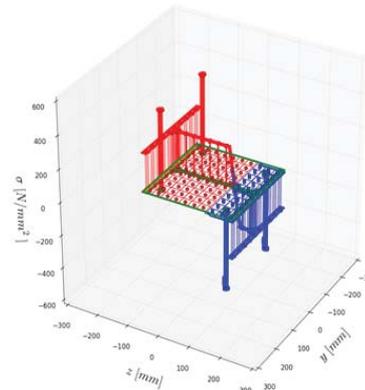
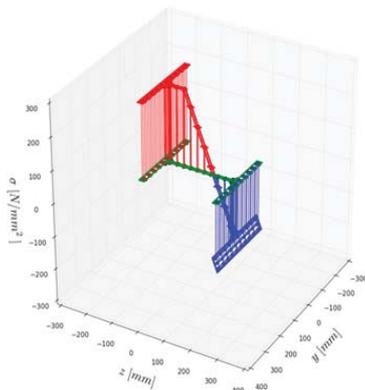
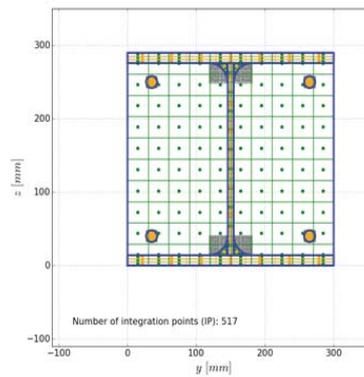
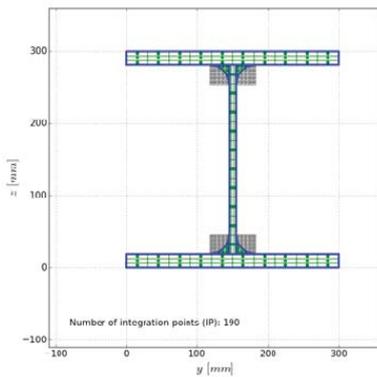


Entwicklung eines Softwaretools zur Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit beliebiger Verbundquerschnitte mit nichtlinearem Materialverhalten



D-5-53/2015

Markus Plakolb, BSc
 Institut für Stahlbau
 Technische Universität Graz

Entwicklung eines Softwaretools zur Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit beliebiger Verbundquer- schnitte mit nichtlinearem Materialverhalten

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Bauingenieurwissenschaften – Konstruktiver Ingenieurbau

Eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Fakultät für Bauingenieurwissenschaften – Institut für Stahlbau

Betreuer

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterweger

Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Taras

Verfasser

Markus Plakolb, BSc

Graz, September 2015

Eidesstaatliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel benutzt habe. Unter den angeführten Quellen habe ich die wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit ident.

Affidavit

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum / Date

Unterschrift / Signature

Danksagung

Vorab bedanke ich mich bei all denjenigen, die mich im Zuge der Erstellung dieser Masterarbeit, sei es durch fachspezifische Diskussionen oder Ratschläge, unterstützt haben.

Ich bedanke mich besonders bei Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterweger, dass ich diese Forschungsthematik am Institut für Stahlbau bearbeiten konnte. Großer Dank gilt Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Taras, der mich während der Erstellung dieser Arbeit hervorragend betreut hat.

Weiters bedanke ich mich bei meinen Brüdern Jürgen, Thomas und Philipp sowie Petra Grimps für das sorgfältige Korrekturlesen. Abschließend ein großes Danke an meine Eltern, die mir das Studium an der TU Graz ermöglicht haben.

Kurzfassung

Diese Masterarbeit beinhaltet die Berechnung der Spannungs- und Dehnungszustände sowie die Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit beliebiger Verbundbauquerschnitte mit nichtlinearem Materialverhalten. Der Fokus dieser Masterarbeit liegt auf der Implementierung eines numerischen Softwaretools, um die materiell nichtlinearen Effekte auf das Querschnittstragverhalten effektiv analysieren zu können. Anhand mehrerer Beispiele aus dem Stahl- und Verbundbau werden die numerischen Berechnungsergebnisse mit den konventionellen „Handrechnungsverfahren“ überprüft.

Abstract

This master's thesis generally includes the calculation of stress and strain states and the determination of the cross-section resistance of any composite cross-sections with nonlinear material behavior. The focus of this thesis is the implementation of a numerical software tool to effectively analyze the material nonlinear effects on the cross-section behavior. Based on examples of steel and composite cross-sections the numerical calculation results are reviewed with the conventional "hand calculation method".

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung und allgemeine Zielsetzung.....	1
1.2	Motivation	2
1.3	Notation.....	3
1.4	Verwendete Programmiersprache.....	3
2	Mechanische Modelle und Grundgleichungen	5
2.1	Äußere Belastung.....	5
2.2	Bernoulli-Hypothese	5
2.3	Grundgleichung der Spannungsintegration	6
3	Integrationsverfahren	7
3.1	Allgemeine Vorgehensweise.....	7
3.2	Analytische Spannungsintegration.....	8
3.2.1	Konstante Mitteldehnung.....	9
3.2.2	Konstante Krümmung um die y-Achse.....	10
3.2.3	Konstante Krümmung um die z-Achse.....	11
3.3	Numerische Integration - Allgemein	12
3.4	Gauß-Quadratur	12
3.5	Rasterförmige Querschnittunterteilung	14
3.5.1	Diskretisierung des Polygonzugs.....	14
3.5.2	Spannungsintegration im Flächenelement	16
3.5.3	Vor- und Nachteile des Verfahrens	16
4	Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems	17
4.1	Mechanische Problemstellung.....	17
4.2	Newton-Raphson-Verfahren.....	17
4.2.1	Vorgangweise des Iterationsprozesses.....	19
4.2.2	Abbruchkriterien	20
5	Softwaretool <i>CONC</i>	21
5.1	Querschnittserstellung	22
5.1.1	Beispiel zur Querschnittserstellung.....	22
5.1.2	Architektur der programmtechnischen Umsetzung.....	23

5.2	Materialdefinition.....	24
5.2.1	Bilinearer Verlauf.....	24
5.2.2	Stückweise linearer Verlauf.....	25
5.2.3	Parabolischer Verlauf.....	26
5.3	Eigenspannungsverlauf.....	28
5.3.1	Äquidistanter stückweise linearer Verlauf.....	28
5.3.2	Nicht äquidistanter stückweise linearer Verlauf.....	29
5.4	Querschnittsteile.....	30
5.5	Allgemein verwendete Methoden.....	30
5.5.1	Rechteck.....	34
5.5.2	Polygon.....	34
5.5.3	Kreis.....	35
5.5.4	Dreieck.....	35
5.5.5	Viertelkreis (z.B. für Walzprofilaustrundungen).....	36
5.5.6	Kreisbogen.....	37
5.5.7	Allgemeine Parabel (3 Punkte).....	37
5.6	Querschnittsassamblierung.....	38
5.6.1	Berechnung der Querschnittswerte.....	38
5.6.2	Definition des Bezugspunktes.....	40
5.6.3	Verfeinerung des Rasters.....	40
5.7	Spannungsintegration.....	41
5.8	Nichtlinearer Gleichungslöser.....	43
5.8.1	Ermittlung der Jacobi-Matrix.....	44
5.8.2	Implementierung des Newton-Raphson-Verfahrens.....	45
5.9	Load-Stepping-Verfahren.....	46
5.10	Grafische Ausgabe.....	49
6	Validierung anhand von Beispielen.....	53
6.1	Verwendete Materialien.....	54
6.1.1	Stahl.....	54
6.1.2	Bewehrungsstahl.....	57
6.1.3	Beton.....	58
6.2	Beispiel 1 – Walzprofil aus Stahl.....	61
6.2.1	Querschnittswerte.....	61

6.2.2	Angenommener Eigenspannungsverlauf.....	62
6.2.3	Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 1	62
6.2.4	Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 2	71
6.2.5	Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 3	74
6.2.6	Zusammenfassung der Querschnittstragfähigkeiten.....	76
6.3	Beispiel 2 - Kammerbetonierte Verbundstütze	77
6.3.1	Querschnittstragfähigkeit Verbundstütze - Variante 1.....	78
6.3.2	Verbundstütze - Variante 2	87
6.3.3	Verbundstütze - Variante 3	89
6.4	Beispiel 3 - Verbundträger	91
6.4.1	Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 1.....	92
6.4.2	Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 2.....	95
6.4.3	Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 3.....	97
6.4.4	Zusammenfassung der Varianten.....	99
7	Zusammenfassung und Ausblick.....	101
8	Literaturverzeichnis	103
9	Abbildungsverzeichnis.....	105

1 Einleitung

1.1 Einführung und allgemeine Zielsetzung

Diese Masterarbeit umfasst die Entwicklung und Dokumentation eines numerischen Tools zur Berechnung der Spannungs- und Dehnungszustände sowie der Tragfähigkeit beliebiger Verbundquerschnitte bei Normalkraft- und Momentenbeanspruchung. Das entwickelte Softwaretool ermöglicht die Eingabe beliebiger Querschnittsgeometrien und Materialkennlinien (Spannungs-Dehnungsverläufe unter einachsiger Beanspruchung).

Auf Basis der Bernoulli-Hypothese (Ebenbleiben des Querschnitts) können mit dem entwickelten Tool sowohl Dehnungszustände für beliebige Belastungszustände – auch über die Elastizitätsgrenze hinaus - bestimmt, als auch Querschnitts-Interaktionsdiagramme zur Ermittlung der Grenztragfähigkeit bei beliebigen Kombinationen von Normalkräften und Biegemomenten entwickelt werden.

Ziel dieser Arbeit war die Bereitstellung eines leistungsfähigen, allgemein einsetzbaren Berechnungstools zur Bestimmung der Beanspruchung (bei vorgegebenem Dehnungszustand) und der Tragfähigkeit allgemeiner Querschnitte, insbesondere von Verbundquerschnitten.

Die Diskretisierung des Querschnitts erfolgte dabei mit einem einfachen „FasermodeLL“, wonach in jeder (kleinen) Faser des Querschnitts eine lokal konstante Dehnung und Spannung vorausgesetzt wurde. Durch diese – nur numerisch aufwendige – Diskretisierungsstrategie können für beliebige Querschnitte auch beliebige Eigenspannungszustände vorgegeben werden.

Die Berechnungsergebnisse des entwickelten Tools wurden in der Arbeit anhand mehrerer Beispiele aus dem Stahl- und Verbundbau überprüft. Mit dem Berechnungstool lassen sich zudem aufschlussreiche Studien zu den Anwendungsgrenzen konventioneller „Handrechnungsverfahren“ anstellen, wodurch z.B. der Einfluss der Eigenspannungen auf Momenten-Krümmungs-Diagramme von Stahlprofilen, oder der Einfluss der Grenzstauchung in der Betonplatte von Trägern bei kompakten Verbundquerschnitten, untersucht werden können.

1.2 Motivation

Um das Querschnittstragverhalten bei komplexen Materialvorgaben und beliebigen Querschnittsgeometrien zu untersuchen, ist eine numerische Aufbereitung unumgänglich. Aufgrund der Annahme einer allgemeinen nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehung des Materials und der Vorgabe von Eigenspannungen ist eine elastische Berechnung nicht mehr möglich. Für bestimmte Querschnittsgeometrien und Materialmodelle sind Formelwerke vorhanden und werden zur Kontrolle der numerischen Ergebnisse herangezogen. Im Zuge dieser Arbeit wird das Softwaretool (*CONC* – **C**alculation of **N**onlinear **C**ross-**S**ections) implementiert. Mithilfe dieser Software können bauübliche Querschnitte erstellt und die Auswirkungen aufgrund der Nichtlinearitäten des Materials auf die Querschnittstragfähigkeit analysiert werden. Folgende Eingaben zum Querschnitt sind möglich:

- Schnittkraftinteraktion (N , M_y , M_z), d.h. Querschnittstragfähigkeit bei gemeinsamer Wirkung von Schnittkräften N , M_y und M_z
- beliebige polygonale Querschnittsgeometrie
- verschiedene Materialien im Querschnitt, auch mit weitgehend beliebiger Querschnittsgeometrie
- dehnungsbegrenzte Spannungs-Dehnungsbeziehung des Materials
- beliebiger Eigenspannungsverlauf

Die Dehnungsebene bzw. das korrelierende Spannungsbild werden in 2- und 3D Grafiken ausgegeben (siehe Abbildung 1.1), um eine plausible Kontrolle der Ergebnisse durchführen zu können. Die vorgegebenen Beanspruchungen sowie zugehörigen Querschnittstragfähigkeiten beschränken sich auf Normalkräfte und Biegemomente um beide Achsen.

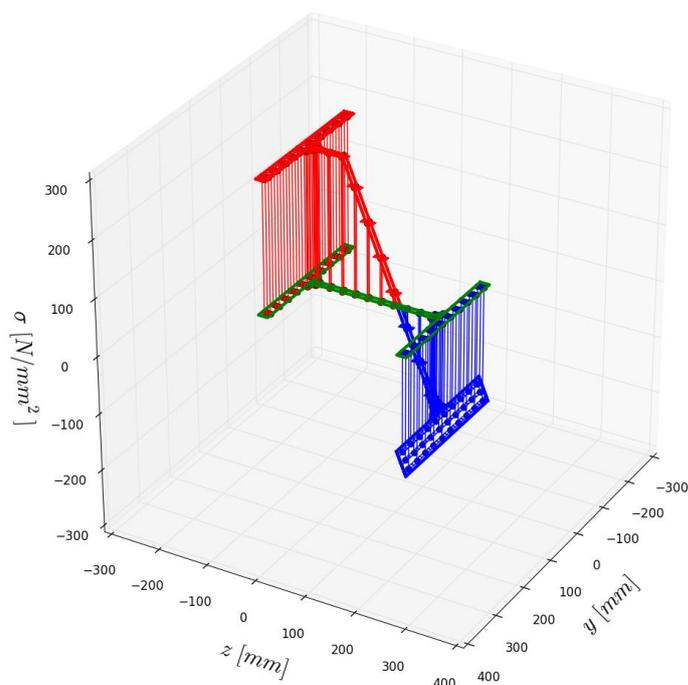


Abbildung 1.1: Darstellung des Spannungsverlaufs

1.3 Notation

Die global verwendeten Variablen werden nachfolgend aufgelistet. In den einzelnen Kapiteln werden zusätzlich lokale Variablen eingeführt, um eine übersichtliche Strukturierung zu gewährleisten. Skalare Variablen werden normal und vektorielle fett gedruckt in Kleinbuchstaben dargestellt. Matrizen werden in Großbuchstaben und fett gedruckt angegeben.

σ	Spannung in x-Richtung des Querschnitts (ident zur Stablängsachse)
ε_0	Mitteldehnung
k_y	Krümmung um die z-Achse
k_z	Krümmung um die y-Achse
$N ; N_{r,ult}$	Normalkraft; max. ertragbare Normalkraft
$M_y ; M_{yr,ult}$	Moment um die y-Achse; max. Momententragfähigkeit um die y-Achse
$M_z ; M_{zr,ult}$	Moment um die z-Achse; max. Momententragfähigkeit um die z-Achse
$(\cdot)_{int}$	Bezeichnung für innere Kräfte
$(\cdot)_{ext}$	Bezeichnung für äußere Kräfte
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnungsvektor
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \varepsilon_i}$	partielle Ableitung nach einer Dehnungskomponente
\mathbf{J}_T	Jacobi-Matrix bzw. Tangentensteifigkeitsmatrix
$\Delta(\cdot)$	inkrementelle Bezeichnung einer Variable

1.4 Verwendete Programmiersprache

Die programmtechnische Umsetzung erfolgt in der Programmiersprache *Python* (Version 2.7). Diese Sprache ist als „Open Source“ kostenfrei zugänglich und wurde von Guido van Rossum, einem niederländischen Softwareingenieur, entwickelt. Dank einer Internet-Community steht eine umfassende Hilfestellung zum Selbststudium der Programmiersprache zur Verfügung.

Python kann mit zahlreichen Modulen erweitert werden, die Funktionen für verschiedenste Anwendungsgebiete (z.B. mathematische Routinen, grafische Darstellungen, usw.) bereitstellen. Grundsätzlich steht eine große Auswahl von vorgefertigten Methoden zur Verfügung, die in verschiedenen Modulen eingebettet sind. Um die entsprechenden Funktionen verwenden zu können, muss das übergeordnete Modul im Zuge der Programmierung importiert werden.

Standardmäßig wird das Modul *NumPy* für die Anwendung der allgemeinen mathematischen Berechnungsvorgänge (z.B. Vektor- und Matrizenrechnung) eingesetzt. Die Funktionalität von *NumPy* kann durch die Installation von zusätzlichen Modulen (z.B. *SciPy*) ergänzt werden. Die Erstellung für 2- und 3D Grafiken wird durch das Modul *Matplotlib* unterstützt und erlaubt eine individuelle Gestaltung der grafischen Ausgabe. Des Weiteren können bei der Implementierung einer GUI (Graphical User Interface) mittels *TkInter* die erstellten Grafiken benutzerfreundlich bearbeitet und in verschiedenen Bildformaten abgespeichert werden. Als IDE (Integrated Development Environment) wird die Software *Spyder* verwendet.

Python ist eine interpretierte höhere Programmiersprache und plattformunabhängig, d.h. die Anwendung auf *Linux*, *Unix*, *Mac* und *Windows* ist möglich. Die Besonderheiten von *Python* sind:

- klare und übersichtliche Syntax mit wenigen Schlüsselwörtern
- Code-Strukturierung mit Code-Blöcken statt Klammern
- umfangreiche Standardbibliothek und zahlreiche Pakete
- objektorientierter Einsatz

Im Allgemeinen wird *Python* als einfach zu erlernende Sprache angesehen. [1], [2]

2 Mechanische Modelle und Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die mechanischen Modelle bzw. Voraussetzungen für die anschließende programmtechnische Umsetzung erklärt. Die einzelnen Gleichungen werden allgemein mathematisch formuliert. Anschließend werden die konkreten Gleichungen für die Implementierung der Algorithmen im Abschnitt 5 angeführt.

2.1 Äußere Belastung

Die Querschnittsberechnung ist konzipiert für eine allgemeine äußere Schnittkraftbelastung (N, M_y, M_z) , die zu alleinigen Normalspannungen σ_x am Querschnitt führt. Die reaktiven Spannungen σ im Querschnitt treten daher nur in der Richtung der Stabachse (x-Richtung) auf. Die Belastung wird einmalig statisch aufgebracht und eine Entlastung wird nicht vorgenommen. Periodische Belastungen und infolgedessen auftretende materielle Verfestigungen werden nicht berücksichtigt. Die Spannungen werden nur in der Querschnittsebene berechnet - (siehe [3]).

2.2 Bernoulli-Hypothese

Die Grundlage für die Berechnung der reaktiven Schnittkräfte ist die Annahme der Bernoulli-Hypothese. Diese beschreibt den allgemeinen Dehnungszustand und die damit korrelierenden Verformungen eines Stabes, wobei die Querschnitte nach der Belastung immer noch eben und senkrecht zur Stabachse bleiben. Die allgemeine Dehnungsfunktion stellt eine 2D-Ebene dar und wird mathematisch in Abhängigkeit der Querschnittskordinaten y, z beschrieben als - (siehe [4]):

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + \underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}}_{k_y} \cdot y + \underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}}_{k_z} \cdot z = \varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z \quad (2.1)$$

Die Änderungsrate (Krümmung) der Dehnungsebene in y - bzw. z -Richtung wird mit k_y bzw. k_z bezeichnet. Die drei Kenngrößen ε_0, k_y, k_z werden in einem Vektor zusammengefasst.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Somit können beliebige Dehnungsebenen für jeden Querschnittspunkt mit den Koordinaten y, z beschrieben werden. [3]

2.3 Grundgleichung der Spannungsintegration

Basierend auf der definierten Dehnungsebene lt. Abschnitt 2.2 kann für jede Querschnittsfaser eine Dehnung berechnet werden. Zugehörig zu dieser Dehnung kann anhand des gewählten Materialgesetzes eine Spannung zugeordnet werden. Eine Integration der einzelnen Spannungen im Querschnitt – durchgeführt für alle „Querschnittsfasern“ - ergibt die reaktiven Schnittkräfte. Die Grundgleichungen für die Berechnung der Spannungsresultierenden sind:

Vorgegeben:	ε_0, k_y, k_z	Kenngrößen der Dehnungsebene
	y, z	Querschnittsgeometrie (Fläche)
Gesucht:	$N_{int}, M_{y,int}, M_{z,int}$	innere Schnittkräfte

$$N_{int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) dA = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) dA \quad (2.3)$$

$$M_{y,int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot z dA = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) \cdot z dA \quad (2.4)$$

$$M_{z,int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot y dA = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) \cdot y dA \quad (2.5)$$

3 Integrationsverfahren

3.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Gleichungen (2.3) bis (2.5) für die Berechnung der inneren Schnittkräfte stellen Doppelintegrale dar, die mithilfe verschiedener Verfahren berechnet werden können. Für die Querschnitte wird eine polygonale Geometrie vorausgesetzt. Die verschiedenen, in der Literatur erwähnten Integrationsverfahren werden prinzipiell unterteilt in analytische und numerische Verfahren.

Aufgrund diverser Vor- und Nachteile werden diese Verfahren für spezifische Problemstellungen angewandt. Die Integrationsverfahren werden in der Quelle [3] beschrieben und stellen die Grundlage für die Entscheidungsfindung des implementierten Verfahrens dar. Die Quelle [3] beschreibt die programmgesteuerte Umsetzung des Softwaretools *INCA2*, das in der Praxis für die nichtlineare Bemessung von Massivbauquerschnitten eingesetzt wird. Dieses Softwaretool verwendet eine Kombination von analytischen und numerischen Integrationsverfahren.

In diesem Abschnitt werden zunächst die Integrationsverfahren vorgestellt, wobei der Fokus auf das implementierte Verfahren gelegt wird.

Anmerkung

Die Wahl des Integrationsverfahrens ist von größter Bedeutung für die Dauer der Berechnung und die geforderte Genauigkeit. Der implementierte Algorithmus findet sich in allen Berechnungsschritten wieder und beeinflusst maßgeblich die Rechengeschwindigkeit.

3.2 Analytische Spannungsintegration

Bei der Formulierung der Gleichungen (2.3)-(2.5) wird ersichtlich, dass der funktionale Zusammenhang der Spannungs-Dehnungsbeziehung $\sigma(\varepsilon)$ die Wahl des Integrationsverfahrens beeinflusst. Die Problemstellung bei der analytischen Integration ist, dass die $\sigma(\varepsilon)$ -Linien abschnittsweise geschlossen integriert werden müssen.

Als Beispiel für die analytische Integration wird das lineare Werkstoffgesetz (elastisch) vorgegeben.

$$\sigma(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon \quad (3.1)$$

Die funktionale lineare Spannungs-Dehnungsbeziehung lt. Gleichung (3.1) ist in der Abbildung 3.1 dargestellt.

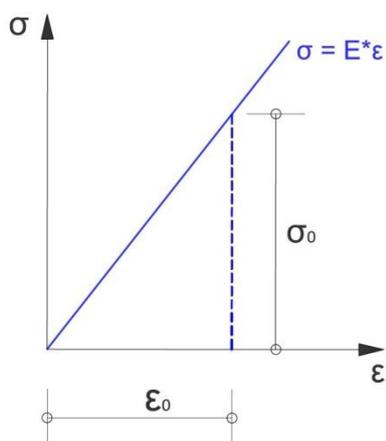


Abbildung 3.1: Linear elastisches Werkstoffgesetz

Diese Voraussetzung führt zu einer wesentlichen Vereinfachung des Integrals und ermöglicht eine geschlossene Integration über die Querschnittsfläche. Die Gleichungen (2.3)-(2.5) vereinfachen sich zu den Gleichungen (3.2)-(3.4).

$$N_{int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \, dA = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) \, dA \quad (3.2)$$

$$M_{y,int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot z \, dA = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) \cdot z \, dA \quad (3.3)$$

$$M_{z,int} = \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot y \, dA = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) \cdot y \, dA \quad (3.4)$$

Die Abschnitte 3.2.1 bis 3.2.3 sollen die analytische Spannungsintegration für die Ermittlung der inneren Schnittkräfte eines Rechteckquerschnitts veranschaulichen. In den jeweiligen Abbildungen werden die Volumina der Spannungen dargestellt, wobei eine rote Einfärbung eine Zugspannung und eine blaue Einfärbung Druckspannung repräsentiert. Der Rechteckquerschnitt weist eine doppelsymmetrische Geometrie mit einem homogenen linear elastischen Material auf. [3]

Für die Definition des Querschnitts wird das mathematische Koordinatensystem verwendet, um eine benutzerfreundlichere Eingabe der Querschnittsgeometrie zu ermöglichen. Man beachte, dass in dieser Arbeit – anders als z.B. in der Notation des Eurocode 3 – die positive z-Achse nach oben zeigt.

3.2.1 Konstante Mitteldehnung

Eine konstante Mitteldehnung ε_0 erzeugt eine positive Normalkraft (siehe Abbildung 3.2).

$$N_{int} = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) dA = E \cdot \varepsilon_0 \cdot \int_A dA = \sigma_0 \cdot A \quad (3.5)$$

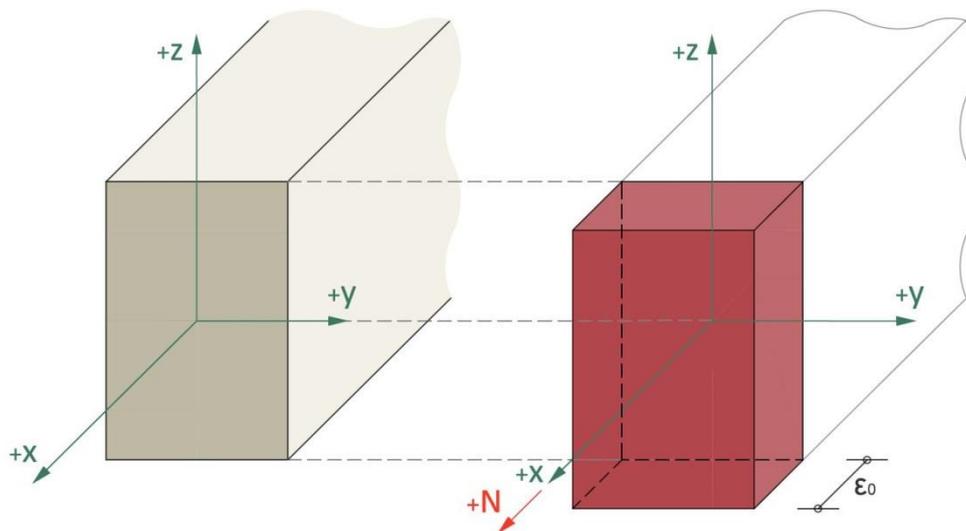


Abbildung 3.2: Spannungsintegration bei reiner Mitteldehnung

3.2.2 Konstante Krümmung um die y-Achse

Für die Schnittkraftberechnung lt. Gleichung (3.6) und (3.7) werden folgende Hilfsgrößen verwendet:

$\varepsilon_{ry}, \varepsilon_{rz}$	Randdehnung
σ_{ry}, σ_{rz}	Randspannung
z_r, y_r	Randabstand in z- und y-Richtung
I_z, I_y	Flächenträgheitsmoment um die z- und y-Achse

Eine positive Krümmung k_z (Zugdehnung in positiver z-Richtung) ergibt ein negatives Moment M_y um die y-Achse (siehe Abbildung 3.3).

$$-M_{y,int} = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) \cdot z \, dA = E \cdot \int_A \underbrace{\frac{\varepsilon_{ry}}{z_r}}_{k_z} \cdot z \cdot z \, dA = \underbrace{E \cdot \varepsilon_{ry}}_{\sigma_{ry}} \cdot \frac{1}{z_r} \cdot \underbrace{\int_A z^2 \, dA}_{I_y} = \sigma_{ry} \cdot \frac{I_y}{z_r} \quad (3.6)$$

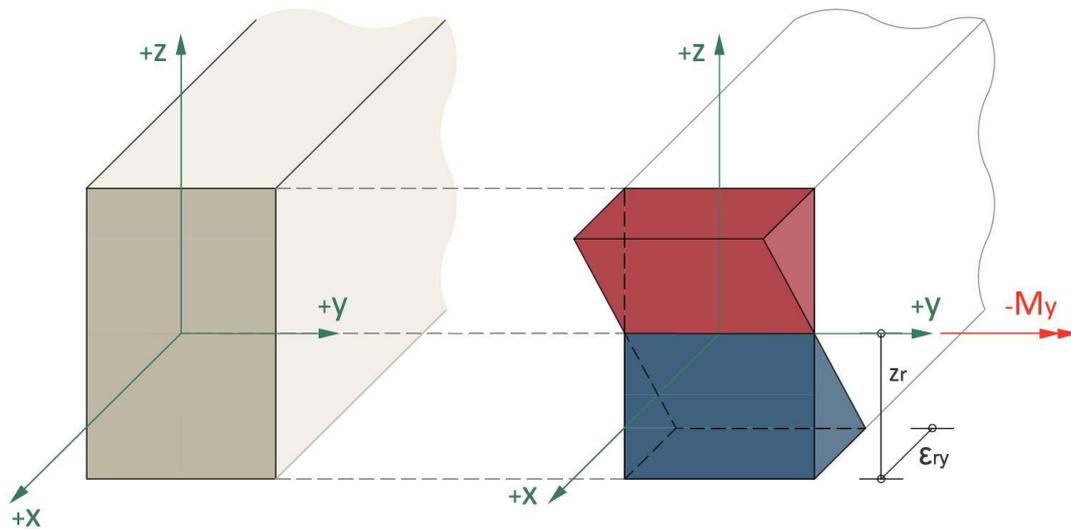


Abbildung 3.3: Spannungsintegration bei reiner Krümmung um die y-Achse

3.2.3 Konstante Krümmung um die z-Achse

Eine positive Krümmung k_y (Zugdehnung in positiver y-Richtung) ergibt ein positives Moment M_z um die z-Achse (siehe Abbildung 3.4)

$$M_{z,int} = E \cdot \int_A \varepsilon(y, z) \cdot y \, dA = E \cdot \int_A \frac{\varepsilon_{rz}}{y_r} \cdot y \cdot y \, dA = \underbrace{E \cdot \varepsilon_{rz}}_{\sigma_{rz}} \cdot \frac{1}{y_r} \cdot \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_z} = \sigma_{rz} \cdot \frac{I_z}{w_z} \quad (3.7)$$

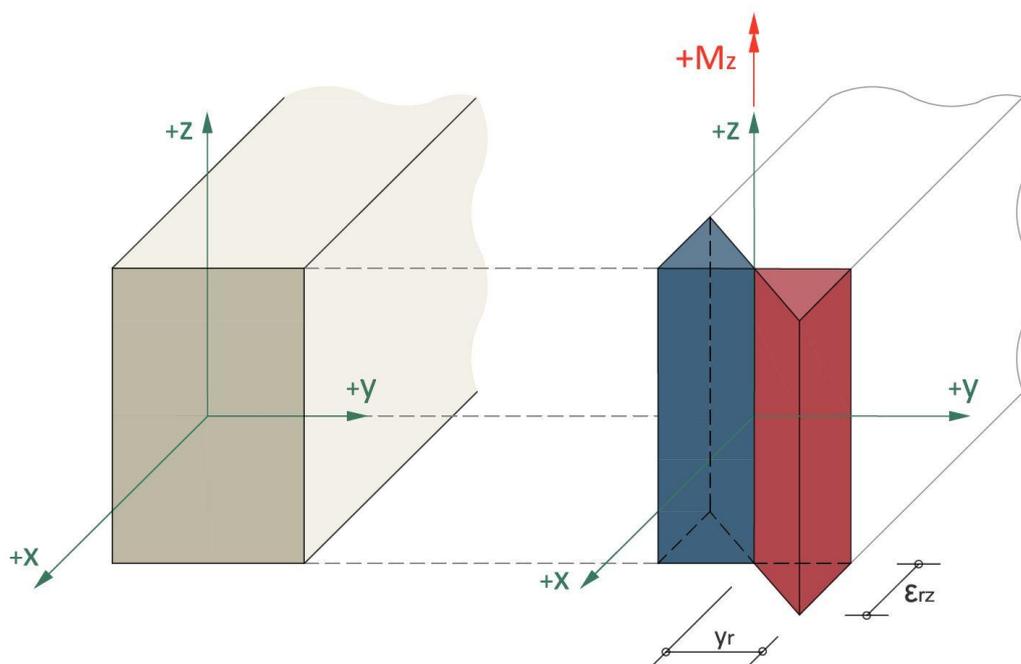


Abbildung 3.4: Spannungsintegration bei reiner Krümmung um die z-Achse

3.3 Numerische Integration - Allgemein

Aufgrund der technischen Weiterentwicklung im Bereich der Computerrechenleistung ist die numerische Integration von größter Bedeutung. Für den Anwendungsfall der Spannungsintegration werden grundsätzlich zwei Verfahren angewendet:

- rasterförmige Querschnittsunterteilung mittels Flächenelementen
- Verwendung von Quadraturformeln

Vorweg ist anzumerken, dass für die Implementierung des Softwaretools CONC eine rasterförmige Querschnittsunterteilung gewählt wurde. Die Vorteile dieser Anwendung bzgl. der zu untersuchenden Problemstellung werden im Abschnitt 3.5.3 erläutert.

3.4 Gauß-Quadratur

Innerhalb der definierten Querschnittsfläche muss der Spannungsverlauf integriert werden. Zunächst wird die allgemeine Integrationsformel im eindimensionalen Fall angeführt. [5]

$$\int_a^b f(y) dy \approx \sum_{i=1}^{n_Q} f(y_i) \cdot \omega_i \quad (3.8)$$

n_Q	Anzahl der Integrationspunkte (Gauß-Punkte)
ω_i	Integrationsgewicht am Integrationspunkt (Gauß-Punkt)
$f(y_i)$	Funktionsauswertung am Integrationspunkt (Gauß-Punkt)

In Abhängigkeit der gewählten Anzahl an Gauß-Punkten n_Q ist eine exakte Integration von Polynomen der Ordnung m möglich. Die Vorschrift lautet:

$$m = 2 \cdot n_Q - 1 \quad (3.9)$$

Des Weiteren konvergieren beliebig glatte Integranden mit der Konvergenzrate von $m + 1$ gegen die exakte Lösung. Eine Konvergenzstudie bzgl. der numerischen Integrationsverfahren ist der Quelle [5] zu entnehmen.

Die Abbildung 3.5 soll die funktionale Vorgehensweise der numerischen Integration mittels Gauß-Quadratur im 1D-Referenzelement ($y \in [-1, 1]$) zeigen. Mithilfe der „Ein-Gauß-Punkt-Regel“ können lineare und mittels der „Zwei-Gauß-Punkt-Regel“ kubische Polynome (siehe Gleichung (3.9)) exakt integriert werden. [6]

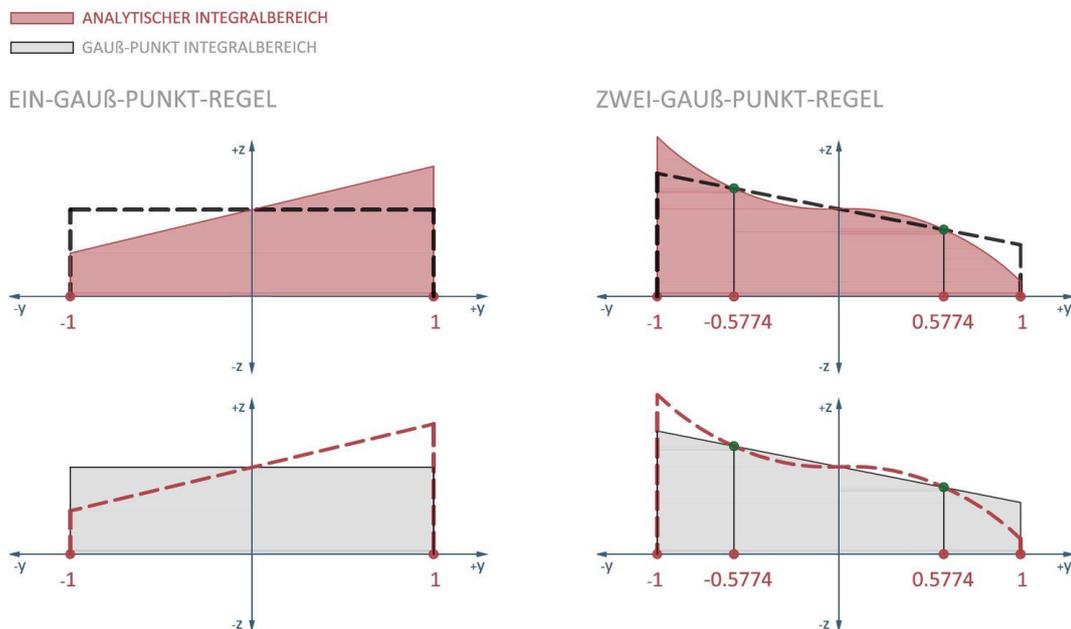


Abbildung 3.5: Gauß-Quadratur im 1D-Referenzelement

Die Vorgehensweise in 2D ist ident zu jener in 1D und hat die Form:

$$\int_a^b \int_c^d f(y, z) dy dz \approx \sum_{i=1}^{n_Q} \sum_{j=1}^{n_Q} f(y_i, z_j) \cdot \omega_i \cdot \omega_j \tag{3.10}$$

Die Gauß-Punkte werden in einem 2D Referenzviereck definiert (siehe Abbildung 3.6). Ausführliche Angaben über die Integrationsgewichte sind der Quelle [6] zu entnehmen.

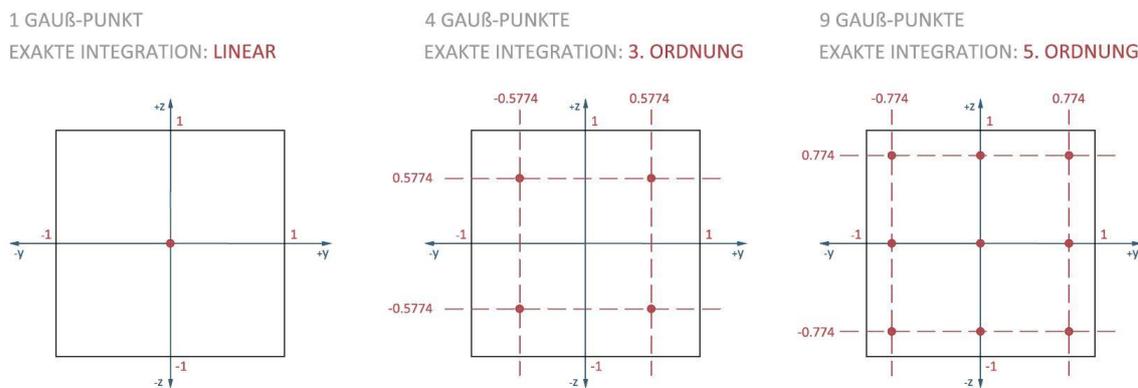


Abbildung 3.6: Darstellung der Gauß-Punkte im 2D-Referenzviereck

Zur Bestimmung all jener Elemente, die innerhalb der Querschnittskontur liegen, wird auf die sogenannte Trapezmethode zurückgegriffen. Diese Vorgehensweise wird nachfolgend in der Abbildung 3.8 beispielhaft gezeigt (Beispiel aus der Abbildung 3.7).

Die Grundidee dabei ist, dass – bei der isolierten Betrachtung für die einzelnen Berandungs-
linien - einzelne Elementflächen dabei als positiv (Multiplikationsfaktor +1.0) oder negativ
(Multiplikationsfaktor -1.0) gezählt werden. Am Ende erfolgt eine Summenbildung, die au-
tomatisch dazu führt, dass alle Elemente innerhalb der Gesamtkontur nur einmal gezählt
werden.

Es wird, wie erwähnt, jede Berandungsline isoliert betrachtet. Es werden nur jene Elemente
gezählt, die im Projektionsbereich der einzelnen Linie auf die y-Achse liegen (z.B. für Linie
1-2: nur Elemente der Elementspalte a–d; Linie 2-3: nur Elemente der Elementspalte e–g;
Linie 3-4: alle Elemente; Linie 4-5: keine Elemente). Für die Vergabe der Multiplikationsfak-
toren +1.0 und -1.0 ist wie folgt vorzugehen:

- Es kommen nur die Elemente zwischen der betrachteten Linie und der y-Achse in Frage (Betrachtung jeweils für den Mittelpunkt des Elements)
- Wenn die Orientierung der Linie (positiv gegen den Uhrzeigersinn definiert, siehe Abbildung 3.7) mit der Orientierung der positiven y-Achse übereinstimmt, so gilt als Multiplikationsfaktor der Wert -1.0, ansonst +1.0.

orange → (-1) * Fläche

grün → (+1) * Fläche

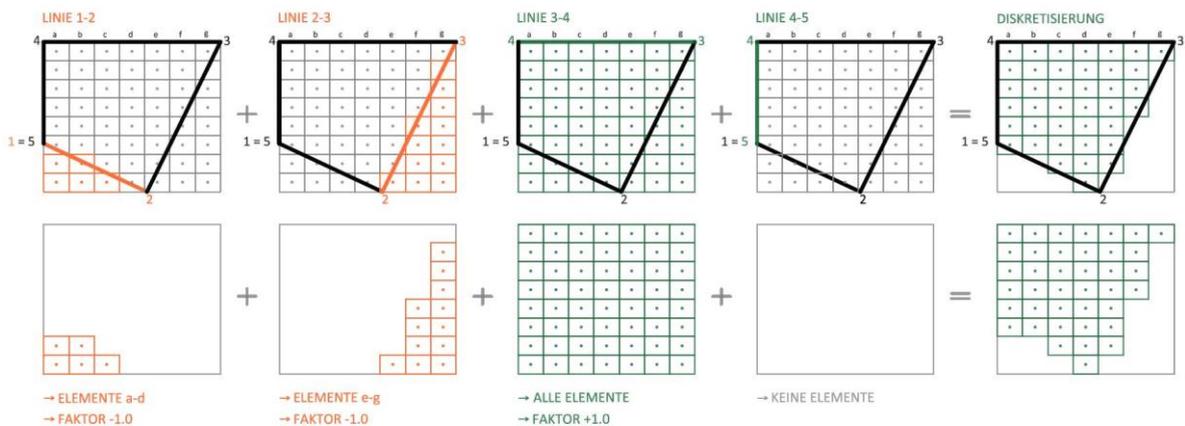


Abbildung 3.8: Diskretisierung des Polygonzugs

3.5.2 Spannungsintegration im Flächenelement

Die Spannungsintegration innerhalb eines Flächenelements wird mittels der „Ein-Punkt-Gauß-Regel“ durchgeführt. D.h. der Spannungsverlauf wird näherungsweise als konstant innerhalb des Elements angesehen bzw. es können lineare 2D Polynome exakt integriert werden. Die resultierende Kraft f_{el} in einem Element ist:

$$f_{el} = A_{el} \cdot \sigma(\varepsilon)_{el} \quad (3.13)$$

A_{el}	Elementfläche
$\sigma(\varepsilon)_{el}$	Spannung im Integrationspunkt (Flächenschwerpunkt) des Elements

Der Grundgedanke ist, dass eine Verfeinerung des Rasternetzes quasi exakte Ergebnisse liefert. Des Weiteren sollen Querschnitte mit nicht glatten bzw. unstetigen Eigenspannungsverläufen erstellt werden. Auch dafür sind die gewählten Elemente mit mittigem Integrationspunkt gut geeignet. Auf eine adaptive Netzsteuerung für eine geschlossene Integration wird verzichtet, stattdessen soll eine Netzverfeinerung die sprunghaften Spannungsänderungen im Querschnitt approximieren.

3.5.3 Vor- und Nachteile des Verfahrens

Die Anwendung der rasterförmigen Querschnittsunterteilung mit konstanter Spannungsannahme innerhalb der Flächenelemente wird in der Quelle [8] beschrieben. Der Einsatz dieses Verfahrens ist für die Analyse von Stahlbauquerschnitten mit beliebigen Eigenspannungsverläufen bzw. Fließgrenzenstreuungen vorgesehen. Dieses Verfahren kann grundsätzlich für alle Einsatzbereiche verwendet werden, jedoch muss der Anwender selbst über die Rastergenerierung entscheiden. Die reaktiven Schnittkräfte werden nur approximativ berechnet, eine quasi exakte Lösung wird über die Rasterverfeinerung erzielt.

Vorteile:

- beliebige $\sigma(\varepsilon)$ – Funktion
- keine adaptive Netzsteuerung notwendig, leichte Verständlichkeit des Ablaufes
- Erfassung von sprungartigen Spannungsverläufen im Querschnitt, charakteristisch für Eigenspannungsverläufe bei Verbundquerschnitten (Stahl unter Druck, Beton unter Zug)

Nachteile:

- Approximierte Geometrie bzw. die Genauigkeit der inneren Schnittkräfte bzw. der errechneten Querschnittstragfähigkeiten ist abhängig von der Feinheit des gewählten Rasters
- hoher Rechenaufwand bei feinem Raster

4 Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

4.1 Mechanische Problemstellung

Im Abschnitt 2.3 wurde bereits auf die Grundgleichungen für die Spannungsergebnisse und die damit korrelierenden inneren Schnittkräfte eingegangen. Für bekannte Dehnungsebenen kann somit die Berechnung der inneren Schnittkräfte (N_{int} , $M_{y,int}$, $M_{z,int}$) durchgeführt werden (siehe Abschnitt 3). In diesem Abschnitt steht im Vordergrund, wie für eine äußere Belastung (N_{ext} , $M_{y,ext}$, $M_{z,ext}$) die zugehörige Dehnungsebene bestimmt wird. Für die Lösung dieser Problemstellung muss ein 3-parametriges nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Lösungsfindung wird dehnungsgesteuert und iterativ mittels des Newton-Raphson-Verfahrens durchgeführt.

4.2 Newton-Raphson-Verfahren

Zunächst werden die gegebenen und gesuchten Variablen angeführt, um eine bessere Übersicht des nichtlinearen Gleichungssystems zu ermöglichen.

Vorgegeben sind:	Querschnittselemente dA mit Koordinaten y, z
	$N_{ext}, M_{y,ext}, M_{z,ext}$ äußere Belastung
Gesucht sind:	ε_0, k_y, k_z Kenngrößen der Dehnungsebene
	bzw. $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ Dehnungsvektor

Das zu lösende nichtlineare Gleichungssystem wird aus den mechanischen Grundgleichungen (3.2)-(3.4) assembliert. Die Gleichungen werden umformuliert, sodass die rechte Seite des Systems einen Nullvektor ergibt.

$$f_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) dA}_{N_{int}} - N_{ext} = 0 \quad (4.1)$$

$$f_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) \cdot z dA}_{M_{y,int}} - M_{y,ext} = 0 \quad (4.2)$$

$$f_3(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\int_A \sigma(\varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z) \cdot y dA}_{M_{z,int}} - M_{z,ext} = 0 \quad (4.3)$$

Die linke Seite des Gleichungssystems beschreibt die Differenz zwischen den inneren Schnittkräften und der äußeren Belastung. Das nichtlineare Gleichungssystem ist gelöst, wenn das Kräftegleichgewicht erfüllt ist. [9]

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ f_2(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ f_3(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{int} - N_{ext} \\ M_{y,int} - M_{y,ext} \\ M_{z,int} - M_{z,ext} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Die allgemeine Lösungsformel des Newton-Raphson-Verfahrens lautet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_i} \right)^{-1}}_{\mathbf{J}_T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)} \cdot \underbrace{(-\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_i))}_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{J}_T^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \cdot (-\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)) \quad (4.5)$$

mit:

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	Startvektor der Dehnungsebene
$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$	Lösungsvektor des i+1 Iterationsschrittes
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Änderung der Dehnungsebene
\mathbf{J}_T	Jacobi-Matrix bzw. Tangentensteifigkeitsmatrix

4.2.1 Vorgangsweise des Iterationsprozesses

1. Indexbeginn bei $i = 0$:
Wähle einen geeigneten Dehnungsstartvektor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (4.6)$$

2. Berechne die Kräftedifferenz mit dem Dehnungsstartvektor $\boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$-\mathbf{f}_i = (-\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)) \quad (4.7)$$

3. Berechne die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_T mit dem Dehnungsvektor $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Die allgemeine Formulierung ist:

$$\mathbf{J}_T(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_y} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_z} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_y} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_z} \\ \frac{\partial f_3(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial f_3(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_y} & \frac{\partial f_3(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial k_z} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Die Jacobi-Matrix ist im Rahmen der numerischen Berechnungen nicht analytisch bestimmbar. Aus diesem Grund werden die 9 partiellen Ableitungen mithilfe des Differentialquotienten numerisch bestimmt.

Bsp. für die Ableitung hinsichtlich ε_0 :

$$\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial \varepsilon_0} = \frac{f_1(\varepsilon_0, k_y, k_z) - f_1((\varepsilon_0 - \Delta h), k_y, k_z)}{\Delta h} \quad (4.9)$$

Die Variable Δh gibt die inkrementelle Änderung der Kenngröße in der Dehnungsebene vor. Diese wird negativ angesetzt, da vorausgesetzt wird, dass die $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})$ -Funktion stets im negativen Bereich (Druckspannung) definiert ist. Die Schrittweite von Δh wird standardmäßig auf 10^{-8} gesetzt. [10]

4. Löse das lineare Gleichungssystem nach $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ innerhalb der Iteration:

$$\mathbf{J}_T \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{f}_i \quad \text{bzw.} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}_T^{-1} \cdot (-\mathbf{f}_i) \quad (4.10)$$

5. Der approximierte Lösungsvektor für den Iterationsschritt i kann bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.11)$$

6. Es wird überprüft, ob die approximierte Lösung die Konvergenzeigenschaften erfüllt:

$$|\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})| < |\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)| \quad (4.12)$$

Wird die Bedingung (4.12) nicht erfüllt, tritt Divergenz auf. In diesem Fall kann eine numerische Dämpfung, d.h. die Änderung der Dehnung $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ wird in n Teilschritte unterteilt, angewendet werden. [10]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \omega_i^n \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.13)$$

Dabei ist ω_i eine frei wählbare Größe. Im Softwaretool *CONC* wird dies jedoch nicht verwendet.

7. Bei Konvergenzverhalten wird die approximierte Lösung als neuer Startvektor für Schritt 1 definiert und der Index i erhöht sich um 1.

4.2.2 Abbruchkriterien

Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn:

1. die Jacobi-Matrix singularär wird, d.h. dass sich die Determinante gegen 0 nähert. Mechanisch interpretiert ist in diesem Fall die Änderung der Kräftedifferenz 0.

$$\det(\mathbf{J}_T) < 10^{-12} \quad (4.14)$$

2. die Kräftedifferenz kleiner als die Toleranz ist.

$$|\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})| < 10^{-2} \quad (4.15)$$

3. die maximale Anzahl der vorgegebenen Iterationsschritte erreicht ist.

$$i > c_{max} \quad (4.16)$$

Nur bei Abbruch nach Kriterium 2 ist die Lösung gefunden. Die Angabe der Toleranzen (10^{-12} bzw. 10^{-2} siehe oben) und die Anzahl der maximalen Iterationsschritte c_{max} können variiert werden. Das Newton-Raphson-Verfahren wird im Algorithmus 5.6 programmtechnisch beschrieben und es werden die Abbruchkriterien (4.14)-(4.16) implementiert.

5 Softwaretool *CONC*

Dieser Abschnitt zeigt die grundsätzliche Architektur und objektorientierte Strukturierung des Softwaretools *CONC* auf. Die Erstellung einer GUI (**G**raphical **U**ser **I**nterface) soll eine leistungsorientierte und übersichtliche Studie zur Querschnittstragfähigkeit mit materiell nichtlinearem Materialverhalten ermöglichen. Grundsätzlich wird *CONC* in 4 Hauptbereiche unterteilt:

- **Querschnittserstellung:** Der erste Schritt ist die Definition der Querschnittsgeometrie mit den zugehörigen Materialien und die Vorgabe allfälliger Eigenspannungen.
- **Spannungsintegration:** Nach Erstellung des Querschnitts werden mittels numerischer Integration die inneren Schnittkräfte für eine vorgegebene Dehnungsebene bestimmt.
- **Nichtlinearer Gleichungslöser:** Mithilfe des Newton-Raphson-Verfahrens wird ein „Load-Stepping-Algorithmus“ implementiert, der die iterative Bestimmung der Dehnungsebene bei gegebener äußerer Belastung ermöglicht.
- **Grafische Ausgabe:** Die einzelnen Ergebnisse werden in 2- und 3D Grafiken dargestellt.

Das schrittweise Vorgehen in *CONC* soll eine leichtverständliche Bedienung ermöglichen. In weiterer Folge wird auf die einzelnen Hauptbereiche detailliert eingegangen.

5.1 Querschnittserstellung

Der Grundgedanke für die Querschnittserstellung ist, dass ein Querschnitt aus einzelnen Querschnittsteilen zusammengesetzt wird. Jede Querschnittskomponente repräsentiert ein Objekt. Somit können diese individuell bzgl. Geometrie, Material und Eigenspannungen konfiguriert werden. Die Netzgenerierung erfolgt nach dem Schema im Abschnitt 3.5. Anhand dieser Vorgehensweise können beliebige Querschnitte erzeugt werden.

5.1.1 Beispiel zur Querschnittserstellung

Die einzelnen Querschnittsteile werden in lokalen Koordinatensystemen definiert und im globalen Koordinatensystem positioniert (siehe Abbildung 5.1). Die Entwurfsphilosophie besteht darin, einen Querschnitt quasi im Baukastensystem zu erstellen.

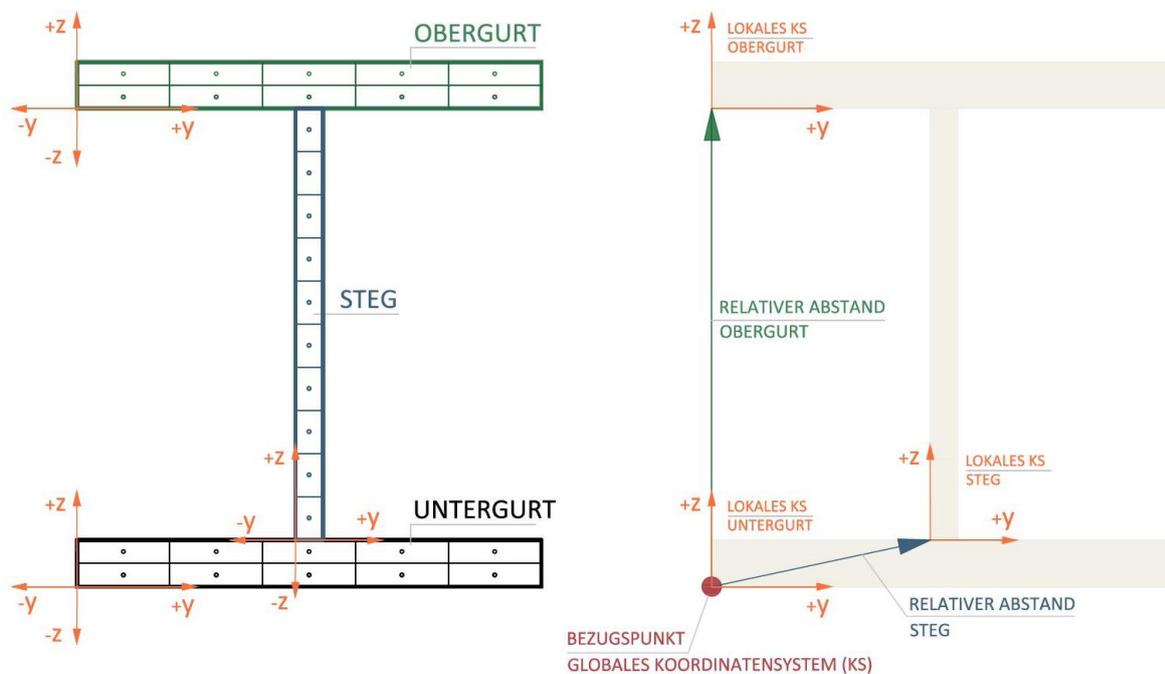


Abbildung 5.1: Vorgangsweise der Querschnittserstellung

5.1.2 Architektur der programmtechnischen Umsetzung

Die Abbildung 5.2 zeigt das Klassendiagramm der Querschnittserstellung. Die Klasse *Shape* umfasst die Funktionen eines allgemeinen Polygons. Die im Paket *Special Shape* abgeleiteten Klassen definieren die konkreten Geometrien der Querschnittsteile. Diese Klassen stehen in einer Vererbungsbeziehung mit der Basisklasse *Shape*, um die Funktionen *GetLines* und *Raster* aufrufen zu können.

Jedem Querschnittsteil muss ein Material zugewiesen werden. Optional kann ein Eigenspannungsverlauf innerhalb des Querschnittsteils definiert werden. Nach erfolgreicher Konfiguration aller Querschnittsteile werden diese als Liste von Objekten der Klasse *AssembleCrossSection* übergeben und der gesamte Querschnitt wird erstellt. Das Raster des Querschnitts kann bei Bedarf noch verfeinert werden.

Der Vorteil dieser Architektur liegt in der einfachen Erweiterbarkeit. Etwaige neue Querschnittsteile können als zusätzliche Klassen im Paket *Special Shape* rasch hinzugefügt werden. Des Weiteren können neue Funktionsverläufe der Materialien und Eigenspannungen mit wenig Aufwand den Paketen *Material* bzw. *Residualstress* zugeordnet werden. Das Querschnittsobjekt ist die Grundlage für die weiteren Berechnungsschritte und wird als Parameter übergeben.

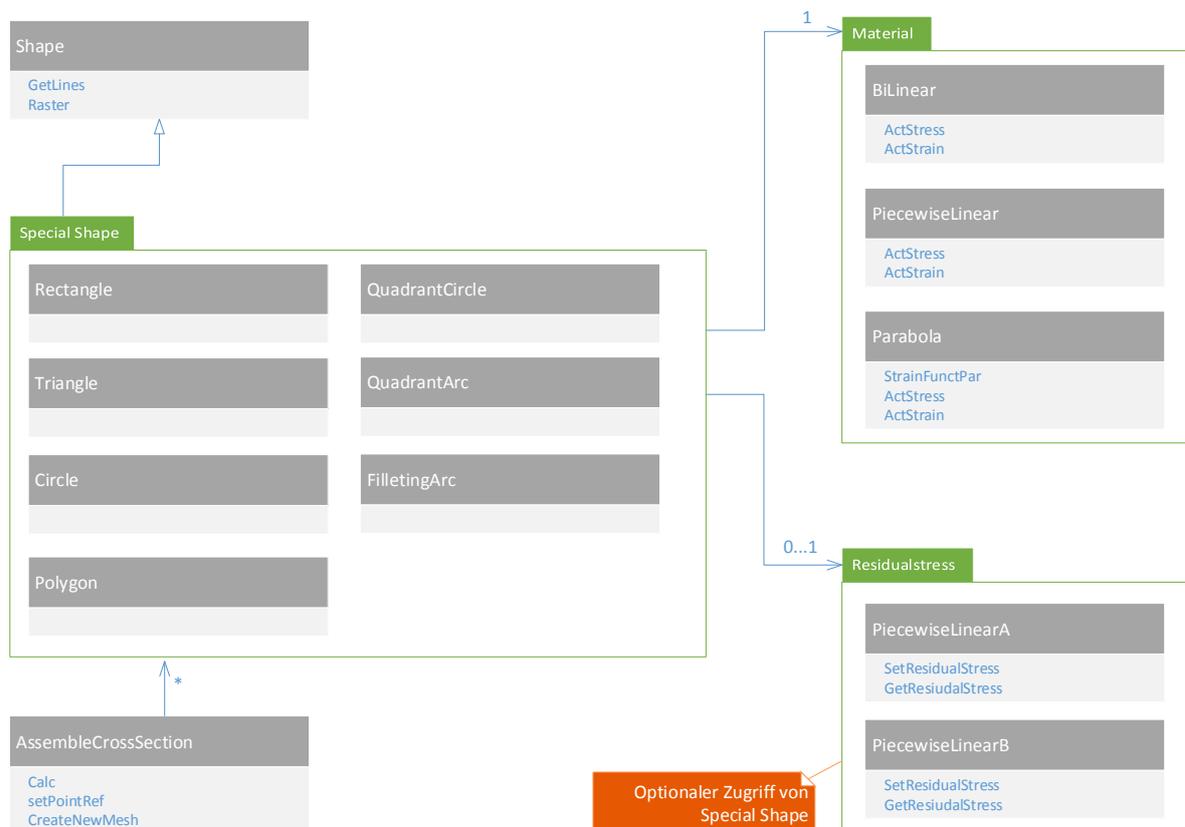


Abbildung 5.2: Klassendiagramm für die Querschnittserstellung

Die Reihenfolge der Erklärung folgt der Vorgehensweise der Querschnittserstellung und entspricht dem prinzipiellen Aufbau für die grafische Eingabe (GUI) des Softwaretools *CONC*.

5.2 Materialdefinition

Der Ausgangspunkt für die Querschnittserstellung von Verbundquerschnitten ist die Definition von Materialien. Die Werkstoffgesetze der vorgegebenen Materialien (Beton, Stahl, Bewehrungsstahl) werden mithilfe von vordefinierten Funktionsvorlagen beschrieben. Die Klassen *BiLinear*, *PiecewiseLinear* und *Parabola* unterscheiden sich in der Funktionsvorgabe der Spannungs-Dehnungsbeziehung $\sigma(\varepsilon)$. Diese Mustervorlagen für die $\sigma(\varepsilon)$ -Beziehung eines Materials soll eine benutzerfreundliche Eingabe der Materialien ermöglichen.

5.2.1 Bilinearere Verlauf

Die Klasse *BiLinear* erstellt eine $\sigma(\varepsilon)$ -Beziehung mit einem horizontalen Fließplateau (siehe Abbildung 5.3). Nach dem Verlassen des elastischen Bereichs bleibt die Spannung konstant. Die mathematische Beschreibung ist:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon & \text{für } |\varepsilon| \leq |\varepsilon_y| & \text{bzw. } |\sigma(\varepsilon)| \leq |\sigma_y| \\ \sigma_y & \text{für } |\varepsilon| > |\varepsilon_y| & \text{bzw. } |\sigma(\varepsilon)| > |\sigma_y| \end{cases} \quad (5.1)$$

mit: $\sigma(\varepsilon)$ aktuelle Spannung
 σ_y Fließgrenze bzw. -spannung
 ε_y Elastische Dehnungsgrenze: $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$

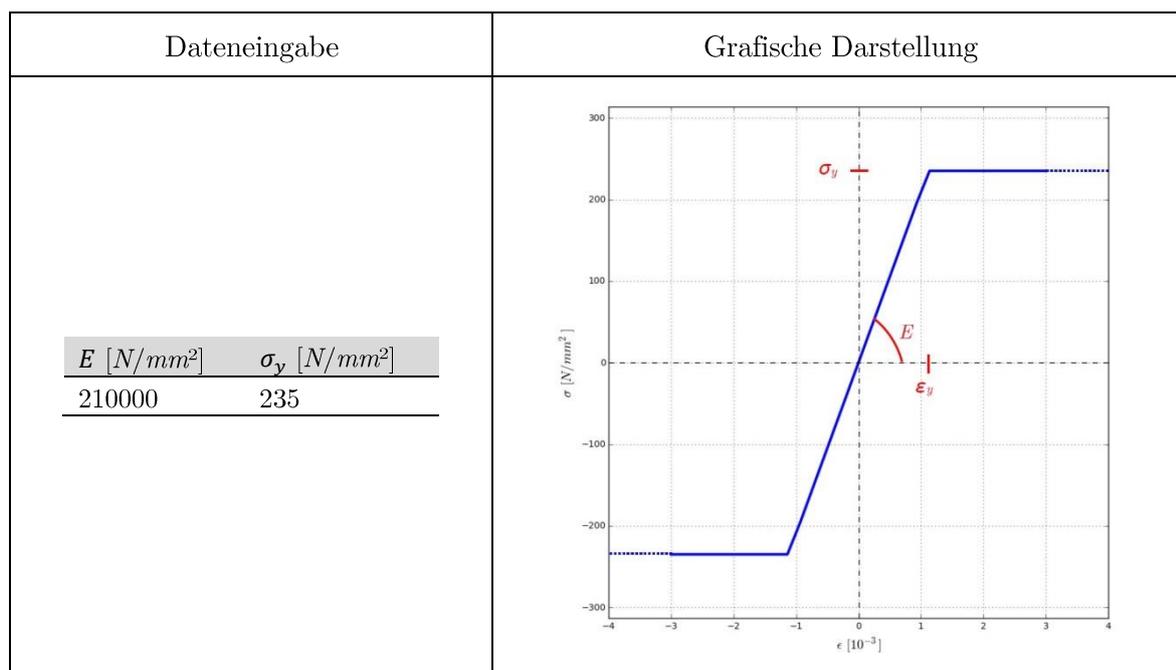


Abbildung 5.3: Bilinearere Spannungs-Dehnungs-Verlauf

Die Methode *ActStress* wertet die $\sigma(\varepsilon)$ -Funktion aus. Zu jeder Dehnung ε kann eine Spannung σ eindeutig zugeordnet werden. Im Gegensatz dazu soll die Methode *ActStrain* die zugehörige Dehnung bei Vorgabe einer Spannung zurückgeben. Diese Methode wird benötigt, um etwaige Eigenspannungsverläufe in äquivalente Vordehnungen umrechnen zu können. Die Problematik hierbei ist, dass die Umkehrfunktion $\varepsilon(\sigma)$ nicht eindeutig darstellbar ist. Nach dem Erreichen der elastischen Dehnungsgrenze bleibt die Spannung konstant, d.h. bei Vorgabe einer Spannung mit der Bedingung $|\sigma| \geq |\sigma_y|$ können alle Dehnungen $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_y|$ zugeordnet werden. Infolgedessen wird bei Vorgabe einer Spannung, die größer als die Fließspannung ist, auf die elastische Dehnungsgrenze rückgerechnet.

5.2.2 Stückweise linearer Verlauf

Die Klasse *PiecewiseLinear* beschreibt eine stückweise lineare $\sigma(\varepsilon)$ -Funktion. Die Eingabe der Wertepaare erfolgt von links nach rechts im kartesischen Koordinatensystem (siehe Abbildung 5.4) und ist mathematisch definiert als:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_i) \quad \text{für } \varepsilon \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}] \quad (5.2)$$

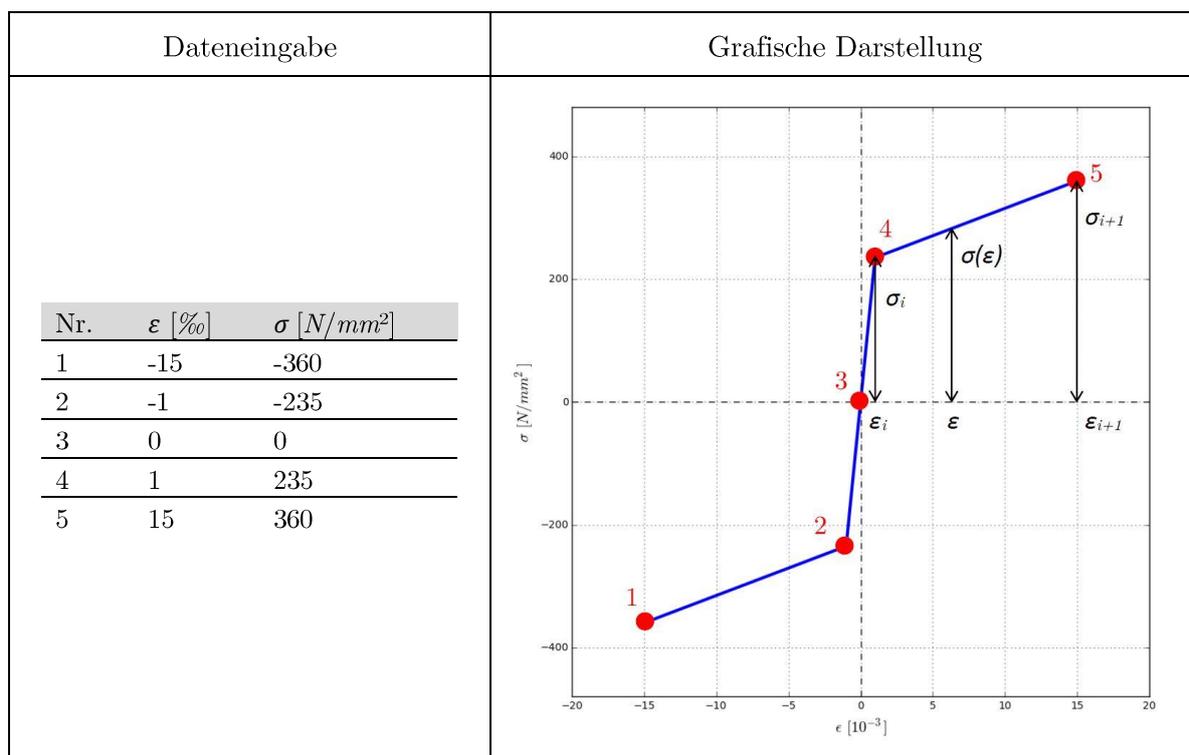


Abbildung 5.4: Stückweise linearer Spannungs-Dehnungs-Verlauf

Bei der Durchführung der Validierung sind folgende Voraussetzungen bei der Eingabe von stückweise linearen Spannungs-Dehnungs-Verläufen zu beachten:

- Der $\sigma(\varepsilon)$ -Verlauf soll grundsätzlich ein praxisnahes Materialverhalten abbilden, d.h. eine eindeutige Zuordnung von σ zu ε soll gegeben sein (mit Ausnahme des Fließplateaus).
- Die Gradienten der jeweils bereichsweise definierten linearen Funktionen dürfen nicht über alle Schranken gehen, somit dürfen keine sprunghaften Spannungsänderungen in der $\sigma(\varepsilon)$ -Linie auftreten. Diese Eingabe führt zu numerischen Problemen bei der Berechnung der Jacobi-Matrix im Newton-Raphson-Verfahren.
- Ein horizontaler Spannungsverlauf in der $\sigma(\varepsilon)$ -Linie bewirkt im Load-Stepping-Algorithmus (siehe Algorithmus 5.7), dass ein Grenzzustand gefunden ist. Dies bedeutet es treten bei Dehnungsänderungen keine Schnittkraftänderungen auf. Werden innerhalb einer $\sigma(\varepsilon)$ -Linie horizontale Verläufe definiert, kann der Fall eintreten, dass nur Grenzzustände auf diesem Spannungsniveau gefunden werden.
- Die $\sigma(\varepsilon)$ -Linie ist nur in den vorgegebenen Bereichen definiert. Außerhalb dieser Bereiche ist die Spannung 0, d.h. nach dem Erreichen der maximalen bzw. minimalen Dehnung wird ein Ausfall dieser Faser simuliert.

Die Methoden *ActStrain* und *ActStress* haben die gleiche Funktionalität wie bei der Klasse *BiLinear*.

5.2.3 Parabolischer Verlauf

Die Klasse *Parabola* ermöglicht die Erstellung einer Parabel anhand von 3 Punkten. Die allgemeine Form eines Polynoms 2. Ordnung ist:

$$\sigma(\varepsilon_p) = a + b \cdot \varepsilon_p + c \cdot \varepsilon_p^2 \quad (5.3)$$

Die Berechnung der Parameter a, b, c erfolgt über die Methode *StrainFunctPar*. Anhand der 3 definierten Punktepaare $\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{p3}$ und $\sigma_{p1}, \sigma_{p2}, \sigma_{p3}$ können die Parameter berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{p1} & \varepsilon_{p1}^2 \\ 1 & \varepsilon_{p2} & \varepsilon_{p2}^2 \\ 1 & \varepsilon_{p3} & \varepsilon_{p3}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{p1} \\ \sigma_{p2} \\ \sigma_{p3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{p1} & \varepsilon_{p1}^2 \\ 1 & \varepsilon_{p2} & \varepsilon_{p2}^2 \\ 1 & \varepsilon_{p3} & \varepsilon_{p3}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{p1} \\ \sigma_{p2} \\ \sigma_{p3} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Sind die Parameter bekannt, kann mithilfe der Methode *ActStress* die $\sigma(\varepsilon)$ -Linien ausgewertet werden. Die Umkehrfunktion $\varepsilon(\sigma)$ ergibt eine quadratische Gleichung. Bei keiner eindeutigen Zuordnung innerhalb des definierten Bereichs wird die betragsmäßig kleinste Dehnung gewählt. Im Allgemeinen muss bei der Umkehrfunktion berücksichtigt werden, dass eine eindeutige Zuordnung von Spannung zu Dehnung möglich ist. Die Punktepaare müssen von links nach rechts im kartesischen Koordinatensystem definiert werden (siehe Abbildung 5.5).

Die roten Punkte in Abbildung 5.5 rechts zeigen die Eingabe der Punktepaare. Außerhalb des definierten parabolischen Bereichs ist die Spannung 0 (Ausfall der Faser).

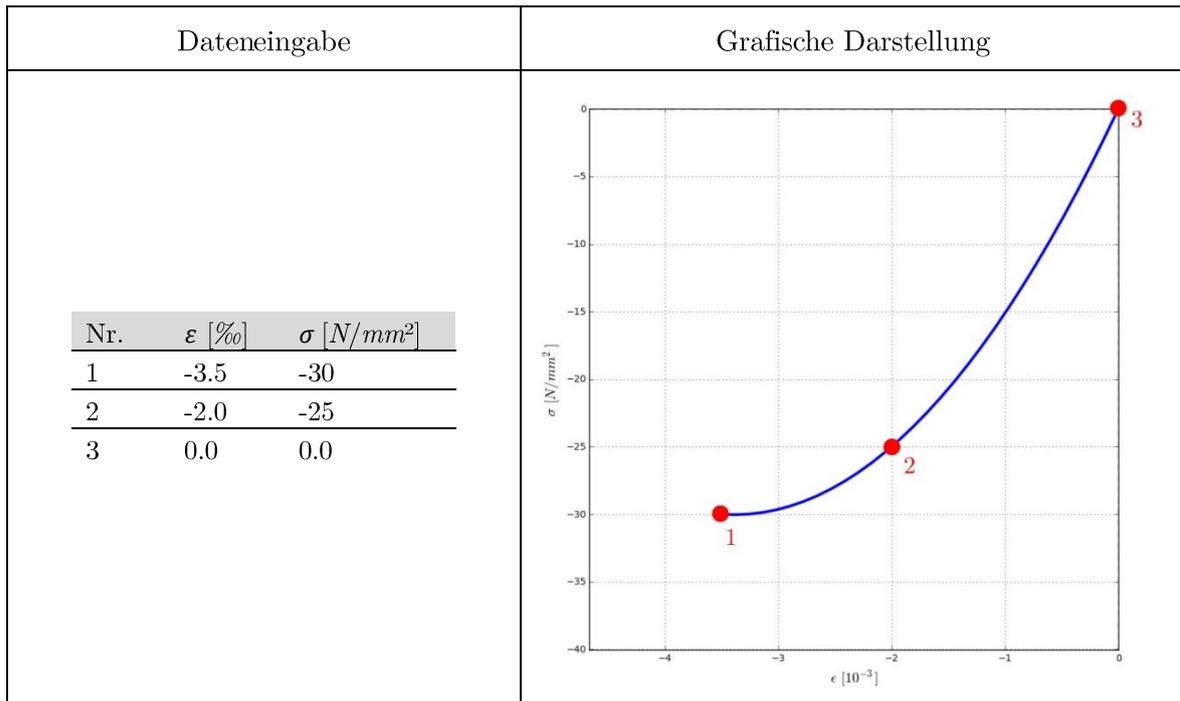


Abbildung 5.5: Parabolischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf

Im Zuge dieser Arbeit werden bilineare, stückweise lineare und parabolische $\sigma(\varepsilon)$ -Linien implementiert. Der Strukturaufbau (siehe Abbildung 5.2) erlaubt eine problemlose Erweiterung von beliebigen Materialvorlagen, die sich aus verschiedenen Funktionsverläufen zusammensetzen.

5.3 Eigenspannungsverlauf

Die Eingabe eines Eigenspannungsverlaufs erfolgt über die Angabe von stückweise linearen Spannungen in der y - oder z -Richtung. Die Verläufe werden in 1D mit relativer Positionierung bzgl. der max. y - bzw. z -Länge erstellt.

5.3.1 Äquidistanter stückweise linearer Verlauf

Die Klasse *PiecewiseLinearA* erfordert die Eingabe von Spannungspunkten, die äquidistant in y - bzw. z -Richtung nach der Eingabereihenfolge angeordnet werden (siehe Abbildung 5.6). Die Anzahl der Unterteilung n_u ist abhängig von der Anzahl der eingegebenen Spannungspunkte n_p :

$$n_u = n_p - 1 \quad (5.5)$$

Die Schrittweite l_s für die äquidistante Anordnung der Spannungspunkte wird relativ auf die maximale y - bzw. z -Länge l_y, l_z bezogen. Diese Variablen geben die maximalen Längen des Polygons in y - bzw. z -Richtung an:

$$l_y = y_{max} - y_{min}, l_z = z_{max} - z_{min} \quad (5.6)$$

$$l_{s,y} = \frac{l_y}{n_u}, l_{s,z} = \frac{l_z}{n_u} \quad (5.7)$$

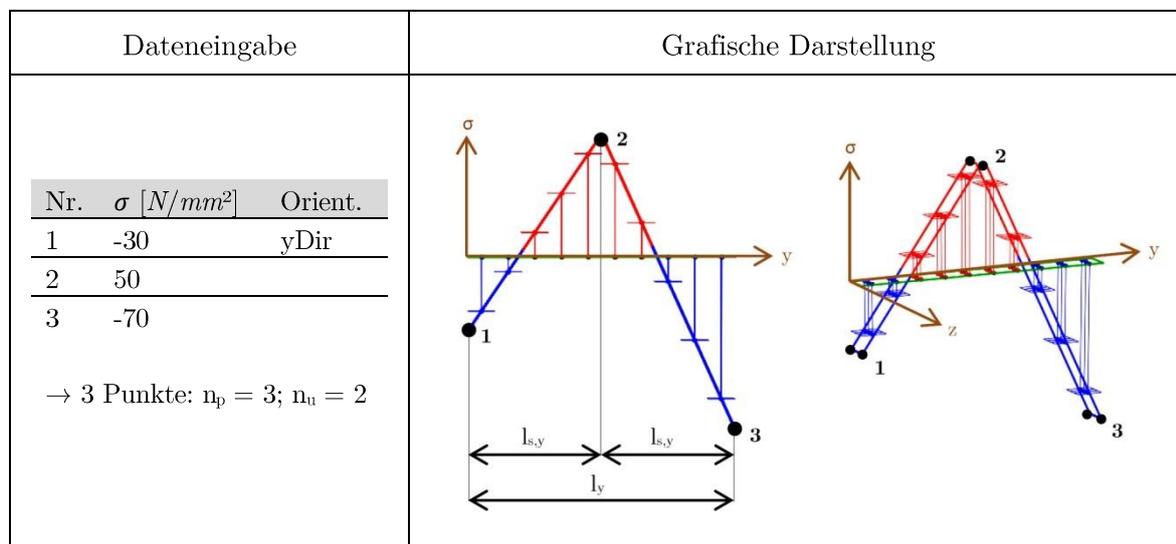


Abbildung 5.6: Äquidistanter Eigenspannungsverlauf in y -Richtung

5.3.2 Nicht äquidistanter stückweise linearer Verlauf

Für die Eingabe von nicht äquidistanten stückweise linearen Verläufen ist die Klasse *PiecewiseLinearB* zu verwenden. Die Schrittweite zwischen den Spannungspunkten wird, wie bei der Klasse *PiecewiseLinearA*, auf die maximale Länge in y- bzw. z-Richtung bezogen. Die Eingabe der Schrittweite zwischen den einzelnen Spannungspunkten erfolgt mithilfe eines relativen Faktors, bezogen auf die maximale Länge in y- bzw. z-Richtung. Dieser Faktor beschreibt die relative Positionierung der Spannungspunkte und bewegt sich zwischen 0 (Beginn des Querschnittsteils) und 1 (Ende des Querschnittsteils). Voraussetzung für die Eingabe ist, dass eine Spannungseingabe beim Faktor 0 und 1 definiert ist. Das Bsp. in Abbildung 5.7 soll die Eingabe und den resultierenden Verlauf veranschaulichen.

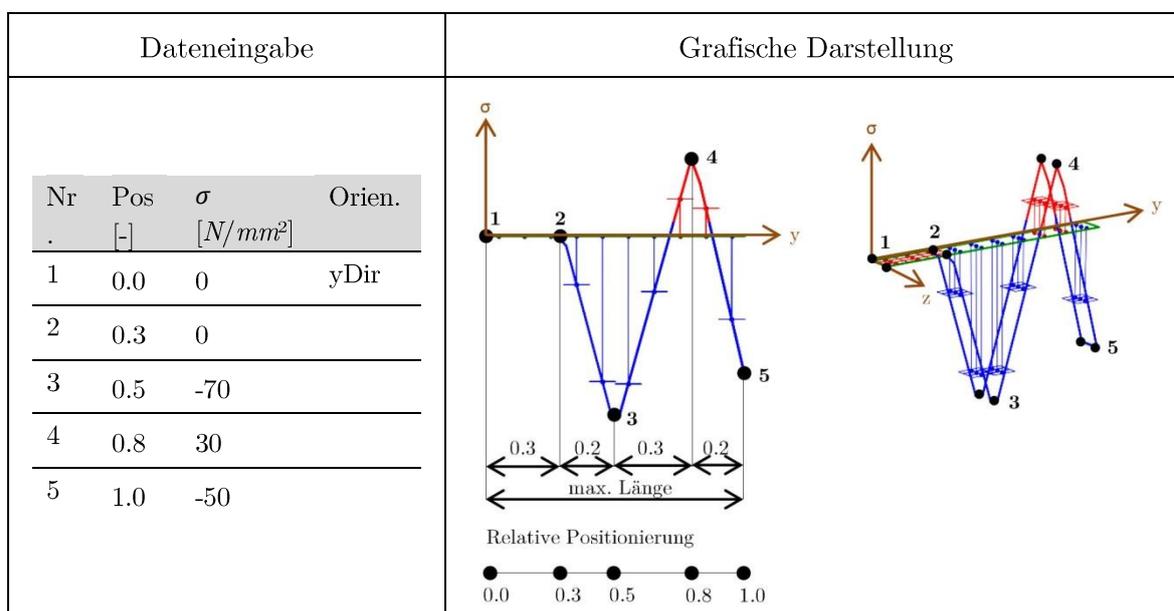


Abbildung 5.7: Nicht äquidistanter Eigenspannungsverlauf in y-Richtung

5.4 Querschnittsteile

Nach erfolgreicher Definition der Materialien bzw. etwaiger Eigenspannungsverläufe kann mit der Erstellung der Querschnittsteile begonnen werden. Diese Vorgehensweise muss eingehalten werden, da bei der Initialisierung eines Querschnittsteils die Notwendigkeit besteht, dass der Material- und der Eigenspannungsverlauf als Parameter übergeben werden. Die einzelnen Klassen im Paket *Special Shape* (siehe Abbildung 5.2) repräsentieren verschiedene Geometrievorlagen für die Querschnittsteile. Die Schritte für die Querschnittskonfiguration sind:

1. Festlegung der Geometrieparameter (abhängig von der Geomtrieform)
2. Relative Positionierung der Querschnittskomponente bezogen auf das globale Koordinatensystem (siehe Abbildung 5.1)
3. Diskretisierung des Rasters in y- bzw. z-Richtung
4. Auswahl eines vordefinierten Materials
5. Auswahl eines optionalen Eigenspannungsverlaufs
6. Angabe, ob der Querschnittsteil eine positive oder negative Fläche repräsentiert (z.B. Möglichkeit der Erstellung von Aussparungen in Querschnitten)

5.5 Allgemein verwendete Methoden

In der Basisklasse *Shape* werden Methoden für die Diskretisierung (*GetLines* und *Raster*) definiert. Die Klassen für die Erstellung der Querschnittsteile (Paket *Special Shape*) stehen in einer Vererbungsbeziehung zur Basisklasse *Shape*. Aus diesem Grund erben beispielsweise die Klassen wie *Rectangle*, *Polygon*, usw. die Methoden *GetLines* und *Raster*, wodurch die Diskretisierungsfunktionalität wiederverwendet werden kann.

In weiterer Folge werden die wichtigsten Algorithmen in Form eines Pseudocodes erläutert. Die verwendeten Variablen des Pseudocodes werden vorher angeführt und ggf. erklärt.

Die Methode *GetLines* basiert auf dem nachfolgend dargestellten Algorithmus 5.1 und bereitet die Informationen für die Diskretisierung auf.

Algorithmus 5.1: Beschreibung der Methode *GetLines*

```

1: GetLines( $V_{\text{coord}}$ ):
2:   # Insert the coordinates of the starting points for each line of the polygon
3:   for  $i=0$  to  $n_{\text{row}}$  do
4:      $M_{\text{lines}} [i,1:3] = V_{\text{coord}} [i,:]$ 
5:   end for
6:   # Insert the coordinates of the end points
7:   for  $i=0$  to  $n_{\text{row}} - 1$  do
8:      $M_{\text{lines}} [i,3:5] = V_{\text{coord}} [i+1,:]$ 
9:   end for
10:  # Calculate the linear function with respect to the coordinate system
11:  for  $i=0$  to  $n_{\text{row}}$  do
12:     $d_y = M_{\text{lines}} [i,3] - M_{\text{lines}} [i,1]$ 
13:     $d_z = M_{\text{lines}} [i,4] - M_{\text{lines}} [i,2]$ 
14:     $k = d_z / d_y$ 
15:     $dL_z = M_{\text{lines}} [i,2] - k * M_{\text{lines}} [i,1]$ 
16:    # Save the information in  $M_{\text{lines}}$ 
17:  end for
18:  return  $M_{\text{lines}}$ 
19: end

```

mit:	n_{row}	Anzahl der Polygonlinien
	y_A, z_A, y_E, z_E	Koordinaten des Anfangs- bzw. Endpunktes einer Polygonlinie
	d_y, d_z	Differenz in y- bzw. z-Richtung einer Polygonlinie
	k	Steigung der Polygonlinie
	dL_z	Bezugspunkt zum Koordinatensystem in z-Richtung
	V_{coord}	Koordinaten der Polygonpunkte
	M_{lines}	Informations-Matrix des Polygons

Die Informationen des Polygons werden in M_{lines} folgend sortiert:

$$\begin{pmatrix} Nr. & y_A & z_A & y_E & z_E & d_y & d_z & k & dL_z \\ \vdots & \vdots \\ n_{\text{row}} \end{pmatrix}$$

Die Methode *Raster* (nach Algorithmus 5.2) generiert das Netz und verwendet die Methode *GetLines*, um die Informationen des Polygons zu erhalten. Es werden die Variablen aus Algorithmus 5.1 übernommen.

Algorithmus 5.2: Diskretisierung des Querschnitts

```

1: Raster( $V_{\text{coord}}$ ,  $M_{\text{lines}}$ ):
2:   # Calculate the length of one element (information out of  $V_{\text{coord}}$ )
3:    $l_y = (y_{\text{max}} - y_{\text{min}}) / n_{\text{el},y}$ 
4:    $l_z = (z_{\text{max}} - z_{\text{min}}) / n_{\text{el},z}$ 
5:   # Define arrays for the global coordinates interval of the integration points (IP)
6:    $M_{\text{ip},y}$ ,  $M_{\text{ip},z}$ 
7:   # Scan all polygon lines for discretization
8:   for  $i=0$  to  $n_{\text{row}}$  do
9:     for  $j=0$  to  $n_{\text{el},z,\text{local}}$  do
10:      for  $k=0$  to  $n_{\text{el},y,\text{local}}$  do
11:        # Get the coordinates of the IP
12:         $y = M_{\text{ip},y}[j,k]$ 
13:         $z = M_{\text{ip},z}[j,k]$ 
14:        # Check if the IP has to be removed
15:         $d_y = M_{\text{lines}}[i,5]$ 
16:         $k = M_{\text{lines}}[i,7]$ 
17:         $dL_z = M_{\text{lines}}[i,8]$ 
18:         $c_{\text{id}} = dL_z + k * y - z$ 
19:        # Remove IP
20:        if  $c_{\text{id}} > 0$  and  $d_y > 0$  do
21:          # Subtract -1 to the identification matrix
22:           $M_{\text{ip},\text{rem}}[j,k] = M_{\text{ip},\text{rem}}[j,k] - 1$ 
23:          # Add IP
24:          elif  $c_{\text{id}} > 0$  and  $d_y < 0$  do
25:            # Add the value +1 to the identification matrix
26:             $M_{\text{ip},\text{add}}[j,k] = M_{\text{ip},\text{add}}[j,k] + 1$ 
27:          end if
28:        end for
29:      end for
30:    end for
31:    # The values of the removed and added points are combined to one matrix
32:    # Convention for the value: 0 -> IP (Element) is outside the polygon
33:    #                               1 -> IP (Element) is inside the polygon
34:    #                               -1 -> IP (Element) is removed
35:     $M_{\text{ip},\text{final}} = M_{\text{ip},\text{add}} + M_{\text{ip},\text{rem}}$ 
36:    return  $M_{\text{ip},\text{final}}$ ,  $M_{\text{ip},y}$ ,  $M_{\text{ip},z}$ 
37:  end

```

mit:	l_y, l_z	Elementlänge in y- und z-Richtung
	y, z	Koordinaten des Integrationspunktes
	$y_{\max}, y_{\min}, z_{\max}, z_{\min}$	Max. y- und z-Koordinate des Polygons
	$n_{el,y}, n_{el,z}$	Globale Elementanzahl der Querschnittskomponente in y- und z-Richtung
	$n_{el,y,local}, n_{el,z,local}$	Lokale Elementanzahl der Polygonlinie in y- und z-Richtung
	c_{id}	Überprüfungsfaktor für die Diskretisierung
	$M_{ip,y}, M_{ip,z}$	Matrizen für die y- und z-Koordinaten der Integrationspunkte
	$M_{ip,add}, M_{ip,rem}, M_{ip,final}$	Matrizen für die Skalierung der Elemente

In den nachfolgenden Abschnitten 5.5.1 bis 5.5.7 werden Beispiele für die Erstellung der Querschnittsteile angeführt. Die einzelnen Abbildungen zeigen jeweils auf der linken Seite die Parametereingabe. Die grafische Darstellung des Objekts wird mithilfe des Softwaretools *CONC* erstellt und mit zusätzlichen Informationen versehen.

5.5.1 Rechteck

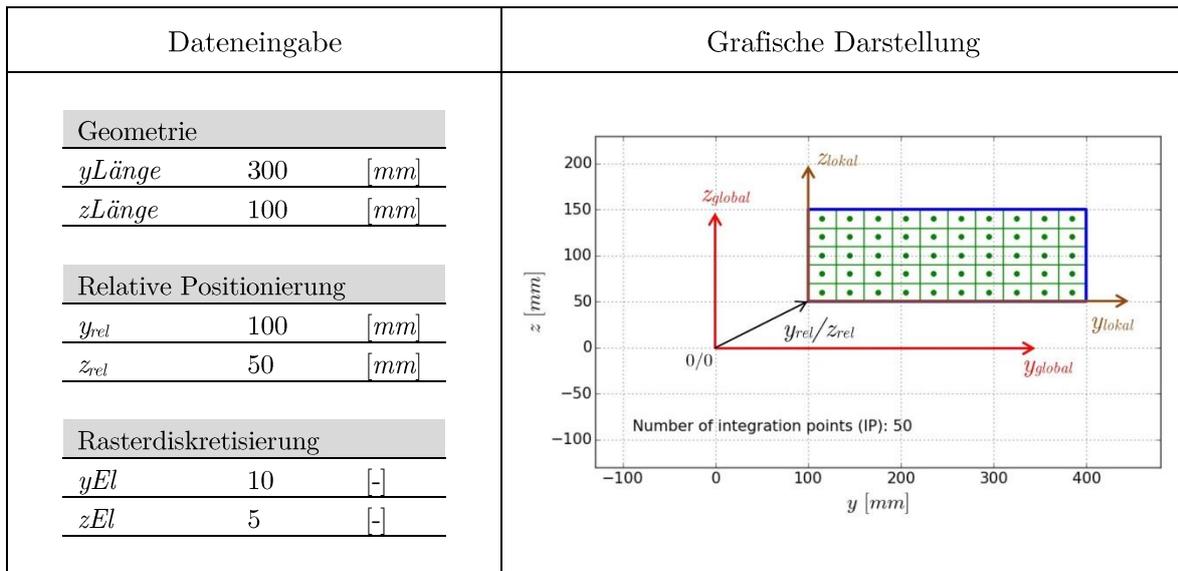


Abbildung 5.8: Erstellung eines Rechtecks

5.5.2 Polygon

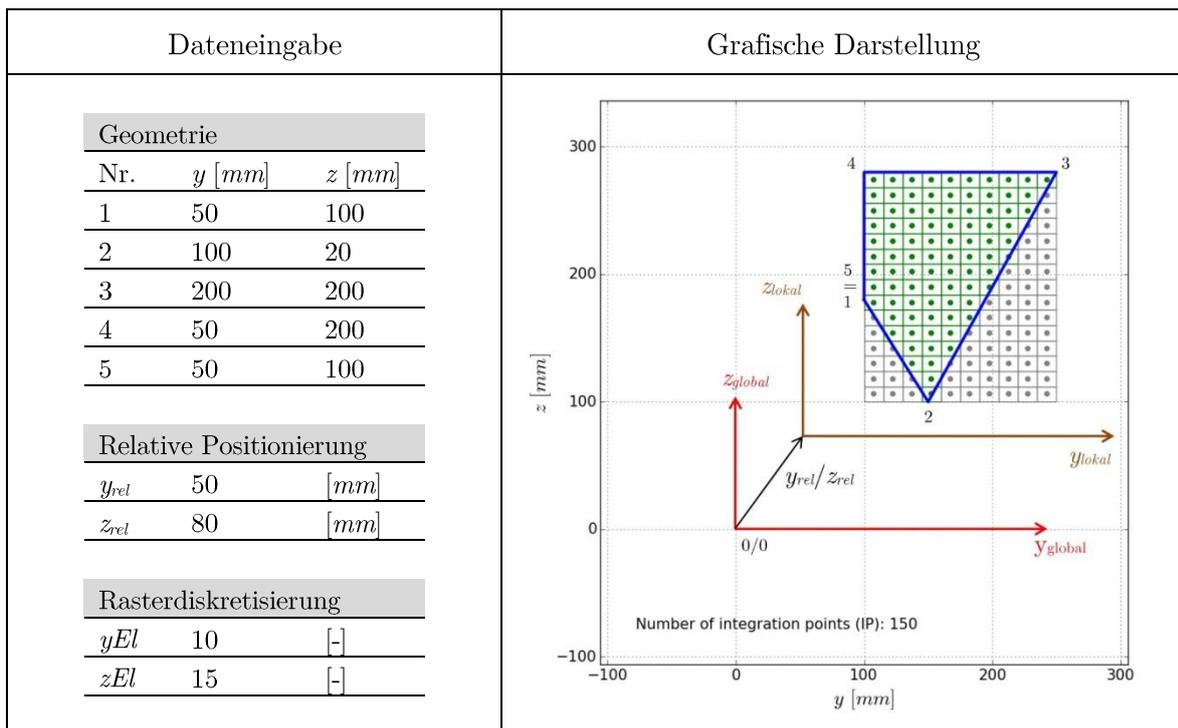


Abbildung 5.9: Erstellung eines allgemeinen Polygons

5.5.3 Kreis

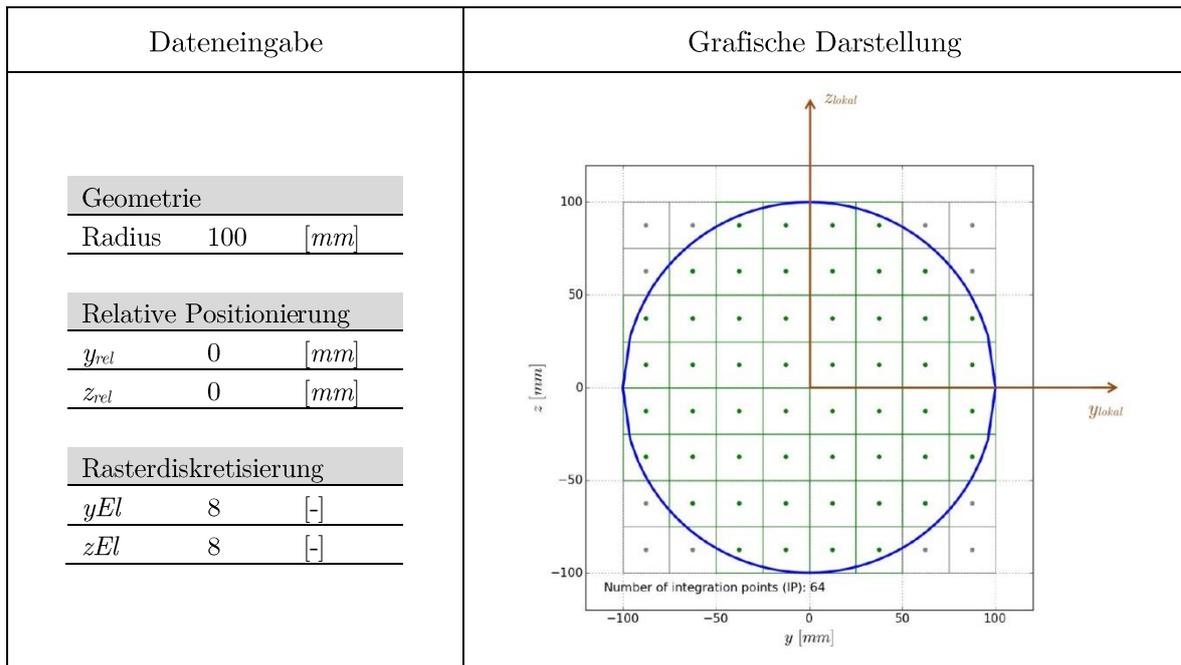


Abbildung 5.10: Erstellung eines Kreises

5.5.4 Dreieck

Nachfolgend wird die Eingabe eines Dreiecks dargestellt, jedoch mit der Anwendung auf einem quadratischen Querschnitt (Angabe von 4 Einzeldreiecken).

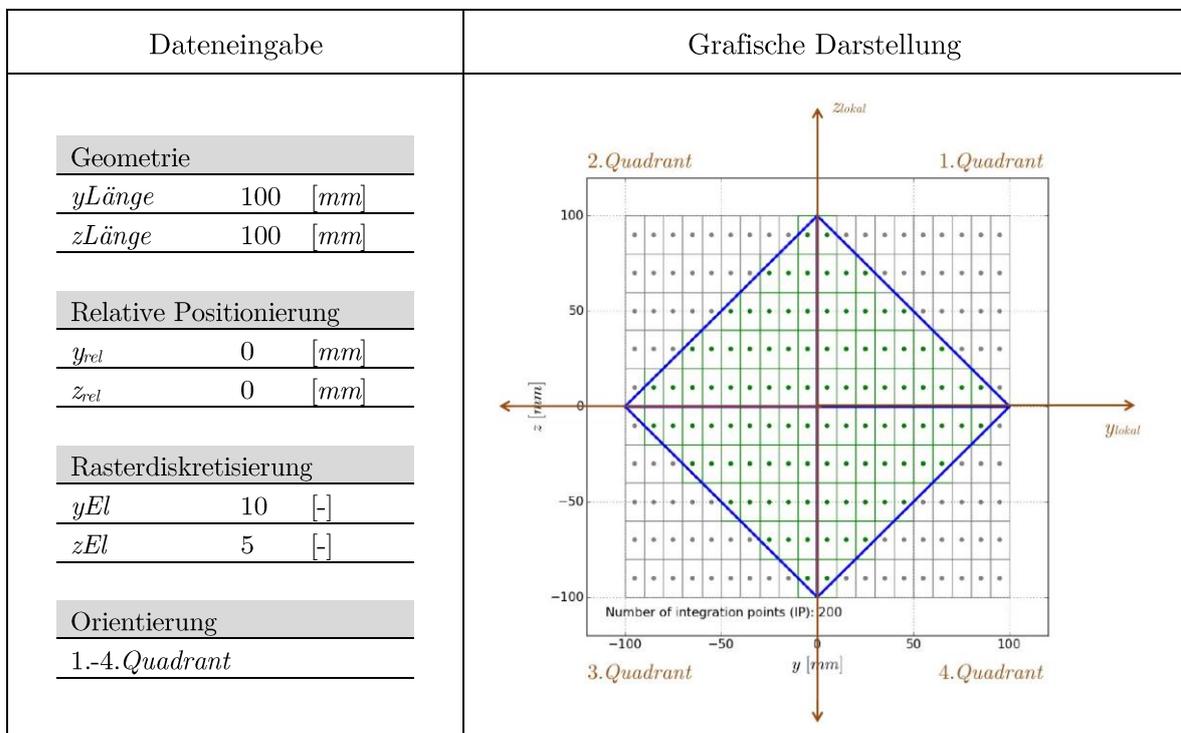


Abbildung 5.11: Erstellung eines Quadrates aus einzelnen Dreiecken

5.5.5 Viertelkreis (z.B. für Walzprofilaustrundungen)

Das nachfolgende Beispiel zeigt diesbezüglich eine mögliche Anwendung für Walzprofilaustrundungen. Wichtig ist, dass sich die Angaben der relativen Positionierung des Viertelkreises nicht auf dessen Mittelpunkt beziehen, sondern auf den Tangentschnittpunkt.

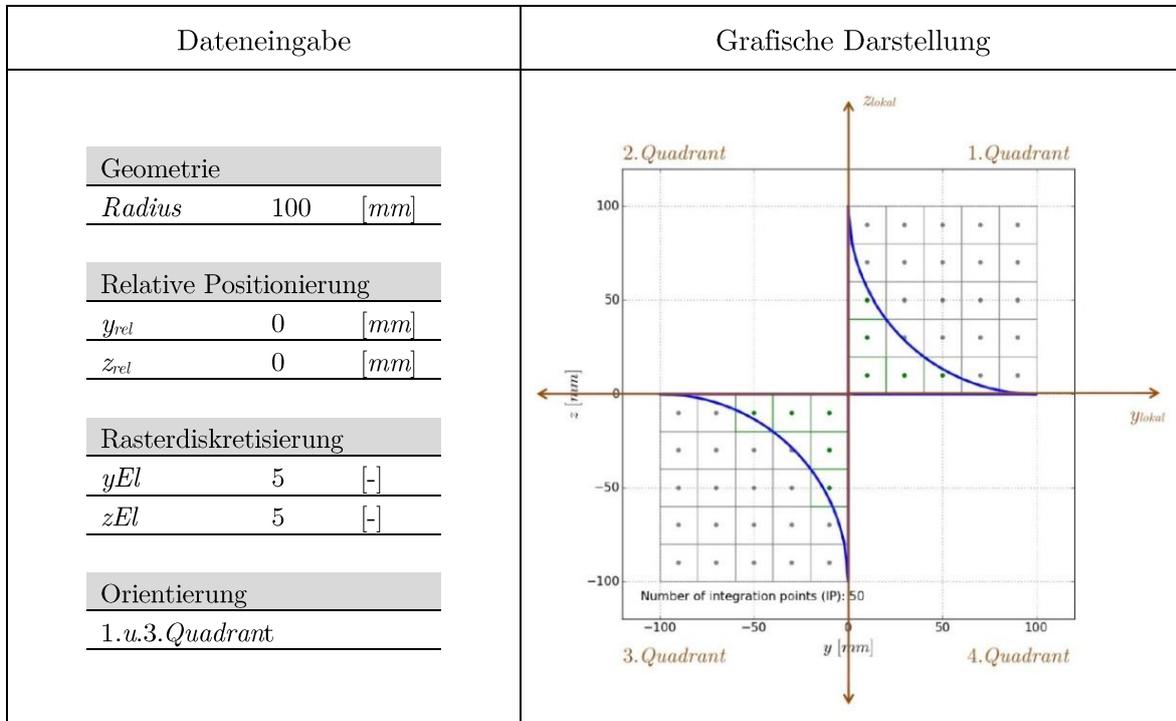


Abbildung 5.12: Erstellung eines Viertelkreises

5.5.6 Kreisbogen

Diese Funktion ist ähnlich zum Viertelkreis und deckt insbesondere Hohlprofile im Ausrundungsbereich ab – Eingabe sinngemäß zum Viertelkreis.

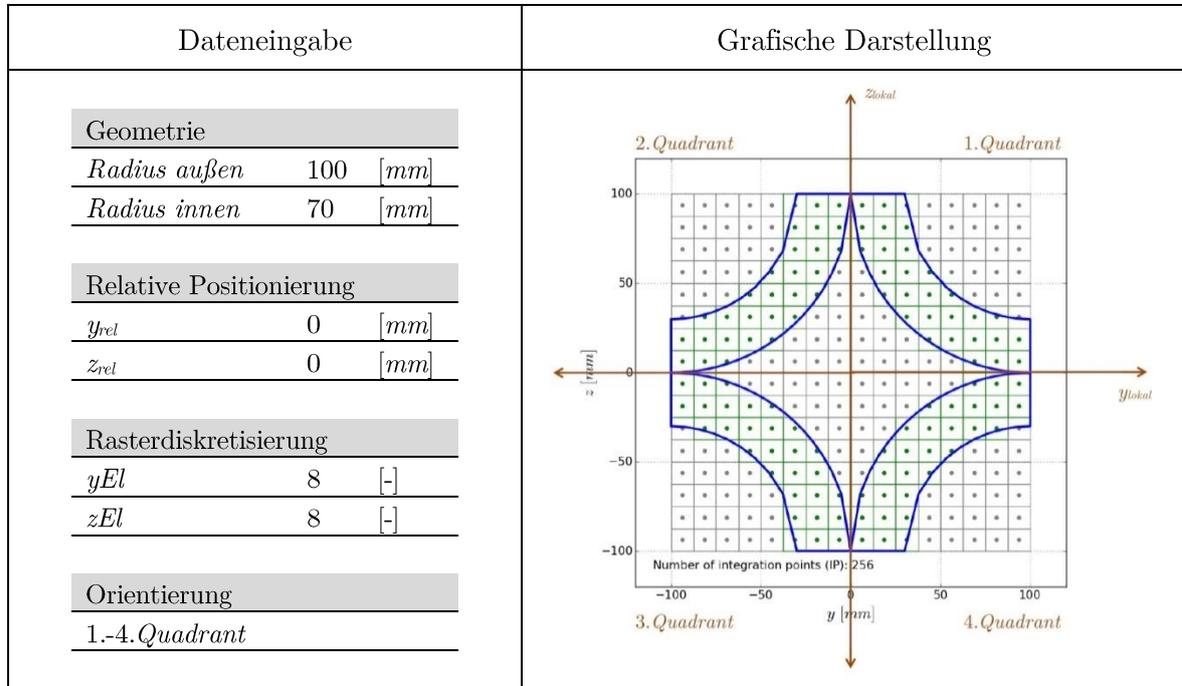


Abbildung 5.13: Erstellung eines Kreisbogens

5.5.7 Allgemeine Parabel (3 Punkte)

Die angegebene Skalierung bezieht sich auf den anzugebenen 3. Punkt der Parabel (für beide Koordinaten).

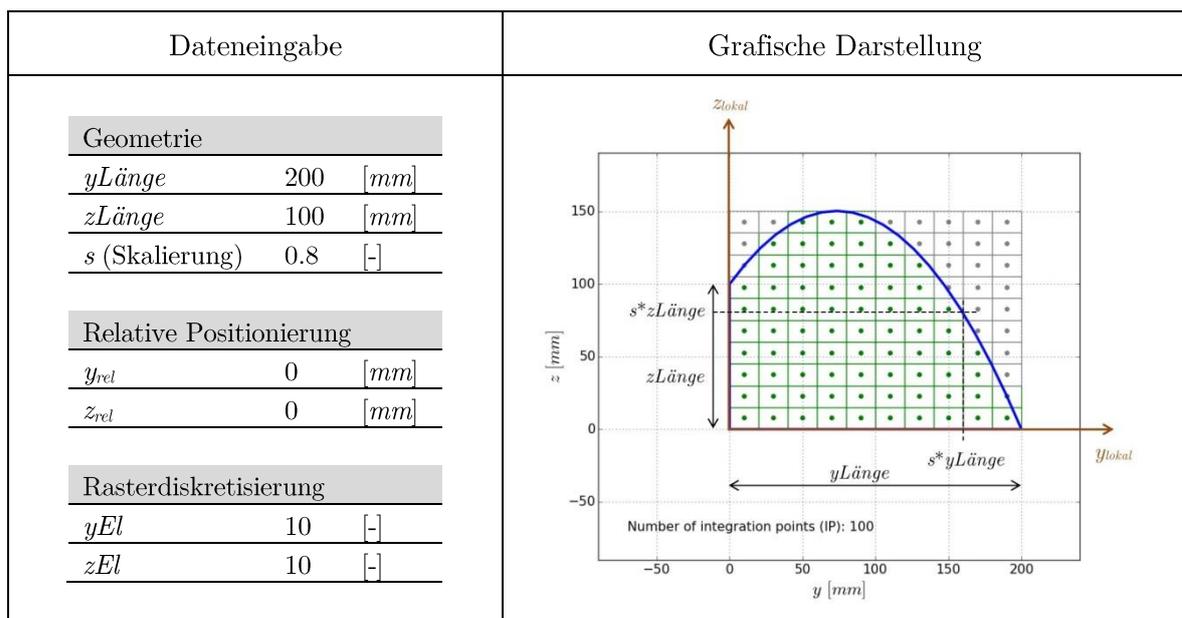


Abbildung 5.14: Erstellung einer allgemeinen Parabel

5.6 Querschnittsasssemblierung

Die Klasse *AssembleCrossSection* erstellt den gesamten Querschnitt aus den zuvor definierten Querschnittsteilen. Der Konstruktor dieser Klasse benötigt die Eingabe eines Querschnittsnamens (z.B.: HEA_300) und die Objekt-Liste der zuvor erstellten Querschnittsteile aus dem Paket *Special Shape*.

5.6.1 Berechnung der Querschnittswerte

Mithilfe der Methode *Calc* in der Klasse *AssembleCrossSection* können die Querschnittswerte berechnet werden. Die mathematischen Doppelintegrale werden numerisch aufgelöst in 2 Summen (Schleifen):

$$A_{ges} = \int_A dA = \int \int dy dz = \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} ly_i \cdot lz_i \cdot s_{ij} = \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \quad (5.8)$$

$$s_y = \frac{\int \int y dy dz}{A_{ges}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} y_{ij} \cdot A_i \cdot s_{ij}}{A_{ges}} \quad (5.9)$$

$$I_{y,ges} = \int \int z^2 dy dz - A_{ges} \cdot s_z^2 = \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} \left(\frac{ly_i \cdot lz_i^3 \cdot s_{ij}}{12} + \frac{A_i \cdot s_{ij} \cdot z_{ij}^2}{st_y} \right) - A_{ges} \cdot s_z^2 \quad (5.10)$$

mit:	n_{ob}	Anzahl der Querschnittsteile
	n_{el}	Anzahl der Elemente je Querschnittsteil
	ly_i, lz_i	Elementlänge in y- bzw. z-Richtung
	A_i	Elementfläche
	s_{ij}	Skalierung der Elementfläche (+1, 0 oder -1)
	y_{ij}, z_{ij}	y- bzw. z-Koordinaten des Elementschwerpunktes
	st_y, st_z	Steiner-Anteil
	A_{ges}	Querschnittsfläche
	s_y, s_z	Flächenschwerpunkt in y- bzw. z-Richtung
	$I_{y,ges}, I_{z,ges}$	Flächenträgheitsmoment 2.Ordnung

Anzumerken ist, dass sich die errechneten Trägheitsmomente immer auf die Achsen durch den ermittelten Schwerpunkt des Querschnitts beziehen (parallel zu den vorgegebenen y- und z-Achsen). Die Formulierung der Querschnittswerte lt. Gleichung (5.8)-(5.10) wird nur in y-Richtung angegeben. Die Vorgangsweise in z-Richtung ist ident. Das Bezugskoordinatensystem ist für die Formulierung beliebig gewählt.

Für die Implementierung des Pseudocodes werden die Variablen der Gleichungen (5.8)- (5.10) verwendet. Die Methode *Calc* (nach Algorithmus 5.3) benötigt die Informationen über den gesamten Querschnitt, die mit dem Eingangsparameter *CrossSection* repräsentiert werden.

Algorithmus 5.3: Berechnung der Querschnittswerte

```

1: Calc(CrossSection):
2:   # Iterate over all special shape objects
3:   for i=0 to nob do
4:     # Get the information about the special shape object
5:     ly, lz, Mip,final, Mip,y, Mip,z
6:     # Iterate over all integration points (IP)
7:     for j=0 to nel,z do
8:       for k=0 to nel,y do
9:         # Get the information of the IP
10:        y = Mip,y [j,k]
11:        z = Mip,z [j,k]
12:        s = Mip,final [j,k]
13:        # Calculate the cross-sections values for each element
14:        A = s * ly * lz
15:        Ages = Ages + s * ly * lz
16:        Sy = Sy + A * y
17:        Sz = Sz + A * z
18:        Iy = Iy + s * (ly * lz3) / 12
19:        Iz = Iz + s * (lz * ly3) / 12
20:        Sty = Sty + A * z2
21:        Stz = Stz + A * y2
22:       end for
23:     end for
24:   end for
25:   # Calculate the final cross-section values for the whole cross-section
26:   sy = Sy / Ages
27:   sz = Sz / Ages
28:   Iy,ges = Iy + Sty - Ages * sz2
29:   Iz,ges = Iz + Stz - Ages * sy2
30:   return Ages, Sy, Sz, Iy,ges, Iz,ges

```

5.6.2 Definition des Bezugspunktes

Die Standardeinstellung ist, dass die Schnittkräfte und die Dehnungsebene auf den geometrischen Schwerpunkt bezogen werden. Bei Verbundquerschnitten ist dabei zu beachten, dass dieser Punkt im Normalfall (kein doppelsymmetrischer Querschnitt) nicht dem Steifigkeitschwerpunkt entspricht (z.B. nach dem n-Ziffern-Verfahren ermittelt). In diesen Fällen obliegt es dem Nutzer des Programms, denselben Bezugspunkt in *CONC* einzugeben, der auch bei der Schnittkraftermittlung (baustatische Systemberechnung) verwendet wurde. Die im Berechnungstool implementierte Methode *setPointRef* ermöglicht die individuelle Eingabe eines Bezugspunktes, um die Auswirkungen bzgl. der inneren Schnittkräfte zu untersuchen.

5.6.3 Verfeinerung des Rasters

Die Genauigkeit der Spannungsintegration ist abhängig von der Auflösung des Rasters. Eine Verfeinerung des Rasters kann durch Eingabe eines Skalierungsfaktors x_{scale} durchgeführt werden. Die Elemente in y- und z-Richtung werden jeweils lt. Gleichung (5.11) skaliert.

$$n_{el} = n_{el,y} \cdot x_{scale} \cdot n_{el,z} \cdot x_{scale} = x_{scale}^2 \cdot n_{el,y} \cdot n_{el,z} \quad (5.11)$$

mit:	n_{el}	Gesamte Anzahl der Elemente
	$n_{el,y}, n_{el,z}$	Anzahl der Elemente in y- bzw. z-Richtung
	x_{scale}	Skalierungsfaktor für die Rasterverfeinerung

Der Skalierungsfaktor erhöht die ursprüngliche Anzahl der Elemente quadratisch. Programmiertechnisch wird dieser Vorgang von der Methode *CreateNewMesh* umgesetzt. Es wird eine Objektkopie des ursprünglichen Querschnitts erzeugt, wobei die Elemente lt. Gleichung (5.11) skaliert werden. Um eine effektive Netzverfeinerung zu erhalten, kann eine Verfeinerung für ausgewählte Querschnittsteile durchgeführt werden.

5.7 Spannungsintegration

Die Gleichungen (3.2)-(3.4) werden auf das verwendete Integrationsverfahren der Rasterunterteilung adaptiert. D.h. die Doppelintegrale werden über eine Aufsummierung der einzelnen Elemente (konstante Spannungsblöcke) der Querschnittsteile berechnet. Die Koordinaten der Integrationspunkte y_{ij}, z_{ij} (Schwerpunkte der Elemente) werden auf den definierten Bezugspunkt bezogen. Des Weiteren werden bei der Integration etwaige Eigenspannungen als äquivalente Vordehnungen ε_{res} , ausgewertet am Integrationspunkt des jeweiligen Elements, berücksichtigt. Die Umrechnung der vorgegebenen Spannung zu einer Dehnung wird im Abschnitt 5.2 erläutert.

Für die Formulierung der Gleichung (5.12)-(5.14) werden die lokalen Variablen lt. Abschnitt 5.6.1 verwendet.

$$\begin{aligned}
 N_{int} &= \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) dA \\
 &= \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
 M_{y,int} &= \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot z dA \\
 &= \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot z_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
 M_{z,int} &= \int_A \sigma(\varepsilon(y, z)) \cdot y dA \\
 &= \sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot y_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die Spannungsintegration wird von der Methode *GetEqu* durchgeführt. Die Berücksichtigung der Eigenspannungen kann je nach Anforderung vernachlässigt werden, um die Schnittkräfte mit und ohne Eigenspannung effektiv vergleichen zu können. Die Methode *GetEqu* erfordert das gesamte Querschnittsobjekt *CrossSection* als Eingangsparameter. Die allgemeine Implementierung der Spannungsintegration ist im Algorithmus 5.4 dargestellt. Um die reaktiven Schnittkräfte zu berechnen, werden die externen Schnittkräfte auf 0 gesetzt.

Algorithmus 5.4: Spannungsintegration bzw. Berechnung der Kräftedifferenz

```

1: GetEqu(CrossSection,  $\varepsilon$ ,  $N_{\text{ext}}$ ,  $M_{y,\text{ext}}$ ,  $M_{z,\text{ext}}$ , mode):
2:   # Definition of the strain-vector
3:    $\varepsilon_0 = \varepsilon[0]$ 
4:    $k_y = \varepsilon[1]$ 
5:    $k_z = \varepsilon[2]$ 
6:   # Define the point of reference for strain-relation and static-forces
7:    $S_{y,\text{ref}}, S_{z,\text{ref}}$ 
8:   # Iterate over all special shape objects
9:   for i=0 to  $n_{\text{ob}}$  do
10:    # Get the information about the special shape object
11:     $l_y, l_z, M_{\text{ip,final}}, M_{\text{ip,y}}, M_{\text{ip,z}}$ 
12:    # Transformation of the coordinates to the point of reference
13:     $M_{\text{ip,y}} = M_{\text{ip,y}} - S_{y,\text{ref}}$ 
14:     $M_{\text{ip,z}} = M_{\text{ip,z}} - S_{z,\text{ref}}$ 
15:    # Iterate over all integration points (IP)
16:    for j=0 to  $n_{\text{el,z}}$  do
17:      for k=0 to  $n_{\text{el,y}}$  do
18:        # Get the information of the IP
19:         $y = M_{\text{ip,y}}[j,k]$ 
20:         $z = M_{\text{ip,z}}[j,k]$ 
21:         $s = M_{\text{ip,final}}[j,k]$ 
22:         $A = s * l_y * l_z$ 
23:        # Calculate the stress at the IP for the according material function
24:        # Calculate the stress out of the strain  $\varepsilon$ 
25:        if mode == 'EquStrain' do
26:           $\sigma_{\text{IP}} = \sigma(\varepsilon_0 + k_y * y + k_z * z)$ 
27:        # Calculate the stress out of the residual-strain  $\varepsilon_{\text{res}}$ 
28:        elif mode == 'EquResidualstress' do
29:           $\sigma_{\text{IP}} = \sigma(\varepsilon_{\text{res}})$ 
30:        # Combine  $\varepsilon + \varepsilon_{\text{res}}$ 
31:        elif do
32:           $\sigma_{\text{IP}} = \sigma((\varepsilon_0 + k_y * y + k_z * z) + \varepsilon_{\text{res}})$ 
33:        end if
34:        # Calculate the intern static-forces
35:         $N_{\text{int}} = N_{\text{int}} + \sigma_{\text{IP}} * A$ 
36:         $M_{y,\text{int}} = M_{y,\text{int}} - \sigma_{\text{IP}} * A * y$ 
37:         $M_{z,\text{int}} = M_{z,\text{int}} + \sigma_{\text{IP}} * A * z$ 
38:      end for
39:    end for
40:  end for
41:  # Return the difference between intern and extern static-forces
42:   $f_1 = N_{\text{int}} - N_{\text{ext}}$ 
43:   $f_2 = M_{y,\text{int}} - M_{y,\text{ext}}$ 
44:   $f_3 = M_{z,\text{int}} - M_{z,\text{ext}}$ ;  $f = [f_1, f_2, f_3]$ 
45:  return f

```

5.8 Nichtlinearer Gleichungslöser

Im Abschnitt 4 wurde bereits die allgemeine Vorgangsweise für das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems erläutert. Die mathematische Beschreibung des Newton-Raphson-Verfahrens wird anhand des verwendeten numerischen Integrationsverfahrens aufbereitet. Die Gleichungen (4.1)-(4.3) ergeben somit:

$$f_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)}_{N_{int}} - N_{ext} = 0 \quad (5.15)$$

$$f_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot z_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)}_{M_{y,int}} - M_{y,ext} = 0 \quad (5.16)$$

$$f_3(\boldsymbol{\varepsilon}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{ob}} \sum_{j=1}^{n_{el}} A_i \cdot s_{ij} \cdot y_{ij} \cdot \sigma_{ij} \left((\varepsilon_0 + k_y \cdot y_{ij} + k_z \cdot z_{ij}) + \varepsilon_{res} \right)}_{M_{z,int}} - M_{z,ext} = 0 \quad (5.17)$$

Die Abbildung 5.15 zeigt die prinzipielle Vorgehensweise des Newton-Raphson-Verfahrens anhand einer nichtlinearen Last-Verformungskurve $p(w)$. Ausgehend von einem gewählten Startvektor werden die approximierten Lösungen w_i berechnet. Die Steigung (Jacobi-Matrix) wird bei jedem Iterationsschritt neu berechnet. Die Iteration wird beendet, wenn ein Abbruchkriterium lt. Abschnitt 4.2.2 eintritt. Jedoch sind jene Lösungen, die das Kräftegleichgewicht innerhalb der Toleranz nicht erfüllen, zu verwerfen. D.h. nur das 2. Abbruchkriterium lt. Abschnitt 4.2.2 liefert eine akzeptable Lösung.

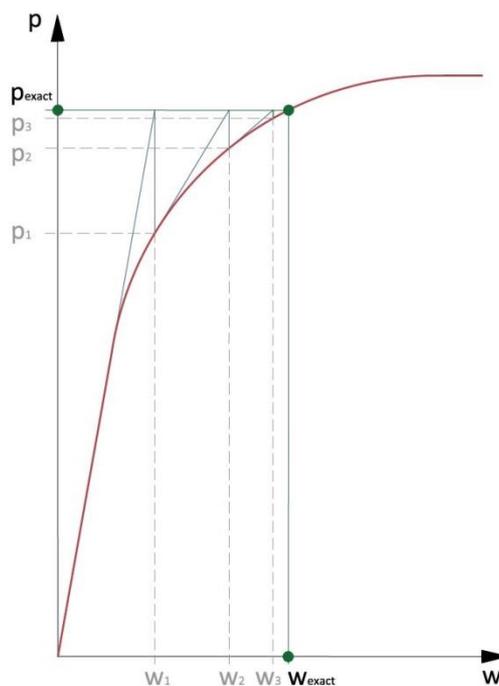


Abbildung 5.15: Grafische Darstellung des Newton-Raphson-Verfahrens

5.8.1 Ermittlung der Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix (siehe Gleichung (4.8)) wird mithilfe des Differentialquotienten numerisch bestimmt. Die Gleichung (5.18) beschreibt die allgemeine Vorgehensweise.

$$J_{Tij} = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_j} = \frac{f_i(\boldsymbol{\varepsilon}) - f_i(\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j)}{\Delta h} \quad \text{für } i = [1, 3]; j = [1, 3] \quad (5.18)$$

Die Dehnungsänderung wird für die partiellen Ableitungen als Vektor dargestellt, um eine effektive Gestaltung des Algorithmus zu erhalten:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \Delta h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \Delta h \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Der Algorithmus 5.5 zeigt, dass für die numerische Berechnung der Jacobi-Matrix 10-Mal (3x3+1) über den gesamten Querschnitt integriert wird. Aus diesem Grund ist die Rechenzeit für das Newton-Rapson-Verfahren maßgeblich abhängig von:

- Anzahl der Iterationsschritte bzw. zu berechnende Jacobi-Matrizen
- Verfeinerungsgrad des Rasters (Anzahl der Integrationspunkte)

Algorithmus 5.5: Assemblierung der Jacobi-Matrix

```
1: GetJacobi(CrossSection,  $\varepsilon$ , Next, My,ext, Mz,ext):
2:   # Get the force difference at the strain-relation  $\varepsilon$  by using the method GetEqu
3:   f = GetEqu(CrossSection, vEps, N, My, Mz)
4:   # Assemble the Jacobian matrix by using equation (5.18)
5:   for i=0 to 3 do
6:     for j=0 to 3 do
7:       # Calculate the force difference for the strain-relation  $\varepsilon_{\text{delta}}$ 
8:        $\varepsilon_{\text{delta}} = \varepsilon - \Delta \varepsilon_j$ 
9:       fdelta = GetEqu(CrossSection,  $\varepsilon_{\text{delta}}$ , Next, My,ext, Mz,ext)
10:      JT[i,j] = (f[i]- fdelta[i]) /  $\Delta h$ 
11:     end for
12:   end for
13:   return JT
```

5.8.2 Implementierung des Newton-Raphson-Verfahrens

Der Algorithmus für das Newton-Raphson-Verfahren wurde ursprünglich mit der Option ausgestattet, dass die Jacobi-Matrix nur anfangs am Startvektor berechnet wird. Anschließend wird diese bei der iterativen Lösungsfindung nicht mehr aktualisiert. Diese Adaptierung wird als modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren bezeichnet.

Im Zuge der Validierung führt diese Vorgehensweise zu erheblichen Problemen, da sich das Steifigkeitsverhalten nach dem Verlassen des elastischen Bereichs erheblich ändert. Folgedessen sind viele Iterationsschritte notwendig, um eine auskonvergierte Lösung zu finden. Dadurch ergibt sich keine zeitlich effiziente Lösungsfindung. Aus diesem Grund wird die Jacobi-Matrix bei jedem Iterationsschritt neu berechnet.

Algorithmus 5.6: Implementierung des Newton-Raphson-Verfahrens

```

1: NonLinNewton(CrossSection,  $\varepsilon_{\text{start}}$ ,  $N_{\text{ext}}$ ,  $M_{y,\text{ext}}$ ,  $M_{z,\text{ext}}$ ,  $c_{\text{max}}$ ):
2:   # Calculate the force difference with the starting strain-vector  $\varepsilon_{\text{start}}$ 
3:    $f = \text{GetEqu}$ (CrossSection,  $\varepsilon_{\text{start}}$ ,  $N_{\text{ext}}$ ,  $M_{y,\text{ext}}$ ,  $M_{z,\text{ext}}$ )
4:   error =  $\|f\|$ 
5:   # Iteration process for finding the force equilibrium
6:    $i = 0$ 
7:   # 1. interrupt criterion: iteration as long as the error-tolerance is not achieved
8:   while error >  $10^{-2}$  do
9:       # 2. interrupt criterion: stop iteration, if the max number of iterations  $c_{\text{max}}$  is
10:      achieved
11:      if  $i \geq c_{\text{max}}$  do
12:          break
13:      end if
14:      # Get the Jacobian matrix
15:       $J_T = \text{GetJacobi}$ (CrossSection,  $\varepsilon_{\text{start}}$ ,  $N_{\text{ext}}$ ,  $M_{y,\text{ext}}$ ,  $M_{z,\text{ext}}$ )
16:      # Get the determinant of the Jacobian matrix
17:       $d_J = \det(J_T)$ 
18:      # 3. interrupt criterion: determinant of the Jacobian matrix must not be zero
19:      if  $|d_J| \leq 10^{-12}$  do
20:          break
21:      end if
22:      # Solve the linear equation system for the approximated solution
23:       $f = \text{GetEqu}$ (CrossSection,  $\varepsilon_{\text{start}}$ ,  $N_{\text{ext}}$ ,  $M_{y,\text{ext}}$ ,  $M_{z,\text{ext}}$ )
24:       $\varepsilon_{\text{new}} = \varepsilon_{\text{start}} - J_T^{-1} * f$ 
25:      # Calculate new error of the approximated solution (check convergence)
26:      error =  $\|f(\varepsilon_{\text{new}})\|$ 
27:      # Update the new solution  $\varepsilon_{\text{new}}$  as new starting strain-vector
28:       $\varepsilon_{\text{start}} = \varepsilon_{\text{new}}$ 
29:       $i = i + 1$ 
30:      # Save the iteration steps in the matrix  $M_{\text{Sol}}$ 
31:   end while
32:   return  $M_{\text{Sol}}$ ,  $\varepsilon_{\text{new}}$ 

```

5.9 Load-Stepping-Verfahren

Als Load-Stepping-Verfahren wird die schrittweise Laststeigerung der äußeren Schnittkräfte bezeichnet, wobei für jeden Lastschritt eine nichtlineare Lösung mithilfe des Newton-Raphson-Verfahrens berechnet wird. Die Lösung der vorigen kleineren Last ist der Startvektor für den nächsten Lastschritt.

Ausgangspunkt ist ein Lastniveau, bei dem abhängig von den Vorgaben des Newton-Raphson-Verfahrens eine Lösung gefunden wird. Ausgehend von diesem wird die inkrementelle Laststeigerung gezielt gesteuert, um bei Erhöhung des Lastniveaus eine Lösung zu finden. Wird innerhalb eines Lastschrittes kein Kräftegleichgewicht gefunden, erfolgt wiederum eine prozentuale Unterteilung des Lastinkrements. Das Verfahren wird beendet, sobald der inkrementelle Lastschritt eine vorgegebene Lastgröße unterschreitet. D.h. bei diesem Lastniveau wird keine Lösung gefunden. Unter der Voraussetzung, dass bei diesem Lastschritt kein Gleichgewicht existiert, ist die maximale Querschnittstragfähigkeit erreicht. Die Genauigkeit der maximalen Tragfähigkeit kann mit der Angabe der letzten Laststeigerung abgeschätzt werden.

Im Load-Stepping-Verfahren wird das Newton-Raphson-Verfahren mit schrittweiser Aktualisierung der Jacobi-Matrix implementiert. Die Abbildung 5.16 soll die prinzipielle Vorgehensweise anhand einer Last-Verformungskurve $p(w)$ veranschaulichen. Die einzelnen Lastschritte werden nummeriert, um die gezielte Steuerung des Lastinkrements zu zeigen.

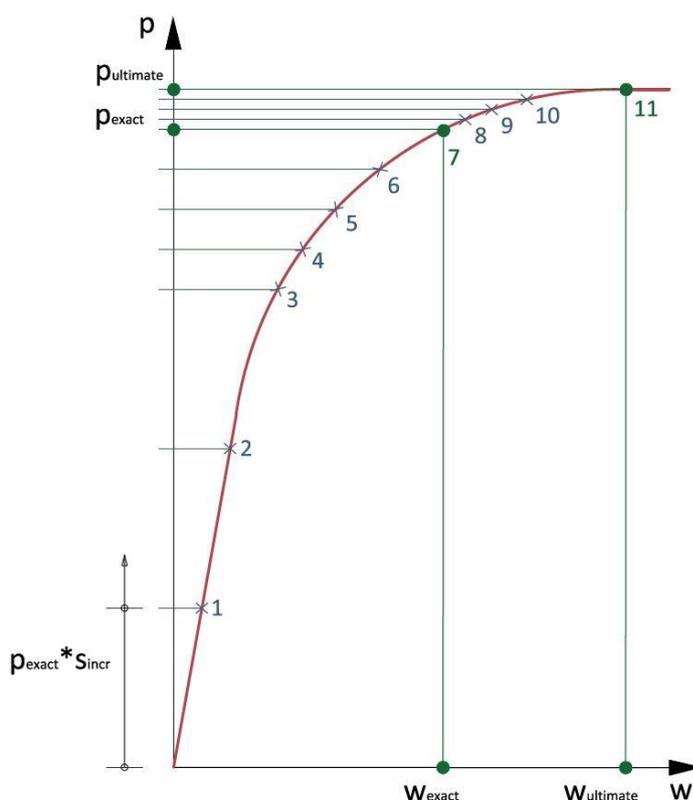


Abbildung 5.16: Allgemeine Veranschaulichung des Load-Stepping-Verfahrens

Algorithmus 5.7: Implementierung des Load-Stepping-Verfahrens

```

1: NonLinLoadStep(CrossSection,  $\epsilon_{start}$ ,  $N_{ext}$ ,  $M_{y,ext}$ ,  $M_{z,ext}$ ,  $C_{max}$ ,  $S_{start}$ ,  $n_{incr}$ ,  $S_{min,incr}$ ):
2:   # Scale the load to be started with the iteration
3:    $N_{ext,start} = N_{ext} * S_{start}$ 
4:    $M_{y,ext,start} = M_{y,ext} * S_{start}$ 
5:    $M_{z,ext,start} = M_{z,ext} * S_{start}$  ;  $S_{incr} = S_{start}$ 
6:   # Try to solve the starting step by using the method NonLinNewton
7:    $\epsilon_{new} = \mathbf{NonLinNewton}$ (CrossSection,  $\epsilon_{start}$ ,  $N_{ext,start}$ ,  $M_{y,ext,start}$ ,  $M_{z,ext,start}$ ,  $C_{max}$ )
8:   # Subdivide the starting loadstep if no solution is found
9:   while  $\epsilon_{new} ==$  'No solution' do
10:    # The static forces are divided by the scale-factor  $n_{incr}$ 
11:     $N_{ext,start} = N_{ext,start} / n_{incr}$ 
12:     $M_{y,ext,start} = M_{y,ext,start} / n_{incr}$ 
13:     $M_{z,ext,start} = M_{z,ext,start} / n_{incr}$  ;  $S_{incr} = S_{incr} / n_{incr}$ 
14:    # Solve the scaled load
15:     $\epsilon_{new} = \mathbf{NonLinNewton}$ (CrossSection,  $\epsilon_{start}$ ,  $N_{ext,start}$ ,  $M_{y,ext,start}$ ,  $M_{z,ext,start}$ ,  $C_{max}$ )
16:  end while
17:  # Initialize the scaled starting load as increment load
18:   $N_{ext,incr} = N_{ext,start}$ 
19:   $M_{y,ext,incr} = M_{y,ext,start}$ 
20:   $M_{z,ext,incr} = M_{z,ext,start}$ 
21:  # Loadstepping to the ultimate Load
22:  while  $S_{incr} < S_{min,incr}$  do
23:    # Increase loadstep by adding the increment load
24:     $N_{ext,step} = N_{ext,start} + N_{ext,incr}$ 
25:     $M_{y,ext,step} = M_{y,ext,start} + M_{y,ext,incr}$ 
26:     $M_{z,ext,step} = M_{z,ext,start} + M_{z,ext,incr}$ 
27:    # Solve the loadstep
28:     $\epsilon_{step} = \mathbf{NonLinNewton}$ (CrossSection,  $\epsilon_{new}$ ,  $N_{ext,step}$ ,  $M_{y,ext,step}$ ,  $M_{z,ext,step}$ ,  $C_{max}$ )
29:    # Further subdivision until solution is found
30:    while  $\epsilon_{step} ==$  'No solution' do
31:      # Subdivide the increment loadstep if no solution is found
32:       $N_{ext,incr} = N_{ext,incr} / n_{incr}$ 
33:       $M_{y,ext,incr} = M_{y,ext,incr} / n_{incr}$ 
34:       $M_{z,ext,incr} = M_{z,ext,incr} / n_{incr}$ 
35:       $S_{incr} = S_{incr} / n_{incr}$ 
36:      # Add lower increment load starting from the load where a solution is found
37:       $N_{ext,step} = N_{ext,start} + N_{ext,incr}$ 
38:       $M_{y,ext,step} = M_{y,ext,start} + M_{y,ext,incr}$ 
39:       $M_{z,ext,step} = M_{z,ext,start} + M_{z,ext,incr}$ 
40:       $\epsilon_{step} = \mathbf{NonLinNewton}$ (CrossSection,  $\epsilon_{new}$ ,  $N_{ext,step}$ ,  $M_{y,ext,step}$ ,  $M_{z,ext,step}$ ,  $C_{max}$ );
41:       $\epsilon_{new} = \epsilon_{step}$ 
42:    end while
43:    # Define new starting load
44:    [  $N_{ext,start}$ ,  $M_{y,ext,start}$ ,  $M_{z,ext,start}$  ] = [  $N_{ext,step}$ ,  $M_{y,ext,step}$ ,  $M_{z,ext,step}$  ]
45:  end while
46:  # Return the information of the load-stepping
47:  return  $M_{step,iter}$ ,  $\epsilon_{step}$ , ...

```

mit:	s_{start}	Prozentuelle Skalierung des ersten Lastschrittes
	n_{incr}	Anzahl der Unterteilungen des Lastinkrements
	$s_{\text{min,incr}}$	Skalierungswert für das minimale Lastinkrement
	s_{incr}	Aktueller Skalierungsfaktor des Lastschrittes bezogen auf die Ausgangslast

Das Load-Stepping-Verfahren wird abgebrochen, wenn die Bedingung $s_{\text{incr}} < s_{\text{min,incr}}$ erfüllt ist, also der aktuelle Lastschritt, bezogen auf die Ausgangslast, kleiner als die vorgegebene Grenzskaalierung ist. Somit können die Grenzzustände der Querschnittstragfähigkeiten unter einer vorgegebenen Genauigkeit ermittelt werden.

Diese Vorgangsweise wird anhand des folgenden Ausgabeprotokolls erläutert. In der Zeile 8 ist der errechnete Sicherheitsfaktor (maximaler Skalierungsfaktor gegenüber der Ausgangslast) angegeben. Beim Load-Stepping-Verfahren wird die Schnittkraftkombination immer als gesamter Vektor skaliert. In der Zeile 7 ist das letzte Lastinkrement angegeben, bei welchem die Iteration abgebrochen wurde. Die Zeilen 13-17 zeigen die erfolgreich durchgeführten Lastschritte und die benötigten Iterationen im Newton-Raphson-Verfahren.

Ausgabeprotokoll: Methode *NonLinLoadStep*

```

1: -----
2: Solution of the Load-Step-Method
3: -----
4:           N [kN]      My [kNm]      Mz [kNm]
5: Starting Forces:  100.0      300.0      0.0
6: Max. Forces:     145.0      435.0      0.0
7: Accuracy:       0.3125     0.9375     0.0
8: Max. Scale [-]:  1.45       1.45       0.0
9: -----
10: Failure Load: Successful steps of the Iteration
11: -----
12: Nr.  N [kN]      My [kNm]      Mz [kNm]  Incrscale [-]  Loadfactor [-]  Iterations
13: 0    80.0000     240.0000     0.0000    0.8000         0.8000          1
14: 1    100.0000    300.0000     0.0000    0.2000         1.0000          1
15: 2    120.0000    360.0000     0.0000    0.2000         1.2000          1
16: 3    140.0000    420.0000     0.0000    0.2000         1.4000          4
17: 4    145.0000    435.0000     0.0000    0.0500         1.4500          5
18: -----
19: Load with safetyfactor = 1.0
20: -----
21: N [kN]  My [kNm]  Mz [kNm]  eps0 [10**-3]  ky [*10**-6]  kz [*10**-6]  Iterations
22: 100.0000 300.0000  0.0000    0.03203      -0.00000     5.69613      1

```

5.10 Grafische Ausgabe

Die zahlreichen grafischen Ausgaben sollen eine gründliche Plausibilitätsprüfung der ermittelten Lösungen ermöglichen. Grundsätzlich können die berechneten Zustände (Dehnungsebene, Spannungszustand und Eigenspannungszustand) in 2D bzw. 3D dargestellt werden. Die Last-Verformungskurven $(N(\varepsilon_0), M_y(k_y), M_z(k_z))$ werden durch schrittweise Spannungsintegration erstellt. Des Weiteren können auch Moment-Normalkraft-Interaktionen (M-N Diagramme) in einem Plot dargestellt werden. Diese Darstellung der einzelnen Punkte erfordert die Methode *NonLinLoadStep*, um die maximale Tragfähigkeit des Querschnitts bei der Schnittkraftinteraktion M-N zu ermitteln. Das M-N Diagramm hat folgenden Aufbau:

- Ordinate: $s_M = M/M_{r,ult}$
- Abszisse: $s_N = N/N_{r,ult}$

Der relative Bezug auf die maximalen Tragfähigkeiten erlaubt die Interaktion von positiven sowie negativen Schnittkräften. Somit kann auf eine Darstellung der verschiedenen Quadranten verzichtet werden.

Zunächst werden die maximalen Tragfähigkeiten $N_{r,ult}$, $M_{yr,ult}$ und $M_{zr,ult}$, bei alleiniger Wirkung dieser Schnittkraft, ermittelt. Die Ausgangslast $N_{r,appr}$, $M_{yr,appr}$ und $M_{zr,appr}$ für das Load-Stepping-Verfahren muss manuell eingegeben werden und ist aus den vorher erstellten Last-Verformungskurven zu entnehmen. Die Ausgangslast soll nicht größer als die Querschnittstragfähigkeit gewählt werden, da die Rechengenauigkeit im Load-Stepping-Algorithmus prozentuell von der Ausgangslast abhängig ist. Für die weiteren Interaktionen muss die Schnittkraftkombination vorab approximiert werden, um diese als Startlast für das Load-Stepping-Verfahren übergeben zu können. Als Approximation wird eine Geradengleichung $h(s_N)$ von den maximalen isolierten Schnittkräften aufgestellt (siehe Abbildung 5.17). Um eine gleichmäßige Punkteverteilung im M-N Diagramm zu ermöglichen, werden weitere Geradengleichungen $g_i(s_N)$, abhängig von einem Winkel α_i , erstellt. Der Schnittpunkt zwischen den beiden Geraden $h(s_N)$ und $g_i(s_N)$ ergibt die Schnittkräfte N und M für das Load-Stepping-Verfahren.

Die Genauigkeit des Load-Stepping-Verfahrens (Abbruchkriterium s_{incr}) ist von der prozentuellen Vorgabe der Ausgangslast abhängig. Aus diesem Grund wird die Approximationskurve $h(s_N)$ als Gerade gewählt, da dieser lineare Zusammenhang in den meisten Fällen unter der tatsächlichen Querschnittstragfähigkeit liegt.

Der Schnittpunkt zwischen $h(s_N)$ und $g_i(s_N)$ wird mathematisch lt. Gleichung (5.20) formuliert.

$$h(s_N) = 1 - s_N ; g_i(s_N) = \tan(\alpha_i) \cdot s_N \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} h(s_N) = g_i(s_N) &\rightarrow 1 - s_N = \tan(\alpha_i) \cdot s_N \\ \rightarrow \frac{1}{s_N} - 1 &= \tan(\alpha_i) \rightarrow s_{Ni}(\alpha_i) = \frac{1}{1 + \tan(\alpha_i)} \end{aligned}$$

Die approximierten Schnittkräfte können somit berechnet werden und dienen dann als Startwerte für die eigentliche Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit.

$$N_{int,appr} = s_{Ni} \cdot N_{r,ult} = \frac{1}{1 + \tan(\alpha_i)} \cdot N_{r,ult} \quad (5.21)$$

$$M_{int,appr} = \tan(\alpha_i) \cdot s_{Ni} \cdot M_{r,ult} = \frac{\tan(\alpha_i)}{1 + \tan(\alpha_i)} \cdot M_{r,ult}$$

In Abhängigkeit von der Anzahl n_α der gewählten Winkel bzw. der korrelierenden Vektoren kann das Diagramm exakter dargestellt werden.

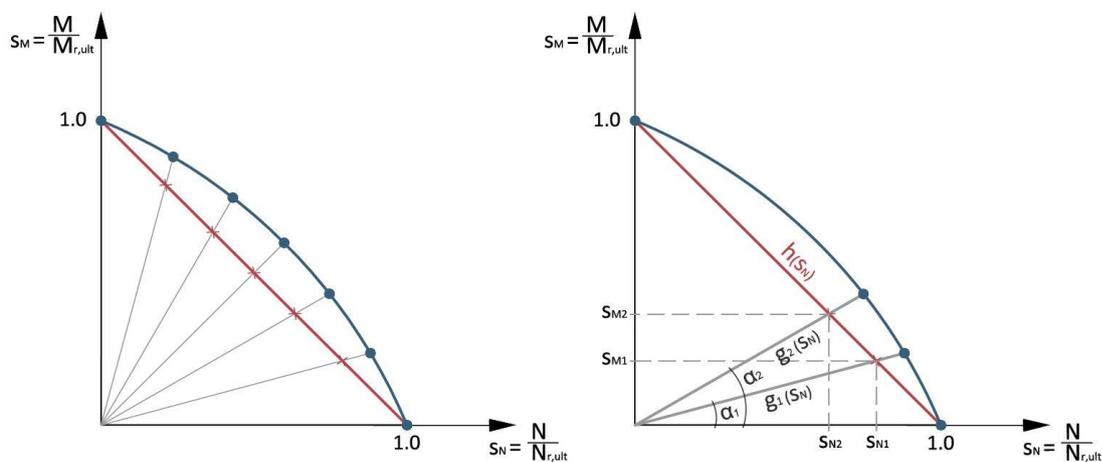


Abbildung 5.17: Erstellung des M-N Diagrammes

Der Algorithmus 5.8 beschreibt die programmtechnische Umsetzung für die Erstellung des M - N Diagrammes.

Algorithmus 5.8: Erstellung des M - N Diagrammes

```

1: MNDiagramm( $N_{r,app}$ ,  $M_{yr,app}$ ,  $M_{zr,app}$ )
2:   # Calculate the ultimate resistance forces
3:    $N_{r,ult,\dots} = \text{NonLinLoadStep}(\text{CrossSection}, N_{r,app}, 0, 0, \dots)$ 
4:    $M_{yr,ult,\dots} = \text{NonLinLoadStep}(\text{CrossSection}, 0, M_{yr,app}, 0, \dots)$ 
5:    $M_{zr,ult,\dots} = \text{NonLinLoadStep}(\text{CrossSection}, 0, 0, M_{zr,app}, \dots)$ 
6:   # Define the range of the plot -> define the direction of the vector
7:    $\alpha_{max} = 89 * (\pi/180)$ 
8:    $\alpha_{min} = 1 * (\pi/180)$ 
9:    $\alpha_{step} = (\alpha_{min}, \dots, \alpha_{max})$ 
10:  # Determine the points of the M-N diagramm
11:  for  $i=0$  to  $n_\alpha$  do
12:    # Approximated forces regarding to the equations (5.20),(5.21)
13:     $N_{int,app} = 1 / (1 + \tan(\alpha_{step} [i])) * N_{r,ult}$ 
14:     $M_{y,int,app} = \tan(\alpha_{step} [i]) / (1 + \tan(\alpha_{step} [i])) * M_{yr,ult}$ 
15:     $M_{z,int,app} = \tan(\alpha_{step} [i]) / (1 + \tan(\alpha_{step} [i])) * M_{zr,ult}$ 
16:    # Loadstepping to the ultimate resistance interaction
17:     $N_{int,ult}, M_{y,int,ult} = \text{NonLinLoadStep}(\text{CrossSection}, N_{int,app}, M_{y,int,app}, 0, \dots)$ 
18:     $N_{int,ult}, M_{z,int,ult} = \text{NonLinLoadStep}(\text{CrossSection}, N_{int,app}, 0, M_{z,int,app}, \dots)$ 
19:  end for
20:  # Plot the M-N interaction diagramm

```

6 Validierung anhand von Beispielen

In diesem Kapitel werden numerische Berechnungen anhand von ausgewählten Querschnitten durchgeführt, um die Leistungsfähigkeit des Softwaretools *CONC* zu evaluieren. Die einzelnen Testfälle können benutzerfreundlich mittels der grafischen Eingabe erstellt und anschließend als txt-file gespeichert werden. Somit können effizient vorgefertigte Querschnitte in das Programm eingelesen und etwaige Änderungen der Querschnittsparameter vorgenommen werden.

Grundsätzlich werden 3 Querschnitte für die Validierung ausgewählt:

1. Walzprofil - HEB 300 Walzprofil
2. Verbundstütze – Kammerbetoniertes HEA-300 Walzprofil
3. Verbundträger – HEA-300 Walzprofil mit obenliegender Betonplatte

Im Zuge der Validierung wird die Querschnittstragfähigkeit bei Variation der nichtlinearen Spannungs-Dehnungslinie mit bzw. ohne Dehnungsbegrenzung untersucht. Des Weiteren soll der Einfluss der Eigenspannungen auf das Last-Verformungsverhalten des Querschnitts gezeigt werden.

6.1 Verwendete Materialien

Für die einzelnen Testfälle werden die nichtlinearen Spannungs-Dehnungsbeziehungen lt. Eurocode 2 und 3 verwendet (Quelle [11], [12], [13]).

6.1.1 Stahl

Die Nennwerte der Streckgrenze f_y und der Zugfestigkeit f_u werden aus der EN 1993-1-1, Kapitel 3, Tabelle 3 entnommen (Quelle [11]). Das Werkstoffverhalten des Stahls ist lt. EN 1993-1-5, Anhang C, Bild C.2 vorgegeben und es werden folgende Modelle ausgewählt (Quelle [13]):

a) S 235 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung

mit:	E	210000	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
	f_y	235	$[N/mm^2]$	Streckgrenze
	ε_y	1.119047	$[\%]$	Fließdehnung: $\varepsilon_y = f_y / E$

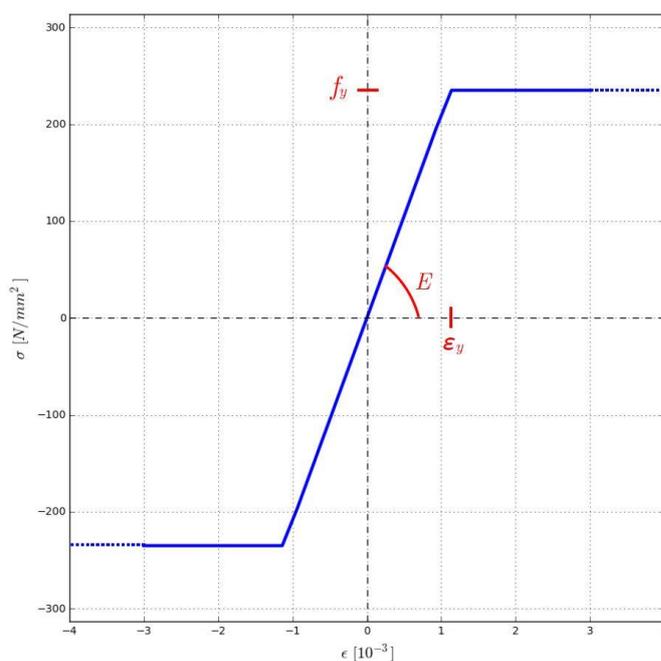


Abbildung 6.1: Materialverhalten Stahl: Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung

b) S 235 | Elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung

mit:	E	210000	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
	E_v	2100	$[N/mm^2]$	Verfestigungsmodul: $E_v = E / 100$
	f_y	235	$[N/mm^2]$	Streckgrenze
	f_u	360	$[N/mm^2]$	Zugfestigkeit
	ε_y	1.119047	$[\%]$	Fließdehnung: $\varepsilon_y = f_y / E$
	ε_v	$60.64286 \approx 60$	$[\%]$	$\varepsilon_v = f_y / E + (f_u - f_y) / E_v$
	ε_u	150	$[\%]$	Bruchdehnung

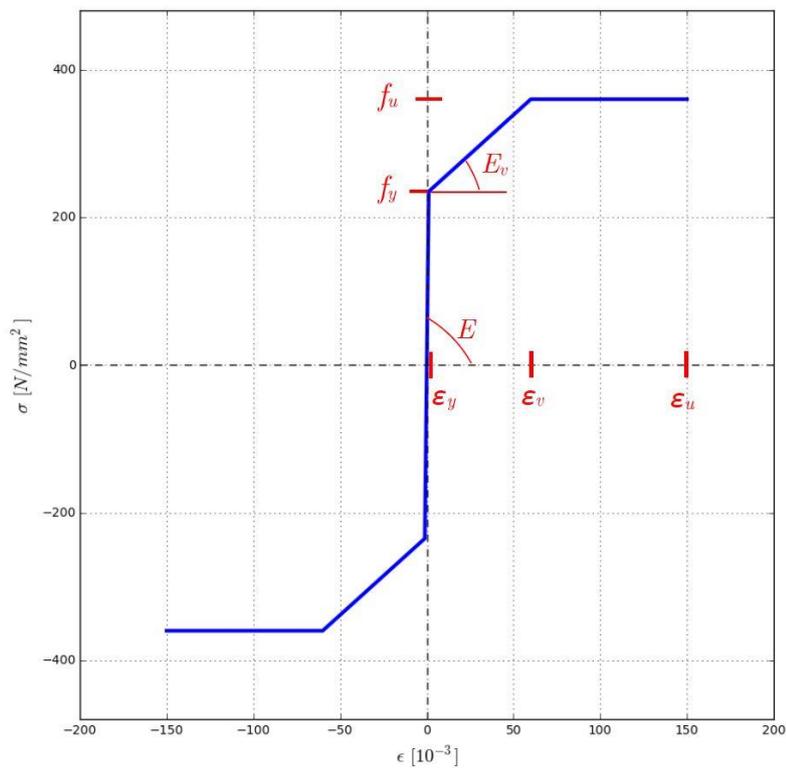


Abbildung 6.2: Materialverhalten Stahl: Elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung

c) S 235 | „Wahre“ Spannungs-Dehnungs-Kurve

mit:	E	210000	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
	E_f	21	$[N/mm^2]$	Verfestigungsmodul: $E_f = E / 10000$
	E_v	2100	$[N/mm^2]$	Verfestigungsmodul: $E_v = E / 100$
	f_y	235	$[N/mm^2]$	Streckgrenze
	f_v	236	$[N/mm^2]$	
	f_u	360	$[N/mm^2]$	Zugfestigkeit
	ε_y	1.119047	$[\%]$	Fließdehnung: $\varepsilon_y = f_y / E$
	ε_{v1}	48.73810	$[\%]$	$\varepsilon_{v1} = f_y / E + (f_v - f_y) / E_f$
	ε_{v2}	107.7857	$[\%]$	$\varepsilon_{v2} = f_y / E + (f_v - f_y) / E_f + (f_u - f_v) / E_v$
	ε_u	150	$[\%]$	Bruchdehnung

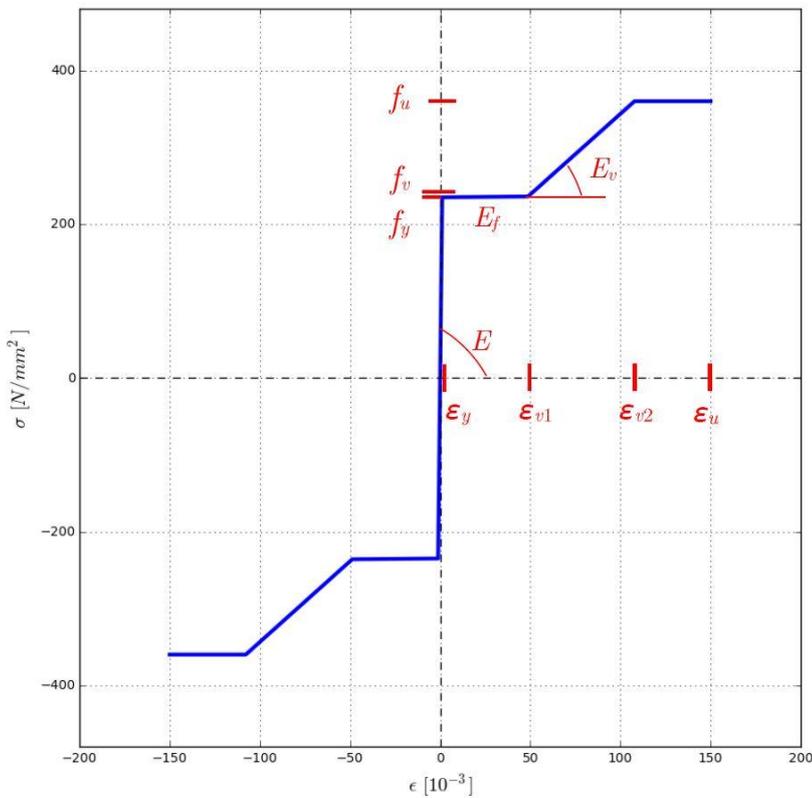


Abbildung 6.3: Materialverhalten Stahl: „Wahre“ Spannungs-Dehnungs-Kurve

6.1.2 Bewehrungsstahl

B 550 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung

mit:	E	200000	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
	f_{sk}	550	$[N/mm^2]$	char. Streckgrenze
	γ_s	1.15	$[-]$	Teilsicherheitsbeiwert für Betonstahl
	f_{sd}	478.261	$[N/mm^2]$	Bemessungswert der Streckgrenze
				$f_{sd} = f_{sk} / \gamma_s$
	ε_{yd}	2.391305	$[\%]$	Fließdehnung: $\varepsilon_{yd} = f_{sd} / E$

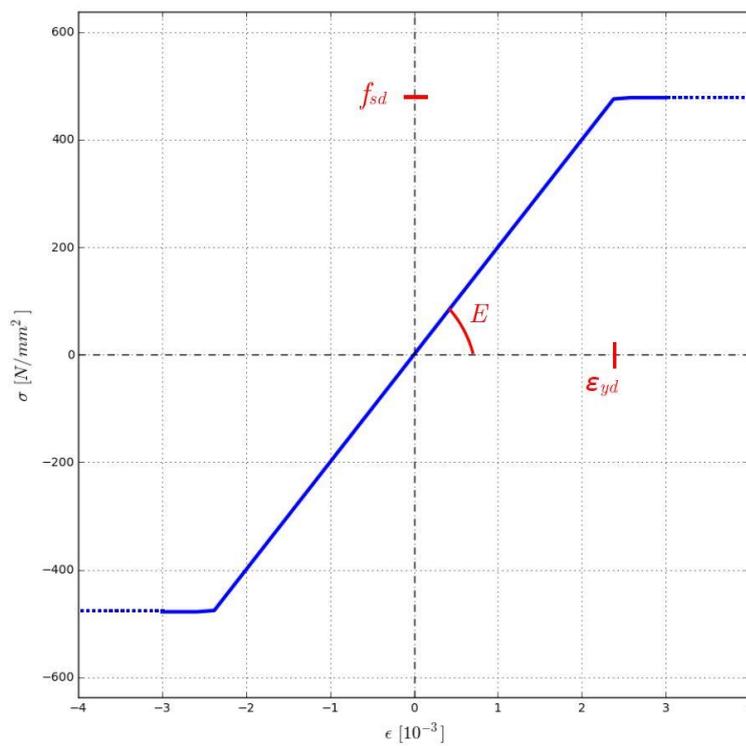


Abbildung 6.4: Materialverhalten Bewehrungsstahl: Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung

6.1.3 Beton

Die Spannungs-Dehnungslinien für Beton werden lt. EN 1992-1-1, Kapitel 3.1.7 mit den zugehörigen Festigkeits- und Dehnungsgrenzen lt. EN 1992-1-1, Kapitel 3, Tabelle 3.1. erstellt (Quelle [12]). Bei den verwendeten Materialmodellen wird keine Zugfestigkeit angenommen, d.h. der Beton kann nur Druckspannungen aufnehmen.

a) C 25/30 | „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung

mit:	f_{ck}	-25	$[N/mm^2]$	char. Betondruckfestigkeit
	γ_c	1.5	[-]	Teilsicherheitsbeiwert für Beton
	α_{cc}	0.85	[-]	Beiwert zur Berücksichtigung von Langzeitauswirkungen der Betondruckfestigkeit
	f_{cd}	-14.167	$[N/mm^2]$	Bemessungswert der Betondruckfestigkeit: $f_{cd} = \alpha_{cc} * f_{ck} / \gamma_c$

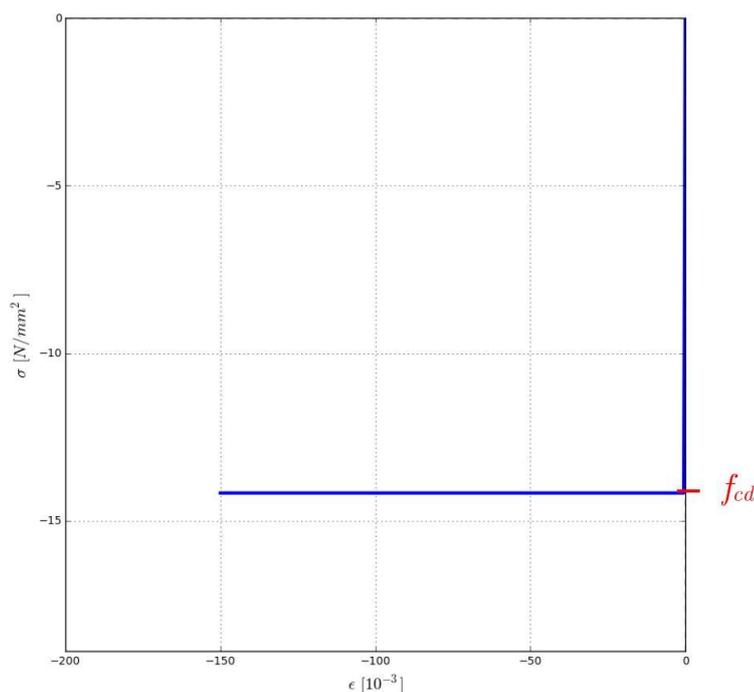


Abbildung 6.5: Materialverhalten Beton: „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung

b) C 25/30 | Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung

Der funktionale Zusammenhang des Parabel-Rechteck-Diagramms wird lt. EN 1992-1-1, Kapitel 3.1.7, Gleichung (3.17) und (3.18) beschrieben (Quelle [12]). In der Gleichung (6.1) werden die Dehnungen und Spannungen vorzeichengerecht eingesetzt, d.h. Druckspannungen bzw. Stauchungen sind negativ.

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{|\varepsilon_c|}{|\varepsilon_{c2}|} \right)^n \right] & \text{für } 0 \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2} \\ \sigma_c = f_{cd} & \text{für } \varepsilon_{c2} \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad (6.1)$$

mit:	f_{cd}	-14.167	[N/mm ²]	Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
	ε_{c2}	-2.0	[‰]	Dehnung beim Erreichen der Festigkeitsgrenze
	ε_{cu2}	-3.5	[‰]	Maximale Dehnung
	n	2	[-]	Exponent

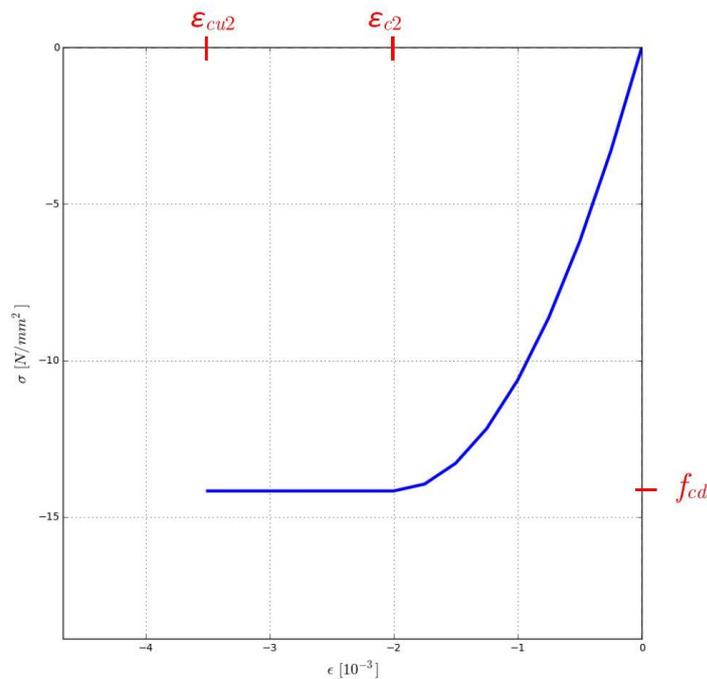


Abbildung 6.6: Materialverhalten Beton: Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung

c) C 25/30 | Bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit Dehnungsbegrenzung

mit: f_{cd} -14.167 [N/mm²] Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
 ϵ_{c3} -1.75 [%] Dehnung beim Erreichen der Festigkeitsgrenze
 ϵ_{cu3} -3.5 [%] Maximale Dehnung

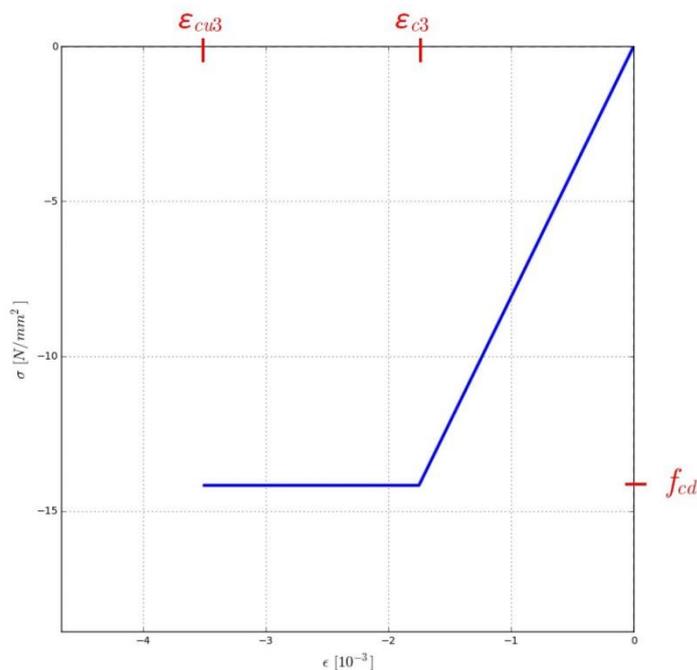


Abbildung 6.7: Materialverhalten Beton: Bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit Dehnungsbegrenzung

6.2 Beispiel 1 – Walzprofil aus Stahl

Das Walzprofil HEB-300 wird mit 190 Flächenelementen diskretisiert und in der Abbildung 6.8 dargestellt. Im Gegensatz zu Ober-, Untergurt und Steg wird für die Walzausrundung ein grobes Rasternetz gewählt. Die Ausrundungen haben keine wesentliche Auswirkung auf die Querschnittstragfähigkeit.

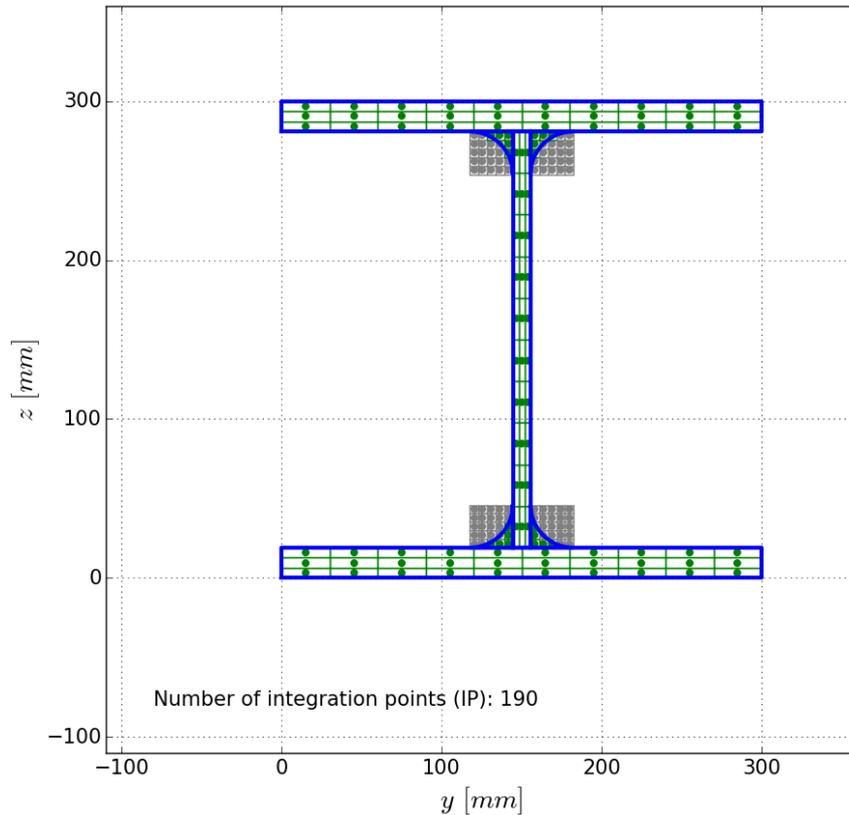


Abbildung 6.8: Diskretisierung Walzprofil

6.2.1 Querschnittswerte

Die berechneten Querschnittswerte werden mit den exakten Werten verglichen und ergeben nur geringe Abweichungen (siehe Tabelle 6.1).

Querschnittswert	CONC	Exact		Rel. Abweichung [%]
$A_{HEB-300}$	148.65	149.00	$[cm^2]$	0.23
I_y	25100.14	25170.00	$[cm^4]$	0.28
I_z	8561.77	8560.00	$[cm^4]$	0.02

Tabelle 6.1: Querschnittswerte Walzprofil

6.2.2 Angenommener Eigenspannungsverlauf

In weiterer Folge werden die Berechnungen der Querschnittstragfähigkeit mit den im Abschnitt 6.1.1 definierten Baustahl-Materialmodellen durchgeführt. Darüber hinaus soll der Einfluss der Eigenspannungen untersucht werden, die als Vordehnung vorgegeben werden. Für das Walzprofil HEB-300 wird der Eigenspannungsverlauf lt. Abbildung 6.9 angenommen, mit einem Maximalwert von $\sigma_E = \pm 100 \text{ N/mm}^2$ ($0.42 \cdot f_y$).

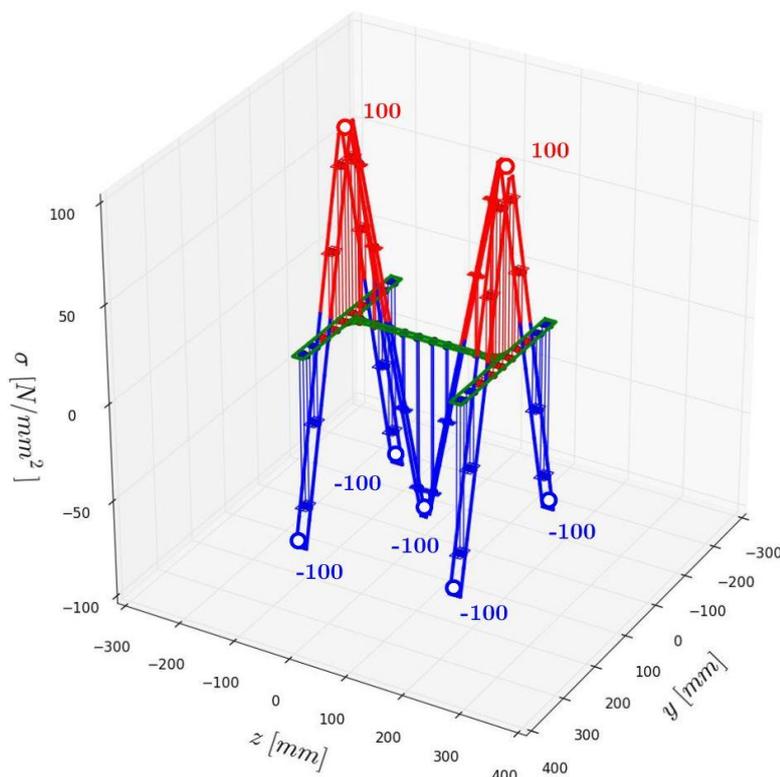


Abbildung 6.9: Angenommener Eigenspannungsverlauf für das Walzprofil

6.2.3 Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 1

In der Variante 1 wird die Spannungs-Dehnungslinie elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung lt. Abbildung 6.1 verwendet. Zunächst gibt die Spannungsintegration Aufschluss darüber, welche inneren Schnittkräfte bei isolierter Steigerung der Dehnungskomponenten ε_0 , k_y und k_z resultieren. Es werden $3 \times 3 = 9$ Diagramme in einer Grafik erstellt, die in Abhängigkeit von den Dehnungskomponenten den Verformungs-Kraft-Verlauf zeigen. In der Abbildung 6.10 ist der grundsätzliche Aufbau der Diagramm-Matrix dargestellt.

$N(\varepsilon_0)$	$N(k_z)$	$N(k_y)$
$M_y(\varepsilon_0)$	$M_y(k_z)$	$M_y(k_y)$
$M_z(\varepsilon_0)$	$M_z(k_z)$	$M_z(k_y)$

Abbildung 6.10: Aufbau der Diagramm-Matrix

Die resultierenden Schnittkräfte sind abhängig vom gewählten Bezugspunkt der Dehnungsebene und vom Verlauf der Eigenspannungen. Doppelsymmetrische Querschnitte mit homogenem Material, ohne Eigenspannungen und Bezugspunkt im geometrischen Schwerpunkt ergeben nur in den „Diagonal-Diagrammen“ resultierende Schnittkräfte. So ergibt eine Steigerung von ϵ_0 nur eine Änderung von N_{int} bzw. von k_y nur $M_{z,int}$ und von k_z nur $M_{y,int}$. Diese Schnittkräfte entsprechen auch der maximalen Querschnittstragfähigkeit für N , M_y und M_z alleine. Die Abbildung 6.11 zeigt die Verläufe für das Walzprofil HEB-300 ohne Eigenspannungen.

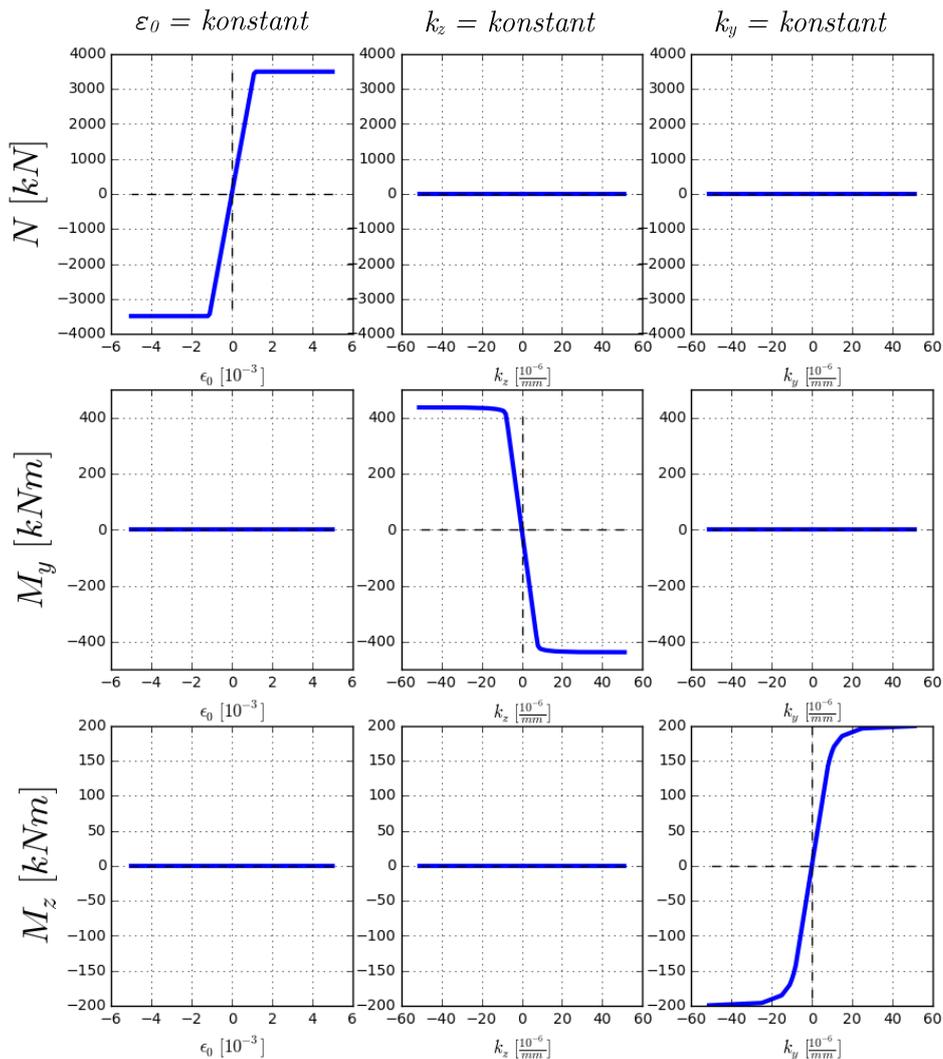


Abbildung 6.11: Diagramm-Matrix des Walzprofils ohne Eigenspannungen

Die Berücksichtigung des Eigenspannungsverlaufs ergibt bei der Spannungsintegration mit isolierter Änderung der Krümmung k_z bzw. k_y neben einem Moment auch eine Normalkraft. Dieser Effekt ist in der Abbildung 6.12 (rot markiert) zu erkennen.

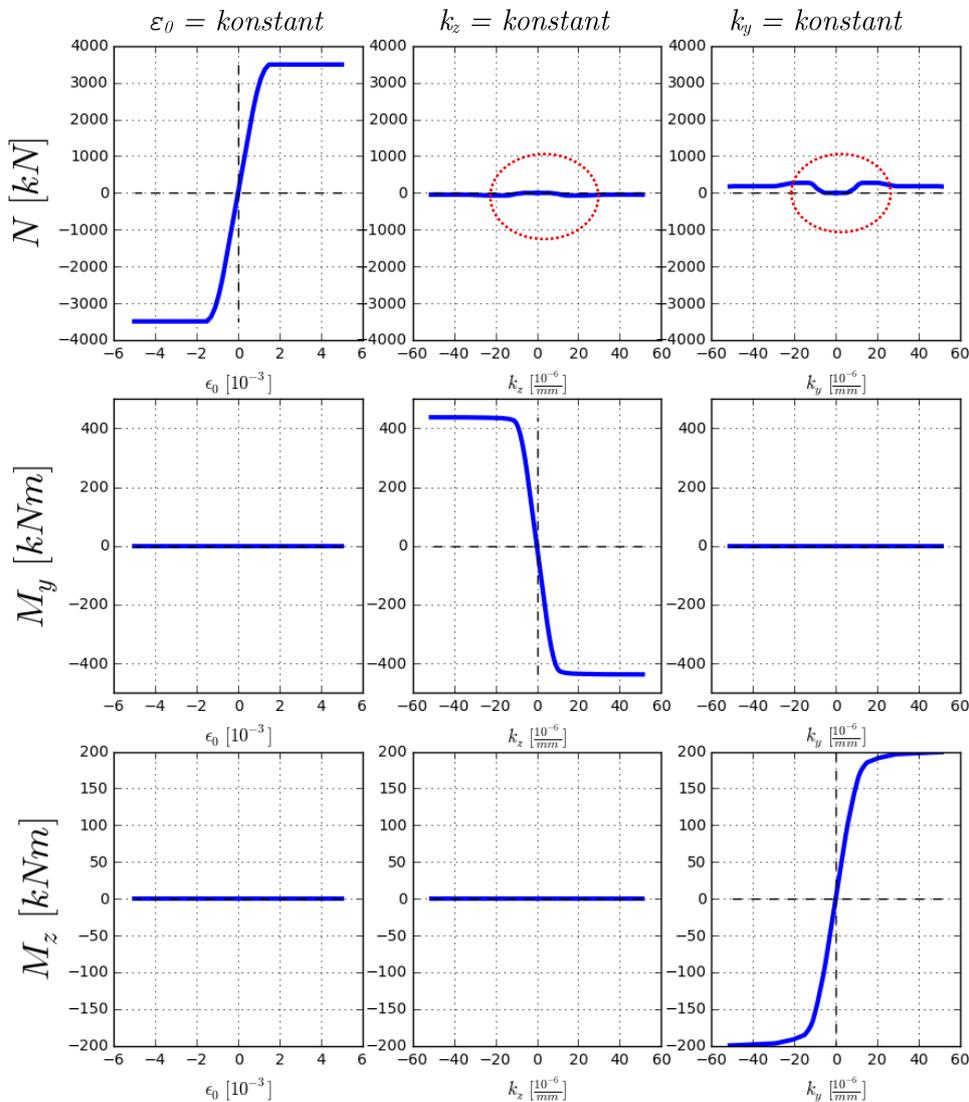
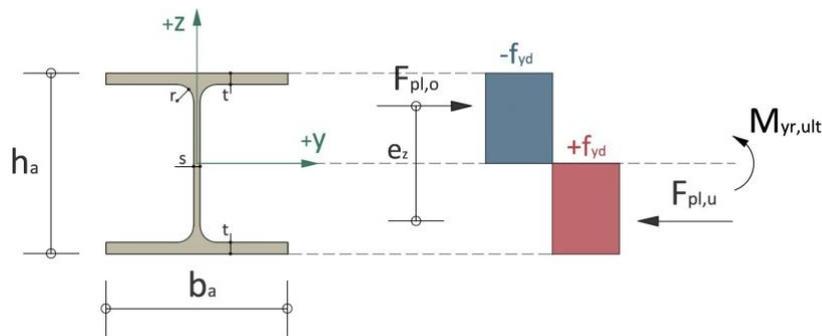


Abbildung 6.12: Diagramm-Matrix des Walzprofils mit Eigenspannungen

Die Annahme des elastisch-plastischen Werkstoffmodells ohne Wiederverfestigung erlaubt die handschriftliche Berechnung der plastischen Querschnittstragfähigkeit $N_{r,ult}$ und $M_{yr,ult}$ mithilfe bekannter Formelwerke.

Handschriftliche Berechnung der Querschnittstragfähigkeit

1. Skizze des Spannungsbildes für $M_{yr,ult}$



2. Berechnung von $N_{r,ult}$

$$N_{r,ult} = A_{HEB-300} \cdot f_{yd} = 149.0 \cdot 23.5 = 3501.5 \text{ kN}$$

3. Berechnung von $M_{yr,ult}$ (mit Berücksichtigung des Ausrundungsradius)

$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow F_{pl,o} = F_{pl,u} :$$

$$\begin{aligned} W_{pl,y} &= (s \cdot h_a^2) / 4 + (b_a - s) \cdot (h_a - t) \cdot t + (4 \cdot \pi) \cdot r^2 \cdot (h_a - t) / 2 + (3 \cdot \pi - 10) \cdot r^3 / 3 \\ &= (1.1 \cdot 30.0^2) / 4 + (30.0 - 1.1) \cdot (30.0 - 1.9) \cdot 1.9 + (4 \cdot \pi) \cdot 2.7^2 \cdot (30.0 - 1.9) / 2 \\ &\quad + (3 \cdot \pi - 10) \cdot 1.9^3 / 3 = 1877.078 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$M_{yr,ult} = F_{pl,o} \cdot e_z = W_{pl,y} \cdot f_{yd} = 1877.078 \cdot 23.5 = 44111.3 \text{ kNcm} = 441.11 \text{ kNm}$$

4. Die Ergebnisse aus *CONC* werden mit den handschriftlich berechneten Werten nachfolgend überprüft.

$$N_{r,ult,CONC} = 3492.188 \text{ kN} \rightarrow 99.7 \%$$

$$M_{yr,ult,CONC} = 437.812 \text{ kNm} \rightarrow 99.3 \%$$

Die Dehnungsebene und das korrelierende Spannungsbild der maximalen Momententragfähigkeit $M_{gr,ult} = 437.812 \text{ kN}$ werden in den folgenden Abbildungen dargestellt.

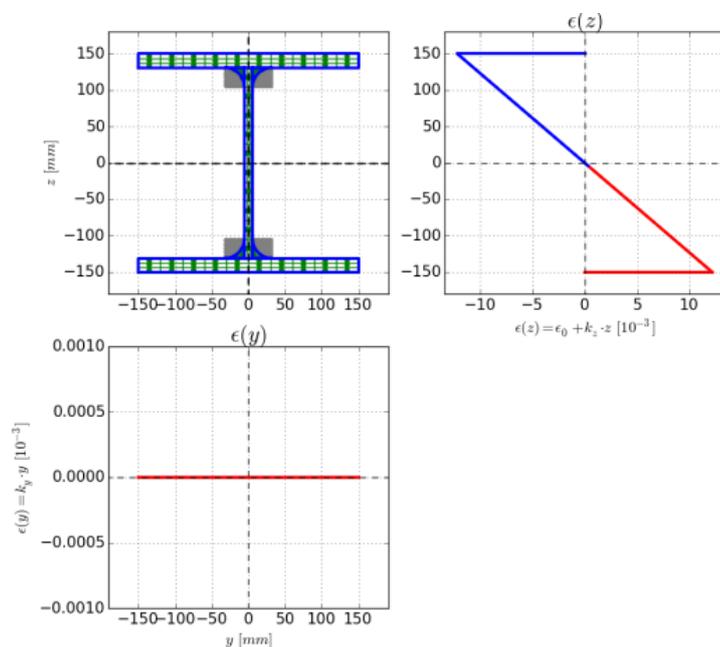


Abbildung 6.13: Dehnungsebene für $M_{gr,ult}$

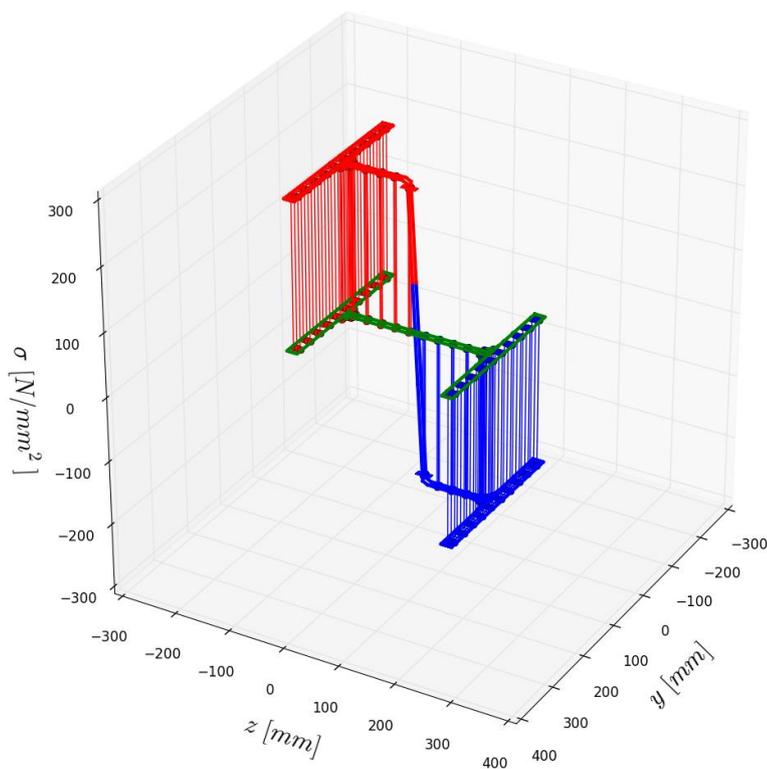


Abbildung 6.14: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$

Eine genauere Betrachtung des $N(\epsilon_0)$ und $M_y(k_z)$ -Verlaufs soll die materiell nichtlinearen Auswirkungen detailliert zeigen. In der Abbildung 6.15 und Abbildung 6.16 sind die maximalen Querschnittstragfähigkeiten $N_{r,ult}$ und $M_{gr,ult}$ abzulesen. Des Weiteren ist in den Grafiken der Einfluss der Eigenspannungen zu erkennen. In Abhängigkeit des Eigenspannungsverlaufs wird der Schnittkraft-Dehnungsverlauf verändert.

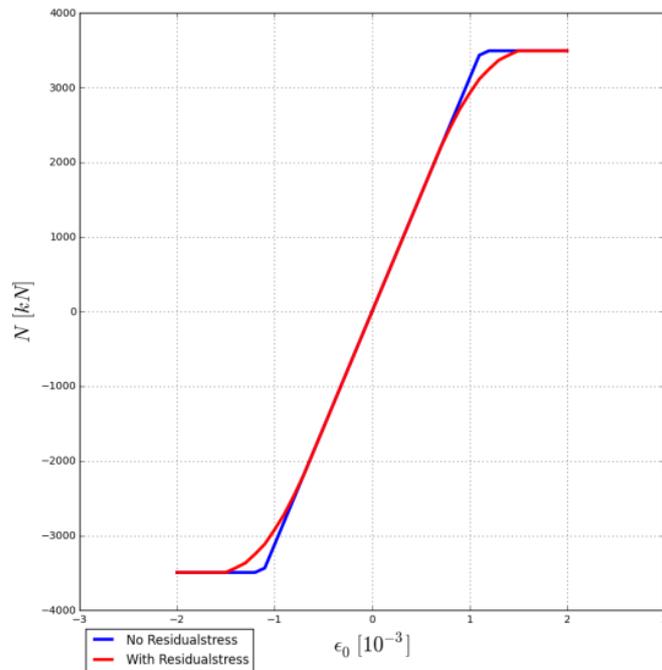


Abbildung 6.15: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf

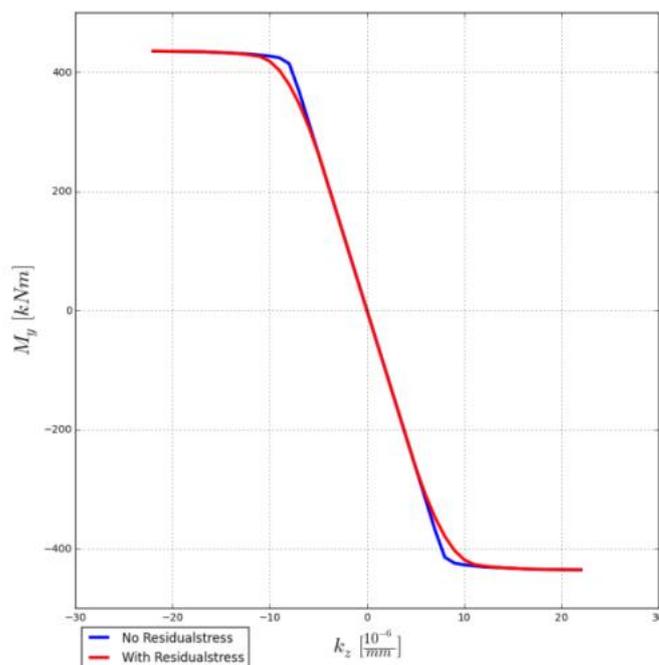
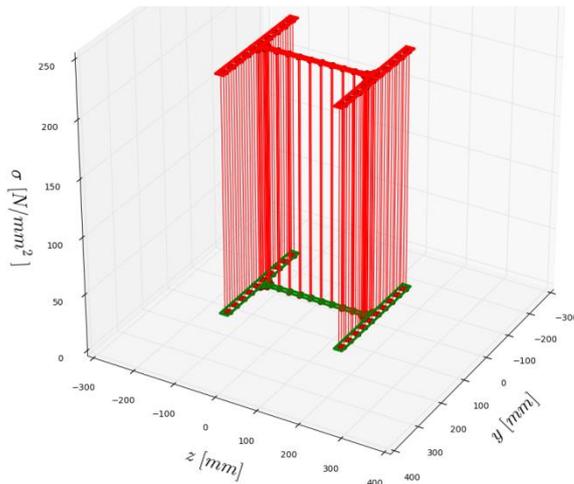


Abbildung 6.16: $M_y(k_z)$ -Verlauf

Es ist zu erkennen, dass durch die Vorgabe der Eigenspannungen die Plastifizierung der Fasern beschleunigt wird. Aus diesem Grund wird die maximale Querschnittstragfähigkeit bei Vorgabe von Eigenspannungen erst erreicht, wenn die „Vorspannung“ abgebaut und die Fließgrenze erreicht wird. D.h. die von der Plastifizierung betroffenen Fasern müssen genügend Duktilität aufweisen, um dies zu ermöglichen. Aufgrund der Tatsache, dass die Stahl-Bruchdehnung bei 15% liegt, haben die Eigenspannungen keinen Einfluss auf die Querschnittstragfähigkeit. Die Veränderung der Kraft-Dehnungs-Kurve, gleichbedeutend mit einer Reduktion der Biegesteifigkeit, hat jedoch Auswirkungen auf die Stabverformungsrechnungen und ist von größter Bedeutung für die Stabilitätsberechnung.

Die Abbildung 6.17 und Abbildung 6.18 sollen die Berücksichtigung von Eigenspannungen bei der Spannungsintegration zeigen. *CONC* ermöglicht die getrennte Anzeige der aus der Dehnungsebene resultierenden Spannungen und der vorgegebenen Eigenspannungen. Die grafische Auswertung soll eine Plausibilitätsprüfung sowie die Kontrolle der Vorgehensweise ermöglichen.

Spannungsverlauf zur korrelierenden Dehnungsebene



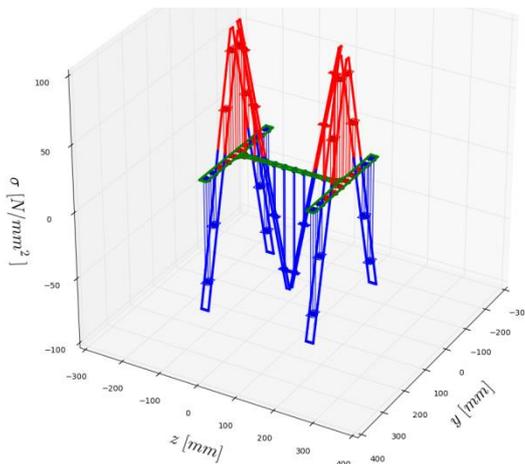
Dehnungsebene

ε_0	1.0	$[10^{-3}]$
k_y	0.0	$[10^{-6}/mm]$
k_z	0.0	$[10^{-6}/mm]$

Resultierende Schnittkräfte

N	3121.692	$[kN]$
M_y	0.0	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

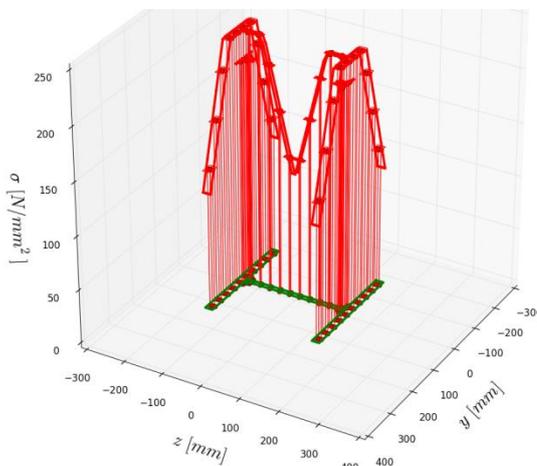
Spannungsverlauf der Eigenspannungen



Resultierende Schnittkräfte

N	0.0	$[kN]$
M_y	0.0	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

Spannungsverlauf Dehnungsebene + Eigenspannung

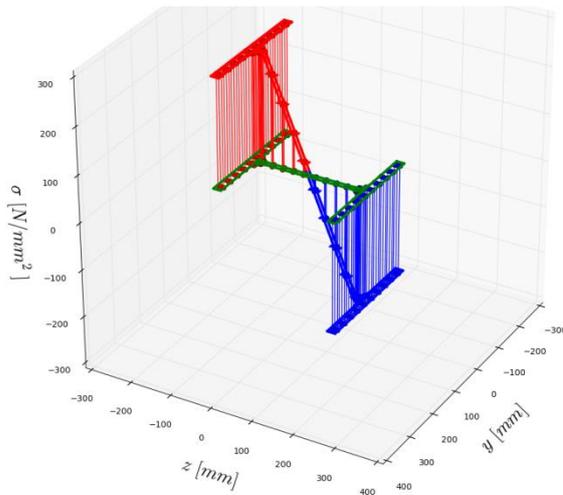


Resultierende Schnittkräfte

N	2921.744	$[kN]$
M_y	0.0	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

Abbildung 6.17: Spannungsintegration bei Berücksichtigung der Eigenspannungen bei $\varepsilon_0 = 1.0 \cdot 10^{-3} [-]$

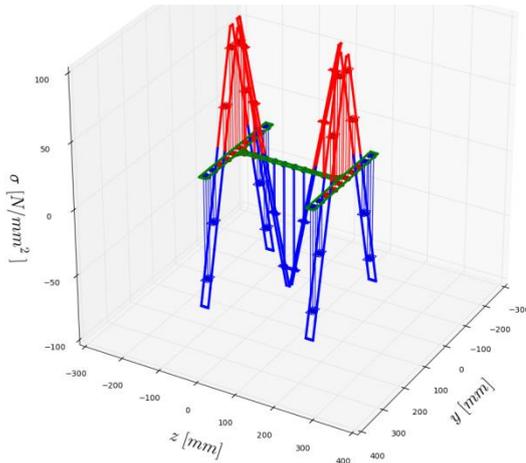
Spannungsverlauf zur korrelierenden Dehnungsebene



Dehnungsebene		
ε_θ	0.0	$[10^{-3}]$
k_y	0.0	$[10^{-6}/mm]$
k_z	-10.0	$[10^{-6}/mm]$

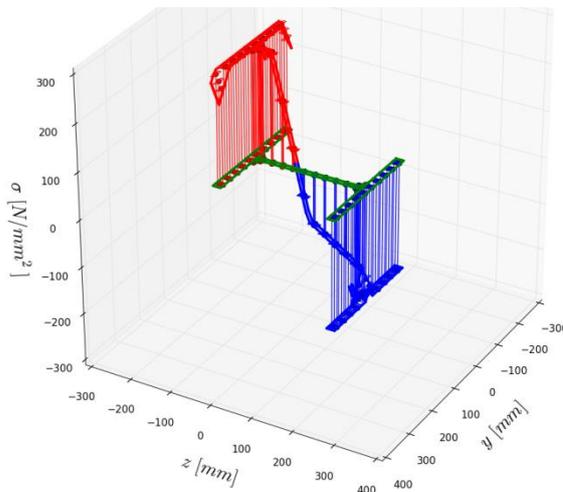
Resultierende Schnittkräfte		
N	0.0	$[kN]$
M_y	426.958	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

Spannungsverlauf der Eigenspannungen



Resultierende Schnittkräfte		
N	0.0	$[kN]$
M_y	0.0	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

Spannungsverlauf Dehnungsebene + Eigenspannung



Resultierende Schnittkräfte		
N	-26.684	$[kN]$
M_y	418.405	$[kNm]$
M_z	0.0	$[kNm]$

Abbildung 6.18: Spannungsintegration bei Berücksichtigung der Eigenspannungen bei $k_z = -10 \cdot 10^{-6} [1/mm]$

6.2.4 Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 2

Bei der Variante 2 wird die Spannungs-Dehnungslinie (elastisch-plastisch mit linearer Wiederfestigung) lt. Abbildung 6.2 angenommen. Es wird beobachtet, dass sich der Einfluss der Eigenspannungen, wie bereits in der Variante 1 (siehe Abschnitt 6.2.3), nicht wesentlich verändert. Es ändert sich nur die Querschnittstragfähigkeit aufgrund der nur höheren Festigkeit. Die Abbildung 6.19 (oben) zeigt den $N(\epsilon_0)$ -Verlauf, wobei die maximale Tragfähigkeit ($\epsilon_0 \leq 15\%$) beschränkt ist. Eine Überschreitung der Bruchdehnung führt zu einem Spannungsabfall auf 0 und simuliert den Ausfall der Faser. Bei der Steigerung der Mitteldehnung erreichen alle Fasern gleichzeitig die Bruchdehnung, d.h. der gesamte Querschnitt versagt schlagartig. Die Abbildung 6.19 (unten) zeigt einen detaillierten Ausschnitt, um den Einfluss der Eigenspannung darzustellen.

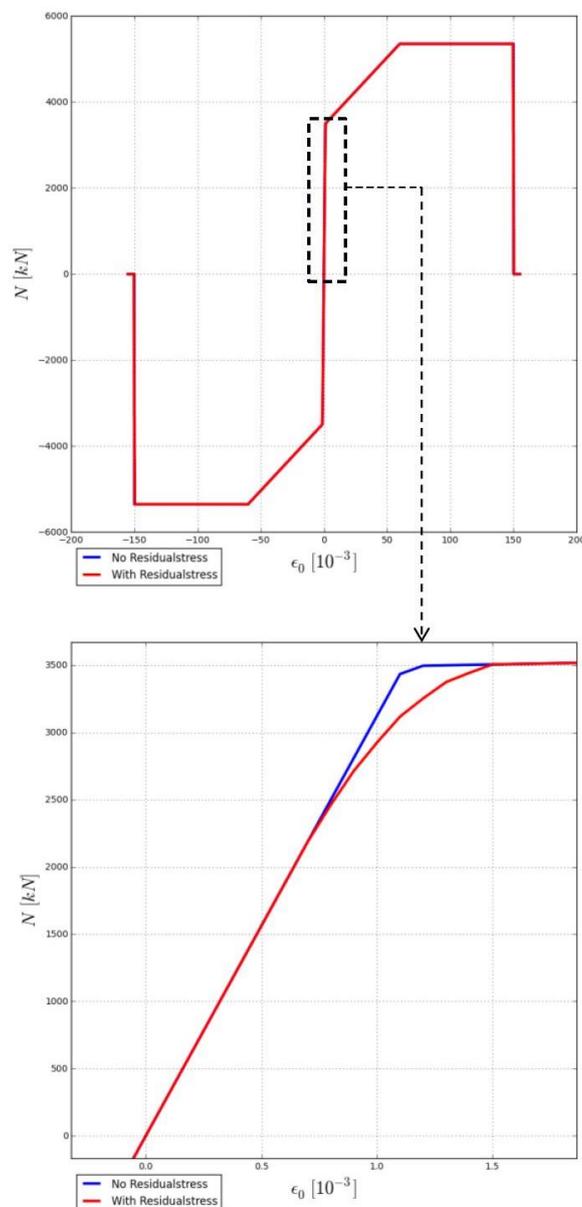


Abbildung 6.19: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf

Die Abbildung 6.20 (oben) zeigt den $M_y(k_z)$ -Verlauf. Am Ende des Verlaufs ist ein „stückweiser“ Abfall der Querschnittstragfähigkeit zu erkennen. Dieses Verhalten ist auf den schrittweisen Ausfall der äußeren Fasern zurückzuführen. Der Einfluss der Eigenspannung ist in der Abbildung 6.20 (unten) dargestellt.

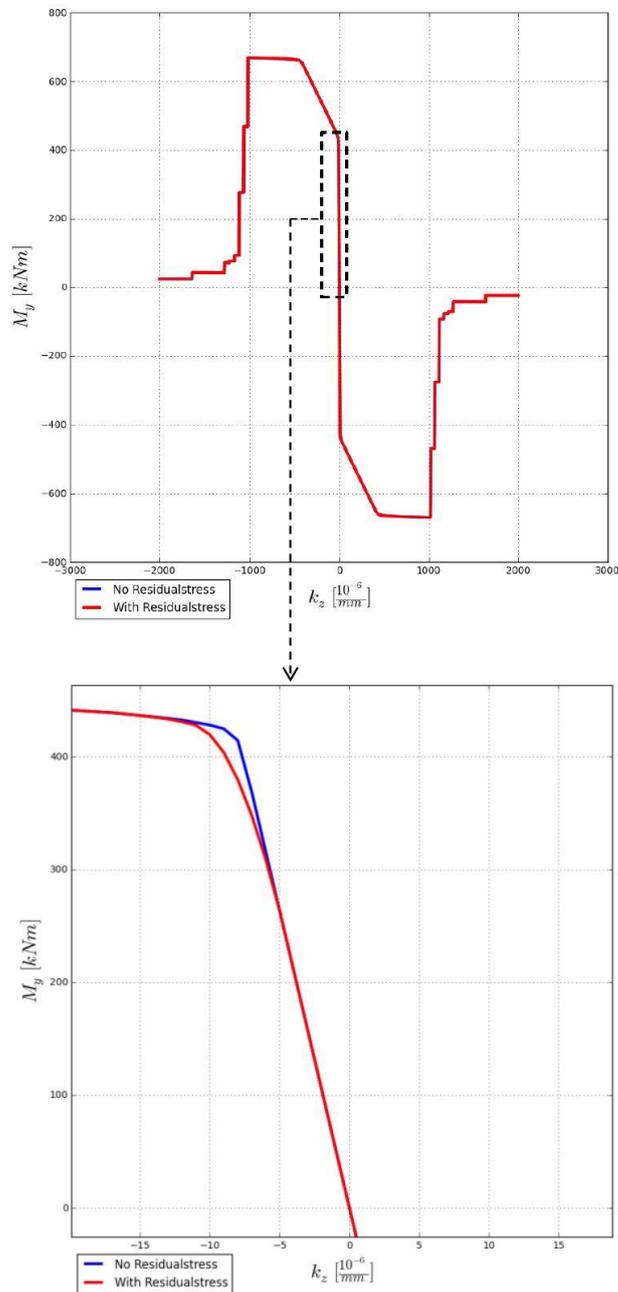


Abbildung 6.20: $M_y(k_z)$ -Verlauf

Eine Plausibilitätsprüfung der berechneten maximalen Querschnittstragfähigkeiten ist durch die Darstellung der Dehnungsebene und des korrelierenden Spannungsbildes gegeben. Die folgenden Abbildungen zeigen diese Vorgehensweise für die Momententragfähigkeit $M_{gr,ult} = 669.062 \text{ kN}$.

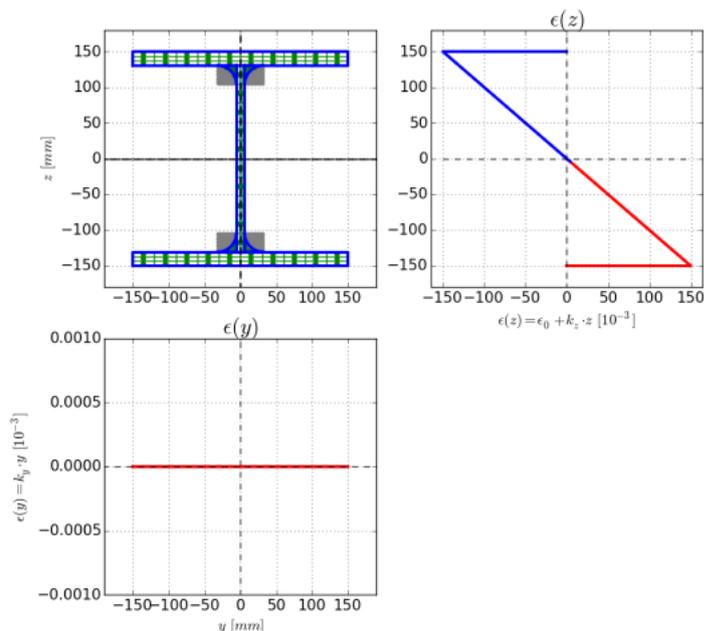


Abbildung 6.21: Dehnungsebene für $M_{gr,ult}$

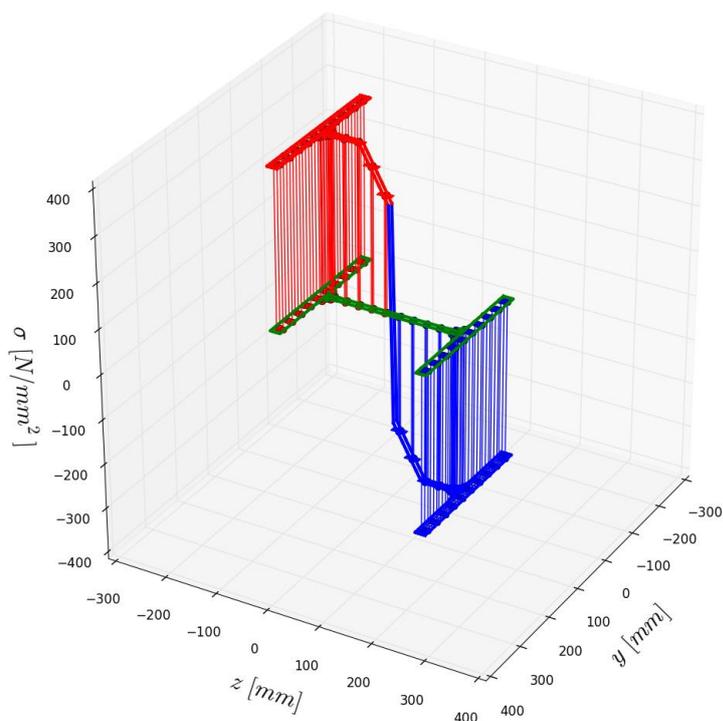


Abbildung 6.22: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$

6.2.5 Querschnittstragfähigkeit Walzprofil - Variante 3

Der Unterschied zur Variante 2 (siehe Abschnitt 6.2.4) ist, dass ein Fließplateau bei der Spannungs-Dehnungslinie („wahre“ Spannungs-Dehnungslinie lt. Abbildung 6.3) angenommen wird. Die Momententragfähigkeit $M_{yr,ult} = 662.188 \text{ kN}$ ist somit geringer als in Variante 2. Die Dehnungsebene und das korrelierende Spannungsbild der maximalen Momententragfähigkeit werden in den folgenden Abbildungen dargestellt.

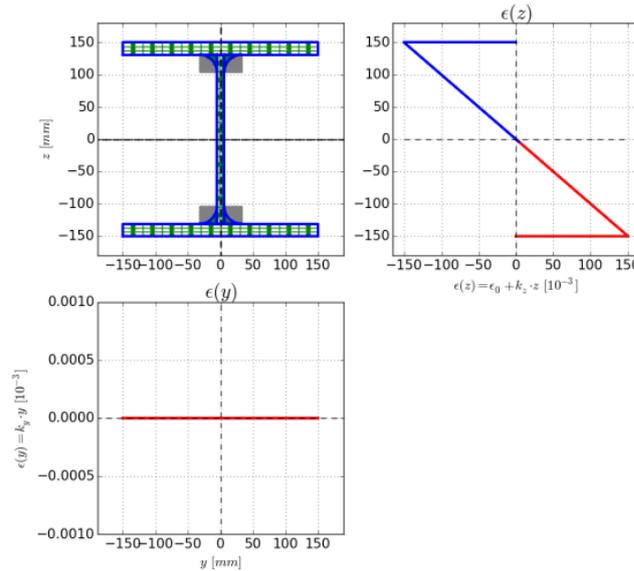


Abbildung 6.23: Dehnungsebene für $M_{yr,ult}$

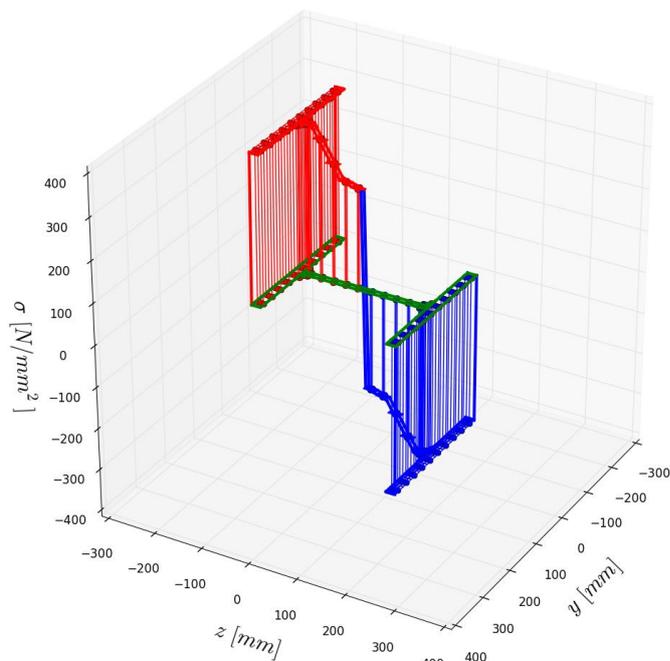


Abbildung 6.24: Spannungsbild zu $M_{yr,ult}$

Nachfolgend soll auch der Grenzzustand der Tragfähigkeit, berechnet mithilfe des Load-Stepping-Verfahrens, plausibel geprüft werden. Es kann der Fall eintreten, dass innerhalb eines Lastschrittes die Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens singulär wird bzw. die Lösung nicht im Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens liegt (siehe Abbildung 6.25, schwarzer Kreis). Folgedessen gibt das Verfahren einen Zustand zurück, der den Grenzzustand noch nicht erreicht hat.

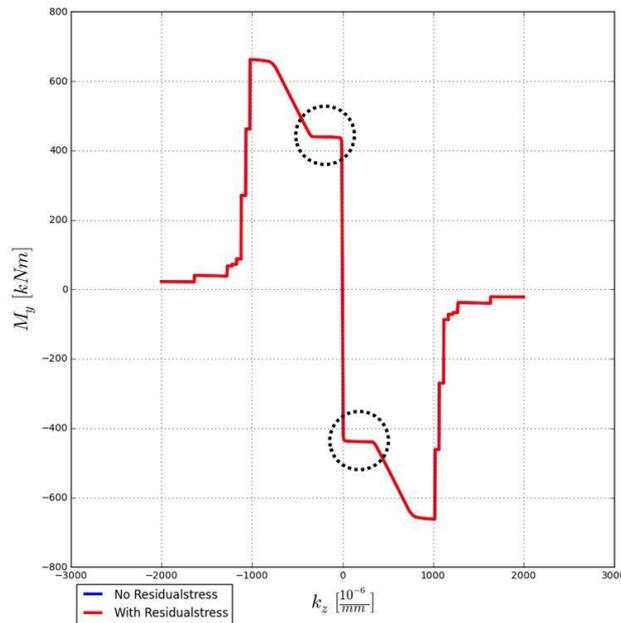


Abbildung 6.25: $M_y(k_z)$ -Verlauf

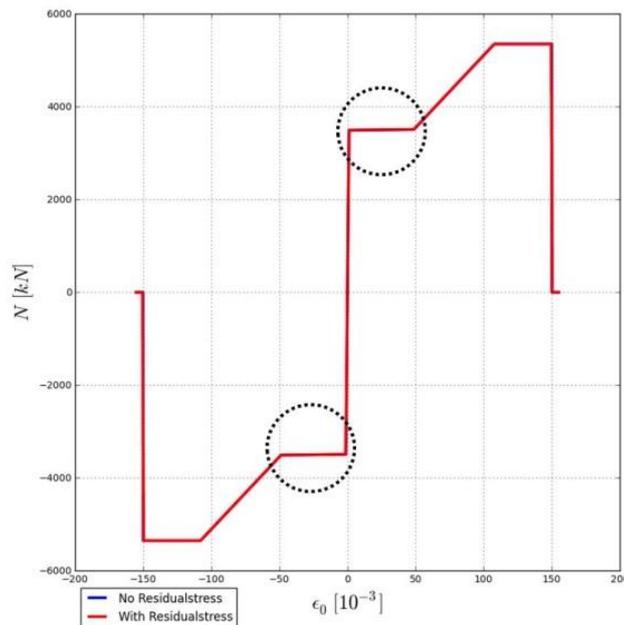


Abbildung 6.26: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf

Bei der Variante 3 ist dieser Effekt beim M_y - N Interaktionsdiagramm zu beobachten. Die Lastkombination bei $0.65 \cdot M_{y,ult}$ und $0.12 \cdot N_{r,ult}$ liefert keinen Grenzzustand (siehe Abbildung 6.27 links, rote Markierung). In diesem Fall wird die Steigung des Fließplateaus erhöht (Wert $f_v > f_y$, siehe Abbildung 6.3; Wert $f_v = 236 \text{ N/mm}^2$ ausreichend) und erneut ein M_y - N Diagramm erzeugt (siehe Abbildung 6.27 rechts).

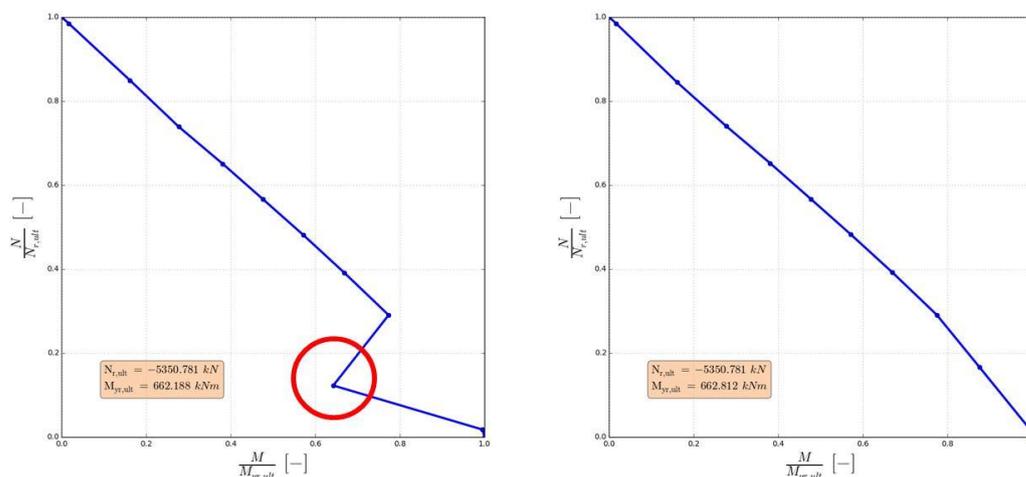


Abbildung 6.27: M_y - N Interaktionsdiagramm

6.2.6 Zusammenfassung der Querschnittstragfähigkeiten

Die maximalen Querschnittstragfähigkeiten werden mittels des Load-Stepping-Verfahrens ermittelt. Die Grenzzustände weisen die Bruchdehnung am Querschnittsrand auf. Die Gegenüberstellung der Tragfähigkeiten in der Tabelle 6.2 zeigt, dass die Variante 1 (elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung) sehr konservativ ist. Die Variante 3 („wahre“ Spannungs-Dehnungs-Kurve) ergibt bei Biegebeanspruchung geringere Tragfähigkeiten als die angenäherte Variante 2 (elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung).

Variante	N [kN]	M_y [kNm]	M_z [kNm]
1	3492.188	437.812	202.141
2	5350.781	669.062	305.859
3	5350.781	662.188	285.469

Tabelle 6.2: Querschnittstragfähigkeiten des Walzprofils bei alleiniger Wirkung von N , M_y und M_z

6.3 Beispiel 2 - Kammerbetonierte Verbundstütze

Die Verbundstütze wird als vollgefülltes HEA-300 Walzprofil hergestellt. In den Ecken wird jeweils ein zusätzlicher Bewehrungsstab (Durchmesser 16 mm) angeordnet. Für die Diskretisierung werden das Walzprofil und die Bewehrungsstäbe zusätzlich als negative Betonfläche berücksichtigt (somit nur tatsächlicher Betonquerschnitt erfasst), um eine wirklichkeitsnahe Modellbildung zu erreichen. Die Abbildung 6.28 zeigt die Darstellung der Diskretisierung mit 517 Flächenelementen.

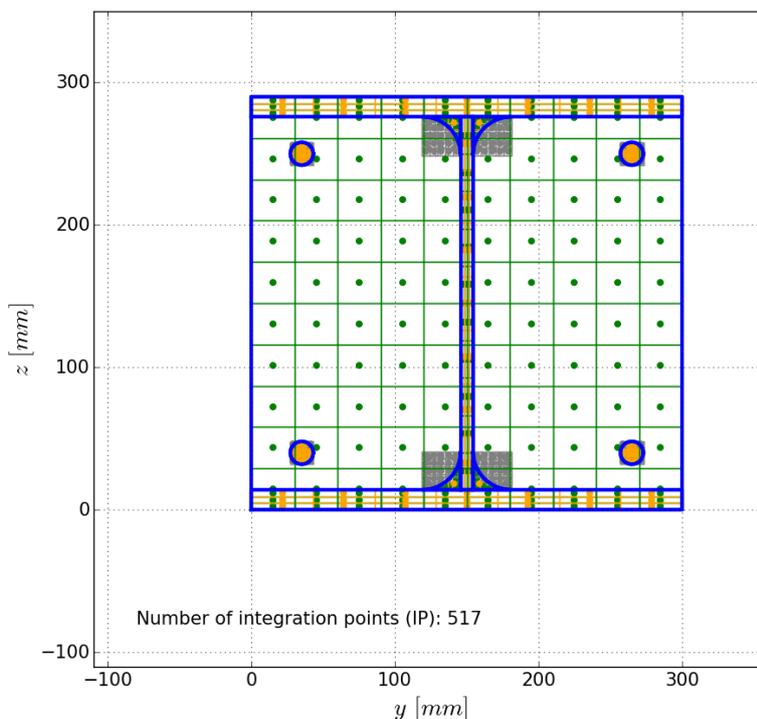


Abbildung 6.28: Diskretisierung der Verbundstütze

Die exakten Querschnittswerte werden den von *CONC* berechneten gegenübergestellt (siehe Tabelle 6.3).

Bezeichnung	Querschnittsw.	<i>CONC</i>	Exact		Rel. Abweichung [%]
HEA - 300	$A_{HEA-300}$	112.10	113.00	$[cm^2]$	0.8
	I_y	18197.95	18260.00	$[cm^4]$	0.3
	I_z	6308.63	6310.00	$[cm^4]$	0.02
Bewehrungsstäbe	$A_{Bew.stäbe}$	7.68	8.04	$[cm^2]$	4.48
Betonflächen	$A_{Rechteck}$	870.00	870.00	$[cm^2]$	0.0
	$A_{Walzprofil}$	109.51	113.00	$[cm^2]$	3.09
	$A_{Bew.stäbe}$	7.68	8.04	$[cm^2]$	4.48

Tabelle 6.3: Querschnittswerte der Verbundstütze

6.3.1 Querschnittstragfähigkeit Verbundstütze - Variante 1

Für die Variante 1 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.1)
- Bewehrungsstab
B 550 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.4)
- Beton
C 25/30 | „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.5)

Die Diagramm-Matrix (siehe Abbildung 6.29) für die isolierte Spannungsintegration zeigt den Einfluss der fehlenden Zugfestigkeit des Betons. Es ist zu erkennen, dass bei Erreichen der maximalen Momententragfähigkeit – wegen der fehlenden Zugtragfähigkeit des Betons – auch eine Drucknormalkraft entsteht.

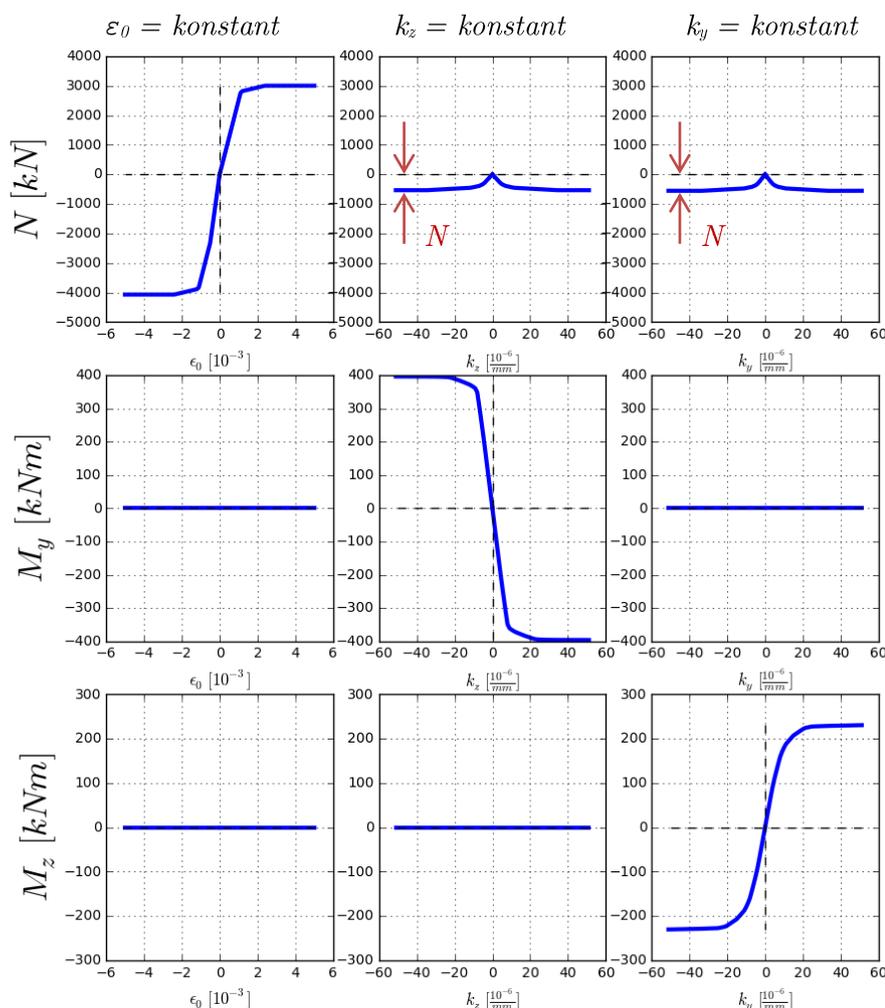
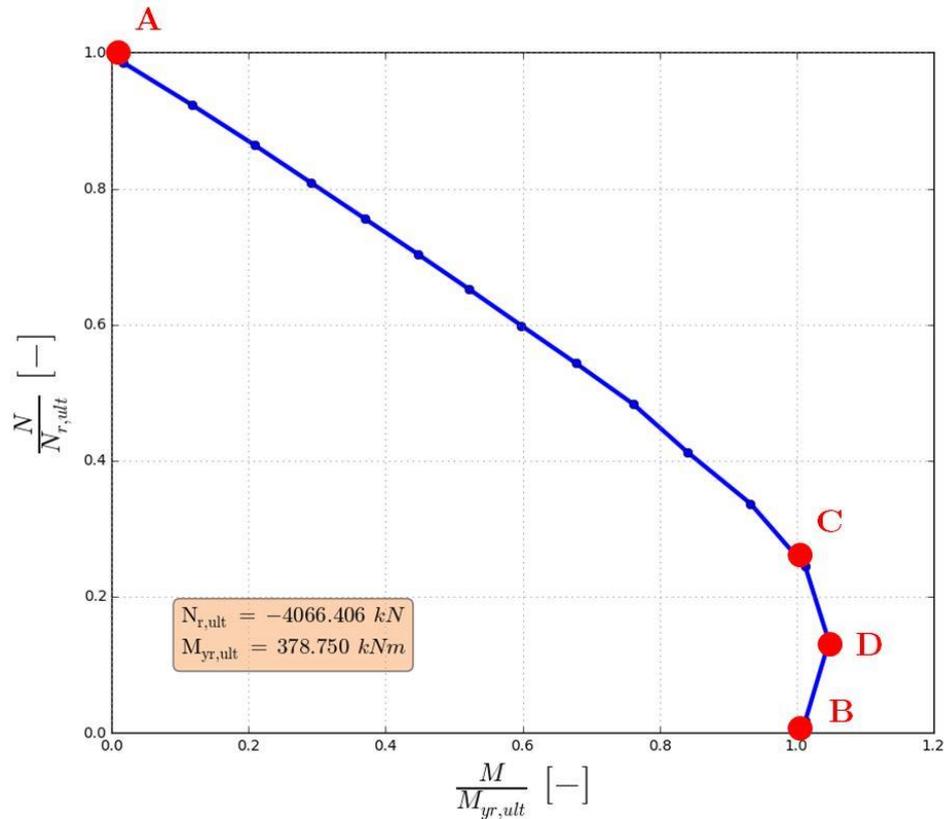


Abbildung 6.29: Diagramm-Matrix Verbundstütze

Interaktion M_y - N

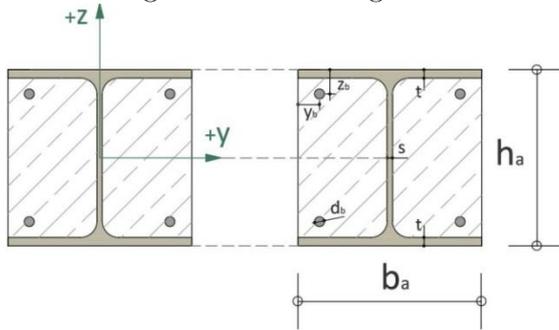
Die Querschnittstragfähigkeit vom Verbundquerschnitt bei Beanspruchung infolge N und M_y stellt eine komplexe Interaktion der Schnittkräfte dar. Aus diesem Grund wird eine Interaktionskurve für die maximale Tragfähigkeit bei Druck ($-N$) und einachsiger Biegung (M_y) erstellt. Für eine bessere Verständlichkeit werden die Spannungsbilder der aussagekräftigen Grenzpunkte (Punkte A bis D, markiert in der Abbildung 6.30) in Abbildung 6.32, Abbildung 6.34, Abbildung 6.36 und Abbildung 6.38 folgend detailliert dargestellt.

**Abbildung 6.30:** M_y - N Interaktionsdiagramm

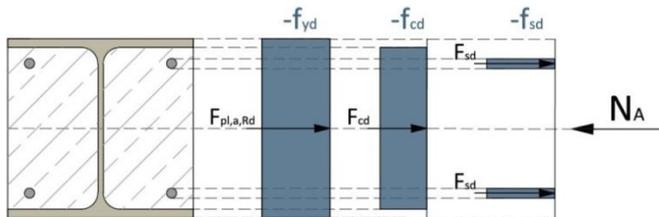
Für die Variante 1 ist aufgrund der Annahme der einfachen Werkstoffmodelle eine handschriftliche Berechnung der maßgebenden Punkte A bis D möglich. Die Formeln werden aus der Quelle [14] entnommen.

Handschriftliche Berechnung der Querschnittstragfähigkeit

1. Skizze der geometrischen Angaben für die Verbundstütze



2. Punkt A:



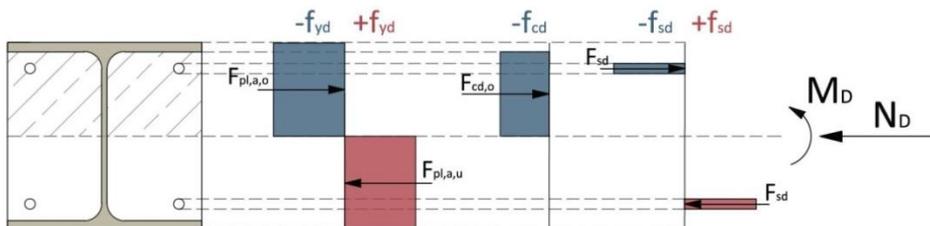
$$A_{Bew.Stäbe} = 4 \cdot (d_b^2 \cdot \pi / 4) = 4 \cdot 1.6^2 \cdot \pi / 4 = 8.04 \text{ cm}^2$$

$$A_{Beton} = b_a \cdot h_a - A_{HEA-300} - A_{Bew.Stäbe} = 30.0 \cdot 29.0 - 113.0 - 8.04 = 748.96 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} -N_A = -N_{r,ult} &= F_{pl,a,Rd} + F_{cd} + 2 \cdot F_{sd} = A_{HEA-300} \cdot f_{yd} + A_{Beton} \cdot f_{cd} + A_{Bew.Stäbe} \cdot f_{sd} \\ &= 113.0 \cdot 23.5 + 748.96 \cdot 1.417 + 8.04 \cdot 47.8 = 4101.09 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

3. Punkt D:



$$W_{pa} = 1384.0 \text{ cm}^3$$

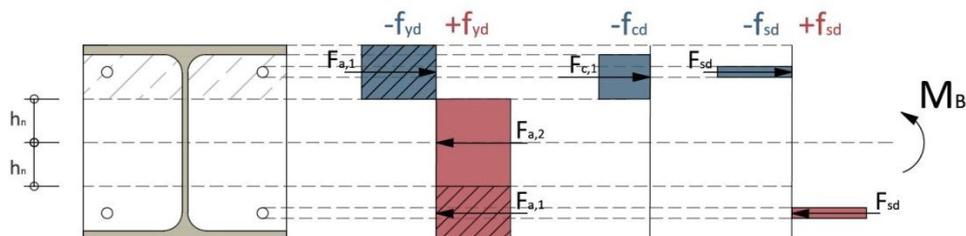
$$W_{ps} = (4 \cdot d_b^2 \cdot \pi / 4) \cdot (0.5 \cdot h_a - z_b) = (4 \cdot 1.6^2 \cdot \pi / 4) \cdot (0.5 \cdot 29.0 - 4.0) = 84.45 \text{ cm}^3$$

$$W_{pc} = b_a \cdot h_a^2 / 4 - W_{pa} - W_{ps} = 30.0 \cdot 29.0^2 / 4 - 1384 - 84.45 = 4839.05 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} M_D &= W_{pa} \cdot f_{yd} + W_{ps} \cdot f_{sd} + 0.5 \cdot W_{pc} \cdot f_{cd} \\ &= 1384.0 \cdot 23.5 + 84.45 \cdot 47.8 + 0.5 \cdot 4839.05 \cdot 1.417 \\ &= 39989.17 \text{ kNcm} = 399.9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$-N_D = 0.5 \cdot A_{Beton} \cdot f_{cd} = 0.5 \cdot 748.96 \cdot 1.417 = 530.64 \text{ kN}$$

4. **Punkt B:** Die Berechnung von h_n wird mit der Annahme, dass die plastische Nulllinie für $M_{gr,ult}$ im Steg des Stahlprofils zu liegen kommt, durchgeführt.



$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow F_{a,2} = F_{c,1}$$

$$\begin{aligned} h_n &= A_{\text{Beton}} * f_{cd} / [2 * b_a * f_{cd} + 2 * t * (2 * f_{yd} - f_{cd})] \\ &= 748.96 * 1.417 / [2 * 30.0 * 1.417 + 2 * 0.85 * (2 * 23.5 - 1.417)] \\ &= 6.53 \text{ cm} < 0.5 * h_a - t = 0.5 * 29.0 - 1.4 = 13.1 \text{ cm} \\ &\rightarrow \text{plastische Nulllinie im Steg} \end{aligned}$$

$$W_{pan} = t_w * h_n^2 = 0.85 * 6.53^2 = 36.24 \text{ cm}^3$$

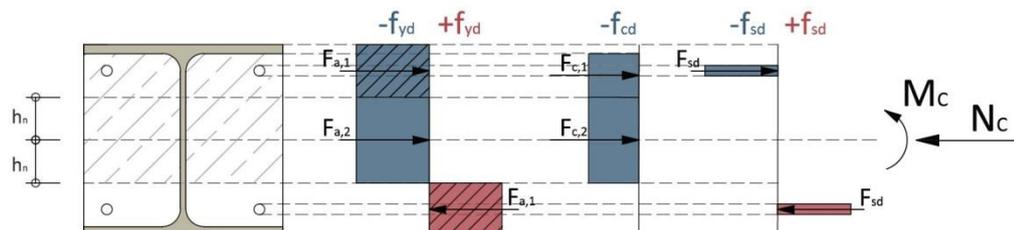
$$W_{pcn} = b_a * h_n^2 - W_{pan} = 30.0 * 6.53^2 - 36.24 = 1243 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} M_{n,Rd} &= W_{pan} * f_{yd} + 0.5 * W_{pcn} * f_{cd} \\ &= 36.24 * 23.5 + 0.5 * 1243 * 1.417 = 1732.3 \text{ kNcm} = 17.32 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$M_B = M_D - M_{n,Rd} = 399.9 - 17.32 = 382.6 \text{ kNm}$$

$$N_B = 0 \text{ kN}$$

5. **Punkt C:**



$$M_C = M_B = 382.6 \text{ kNm}$$

$$-N_C = 2 * N_D = 2 * 530.64 = 1061.3 \text{ kN}$$

Die handschriftlich ermittelten Interaktionspunkte A bis D werden mit den aus *CONC* berechneten Werten in der Tabelle 6.4 verglichen.

Punkt A: Vollplastische Drucknormalkraft $N_{r,ult}$

In der Abbildung 6.31 ist die zugehörige Dehnungsebene zum Punkt A angegeben und die Abbildung 6.32 zeigt das 3D Spannungsbild.

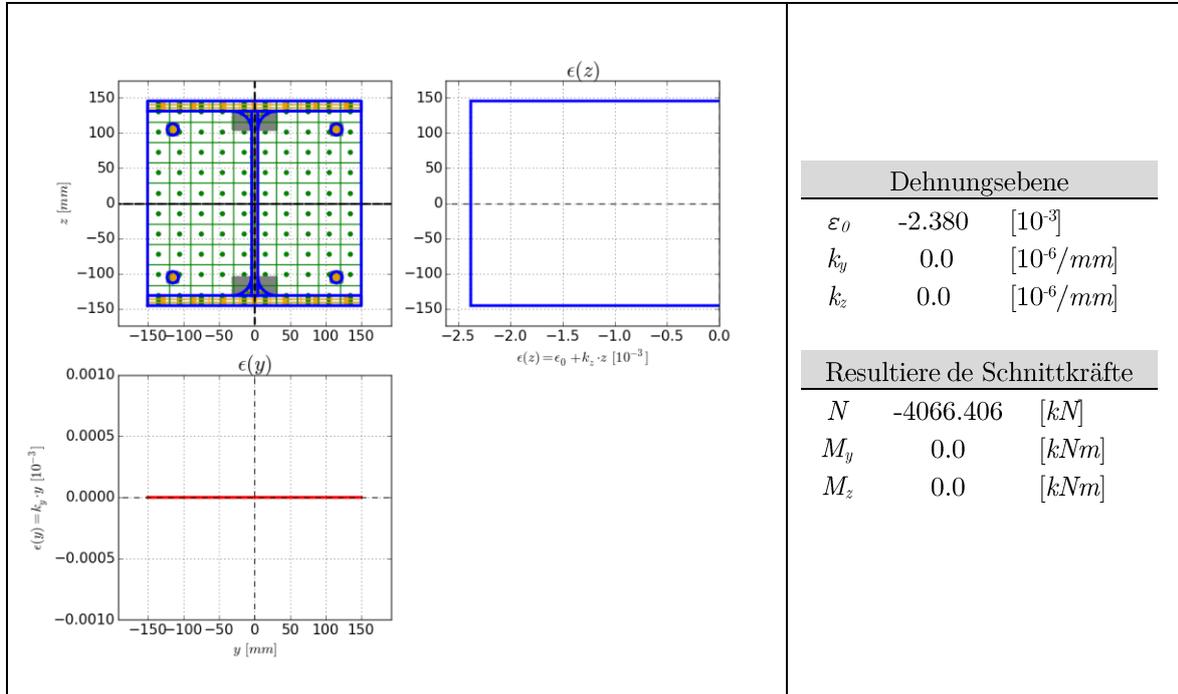


Abbildung 6.31: Dehnungsebene bei Punkt A

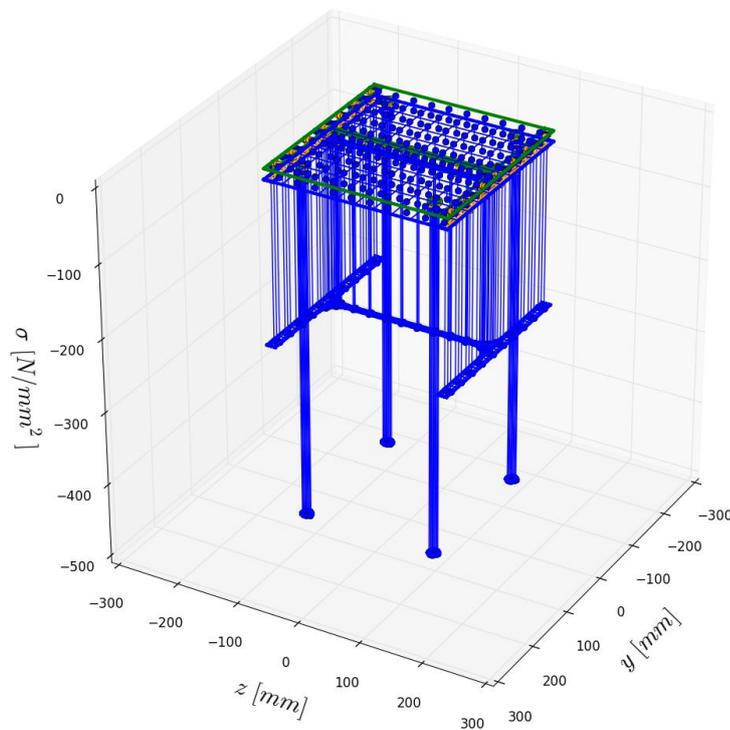


Abbildung 6.32: Spannungsbild bei Punkt A

Punkt B: Plastisches Grenzmoment $M_{gr,ult}$

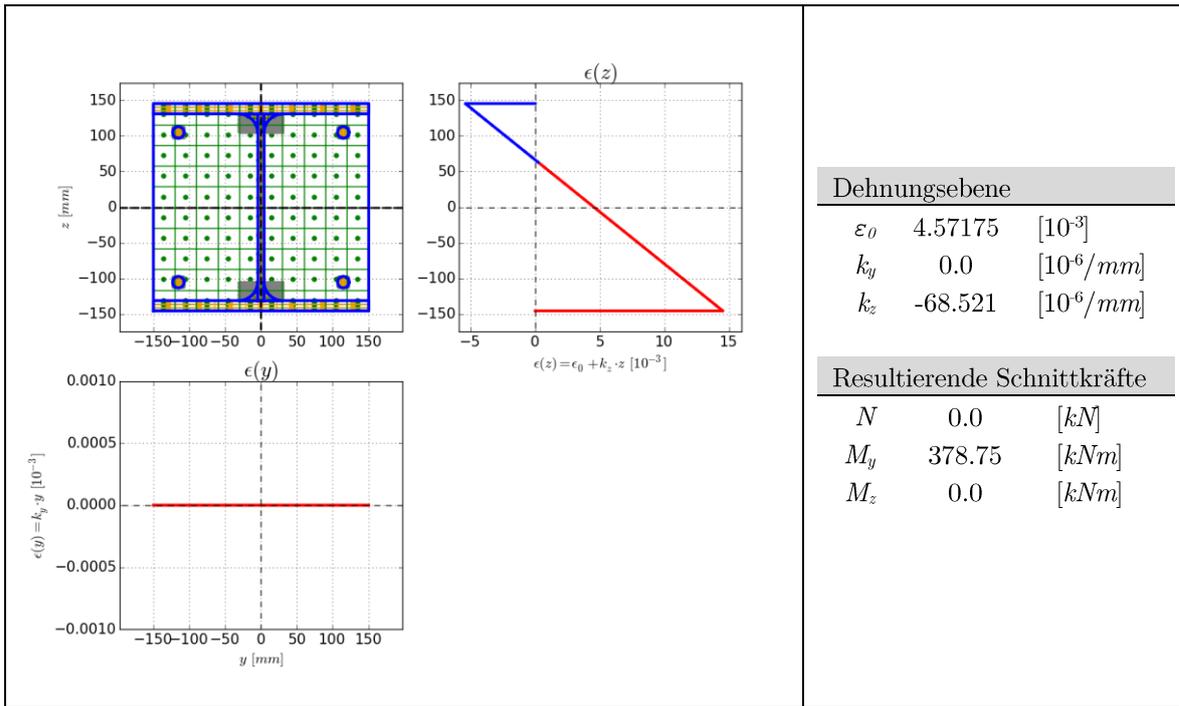


Abbildung 6.33: Dehnungsebene bei Punkt B

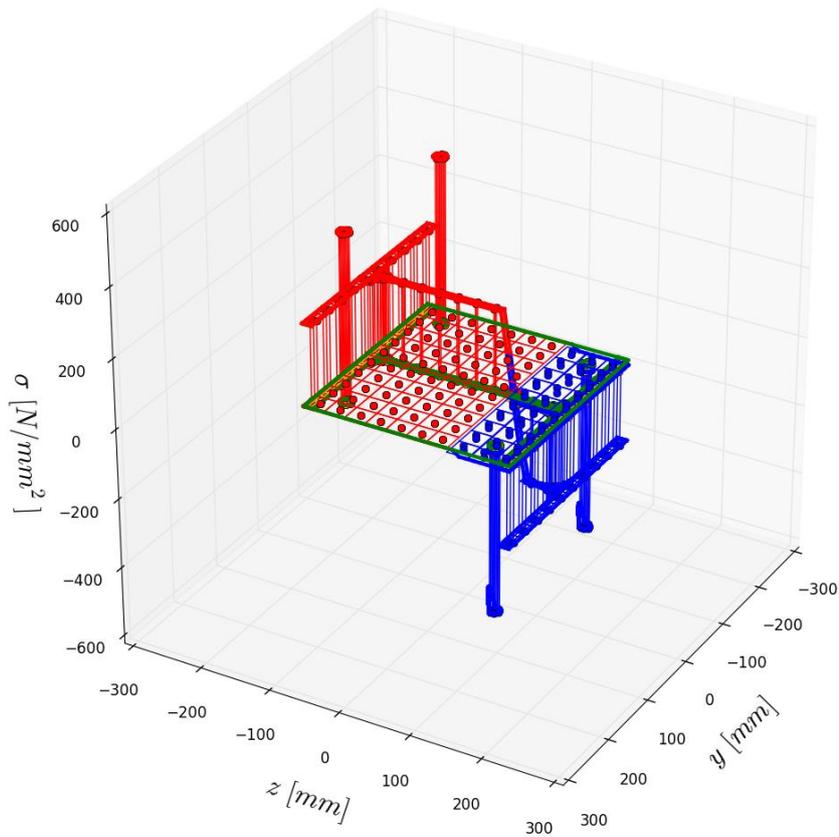


Abbildung 6.34: Spannungsbild bei Punkt B

Punkt C: Plastisches Grenzmoment $M_{gr,ult}$ bei $0.25 \cdot N_{r,ult}$

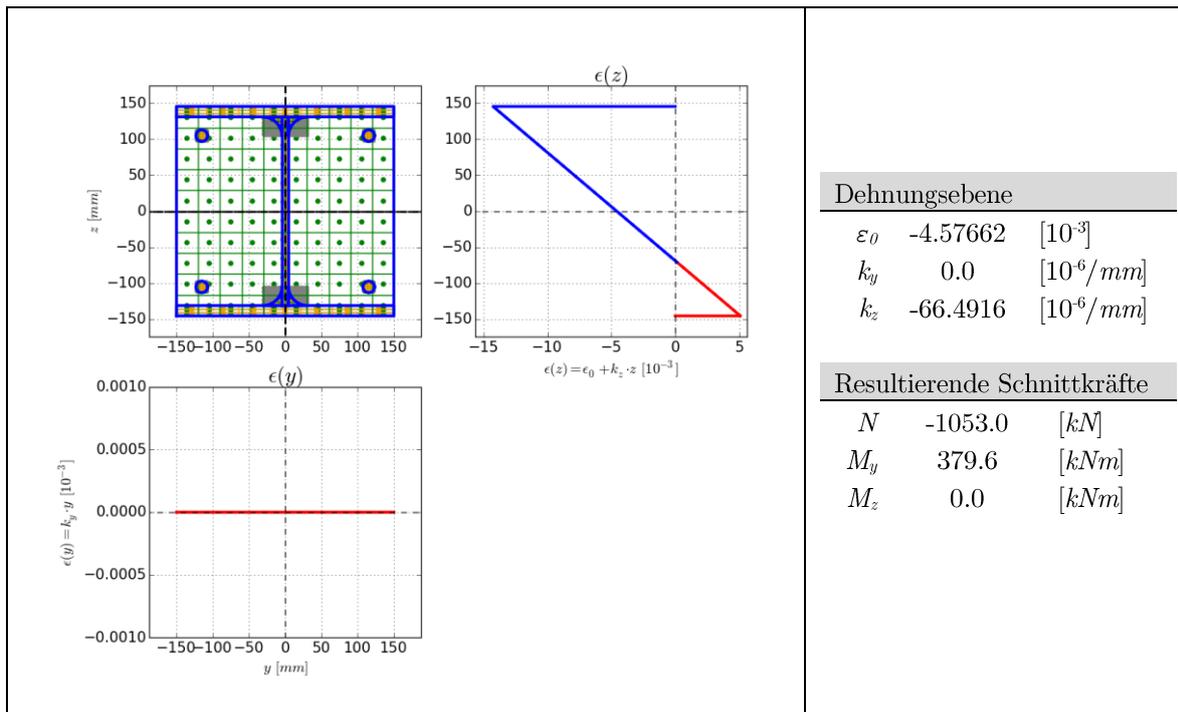


Abbildung 6.35: Dehnungsebene bei Punkt C

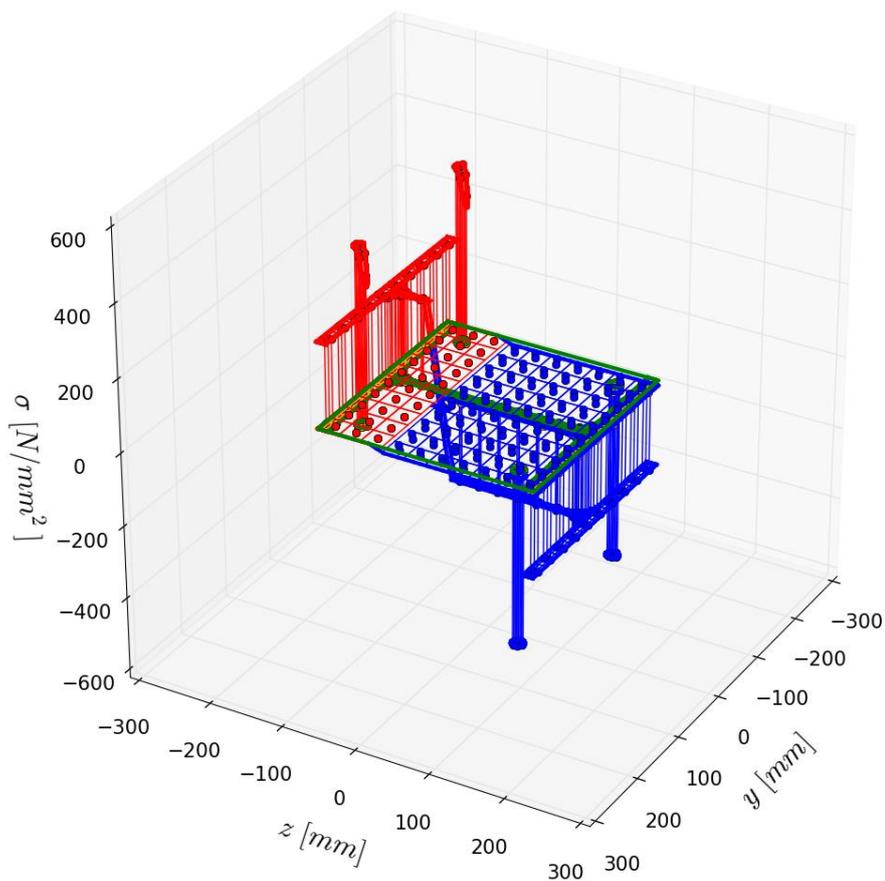


Abbildung 6.36: Spannungsbild bei Punkt C

Punkt D: Plastisches Grenzmoment $M_{yr,ult}$ bei $0.13 \cdot N_{r,ult}$

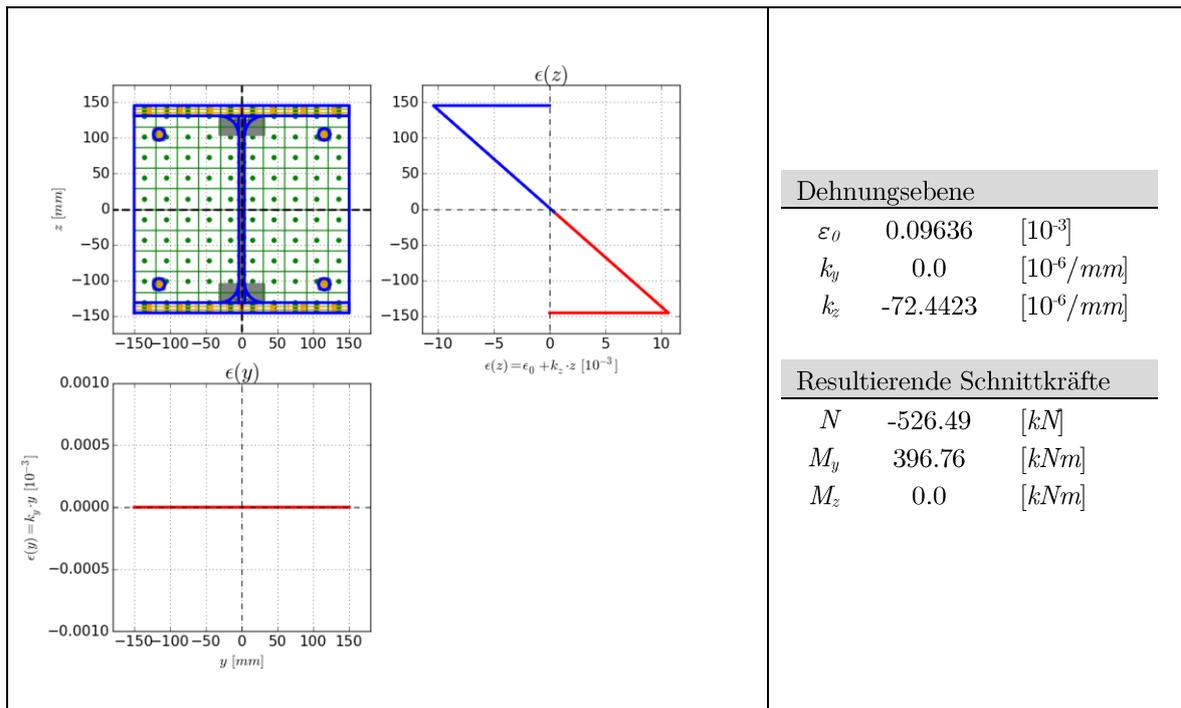


Abbildung 6.37: Dehnungsebene bei Punkt D

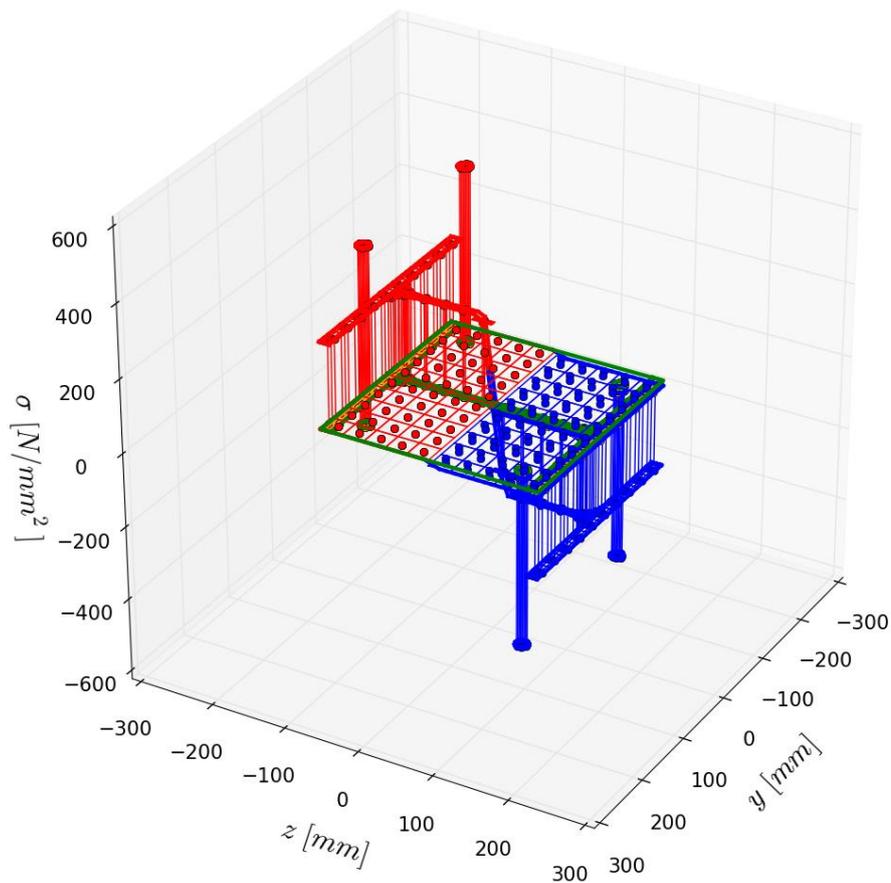


Abbildung 6.38: Spannungsbild bei Punkt D

Vergleich mit der Handrechnung

Die erste Variante kann aufgrund der einfachen Annahme der Spannungs-Dehnungsbeziehung der Materialien auch handschriftlich berechnet werden. Die Erstellung des M_y - N Interaktionsdiagrammes wird anhand der zuvor markierten Punkte plausibel geprüft.

Punkt	Tragfähigkeit	CONC	Exact		Rel. Abw. [%]
A	$N_{r,ult}$	-4066.406	-4101.09	[kN]	0.85
	$M_{gr,ult}$	0.0	0.0	[kNm]	0.0
B	$N_{r,ult}$	0.0	0.0	[kN]	0.0
	$M_{gr,ult}$	378.75	382.6	[kNm]	1.01
C	$N_{r,ult}$	-1053.0	-1061.3	[kN]	0.8
	$M_{gr,ult}$	379.6	382.6	[kNm]	0.8
D	$N_{r,ult}$	-526.49	-530.64	[kN]	0.61
	$M_{gr,ult}$	396.76	399.90	[kNm]	0.80

Tabelle 6.4: Vergleich mit der Handrechnung

Interaktion M_z - N

Es besteht die Möglichkeit einer weiteren Kontrolle der Querschnittstragfähigkeit in Form des M_z - N Diagrammes. Der Verlauf ist in der Abbildung 6.39 dargestellt und kann plausibel überprüft werden.

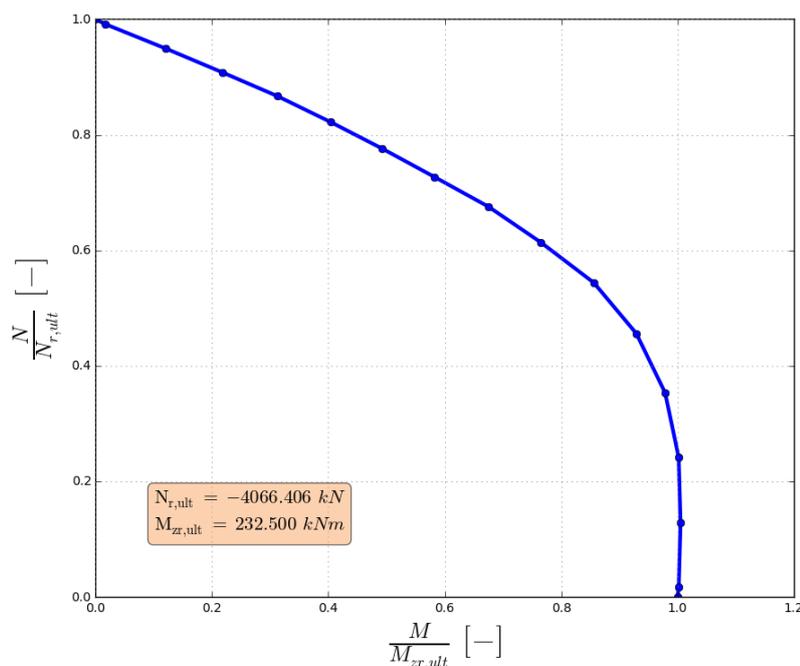


Abbildung 6.39: M_z - N Interaktionsdiagramm

6.3.2 Verbundstütze - Variante 2

Für die Variante 2 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.1)
- Bewehrungsstab
B 550 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.4)
- Beton
C 25/30 | Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.6)

Der Unterschied zur Variante 1 besteht darin, dass eine Dehnungsbegrenzung des Betons angenommen wird. D.h. die Tragfähigkeiten der Variante 1 sollten nunmehr unterschritten werden. Eine Dehnungsbegrenzung des Betons auf 3.5 ‰ führt zu keiner wesentlichen Änderung der maximalen Schnittkraftinteraktion, wie die Abbildung 6.40 im Vergleich zur Abbildung 6.30 zeigt. Die Punkte C und D ergeben neue Interaktionen und liegen unterhalb jener der Variante 1. Das M_y - N Diagramm hat nur geringe Abweichung im Vergleich zur Variante 1 (siehe Abbildung 6.40)

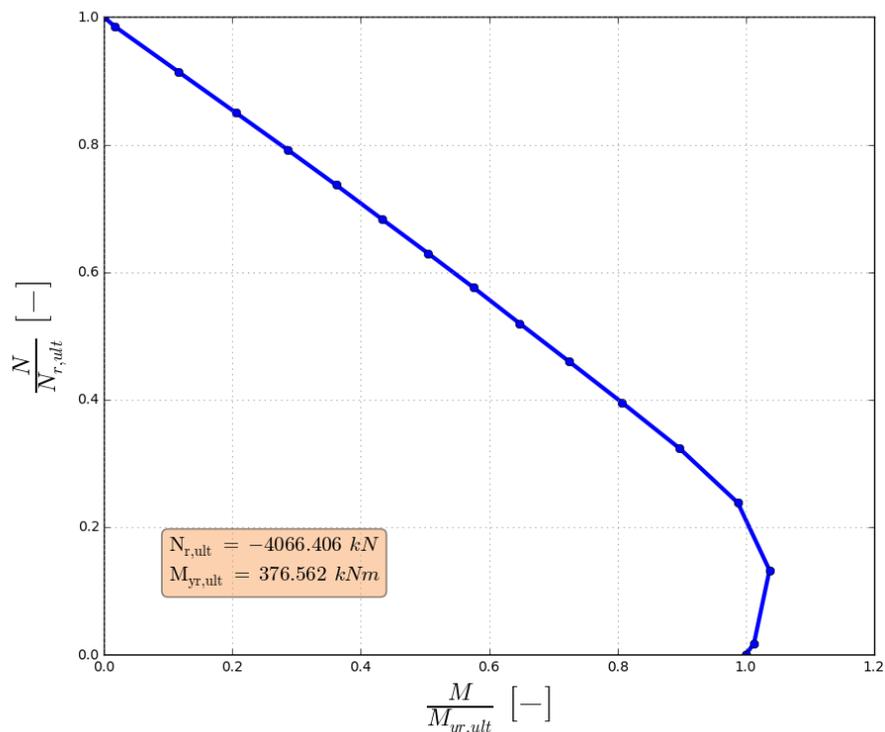


Abbildung 6.40: M_y - N Diagramm

Der Punkt C ist allerdings zu untersuchen, da die Betondehnung maßgeblich die Dehnungsbegrenzung von 3.5 ‰ überschreitet. Ein Vergleich der $M_y(k_z)$ -Linie zeigt, dass bei $k_z = -26 \cdot 10^{-6}/mm$ die Betondehnung überschritten wird. Der Ausfall der Betonfasern und die Abnahme der Tragfähigkeit ist in der Abbildung 6.42 ersichtlich. Der Punkt C wird nachfolgend für die Variante 1 und 2 berechnet.

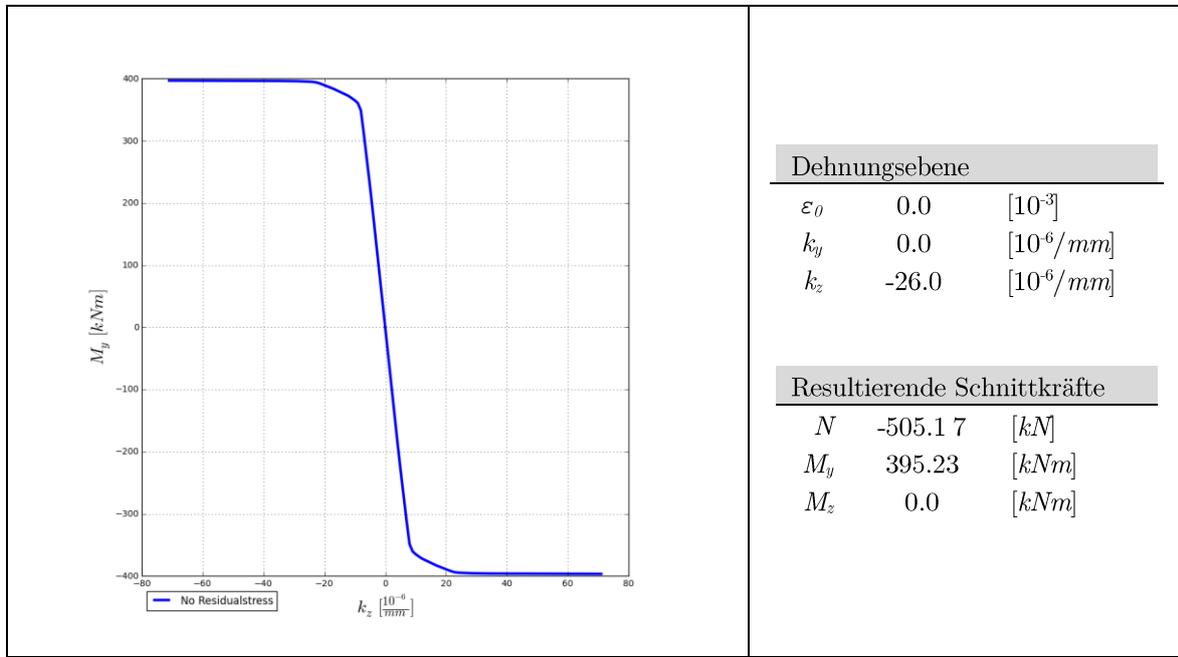


Abbildung 6.41: $M_y(k_z)$ -Linie für die Variante 1

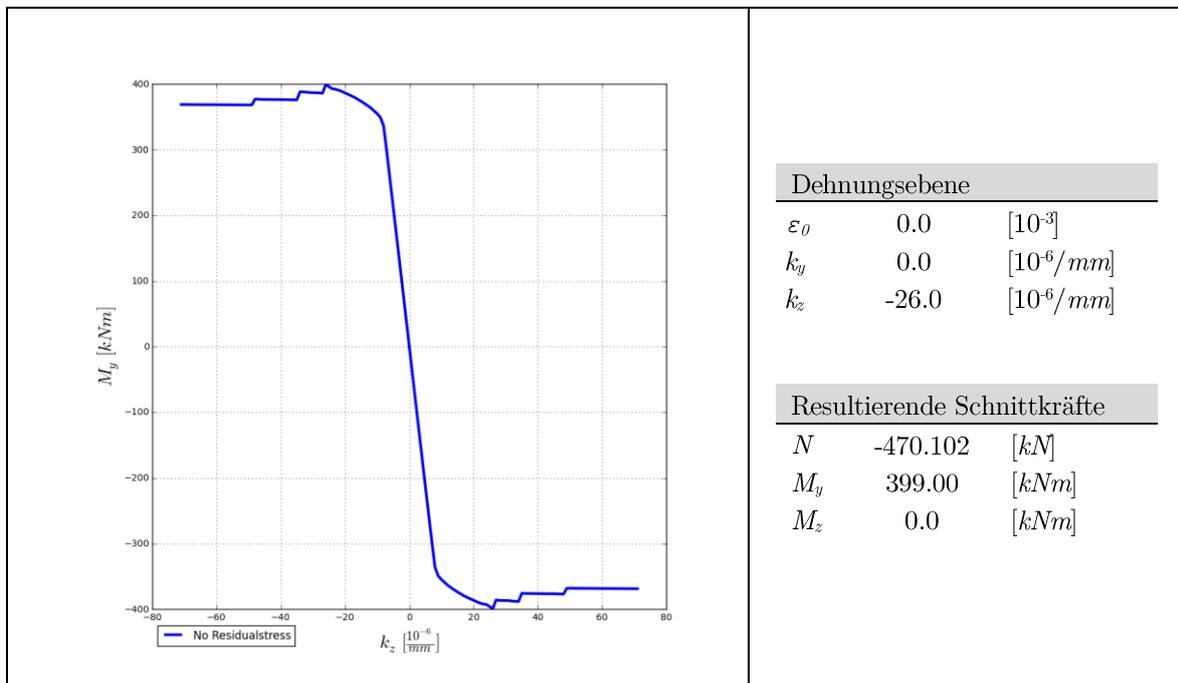


Abbildung 6.42: $M_y(k_z)$ -Linie für die Variante 2

6.3.3 Verbundstütze - Variante 3

Für die Variante 3 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung (Abbildung 6.2)
- Bewehrungsstab
B 550 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.4)
- Beton
C 25/30 | Bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.7)

Es werden die vereinfachten Spannungs-Dehnungsbeziehungen gewählt, um die Rechenzeit zu minimieren. Aufgrund der Verfestigung des Stahls und der Dehnungsbegrenzung des Betons ist die maximale Tragfähigkeit der Verbundstütze nahezu unabhängig von der Mitwirkung des Betons, wie nachfolgend noch gezeigt wird. Beim Ausfall der Betonfasern entstehen sprunghafte Steifigkeitsänderungen (siehe Abbildung 6.43, rote Markierung). In diesem Bereich treten beim Newton-Raphson-Verfahren numerische Probleme bei der Lösungsfindung auf. Es kann sein, dass dieser kritische Bereich beim Load-Stepping nicht durchlaufen werden kann. Das Verfahren wird dann bei dieser Last abgebrochen.

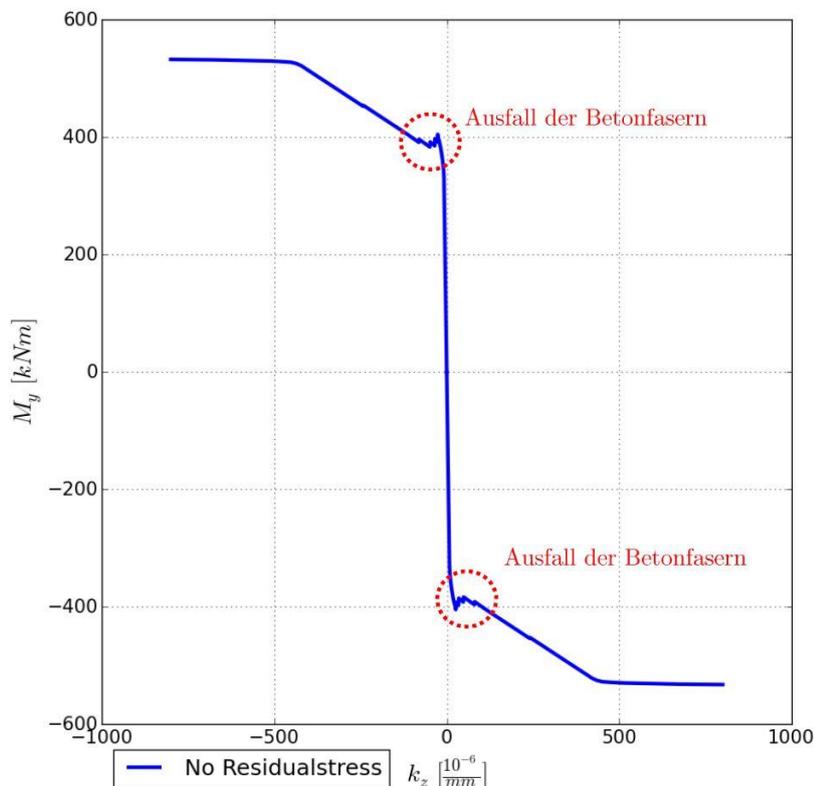


Abbildung 6.43: $M_y(k_z)$ -Verlauf der Variante 3

In der Abbildung 6.44 links (rote Markierung) ist dieses Verhalten eingetreten. Die maximale Querschnittstragfähigkeit ist in diesem Punkt nicht erreicht. Anhand der Spannungsbilder ist zu erkennen, dass bei dieser Lastkombination der Beton noch mitwirkt. Das Newton-Verfahren liefert aufgrund numerischer Probleme bei Erhöhung des Lastschrittes keine weitere Lösung.

Das M_y - N Diagramm (Abbildung 6.44 rechts) wird ohne Berücksichtigung des Betons erstellt. Ein Vergleich mit der linken Abbildung zeigt, dass, bis auf die numerischen Probleme (rote Markierung), keine Unterschiede zu erkennen sind. D.h. die Betonflächen können zur Gänze vernachlässigt werden, ohne die Querschnittstragfähigkeit zu reduzieren.

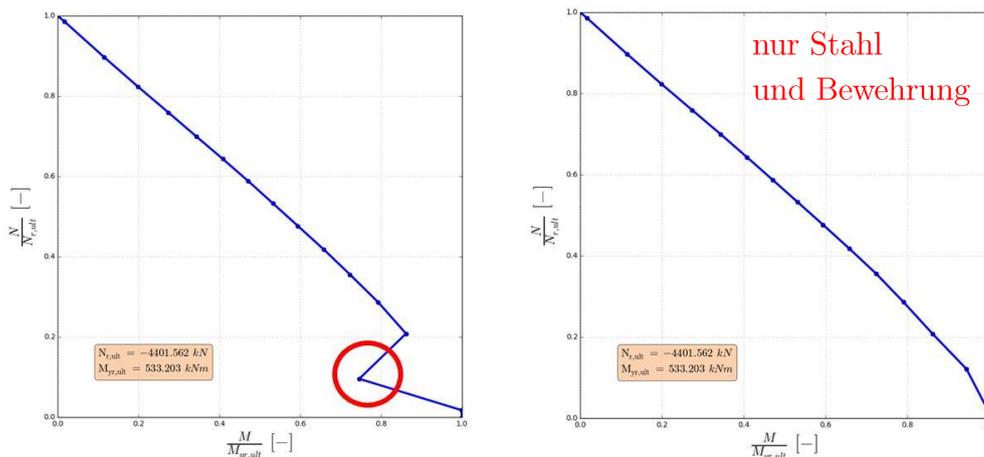


Abbildung 6.44: M_y - N Diagramm der Variante 3

Die Abbildung 6.45 zeigt den Ausfall der Betonfläche für die Berechnung der maximalen Momententragfähigkeit $M_{gr,ult}$.

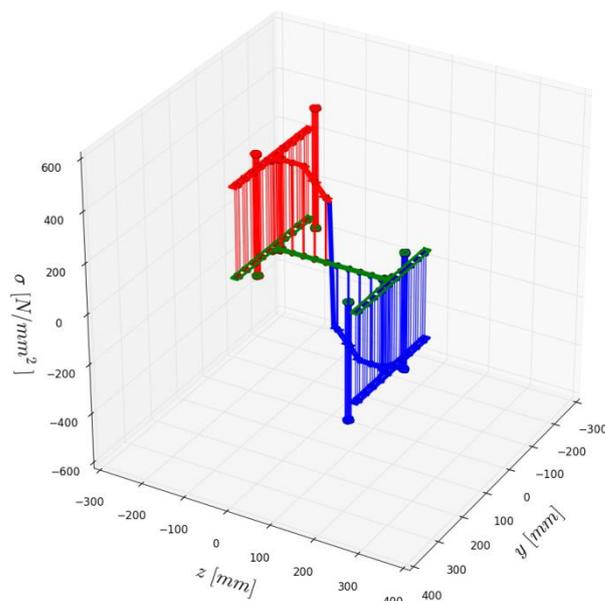


Abbildung 6.45: Spannungsbild für $M_{gr,ult}$

6.4 Beispiel 3 - Verbundträger

Der Verbundträger besteht aus einem Walzprofil HEA-300 und einer obenliegenden Betonplatte. Es wird die Interaktion von Druck und einachsiger Biegung um die starke Achse untersucht. Aufgrund dieser Vorgaben kann die Diskretisierung der Betonplatte lamellenartig in Dickenrichtung erfolgen (siehe Abbildung 6.46). Die Diskretisierung wird mittels 340 Flächenelementen durchgeführt.

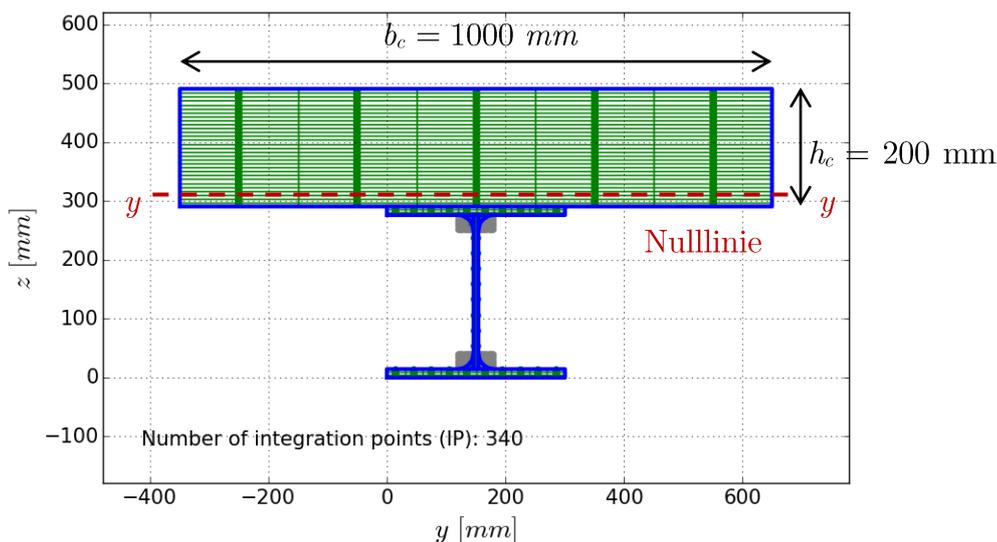


Abbildung 6.46: Diskretisierung Verbundträger

Die berechneten Querschnittswerte werden in der Tabelle 6.5 mit den exakten verglichen.

Bezeichnung	Querschnittswert	CONC	Exact		Rel. Abw. [%]
HEA - 300	$A_{HEA-300}$	112.10	113.00	$[cm^2]$	0.8
	I_y	18197.95	18260.00	$[cm^4]$	0.3
	I_z	6308.63	6310.00	$[cm^4]$	0.02
Betonfläche	$A_{Betonplatte}$	2000.00	2000.00	$[cm^2]$	0.0

Tabelle 6.5: Vergleich der Querschnittswerte

6.4.1 Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 1

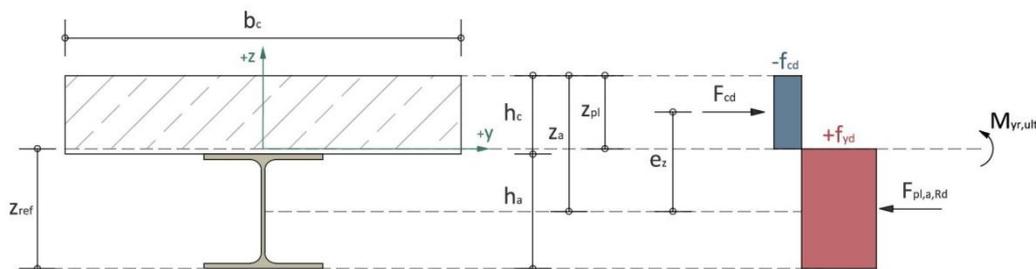
Für die Variante 1 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.1)
- Beton
C 25/30 | „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.5)

Für eine Plausibilitätskontrolle werden die Querschnittstragfähigkeiten handschriftlich bzgl. Druck und einachsiger Biegung berechnet.

Handschriftliche Berechnung der Querschnittstragfähigkeit

1. Lage der plastischen Nulllinie



$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow F_{cd} = F_{pl,a,Rd}:$$

$$F_{cd} = b_c * h_c * f_{cd} = 100.0 * 20.0 * 1.417 = 2834.0 \text{ kN}$$

$$F_{pl,a,Rd} = A_{HEA-300} * f_{yd} = 113 * 23.5 = 2655.5 \text{ kN}$$

$F_{cd} > F_{pl,a,Rd} \rightarrow$ plastische Nulllinie liegt in der Betondeckzone

$$z_{pl} = F_{pl,a,Rd} / (b_c * f_{cd}) = 2655.5 / (100.0 * 1.417) = 18.7 \text{ cm}$$

2. Als Bezugspunkt für die Dehnungsebene und die Schnittkräfte wird die plastische Nulllinie gewählt.

$$y_{Ref} = 0.0 \text{ cm}$$

$$z_{Ref} = h_a + h_c - z_{pl} = 29.0 + 20.0 - 18.7 = 30.3 \text{ cm}$$

3. Anschließend werden die maximalen Querschnittstragfähigkeiten berechnet. Die maximale Drucknormalkraft $F_{pl,Rd}$ wird allerdings nicht auf die Nulllinie bezogen.

$$F_{pl,Rd} = F_{cd} + F_{pl,a,Rd} = -2834.0 - 2655.5 = -5489.5 \text{ kN}$$

$$M_{yr,ult} = F_{pl,a,Rd} * (z_a - z_{pl} / 2)$$

$$= 2655.5 * [(29.0 / 2 + 20.0) - 18.7 / 2] = 66785.8 \text{ kNcm} = 667.86 \text{ kNm}$$

Maximale Momententragfähigkeit $M_{yr,ult}$

Die korrelierende Dehnungsebene für die maximale Momententragfähigkeit in der Abbildung 6.47 zeigt, dass die Betonrandstauchung mehr als 10 ‰ aufweist. Aus diesem Grund wird bei dieser Annahme der Spannungs-Dehnungsline des Betonwerkstoffs die Querschnittstragfähigkeit überschätzt. Eine Plausibilitätskontrolle von $M_{yr,ult}$ mit der handschriftlichen Berechnung ergibt allerdings nur eine geringe Abweichung.

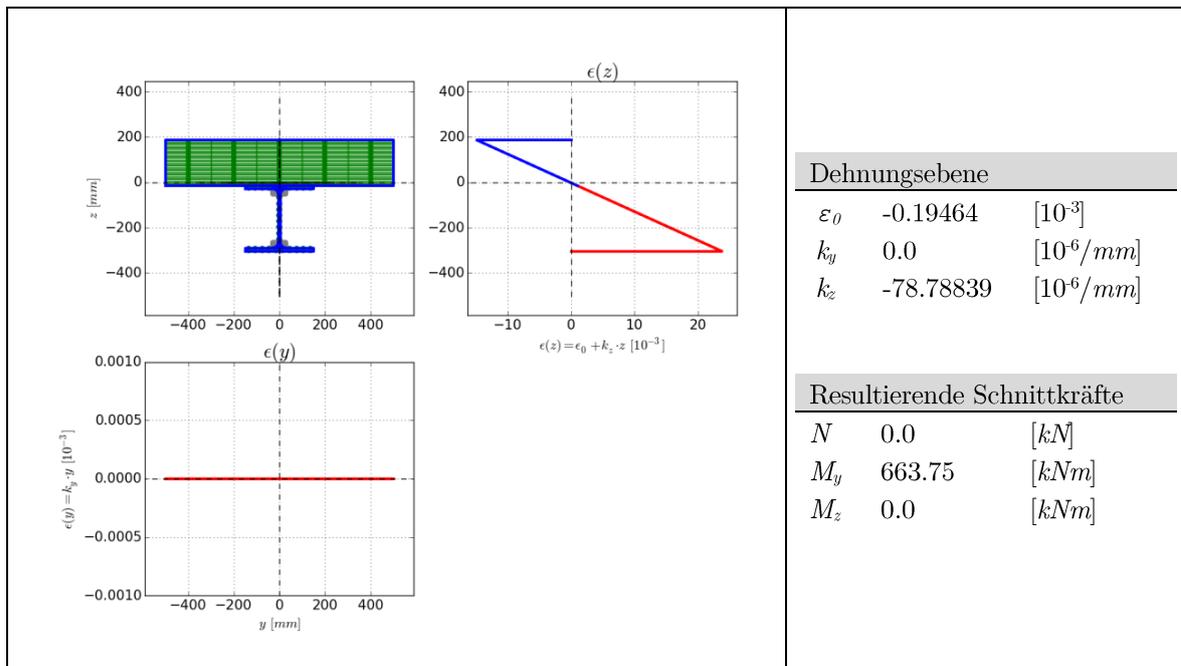


Abbildung 6.47: Dehnungsebene zu $M_{yr,ult}$

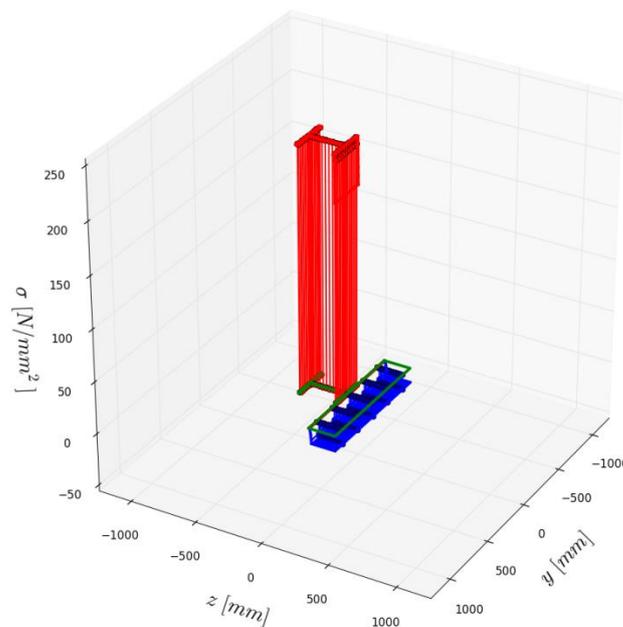


Abbildung 6.48: Spannungsbild zu $M_{yr,ult}$

Die Diagramm-Matrix zeigt, dass bei der Änderung von k_z anfangs auch Normalkräfte entstehen. Bei vollständiger Plastifizierung des Walzprofils stellt sich ein reines Biegemoment $M_{y,r,ult}$, bezogen auf die plastische Nulllinie, ein.

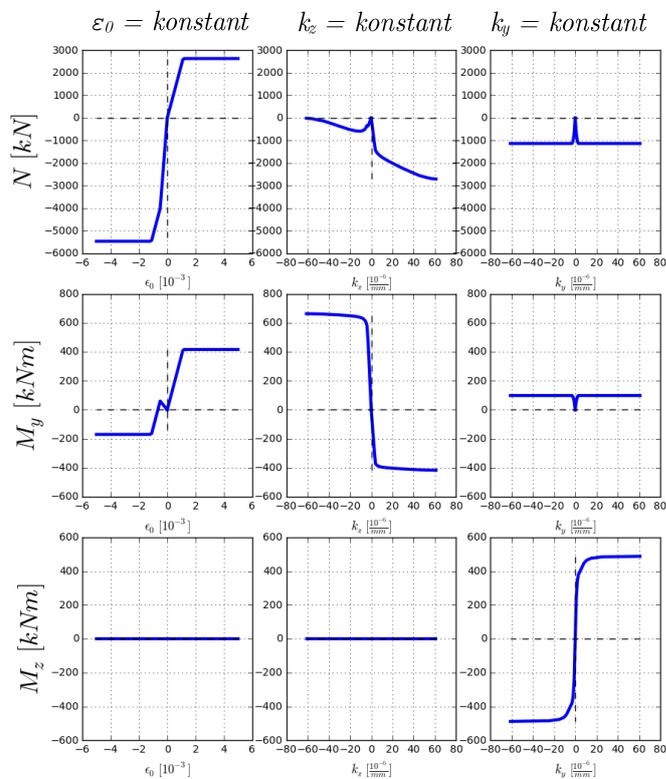


Abbildung 6.49: Diagramm-Matrix

Interaktion M_y - N

Die Abbildung 6.50 zeigt die Querschnittstragfähigkeit bei gleichzeitiger Wirkung von N und M_y .

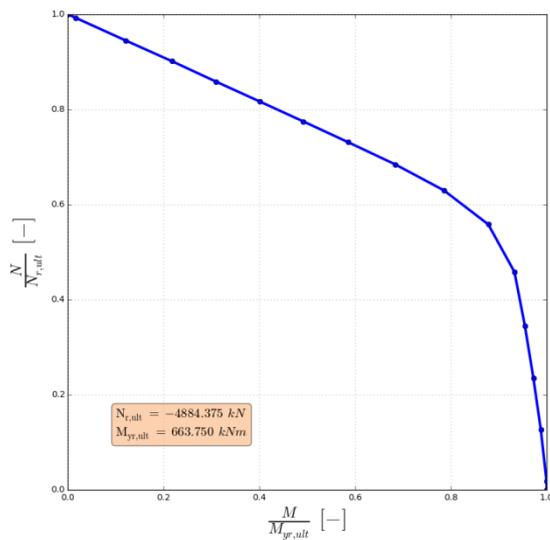


Abbildung 6.50: M_y - N Diagramm

6.4.2 Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 2

Für die Variante 2 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung (Abbildung 6.1)
- Beton
C 25/30 | Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.6)

Maximale Momententragfähigkeit $M_{gr,ult}$

Die korrelierende Dehnungsebene in der Abbildung 6.51 zeigt, dass die maximale Betonrandstauchung von 3.5 ‰ nicht überschritten wird. Somit stellt sich eine kleinere Krümmung bzw. Momententragfähigkeit (Reduktion um ~ 5 ‰) als in der Variante 1 (siehe Abschnitt 6.4.1) ein.

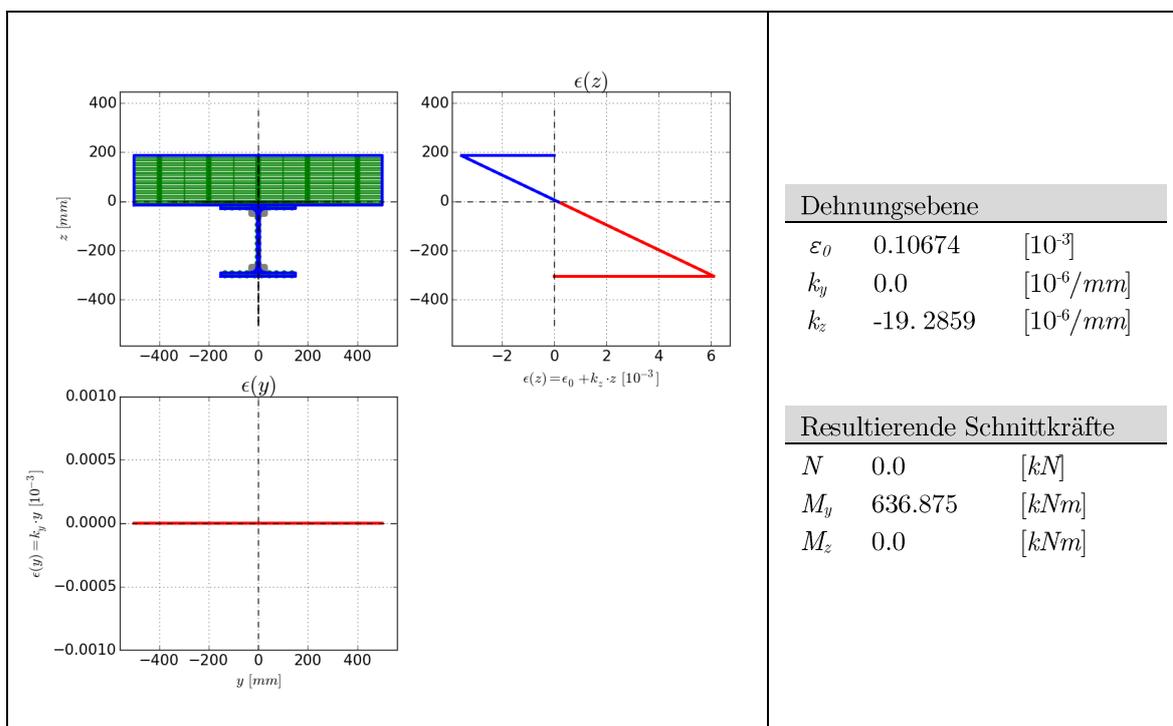


Abbildung 6.51: Dehnungsebene zu $M_{gr,ult}$

Das Spannungsbild lt. Abbildung 6.52 zeigt den typischen Parabel-Rechteck-Verlauf in der Betonfläche. Aufgrund der Dehnungsbegrenzung des Betons kann das Walzprofil im Obergurtbereich nicht vollständig plastifizieren, wie ebenfalls erkennbar ist.

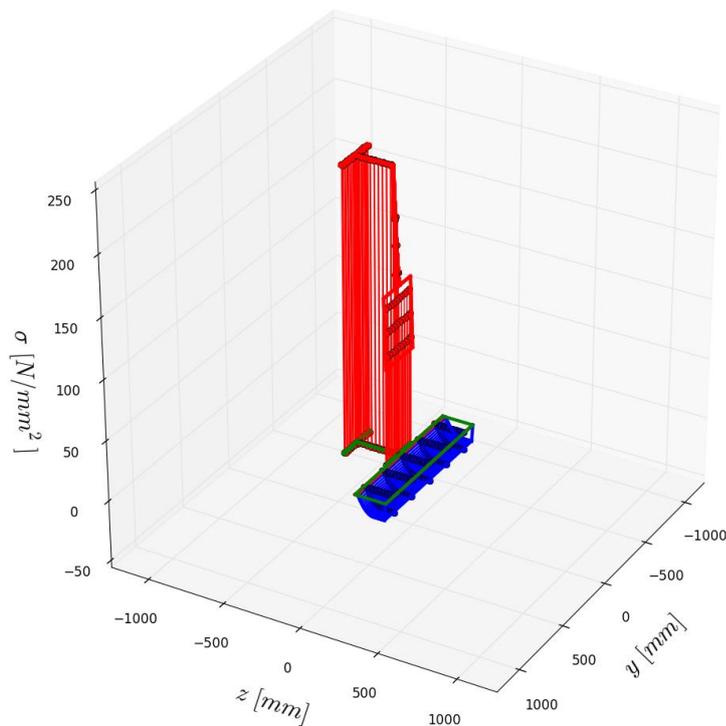


Abbildung 6.52: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$

Interaktion M_y-N

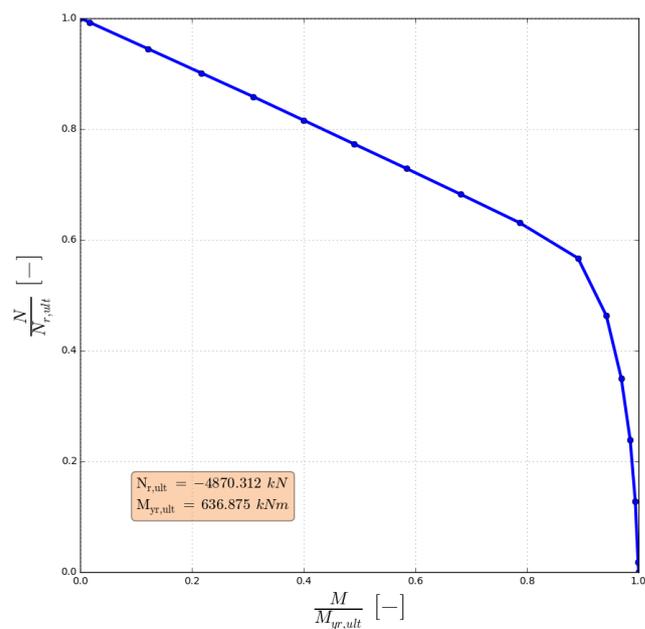


Abbildung 6.53: M_y-N Diagramm

6.4.3 Querschnittstragfähigkeit Verbundträger - Variante 3

Für die Variante 3 werden folgende Spannungs-Dehnungsbeziehungen für die einzelnen Materialien gewählt:

- Walzprofil HEA-300
S 235 | Elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung (Abbildung 6.2)
- Beton
C 25/30 | Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung (Abbildung 6.6)

Maximale Momententragfähigkeit $M_{gr,ult}$

Der Unterschied zur Variante 2 (siehe Abschnitt 6.4.2) ist, dass eine Wiederverfestigung des Stahls eine höhere Tragfähigkeit ermöglichen sollte, bedingt durch die größere Normkrafttragfähigkeit im Stahlträger. Da die aufnehmbare Drucknormalkraft der Betonplatte jedoch limitierend ist, kann sich diese nicht einstellen.

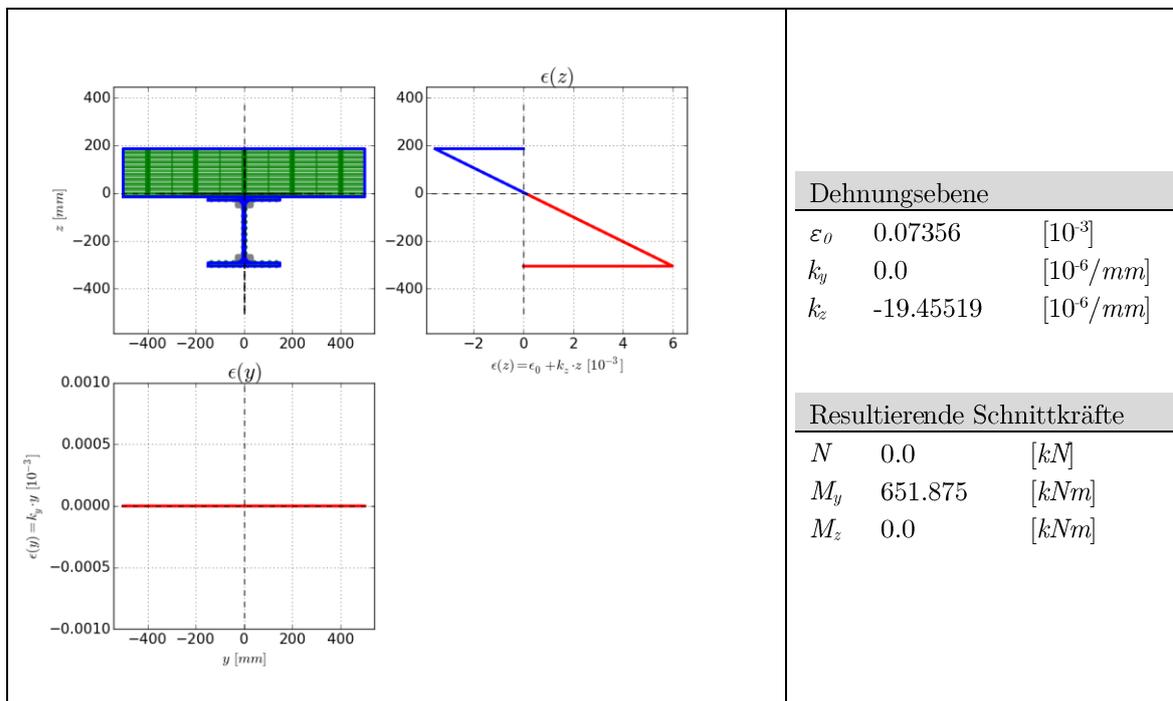


Abbildung 6.54: Dehnungsebene zu $M_{gr,ult}$

Die Berücksichtigung der Wiederverfestigung des Stahls erlaubt im Untergurtbereich zwar die Aktivierung höherer Spannungen, der Obergurtbereich bleibt jedoch deutlich im elastischen Bereich. Aus diesem Grund wird die Querschnittstragfähigkeit gegenüber Variante 2 nur geringfügig erhöht, bleibt jedoch unter Variante 1.

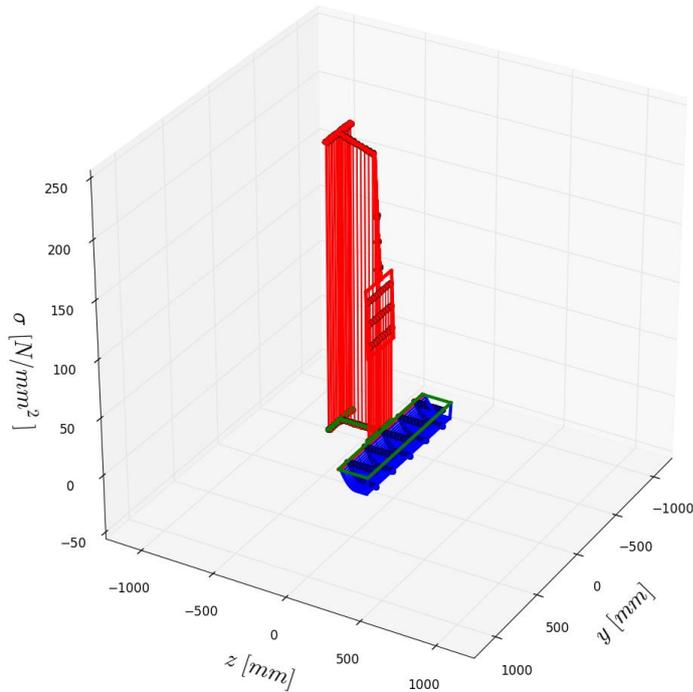


Abbildung 6.55: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$

Interaktion M_y-N

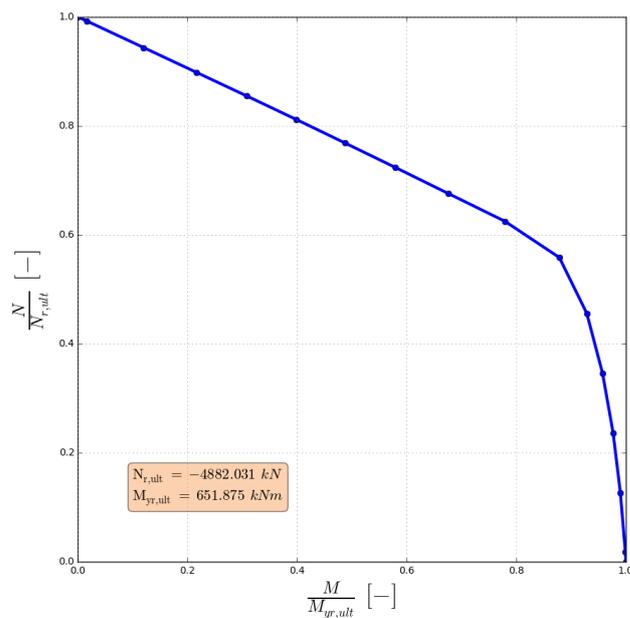


Abbildung 6.56: M_y-N Diagramm

6.4.4 Zusammenfassung der Varianten

In der Tabelle 6.6 werden die Momententragfähigkeiten der Varianten 1 bis 3 gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die Annahme des Betons mittels „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung nicht konservative Ergebnisse liefert, wobei jedoch die prozentuellen Abweichungen gering bleiben.

Variante	$M_{gr,ult}$ [kNm]	Rel. Abweichung zur Variante 1 [%]
1	663.75	0.0
2	636.875	- 4.05
3	651.875	- 1.79

Tabelle 6.6: Zusammenfassung der Varianten

7 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammengefasst wird in dieser Masterarbeit ein numerisches Tool zur Berechnung der Spannungs- und Dehnungszustände sowie der Querschnittstragfähigkeit beliebiger Verbundquerschnitte bei Normalkraft- und Momentenbeanspruchung entwickelt und dokumentiert. Im Zuge dieser Arbeit wird das Berechnungstool *CONC* in der Programmiersprache *Python* implementiert. Mithilfe dieses Tools soll die Bestimmung der Beanspruchung und der zugehörigen Querschnittstragfähigkeit allgemeiner Querschnitte, insbesondere von Verbundquerschnitten, mit beliebigen Materialkennlinien ermöglicht werden.

Die mechanische Voraussetzung für die Querschnittsberechnungen ist die Annahme der Bernoulli-Hypothese, das ist das Ebenbleiben des Querschnitts. Auf Basis dieser Hypothese können mit dem entwickelten Tool sowohl Dehnungszustände für beliebige Belastungszustände – auch über die Elastizitätsgrenze hinaus - bestimmt, als auch Querschnitts-Interaktionsdiagramme zur Ermittlung der Grenztragfähigkeit bei beliebigen Kombinationen von Normalkräften und Biegemomenten entwickelt werden.

Für die Diskretisierung des Querschnitts wird ein einfaches „Fasermode“ gewählt, wonach in jeder Faser (kleiner Elementbereich) des Querschnitts eine lokal konstante Dehnung und Spannung vorausgesetzt wurde. Ein Vorteil dieser numerisch aufwendigen Diskretisierungsstrategie ist die Erfassung von beliebigen Eigenspannungsverläufen bei beliebigen Querschnittsgeometrien.

Im Zuge der Validierung werden die Berechnungsergebnisse des entwickelten Tools anhand mehrerer Beispiele aus dem Stahl- und Verbundbau überprüft. Zudem lassen sich aufschlussreiche Studien zu den Anwendungsgrenzen konventioneller „Handrechnungsverfahren“ anstellen, wodurch z.B. der Einfluss der Eigenspannung auf Momenten-Krümmungs-Diagramme von Stahlprofilen oder der Einfluss der Grenzstauchung in der Betonplatte bei kompakten Verbundquerschnitten untersucht werden können.

Aufgrund der einfachen Erweiterbarkeit von *CONC* wäre es jederzeit möglich, ein alternatives Integrationsverfahren zu implementieren. Somit könnte abhängig vom Einsatzbereich des Softwaretools die Rechendauer bzw. die Rechengenauigkeit verbessert werden.

Ein weiterer Einsatzbereich – und eine Motivation für die Erstellung - von *CONC* ist die Anwendung der *Continuous Strength Method* (CSM) für Stahlbauquerschnitte. Dieses Verfahren wird für die Berechnung der maximalen Querschnittstragfähigkeit von Stahl- und Aluminiumprofilen eingesetzt und basiert auf einem Materialmodell mit Wiederverfestigung unter Berücksichtigung der lokalen Beulgefährdung, wobei eine schlankheitsabhängige Dehnungsbegrenzung eingeführt wird. Anhand praktischer Versuchsreihen wurde ein funktionaler Zusammenhang der Querschnittsschlankheit mit einer materiellen Dehnungsbegrenzung bestimmt. D.h. in Abhängigkeit der Schlankheit wird ein dehnungsbegrenztes Materialmodell vorausgesetzt und die infolgedessen resultierende Querschnittstragfähigkeit ermittelt. Die genaue Vorgehensweise ist der Quelle [15] zu entnehmen.

8 Literaturverzeichnis

- [1] WIKIPEDIA The Free Encyclopedia. (Zitat vom: 07.07.2015) wikipedia. [Online]. https://de.wikipedia.org/wiki/Python_%28Programmiersprache%29
- [2] B. Klein. (Zitat vom: 07.07.2015) Python-Kurs. [Online]. <http://www.python-kurs.eu/kurs.php>
- [3] D. Busjaeger, U. Quast, *Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft (Programm MASQUE)*. Berlin: TU Hamburg-Harberg, Beuth Verlag GmbH, 1990.
- [4] M. Schanz, *Mechanik B2 - Festigkeitslehre*. Graz: TU Graz, Institut für Baumechanik, SS 2010.
- [5] T.-P. Fries, *FEM I - Einführung in die FEM - Vorlesung 5 - Numerische Integration und Interpolation*. Graz: TU Graz, Institut für Baustatik, WS 2013/14.
- [6] G. Kress, *Strukturanalyse mit FEM*. Zürich, Schweiz: ETH Zürich, Zentrum für Strukturtechnologien , 2004.
- [7] S. Huemer, *Rahmen 2D und allgemeine Querschnitte Cross Section*. Graz: TU Graz, Institut für Baustatik, 2012.
- [8] G. Schulz, *Die Traglastberechnung von planmäßig mittig belasteten Druckstäben aus Baustahl unter Berücksichtigung von geometrischen und strukturellen Imperfektionen*. Graz: TU Graz, 1968.
- [9] W. Rust, *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen; Kontakt, Geometrie, Material*. Hannover, Deutschland: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [10] D. Schöllhammer, *Bemessung von Stahlbetonstützen nach EC 2 auf Android Design of Concrete Beam Columns DCBC*. Graz: TU Graz, Institut für Baustatik, 2014.
- [11] CEN. EN ÖNORM 1993-1-1, *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten; Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. Wien: Österreichisches Normungsinstitut, 2006, 2006-10-01.ICS 91.010.30;91.080.10.
- [12] CEN. ÖNORM EN 1992-1-1, *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. Deutsche Fassung, 2004, ICS 91.010.30;91.080.40.
- [13] CEN. ÖNORM EN 1993-1-5, *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten; Teil1-5: Plattenförmige Bauteile*. Wien: Österreichisches Normungsinstitut, 2007, 2007-04-01, ICS 91.010.30;91.080.10.

- [14] H. Unterweger, *Skriptum Verbundbau*. Graz: TU Graz, Institut für Stahlbau, 2012.
- [15] A. Liew, L. Gardner, *Ultimate capacity of structural steel cross-sections under compression, bending and combined loading*. Department of Civil and Environmental Engineering, Imperial College London, South Kensington Campus, London, UK: Elsevier, 2014.
- [16] C. Petersen, *Stahlbau; Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*. München: Springer Vieweg, 2013.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Darstellung des Spannungsverlaufs.....	2
Abbildung 3.1: Linear elastisches Werkstoffgesetz.....	8
Abbildung 3.2: Spannungsintegration bei reiner Mitteldehnung.....	9
Abbildung 3.3: Spannungsintegration bei reiner Krümmung um die y-Achse.....	10
Abbildung 3.4: Spannungsintegration bei reiner Krümmung um die z-Achse.....	11
Abbildung 3.5: Gauß-Quadratur im 1D-Referenzelement.....	13
Abbildung 3.6: Darstellung der Gauß-Punkte im 2D-Referenzviereck.....	13
Abbildung 3.7: Diskretisierungsraster eines allgemeinen Polygons.....	14
Abbildung 3.8: Diskretisierung des Polygonzugs.....	15
Abbildung 5.1: Vorgangsweise der Querschnittserstellung.....	22
Abbildung 5.2: Klassendiagramm für die Querschnittserstellung.....	23
Abbildung 5.3: Bilinearer Spannungs-Dehnungs-Verlauf.....	24
Abbildung 5.4: Stückweise linearer Spannungs-Dehnungs-Verlauf.....	25
Abbildung 5.5: Parabolischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf.....	27
Abbildung 5.6: Äquidistanter Eigenspannungsverlauf in y-Richtung.....	28
Abbildung 5.7: Nicht äquidistanter Eigenspannungsverlauf in y-Richtung.....	29
Abbildung 5.8: Erstellung eines Rechtecks.....	34
Abbildung 5.9: Erstellung eines allgemeinen Polygons.....	34
Abbildung 5.10: Erstellung eines Kreises.....	35
Abbildung 5.11: Erstellung eines Quadrates aus einzelnen Dreiecken.....	35
Abbildung 5.12: Erstellung eines Viertelkreises.....	36
Abbildung 5.13: Erstellung eines Kreisbogens.....	37
Abbildung 5.14: Erstellung einer allgemeinen Parabel.....	37
Abbildung 5.15: Grafische Darstellung des Newton-Raphson-Verfahrens.....	43
Abbildung 5.16: Allgemeine Veranschaulichung des Load-Stepping-Verfahrens.....	46
Abbildung 5.17: Erstellung des M-N Diagrammes.....	50
Abbildung 6.1: Materialverhalten Stahl: Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung.....	54
Abbildung 6.2: Materialverhalten Stahl: Elastisch-plastisch mit linearer Wiederverfestigung.....	55
Abbildung 6.3: Materialverhalten Stahl: „Wahre“ Spannungs-Dehnungs-Kurve.....	56
Abbildung 6.4: Materialverhalten Bewehrungsstahl: Elastisch-plastisch ohne Wiederverfestigung.....	57
Abbildung 6.5: Materialverhalten Beton: „Spannungsblock“ ohne Dehnungsbegrenzung.....	58

Abbildung 6.6: Materialverhalten Beton: Parabel-Rechteck mit Dehnungsbegrenzung	59
Abbildung 6.7: Materialverhalten Beton: Bilineare Spannungs-Dehnungslinie mit Dehnungsbegrenzung	60
Abbildung 6.8: Diskretisierung Walzprofil.....	61
Abbildung 6.9: Angenommener Eigenspannungsverlauf für das Walzprofil	62
Abbildung 6.10: Aufbau der Diagramm-Matrix.....	62
Abbildung 6.11: Diagramm-Matrix des Walzprofils ohne Eigenspannungen.....	63
Abbildung 6.12: Diagramm-Matrix des Walzprofils mit Eigenspannungen.....	64
Abbildung 6.13: Dehnungsebene für $M_{gr,ult}$	66
Abbildung 6.14: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$	66
Abbildung 6.15: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf.....	67
Abbildung 6.16: $M_y(k_z)$ -Verlauf.....	67
Abbildung 6.17: Spannungsintegration bei Berücksichtigung der Eigenspannungen bei $\epsilon_0 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ [-]	69
Abbildung 6.18: Spannungsintegration bei Berücksichtigung der Eigenspannungen bei $k_z = -10 \cdot 10^{-6}$ [1/mm]	70
Abbildung 6.19: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf.....	71
Abbildung 6.20: $M_y(k_z)$ -Verlauf.....	72
Abbildung 6.21: Dehnungsebene für $M_{gr,ult}$	73
Abbildung 6.22: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$	73
Abbildung 6.23: Dehnungsebene für $M_{gr,ult}$	74
Abbildung 6.24: Spannungsbild zu $M_{gr,ult}$	74
Abbildung 6.25: $M_y(k_z)$ -Verlauf	75
Abbildung 6.26: $N(\epsilon_0)$ -Verlauf.....	75
Abbildung 6.27: M_y - N Interaktionsdiagramm	76
Abbildung 6.28: Diskretisierung der Verbundstütze.....	77
Abbildung 6.29: Diagramm-Matrix Verbundstütze.....	78
Abbildung 6.30: M_y - N Interaktionsdiagramm	79
Abbildung 6.31: Dehnungsebene bei Punkt A	82
Abbildung 6.32: Spannungsbild bei Punkt A.....	82
Abbildung 6.33: Dehnungsebene bei Punkt B	83
Abbildung 6.34: Spannungsbild bei Punkt B.....	83
Abbildung 6.35: Dehnungsebene bei Punkt C	84
Abbildung 6.36: Spannungsbild bei Punkt C.....	84
Abbildung 6.37: Dehnungsebene bei Punkt D	85
Abbildung 6.38: Spannungsbild bei Punkt D.....	85

Abbildung 6.39: M_z - N Interaktionsdiagramm	86
Abbildung 6.40: M_y - N Diagramm	87
Abbildung 6.41: $M_y(k_z)$ -Linie für die Variante 1	88
Abbildung 6.42: $M_y(k_z)$ -Linie für die Variante 2	88
Abbildung 6.43: $M_y(k_z)$ -Verlauf der Variante 3	89
Abbildung 6.44: M_y - N Diagramm der Variante 3	90
Abbildung 6.45: Spannungsbild für $M_{yr,ult}$	90
Abbildung 6.46: Diskretisierung Verbundträger	91
Abbildung 6.47: Dehnungsebene zu $M_{yr,ult}$	93
Abbildung 6.48: Spannungsbild zu $M_{yr,ult}$	93
Abbildung 6.49: Diagramm-Matrix	94
Abbildung 6.50: M_y - N Diagramm	94
Abbildung 6.51: Dehnungsebene zu $M_{yr,ult}$	95
Abbildung 6.52: Spannungsbild zu $M_{yr,ult}$	96
Abbildung 6.53: M_y - N Diagramm	96
Abbildung 6.54: Dehnungsebene zu $M_{yr,ult}$	97
Abbildung 6.55: Spannungsbild zu $M_{yr,ult}$	98
Abbildung 6.56: M_y - N Diagramm	98

Dies ist eine Veröffentlichung des

FACHBEREICHS INGENIEURBAUKUNST (IBK) AN DER TU GRAZ

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst umfasst die dem konstruktiven Ingenieurbau nahe stehenden Institute für Baustatik, Betonbau, Stahlbau & Flächentragwerke, Holzbau & Holztechnologie, Materialprüfung & Baustofftechnologie, Baubetrieb & Bauwirtschaft, Hochbau & Industriebau, Bauinformatik und Allgemeine Mechanik der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Graz.

Dem Fachbereich Ingenieurbaukunst ist das Bautechnikzentrum (BTZ) zugeordnet, welches als gemeinsame hochmoderne Laboreinrichtung zur Durchführung der experimentellen Forschung aller beteiligten Institute dient. Es umfasst die drei Laboreinheiten für konstruktiven Ingenieurbau, für Bauphysik und für Baustofftechnologie.

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst kooperiert im gemeinsamen Forschungsschwerpunkt „Advanced Construction Technology“. Dieser Forschungsschwerpunkt umfasst sowohl Grundlagen- als auch praxisorientierte Forschungs- und Entwicklungsprogramme.

Weitere Forschungs- und Entwicklungskooperationen bestehen mit anderen Instituten der Fakultät, insbesondere mit der Gruppe Geotechnik, sowie nationalen und internationalen Partnern aus Wissenschaft und Wirtschaft.

Die Lehrinhalte des Fachbereichs Ingenieurbaukunst sind aufeinander abgestimmt. Aus gemeinsam betreuten Projektarbeiten und gemeinsamen Prüfungen innerhalb der Fachmodule können alle Beteiligten einen optimalen Nutzen ziehen.

Durch den gemeinsamen, einheitlichen Auftritt in der Öffentlichkeit präsentiert sich der Fachbereich Ingenieurbaukunst als moderne Lehr- und Forschungsgemeinschaft, welche die Ziele und Visionen der TU Graz umsetzt.

Nummerierungssystematik der Schriftenreihe:

D – Diplom-, Masterarbeiten/Dissertationen | F – Forschungsberichte
S – Skripten, Vorlesungsunterlagen | V – Vorträge, Tagungen

Institutskennzahl:

1 – Allgemeine Mechanik | 2 – Baustatik | 3 – Betonbau
4 – Holzbau & Holztechnologie | 5 – Stahlbau & Flächentragwerke
6 – Materialprüfung & Baustofftechnologie | 7 – Baubetrieb & Bauwirtschaft
8 – Hochbau & Industriebau | 9 – Bauinformatik
10 – Labor für Konstruktiven Ingenieurbau

Fortlaufende Nummer pro Reihe und Institut / Jahreszahl