parameter ρ und generieren damit einen, für den betrachteten Geschäftstag spezifischen Szenariobaum. Wir investieren 100€ in unser Portfolio, die Hälfte in die Anleihe und die andere Hälfte in den DAX und lösen anschließend das Optimierungsmodell mit dem spezifischen Szenariobaum und den vorab festgelegten Parametern. Wir schichten das Portfolio dem Ergebnis entsprechend um und halten das Portfolio bis zum übernächsten Geschäftstag. Der Wert des Portfolios verändert sich in diesen 2 Geschäftstagen um die Zuwächse dieser Periode. Die aktualisierte Portfolioverteilung zu Beginn des übernächsten Geschäftstages bildet die Startverteilung für den nächsten Schritt.

Wir wiederholen diesen Vorgang für die 99 folgenden, 2-tägigen Perioden, wobei jeweils das Anfangsportfolio aktualisiert wird und das Zeitfenster für die Datenerhebung mitgleitet, also immer nur die 401, direkt vor der aktuellen Periode liegenden Geschäftstage umfasst. Abschließend speichern wir wieder für alle 100 Perioden die Portfoliowerte zu Periodenbeginn W^0 und die Entscheidungsvariablen der Portfoliogewichtungen \mathbf{x}^0 in einem Datenfile.

Performanceanalyse

Wie im vorigen Abschnitt konzentrieren wir uns auch hier auf die Variation des Parameters s_R . Wir führen auch die Out-of-Sample-Tests mit den Risikomaßen Var , $CVaR$ und $HMCR$ der Ordnung 2, jeweils mit unterschiedlicher Höhe der Risikoschranke S_R durch.

Abbildung 6.7 zeigt die Entwicklung der Portfoliowerte für die drei Risikomaße mit jeweils drei verschiedenen Werten für den Parameter s_R . Zum Vergleich sind außerdem die Wertentwicklungen der risikolosen Anleihe und des DAX abgebildet.

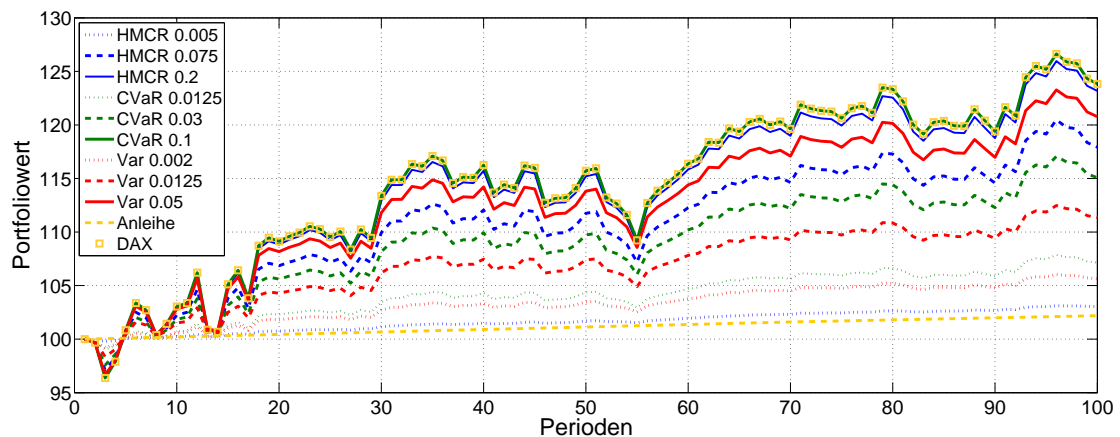


Abbildung 6.7: Performances der Portfolios für unterschiedliche Risikomaße und Schranken im Vergleich zum DAX und der Anleihe im Out-of-Sample-Fall.

Wie bei den In-Sample-Tests steigt auch hier mit der Höhe des Parameters s_R der Anteil des Kapitals, der in den risikobehafteten, aber im Mittel ertragreicheren DAX investiert wird. Damit ähneln die Performances der Portfolios mit steigendem s_R immer mehr der des DAX und ab einer gewissen, vom Risikomaß abhängigen Höhe der Risikoschranke, wird in jeder Periode das gesamte Kapital in den DAX investiert. Auch bei den Out-of-Sample-Tests verändert sich das Verhältnis von Anleihe zu DAX in den Portfolios über die Investitionsdauer nicht wesentlich. Durch vorübergehende Kurseinbrüche des DAX ändern sich zwar bei den Input-Daten für die Szenariogenerierung jeweils das erste Moment, die für die Risikokontrolle entscheidenden höheren Momente der Zuwächse aus dem gleitenden Zeitfenster bleiben jedoch eher konstant. Da die Erwartungswerte der Zuwächse aus dem gleitenden Zeitfenster immer höher als bei der Anleihe sind, investiert der Algorithmus immer soviel in den DAX, wie es die Risikokontrolle zulässt. Daher reagiert der Algorithmus auch im Out-of-Sample-Fall nicht sensibel auf Kursveränderungen des DAX und die Werte der Portfolios können sich nicht besser als der DAX entwickeln.

In Abbildung 6.8 werden die Entwicklungen der mittleren Zuwächse der Portfolios in Abhängigkeit des Parameters s_r für die drei Risikomaße dargestellt. Wie im In-Sample-

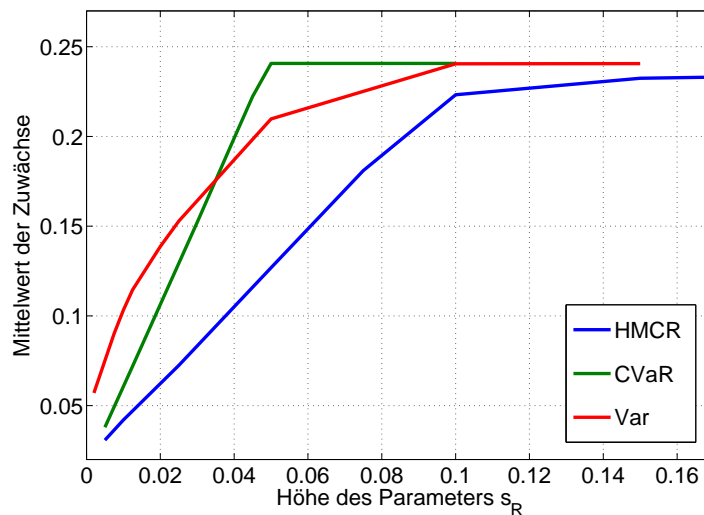


Abbildung 6.8: Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall.

Fall sind die Funktionen monoton wachsend. Die s_R -Werte, ab denen die Funktionen konstant bleiben, sind die Grenzen, ab denen jeweils das ganze Kapital in den DAX investiert wird und die Risikorestriktionen keine Rolle mehr spielen. Ebenfalls wie im In-Sample-Fall sehen wir, dass bei gleicher Höhe von s_R und damit der Risikoschranke, die Methoden mit den Risikomaßen CVaR und Var höhere mittlere Erträge erzielen.

Wie wir in der Abbildungen 6.9 sehen, unterscheiden sich die Risk-Return-Profile der jeweiligen Risikomaße auch im Out-of-Sample-Fall nicht sehr stark voneinander. Die Wahl

des Risikomaßes hat daher auch in diesem Fall auf die Performances der Optimierungsmodelle keinen Einfluss.

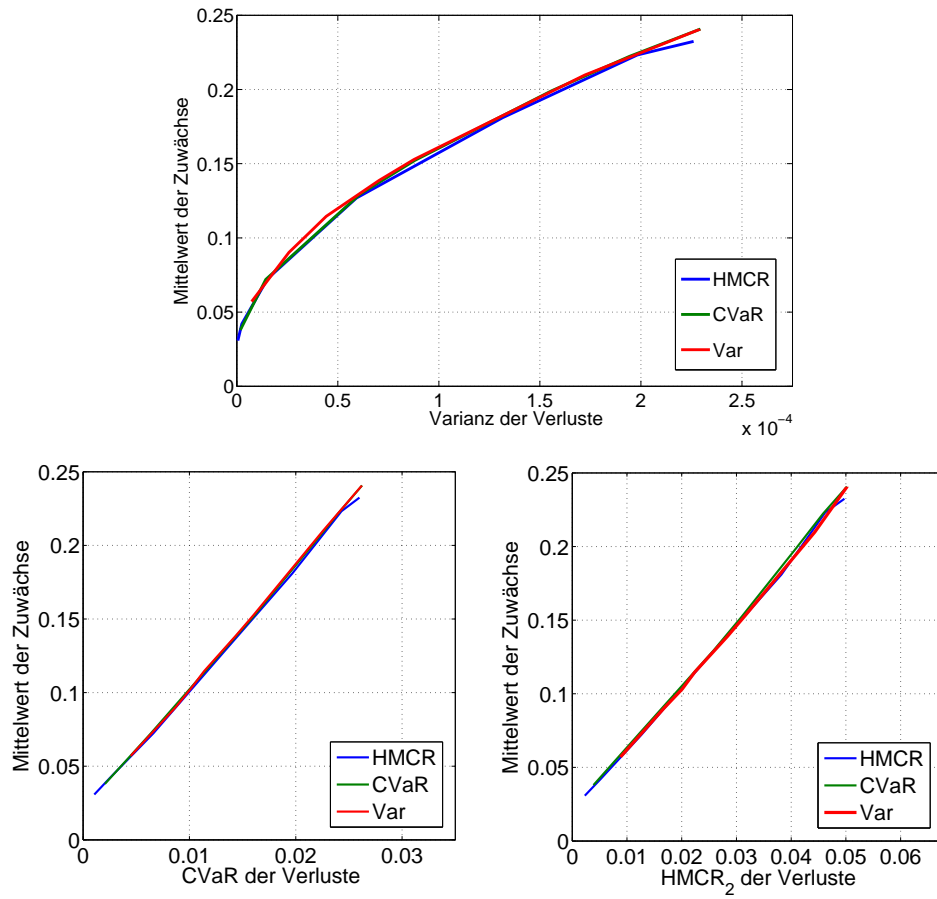


Abbildung 6.9: Risk-Return-Profile mit den Risikomaßen CVaR und $HMCR_2$ im Out-of-Sample-Fall.

6.2 Tests mit einem Aktienportfolio

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Tests verlaufen größtenteils analog zu den In-Sample- und Out-of-Sample-Tests mit nur zwei Investitionsmöglichkeiten aus Abschnitt 6.1. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass das Portfolio in diesem Abschnitt aus einer risikolosen Anleihe und 10 ausgewählten DAX-Aktien besteht, womit wir einer realistischen Investitionssituation schon näher kommen. Für die risikolose Anleihe verwenden wir wieder die fiktive Anleihe aus Abschnitt 6.1. Da die beiden Maße CVaR und HMCR_2 Risiko anhand der ersten und zweiten Tail-Momente der Verlustverteilung messen, wählen wir für unser Testportfolio Aktien aus, deren Zuwachsverteilungen möglichst „heavy-tailed“ sind. Konkret wählen wir aus den 30 DAX-Aktien jene 10 Aktien, deren Verteilungen der Zuwächse in dem Zeitraum vom 20.06.2012 bis zum 26.03.2013 die höchsten Werte der Kurtosis aufweisen. Die Kursverläufe dieser 10 Aktien über die letzten Jahre sind in Abbildung 6.10 zu sehen. Abbildung 6.11 zeigt die skalierten Kursverläufe dieser 10 Aktien im Zeitraum vom 20.06.2012 bis zum 26.03.2013, wobei die Kurse zu Beginn alle den Wert 100 haben.

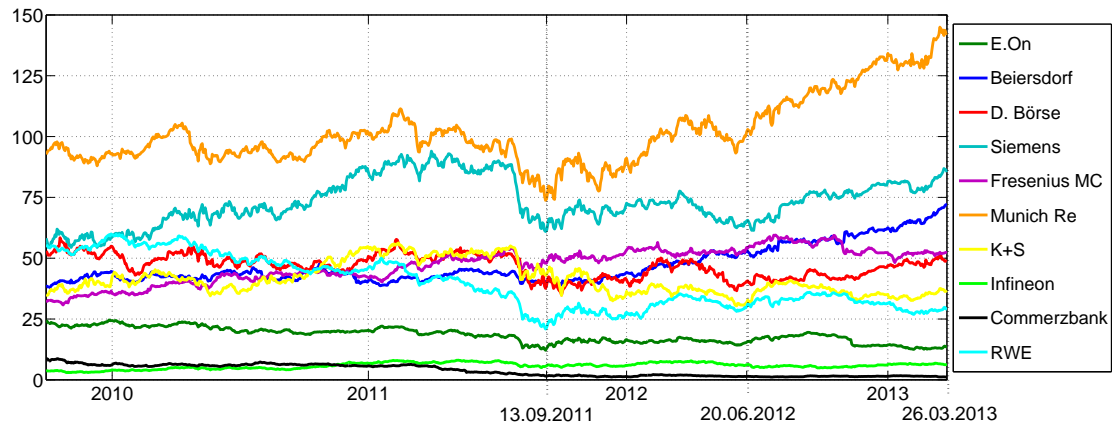


Abbildung 6.10: Börsenkurse der 10 DAX-Aktien über den Zeitraum vom 29.09.2009 bis zum 26.03.2013.

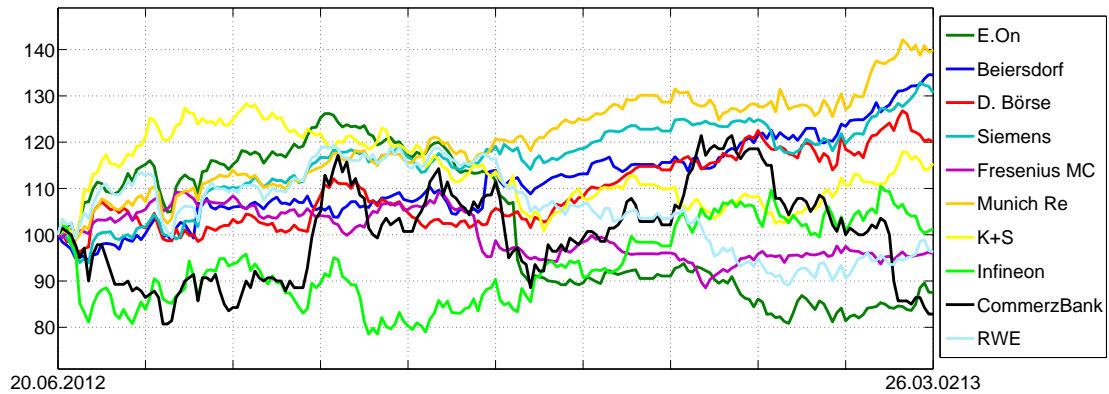


Abbildung 6.11: Skalierte Börsenkurse der 10 DAX-Aktien mit den höchsten Werten der Kurtosis

Die folgenden In-Sample- und Out-of-sample-Tests werden alle zweifach durchgeführt. Im ersten Durchgang hat s° , die obere Schranke für den Anteil am Gesamtkapital, der in eine einzelne Aktie investiert werden darf, den Wert 1, im zweiten Durchgang setzen wir s° auf 0.4.

6.2.1 In-Sample-Tests

Die Durchführung der In-Sample-Tests verläuft völlig analog zu der im Abschnitt 6.1.1 beschriebenen Durchführung. Wieder betrachten wir das fixe, 400 Perioden beinhalten- de Zeitfenster vom 13.09.2011 bis zum 26.03.2013 für die Erhebung der Input-Daten der Szenariogenerierungen. In diesem Fall bestimmen wir neben den ersten vier Momenten der Zuwächse un der Autokorrelation ρ auch noch deren Korrelationen. Wir bestimmen wieder die optimalen Portfoliogewichtungen für 100 aufeinander folgende, 2-tägige Perioden, wobei die erste Periode am 20.06.2012 beginnt. Wir beginnen die Testläufe jeweils mit einem auf Anleihe und Aktien gleichmäßig verteilten Startkapital von 100€ und in allen folgenden Perioden leiten wir die Anfangsgewichtungen der Portfolios jeweils aus den Verteilungen der Vorperioden ab. Wieder konzentrieren wir uns bei den Tests auf die Variation des Parameters s_r . Wir führen die In-Sample-Tests mit den Risikomaßen Var , CVaR und HMCR der Ordnung 2 durch und wählen jeweils verschiedene Werte für den Parameter s_R sowie zwei Einstellungen für die obere Schranke s° .

Die Abbildungen 6.12 und 6.13 zeigen die Entwicklungen der Portfoliowerte für die Risikomaße HMCR_2 , CVaR und Var , jeweils mit verschiedenen Werten des Parameters s_R . Zum Vergleich ist auch die Wertentwicklung eines Portfolios abgebildet, bei dem in der ersten Periode ein Startkapital von 100€ gleichmäßig in die Anleihe und die Aktien

investiert wird und anschließend das Portfolio über alle 100 Perioden, ohne umschichten, gehalten wird. Wir nennen diese sehr einfache Investitionsstrategie „Buy-and-Hold-Strategie“ und verwenden sie als Benchmark für unsere Optimierungsalgorithmen.

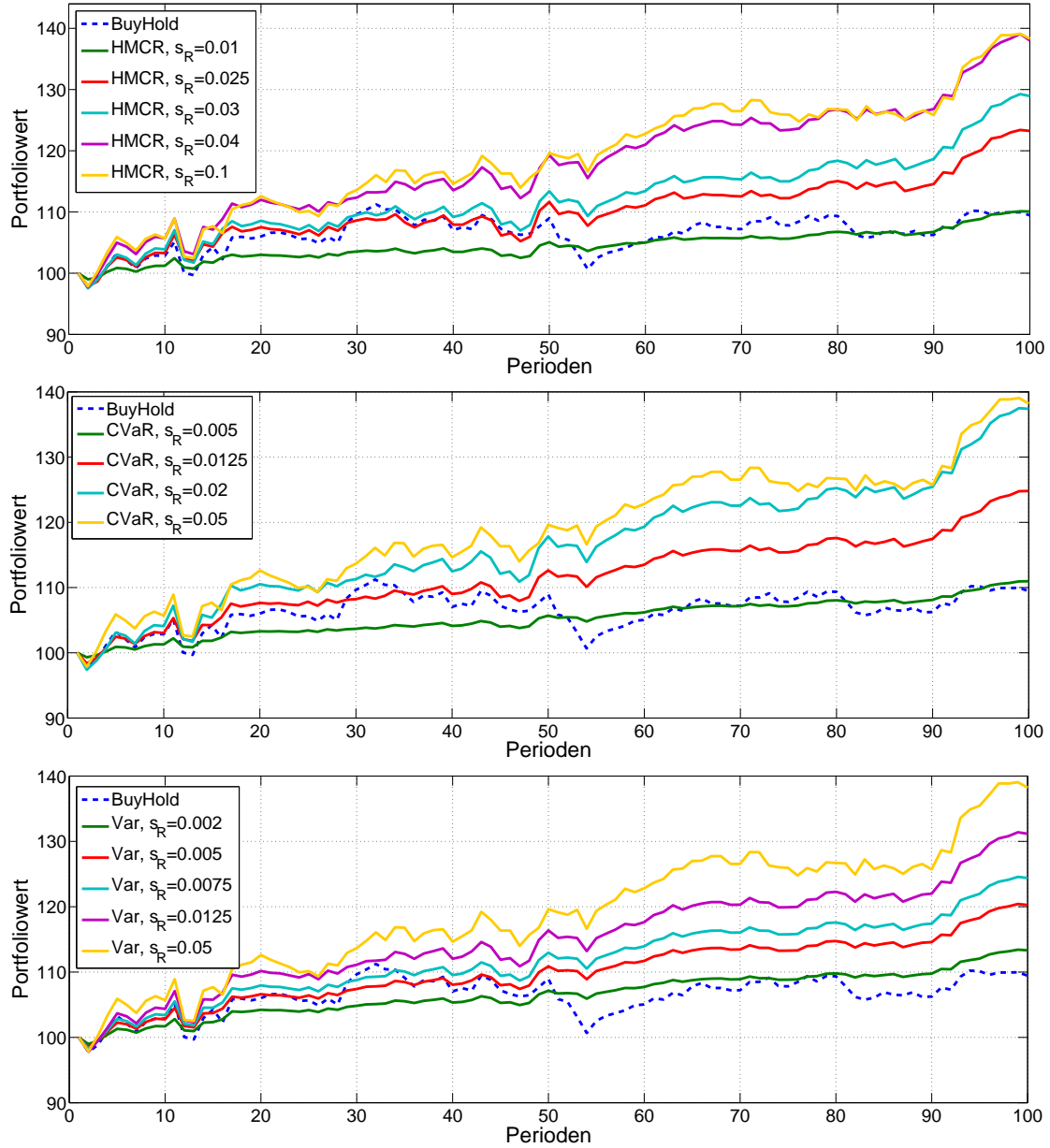


Abbildung 6.12: Performances der Portfolios für die Risikomaße $HMCR_2$, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

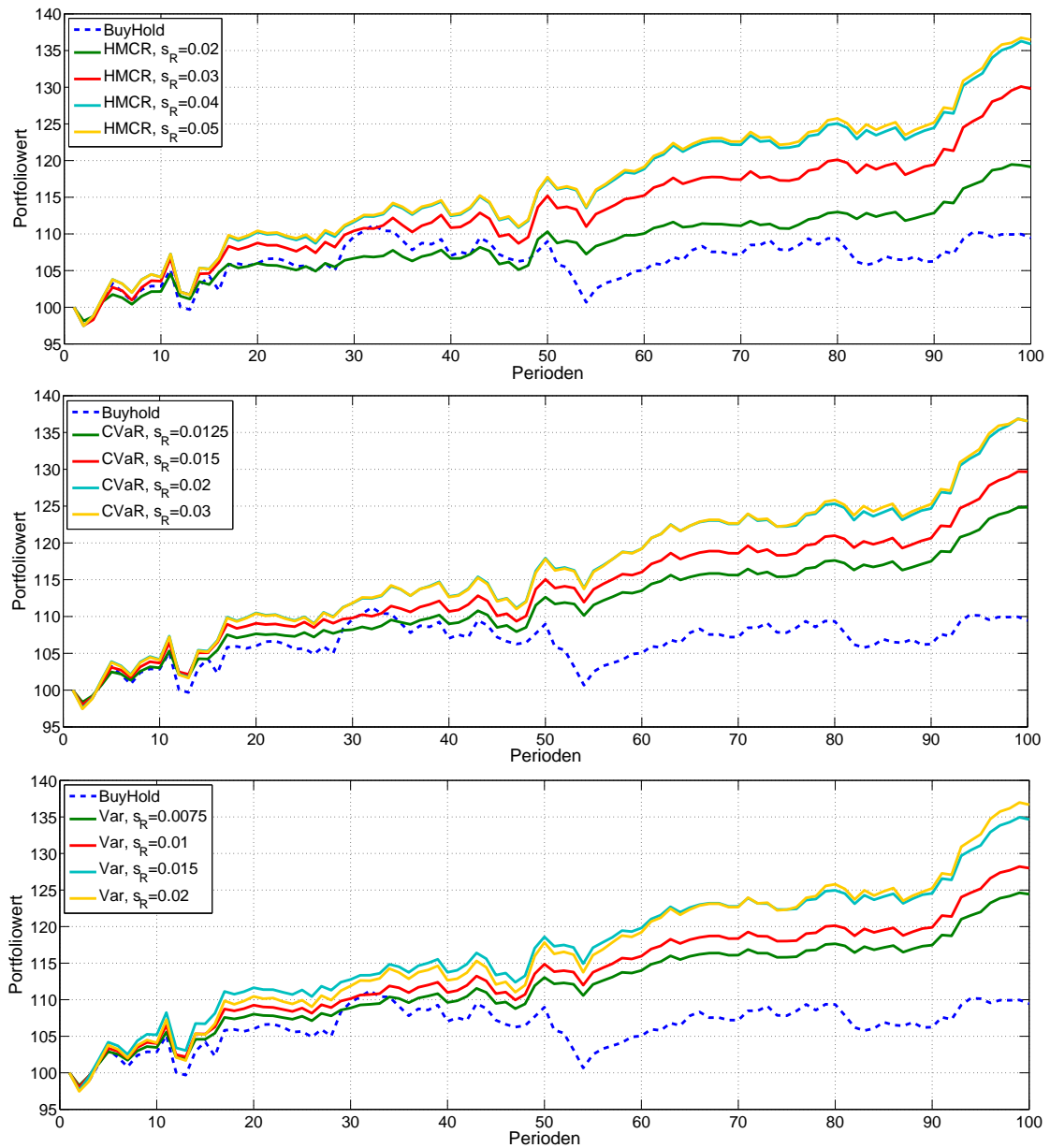


Abbildung 6.13: Performances der Portfolios für die Risikomaße $HMCR_2$, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^\circ = 0.4$.

Da bei den In-Sample-Tests die mittleren Zuwächse aller Aktien über die 100 Perioden schon zu Beginn bekannt sind, führt eine Erhöhung des Parameters s_R und damit der Risikoschranke S_R zu einer Verlagerung des Kapitals weg von der Anleihe, hin zu den Aktien mit den höchsten mittleren Erträgen. Da sich, abgesehen von den Portfolio-

werten, die Input-Daten über die Perioden nicht wesentlich ändern, variieren auch die Portfoliogewichtungen über die Perioden nicht wesentlich.

In den Abbildungen 6.14 und 6.14 werden die Entwicklungen der mittleren Zuwächse der Portfolios in Abhängigkeit des Parameters s_r für die drei Risikomaße dargestellt. Die Funktionen sind monoton wachsend, da eine Erhöhung von s_R zu einer stärkeren Gewichtung der Aktien mit hohen mittleren Erträgen führt. Im In-Sample-Fall sind die ertragreichsten Aktien bereits ab der ersten Periode bekannt und es wird ausschließlich in diese Aktien investiert. Die s_R -Werte, ab denen die Funktionen konstant bleiben, sind die Grenzen, ab denen die Risikorestriktionen nicht mehr greifen. Wie bei den Tests mit nur zwei Investitionsmöglichkeiten sehen wir, dass bei gleicher Höhe von s_R und damit der Risikoschranke, die Methoden mit den Risikomaßen CVaR und Var höhere mittlere Erträge erzielen als die mit dem Risikomaß HMCR.

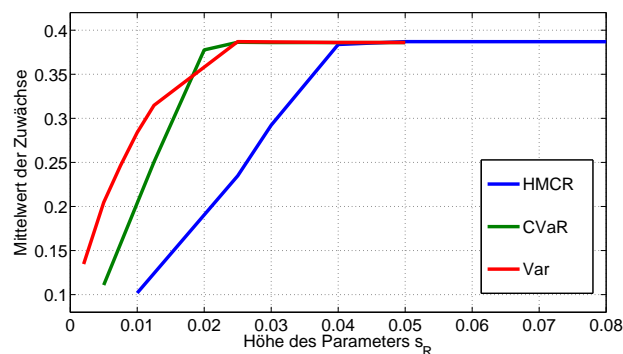


Abbildung 6.14: Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

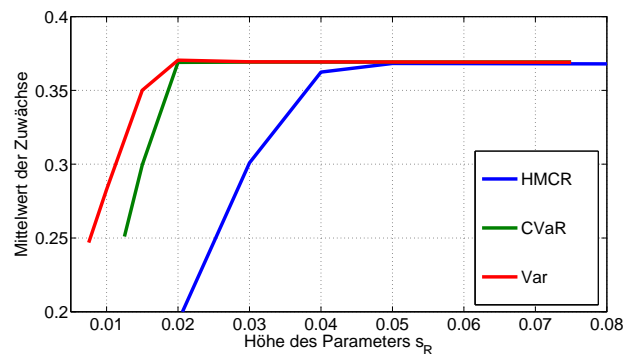


Abbildung 6.15: Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.

Die Abbildungen 6.16 und 6.17 zeigen für die drei Risikomaße die jeweils beste Entwicklung der Portfoliowerte und zum Vergleich die Wertentwicklung des Buy-and-Hold-Portfolios. Im Fall $s^o = 1$ wird bei allen drei Methoden annähernd das ganze Kapital

in die Aktie mit dem größten mittleren Wertzuwachs, die Munich-Re-Aktie, investiert. Die Performances der drei Risikomaße und die der Munich Re-Aktie sind nahezu identisch. Im Fall $s^o = 0.4$ stimmen die jeweils besten Portfolioentwicklungen für die drei Risikomaße ebenfalls überein und Abbildung 6.18 zeigt die Verlauf der optimalen Portfoliogewichtung über die 100 Testperioden.

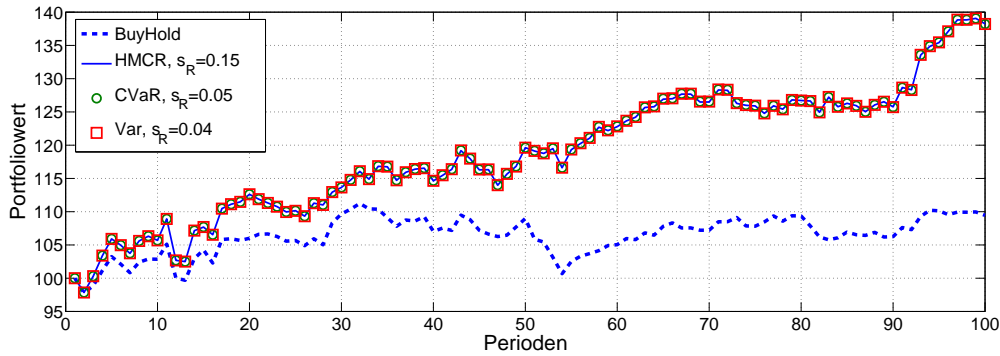


Abbildung 6.16: Die besten Performances für die Risikomaße $HMCR_2$, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

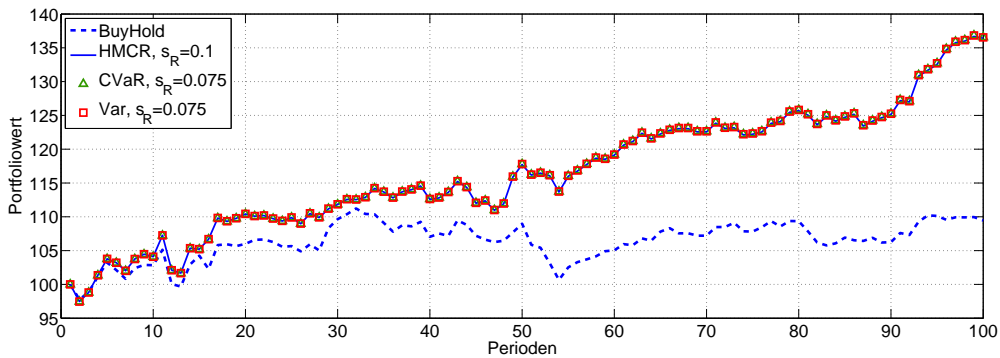


Abbildung 6.17: Die besten Performances für die Risikomaße $HMCR_2$, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.

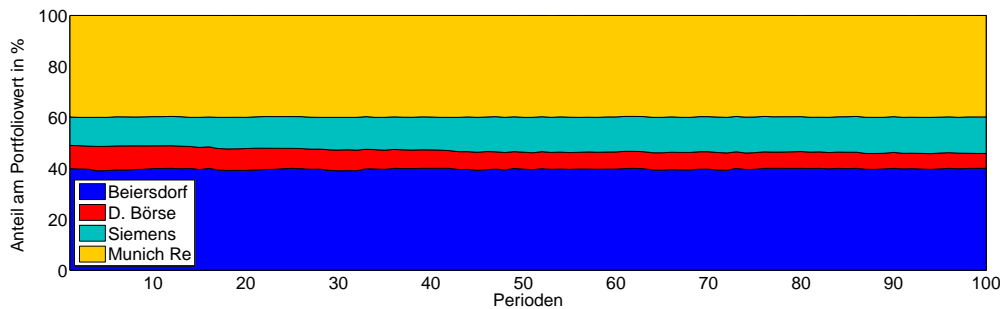


Abbildung 6.18: Die für alle drei Risikomaße optimale Portfoliogewichtung im In-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.

6.2.2 Out-of-Sample-Tests

Wie im Fall nur zweier Investitionsmöglichkeiten verlaufen die Out-of-Sample-Tests in diesem Abschnitt großteils analog zu den In-Sample-Tests mit dem Unterschied, dass das Zeitfenster, aus dem die Daten für die Szenariogenerierung erhoben werden, nicht fix ist, sondern gleitet. Es beinhaltet nicht die Perioden, für welche die Szenarien generiert werden, wodurch eine reale Situation, in der für Entscheidungen über Portfoliogewichtungen nur Daten aus der Vergangenheit zur Verfügung stehen, simuliert wird.

Wir bestimmen wieder die optimalen Portfoliogewichtungen für 100 aufeinander folgende, 2-tägige Perioden, wobei die erste Periode am 20.06.2012 beginnt. Wir beginnen die Testläufe wie im In-Sample-Fall jeweils mit einem auf Anleihe und Aktien gleichmäßig verteilten Startkapital von 100€ und in allen folgenden Perioden leiten wir die Anfangsgewichtungen der Portfolios jeweils aus den Verteilungen der Vorperioden ab. Das gleitende Zeitfenster beinhaltet, wie bei den Out-of-Sample-Tests im vorigen Abschnitt, jeweils die 400 vorhergehenden, sich überlappenden Perioden. Wir führen die Out-of-Sample-Tests mit den Risikomaßen Var, CVaR und HMCR der Ordnung 2 durch und wählen jeweils verschiedene Werte für den Parameter s_R sowie zwei Einstellungen für die obere Schranke s^o .

Die Abbildungen 6.19, 6.20 und 6.21 zeigen die Entwicklungen der Portfoliowerte für die Risikomaße HMCR₂, CVaR und Var, jeweils mit verschiedenen Werten des Parameters s_R . Als Benchmark ist jeweils auch die Performance der Buy-and-Hold-Strategie abgebildet.

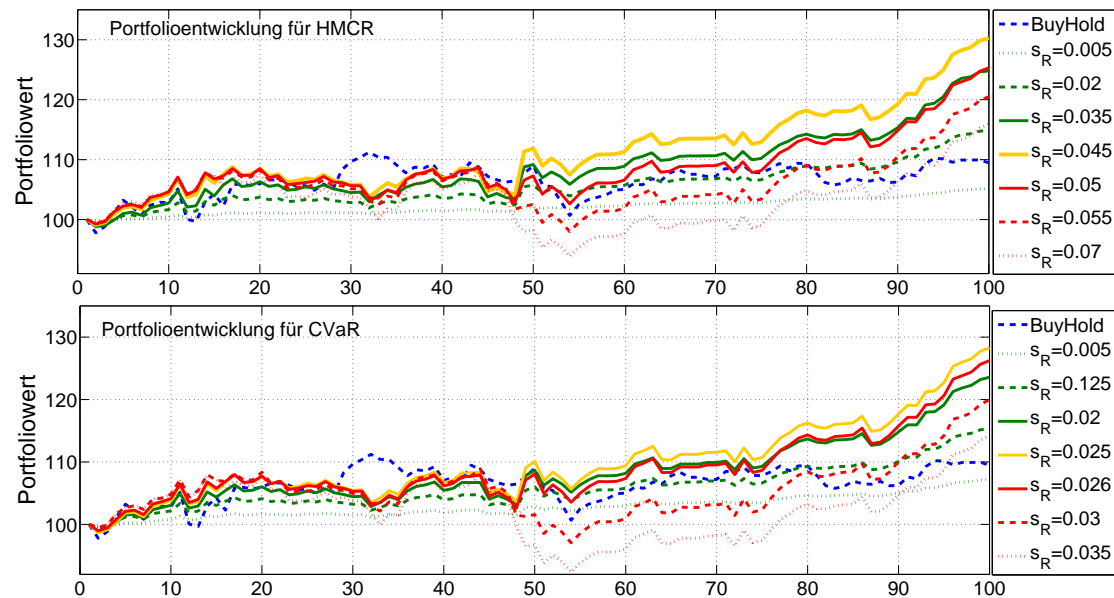


Abbildung 6.19: Performances der Portfolios für die Risikomaße HMCR₂ und CVaR im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

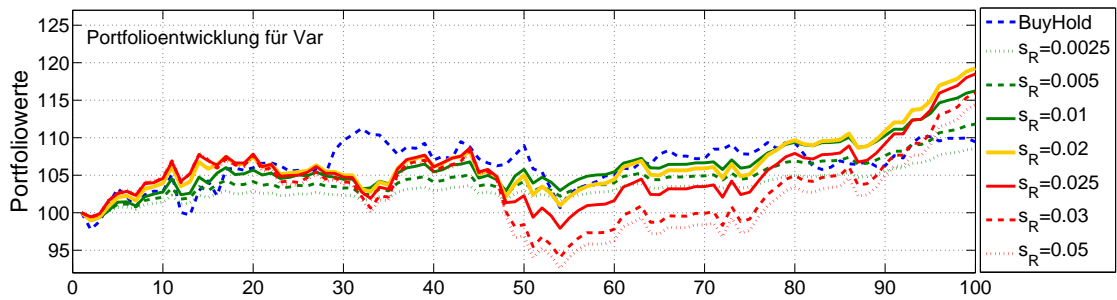


Abbildung 6.20: Performance der Portfolios für das Risikomaße Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

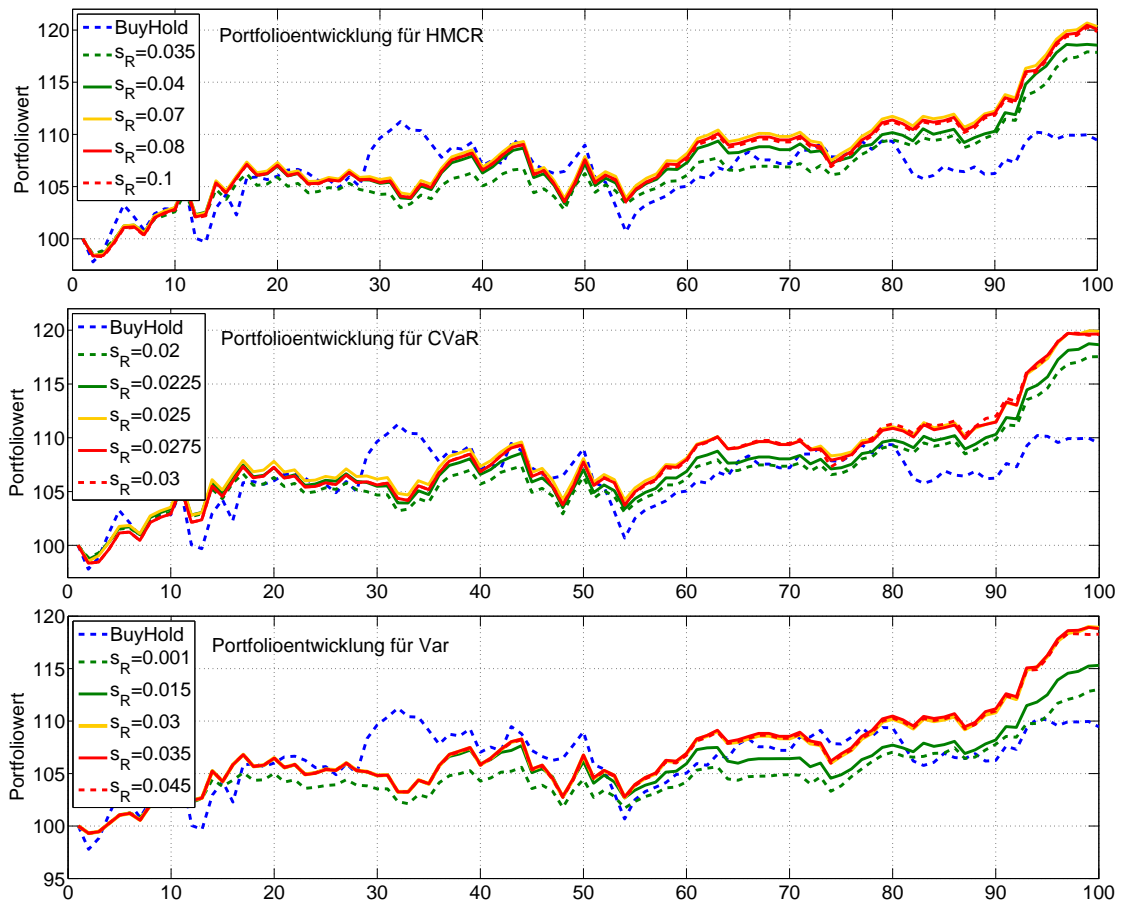


Abbildung 6.21: Performances der Portfolios für die Risikomaße $HMCR_2$, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.

Im Unterschied zu den In-Sample-Tests führt eine Erhöhung des Parameters s_R und damit der Risikoschranke S_R im Out-of-Sample-Fall nicht zwingend zu einer besseren Wertentwicklung. Eine Erhöhung der Risikoschranke führt zu einer immer stärkeren Gewichtung der ertragreichsten Aktien. Wegen dem gleitenden Zeitfenster ändern sich hier, anders als im In-Sample-Fall, die Input-Daten über die Perioden deutlich und dadurch werden auch die Portfolios laufend umgeschichtet. Anders als im In-Sample-Fall, ist zu Beginn noch nicht bekannt, welche Aktien über die 100 Perioden den höchsten mittleren Ertrag liefern. Die Erhöhung der Risikoschranke führt zur Konzentration des Portfolios auf die Aktien, die im Zeitfenster die höchsten Erträge gehabt haben. Verliert eine der Aktien an Wert, bleibt ihr Gewicht im Portfolio so lange nahezu konstant, bis eine andere Aktie im betrachteten Zeitfenster einen höheren mittleren Ertrag aufweist. Je geringer das Portfolio diversifiziert ist, umso stärker können sich Kurseinbrüche der höher gewichteten Aktien auf die Performance des Portfoliowertes auswirken.

In den Abbildung 6.22 und 6.23 werden die Entwicklungen der mittleren Zuwächse der Portfolios in Abhängigkeit des Parameters s_r für die drei Risikomaße dargestellt.

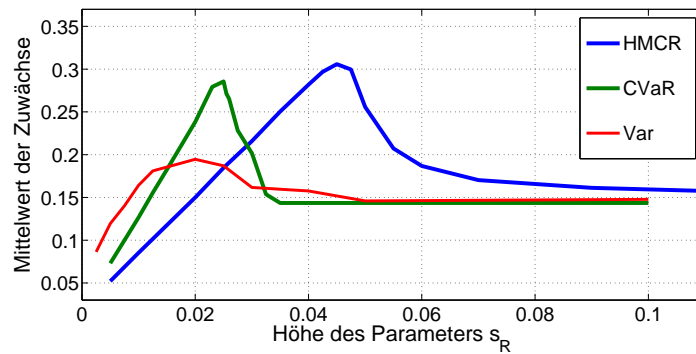


Abbildung 6.22: Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

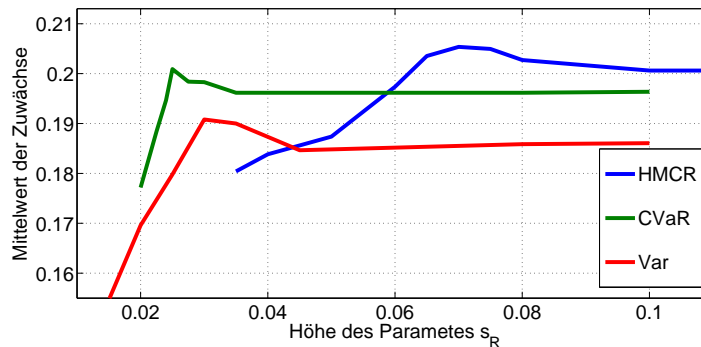


Abbildung 6.23: Mittlere Zuwächse als Funktionen des Parameters s_R im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 0.4$.

Wie in den bisherigen Fällen wachsen die Funktionen anfangs monoton, allerdings erreichen sie dann für spezifische Werte des Parameters s_R ihre Maxima und fallen anschließend monoton, bis sie sich auf einem gewissen Niveau stabilisieren.

Die Abbildungen 6.24 und 6.24 zeigen für die drei Risikomaße die jeweils beste Entwicklung der Portfoliowerte und zum Vergleich die Wertentwicklung der Buy-and-Hold-Strategie. Wir sehen, dass für die spezielle Auswahl der Aktien anhand der Kurtosis der Zuwachsverteilungen, das Portfolio-Optimierungsmodell mit dem Risikomaß HMCR₂ für beide Einstellungen des Parameters s° der Gewinner ist. Fast so gut schneidet das Optimierungsmodell mit dem Risikomaß CVaR ab. Beide Modelle performen deutlich besser als die Buy-and-Hold-Strategie sowie das Modell mit dem Riskimaß Var.

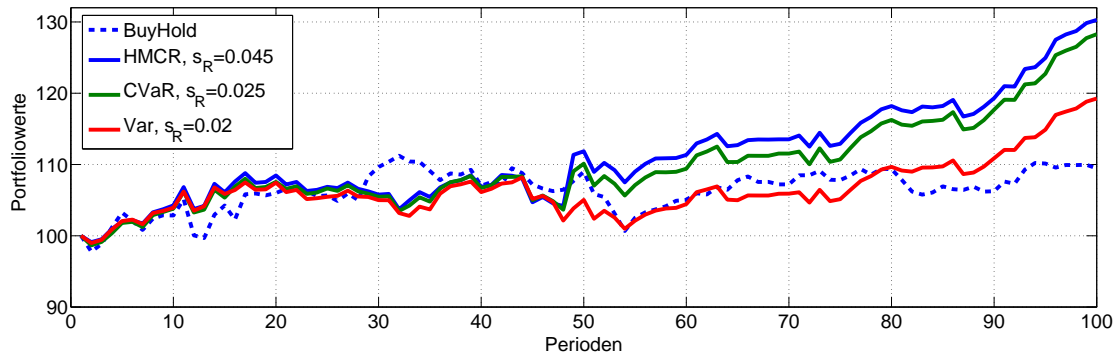


Abbildung 6.24: Die besten Performances für die Risikomaße HMCR₂, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^\circ = 1$.

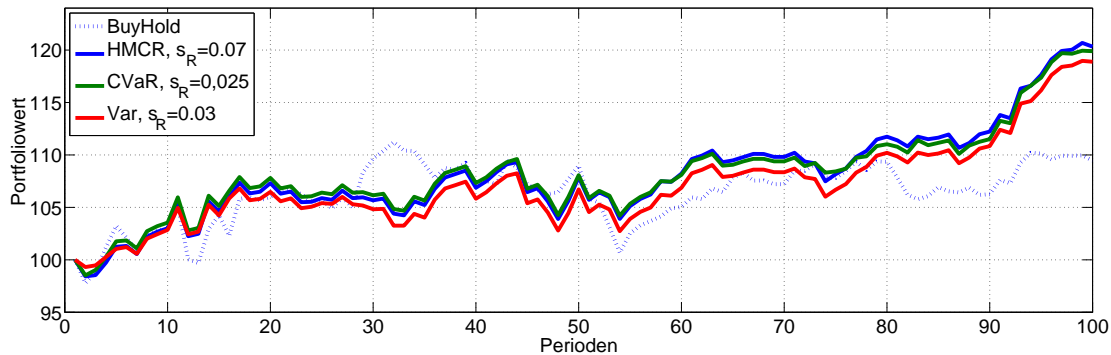


Abbildung 6.25: Die besten Performances für die Risikomaße HMCR₂, CVaR und Var im Vergleich zur Buy-and-Hold-Strategie im Out-of-Sample-Fall und für $s^\circ = 0.4$.

Abschließend zeigen die Abbildung 6.26 und 6.27 die Verläufe der für die jeweiligen Risikomaße optimalen Portfoliogewichtungen über die 100 Testperioden.

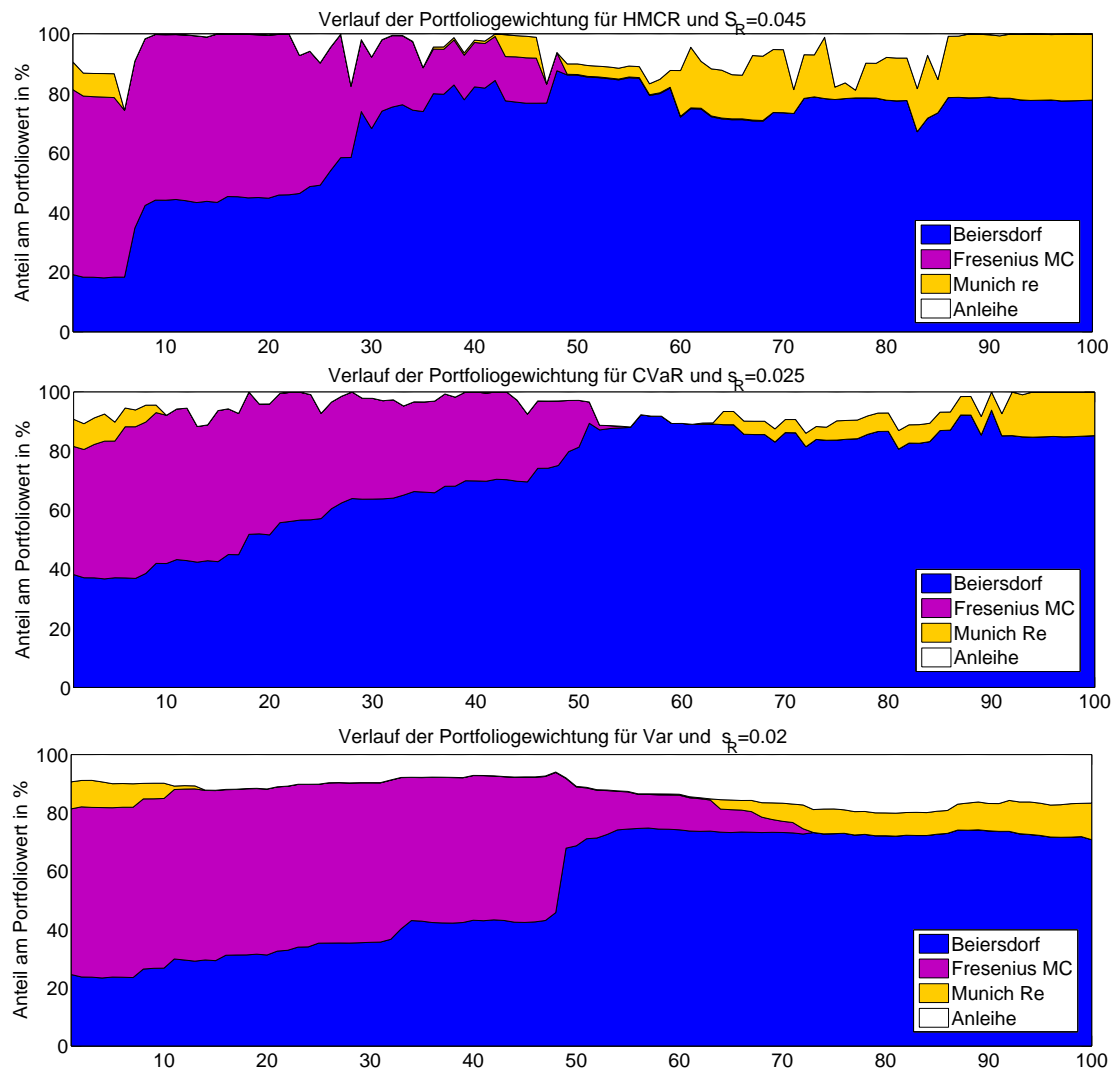


Abbildung 6.26: Verläufe der für die jeweiligen Risikomaße optimalen Portfoliogewichtungen im Out-of-Sample-Fall und für $s^o = 1$.

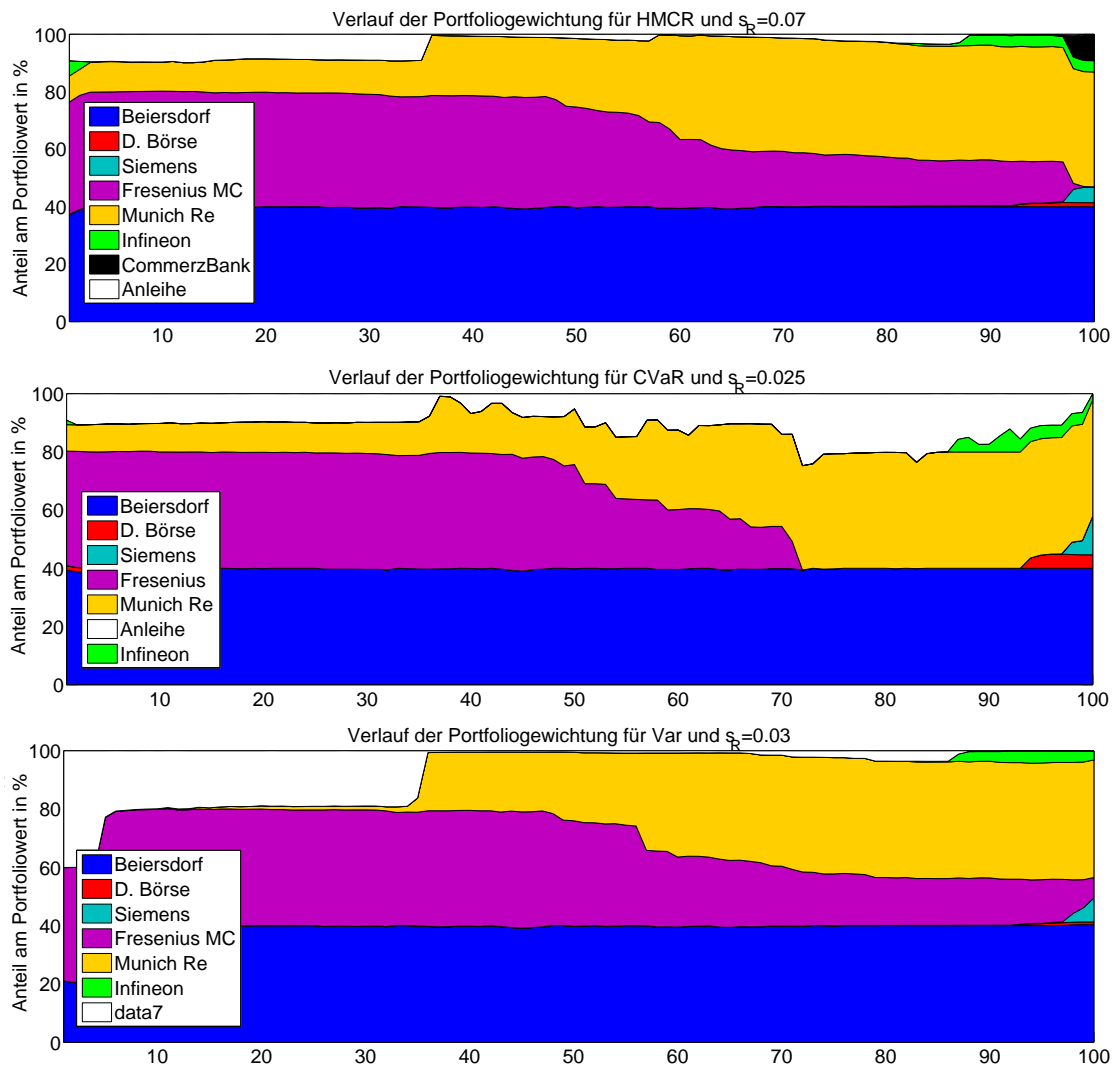


Abbildung 6.27: Verläufe der für die jeweiligen Risikomaße optimalen Portfoliogewichtungen im Out-of-Sample-Fall und für $s^\circ = 0.4$.

Obwohl die erhaltenen Resultate von vielen Parametern und insbesondere von der Auswahl der Aktien abhängen, zeigen die Out-of-Sample-Tests doch, dass die beiden HMCR-Maße $HMCR_2$ und CVaR vielversprechend performen und eine mögliche Wahl der Risikomaße in der Praxis der Portfolio-Optimierung darstellen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Ein Ziel dieser Arbeit war es, eine Einführung in die mehrstufige Portfolio-Optimierung im Rahmen der stochastischen Optimierung mit allen Teilaspekten, wie Risikokontrolle und Szenariogenerierung, zu geben. Ein weiteres Ziel war die Analyse der Performance eines mehrstufigen Portfolio-Optimierungsmodells mit HMCR-Risikomaßen im Vergleich zu der Performance des Optimierungsmodells unter Verwendung der Varianz beziehungsweise der Buy-and-Hold-Strategie anhand zweier Testportfolios.

Bereits in der Einleitung wird ersichtlich, dass die Komplexität der Problemstellungen in der mehrstufigen Portfolio-Optimierung im Vergleich zu der Ein-Perioden-Portfolio-Optimierung deutlich zunimmt. Das Finden einer analytischen Lösung eines nur einigermaßen realistischen Portfolio-Optimierungsproblems ist insbesondere im Mehr-Perioden-Fall schwierig. Daher werden solche Probleme in der Regel numerisch mithilfe geeigneter Szenariobäume gelöst. Die Szenarien bilden zusammen eine diskretisierte Version des Datenprozesses und um einerseits aussagekräftige und andererseits einigermaßen stabile Ergebnisse zu erhalten, sollte die Anzahl der Knoten in den Teilbäumen möglichst hoch sein. Die Anzahl der Knoten des ganzen Szenariobaumes wächst exponentiell mit der Anzahl der Perioden und daher führen bereits wenige Perioden zu diskreten stochastischen Optimierungsproblemen mit sehr vielen Parametern und Variablen, was sich spürbar auf die Laufzeiten der Lösungsverfahren auswirkt und das Hauptproblem mehrstufiger Portfolio-Optimierung darstellt.

Die Performance von Portfolio-Optimierungsmodellen in realen Situationen hängt insbesondere von der Wahl der Risikomaße und von der Methode der Szenariogenerierung ab. Der CVaR und die anderen Risikomaße der HMCR-Familie sind kohärent und ihre Implementierung in stochastischen Optimierungsproblemen führt zu konvexen Problemstellungen, womit sie aus theoretischer Sicht eine vernünftige Wahl der Risikomaße darstellen. Wie wir an den numerischen Tests im vorigen Kapitel gesehen haben, unterscheiden sich die Wertentwicklungen der Portfolios für die verschiedenen Risikomaße im Fall einer risikolosen und nur einer risikobehafteten Investitionsmöglichkeit nicht nennenswert. Im realistischeren Fall einer risikolosen Anleihe und 10 Aktien unterscheiden sich die Wertentwicklungen der verschiedenen Portfolios im Out-of-Sample-Test für beide Einstellungen der oberen Schranke s^o jedoch erheblich. Beide HMCR-Maße performen im Vergleich zu der Varianz und der Buy-and-Hold-Strategie sehr vielversprechend, womit sie auch für die Praxis der Portfolio-Optimierung eine mögliche Wahl der Risikomaße darstellen.

Mindestens soviel Einfluss auf die Performance des Modells wie die Wahl des Risikomaßes hat die Wahl der Methode für die Szenariogenerierung, da die Szenarien Erwartungen und Prognosen über die Kursentwicklungen beinhalten. Wir haben in dieser Arbeit einen Moment-Matching-Algorithmus für die Szenariogenerierung über mehrere Perioden vorgestellt, bei der die Teilbaumverteilungen vorab festgelegte Momente und Korrelationen aufweisen. Für die numerischen Tests wurden die Szenariobäume mit einer Version dieses Algorithmus generiert, bei der einfache Abhängigkeitsstrukturen in Form von Autokorrelationen eingeführt wurden. Die Vorgaben für die ersten vier Momente und Korrelationen der Teilbäume entsprachen den Momenten und Korrelationen der Zuwächse der Aktienkurse innerhalb eines 400 Perioden umfassenden Zeitfensters. Je mehr Perioden das Zeitfenster umfasst, desto weniger ändern sich die Vorgaben für Momente und Korrelationen, wenn das Zeitfenster um eine Periode weiter gleitet. Je kleiner daher das Zeitfenster ist, umso mehr werden kurzfristige Trends der Aktienkurse durch diese Methode der Szenariogenerierung berücksichtigt. Daher ist die Länge des Zeitfenster ein für die Performance der Portfolio-Optimierungsmodells entscheidender Parameter, der in weiteren Tests untersucht werden sollte. Ebenfalls sollten Veränderungen der Abhängigkeitsstrukturen innerhalb der generierten Szenariobäume ausführlich getestet werden.

Es existiert bereits eine Vielzahl an Methoden für die Szenariogenerierung über mehrere Perioden und eine vergleichende Analyse der Performances dieser Methoden im Rahmen der Portfolio-Optimierung wäre sicherlich nicht nur für die Praxis eine interessante Aufgabe.

Literaturverzeichnis

- [1] ARTZNER, P. ; DELBAEN, F. ; EBER, J. M. ; HEATH, D.: Coherent Measures of Risk. In: *Mathematical Finance* 9 (1999), Nr. 3, S. 203 – 228
- [2] BIRGE, J. R. ; LOUVEAUX, F.: *Introduction to stochastic programming* -. 2. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011
- [3] DELBAEN, F.: *Coherent risk measures on general probability spaces*. 2000. – ETH Zurich
- [4] DUPAČOVÁ, J. ; CONSIGLI, G. ; WALLACE, S. W.: Scenarios for multi stage stochastic programs. In: *Annals of Operations Research* 100 (2001), Nr. 1-4, S. 25 – 53
- [5] DUPAČOVÁ, J. ; HURT, J. ; ŠTĚPÁN, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2002
- [6] FISCHER, T.: Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 32 (2003), Nr. 1, S. 135 – 146
- [7] FISHBURN, P. C.: Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. In: *The American Economic Review* 67 (1977), Nr. 2, S. 116 – 126
- [8] FÖLLMER, H. ; SCHIED, A.: Convex measures of risk and trading constraints. In: *Finance and Stochastics* 6 (2002), S. 429 – 447
- [9] HØYLAND, K. ; KAUT, M. ; WALLACE, S. W.: A Heuristic for Moment-matching Scenario Generation. In: *Computational Optimization and Applications* 24 (2003), S. 169 – 185
- [10] HYLAND, K. ; WALLACE, S. W.: Generating scenario trees for multistage decision problems. In: *Management Science* 47 (2001), Nr. 2, S. 295 – 307
- [11] KALL, P. ; MAYER, J.: *Stochastic Linear Programming - Models, Theory, and Computation*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011
- [12] KAUT, M. ; WALLACE, S. W.: *Multi-period scenario tree generation using moment-matching: Example from option pricing*. 2003. – Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology.
- [13] KPMG: *Kapitalkostenstudie 2012/2013*. 2013. – <http://www.kpmg.com/CH/de>
- [14] KROKHMAL, P.: Higher Moment Coherent Risk Measures. In: *Quantitative Finance* 7 (2007), Nr. 4, S. 373–387

- [15] KROKHMAL, P. ; SOBERANIS, P.: Risk optimization using p-order conic constraints: A linear programming approach. In: *European Journal of Operational Research* 201 (2010), Nr. 3, S. 653–671
- [16] MARKOWITZ, H. M.: Portfolio Selection. In: *The Journal of Finance* 7 (1952), Nr. 1, S. 77 – 91
- [17] MARKOWITZ, H. M.: *Portfolio selection - efficient diversification of investments*. New impression. New Haven, London : Yale University Press, 1959
- [18] MARQUARDT, D.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. In: *SIAM J. Appl. Math* 11 (1963), S. 431 – 441
- [19] MITRA, S.: A White Paper on Scenario Generation for Stochastic Programming. In: *OptiRisk Systems: White Paper Series, Domain: Finance Reference Number: OPT 004* (2008)
- [20] ROCKAFELLAR, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970
- [21] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, S.: Optimization of Conditional Value-at-Risk. In: *Journal of Risk* 2 (2000), S. 21 – 41
- [22] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, S.: Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. In: *Journal of Banking and Finance* 26 (2002), Nr. 7, S. 1443 – 1471
- [23] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, S. ; ZABARANKIN, M.: *Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization*. 2002. – Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, Working Paper
- [24] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, S. ; ZABARANKIN, M.: Generalized Deviations in Risk Analysis. In: *Finance and Stochastics* 10 (2006), Nr. 1, S. 51 – 74
- [25] SHAPIRO, A. ; DENTCHEVA, D. ; RUSZCZYŃSKI, A. P.: *Lectures on Stochastic Programming - Modeling and Theory*. Philadelphia : SIAM, 2009
- [26] STEINBACH, M. C.: Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. In: *Society for Industrial and Applied Mathematics, Siam Review* 43 (2001), Nr. 1, S. 31 – 85