



# EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

## AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

---

Datum/ Date

---

Unterschrift/ Signature

## Danksagung

Einleitend bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ing.- Nguyen Viet Tue, welcher es mir ermöglicht hat, diese Arbeit am Institut für Betonbau der TU Graz durchzuführen. Besonderer Dank gebührt meinem Betreuer Herrn Dipl.-Ing. Philipp Hadl, der mir das in dieser Arbeit behandelte Thema vorgeschlagen hat und der mir in unzähligen Diskussionen immer mit Rat und Tat zur Seite stand. Weiters danke ich auch allen anderen Mitarbeitern des Instituts für Betonbau, welche mich durch viele anregende Gespräche unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt an dieser Stelle natürlich auch meiner Familie, allen voran meinen Eltern Roswitha und Erich, welche mir das Studium finanziell ermöglicht haben und mich auch in meinen sonstigen Entscheidungen immer unterstützt haben. Auch meinem Bruder Stefan, welcher mir immer zur Seite stand, sei hier gedankt.

Zu guter Letzt bedanke ich mich noch bei all meinen Freunden und Studienkollegen, die mich auf meinem bisherigen Lebensweg begleitet und unterstützt haben. Ein besonderer Dank gilt an dieser Stelle den Mitgliedern der „Gruppe 1“ (Christian, Gregor, Irene, Manuel, Martin, Matthias, Stefan) für eine Vielzahl an erlebnisreichen inner- und außeruniversitären Stunden.

## Kurzfassung

Faserbeton ist ein Baustoff, dessen Anwendungen aufgrund der großen Streuungen im Tragverhalten noch begrenzt sind. Das Einsatzgebiet des Faserbetons erstreckt sich derzeit von Fundamentplatten über Fertigteile bis hin zum Tunnelbau. Das Hauptanwendungsgebiet stellen derzeit allerdings Industriefußböden dar. Die großen Streuungen in den Materialkennwerten erschweren die Anwendung von Faserbeton insbesondere für Bauteile mit nennenswerten Beanspruchungen.

Um die Streuungen im Tragverhalten von Faserbeton reduzieren zu können, ist es notwendig, die Parameter, welche den größten Einfluss auf die Streuungen ausüben, festzustellen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Erstellung eines Modells zur Quantifizierung der streuungswirksamen Einflüsse.

Die zur Erstellung eines Modells notwendigen Grundlagen werden zu Beginn beschrieben. Das vorgestellte Modell, welches in MATLAB implementiert wurde, ermöglicht es, den Einfluss unterschiedlicher Streuungsparameter unabhängig voneinander zu quantifizieren. Weiters können auch die Überlagerungen der einzelnen Einflüsse simuliert werden. Die Verifizierung der Leistungsfähigkeit des Modells erfolgt durch Vergleiche mit an der TU Graz durchgeführten Versuchen.

Nach der Verifizierung des Modells wurde eine Parameterstudie durchgeführt, um die einzelnen Streuungseinflüsse aufzuschlüsseln. Die Ergebnisse werden ausgewertet und detailliert dargestellt.

In einem weiteren Schritt werden die Ergebnisse der Berechnungen dahingehend untersucht, dass mittels Fehlerfortpflanzungsgesetz ein Rechensystem entwickelt wurde, welches die Gesamtstreuungen des Faserbetons ohne aufwändige, rechenintensive Untersuchungen beschreibt.

Abschließend folgen eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf weiterführende Untersuchungen.

## **Abstract**

The applications of fiber reinforced concrete are currently still limited. The limitation depends on the high scattering in the post cracking tensile behaviour of fiber reinforced concrete. The applications of fiber reinforced concrete currently range from foundation slabs, precast concrete members to tunneling. The high scattering of the material properties of fiber reinforced concrete makes it difficult to use it for elements with considerable stresses.

To reduce this scattering, it is necessary to investigate which parameters have the biggest influence on the total scattering in the post cracking behaviour. Due to this fact, the goal of this master thesis is to develop a model which enables the description of the scattering influences of each parameter.

At first, the most important basics are described. They are necessary to create the model. The model is implemented in MATLAB and gives the possibility to quantify the influence of the scattering parameters. Furthermore, it is possible to simulate the interaction of different scattering parameters. To verify the performance of the model, the results of different computations have been compared with experimental tests carried out at Graz University of Technology.

After verification of the model, different results of the computation are shown. Therefore different parameters have been investigated. This is necessary to get the quantitative scattering amount for each parameter.

In the next step, the results of the computation are analyzed to create a mathematical correlation, based on the error propagation. This correlation is able to describe the total scattering without using computationally intensive analysis.

Finally, a summary of this master thesis and an outlook on prospective studies is given.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>1</b>
1.1	Ausgangslage und Motivation .....	1
1.2	Zielsetzung.....	1
<b>2</b>	<b>Faserbeton.....</b>	<b>2</b>
2.1	Allgemeines .....	2
2.2	Streuungen im Faserbeton .....	5
2.3	Modelle zur Ermittlung der Streuung im Nachrisszugtragverhalten .....	8
2.3.1	Modell nach Naaman [6].....	8
2.3.2	Allgemeines.....	8
<b>3</b>	<b>Fasern.....</b>	<b>9</b>
3.1	Allgemeines .....	9
3.2	Stahlfasern .....	9
3.2.1	Arten von Stahlfasern.....	10
3.2.2	Fasern im UHPFRC.....	11
3.2.3	Fasern im Normalbeton .....	11
3.3	Faserverteilung.....	12
3.4	Faserorientierung $\eta$ .....	12
3.4.1	Zusammenhang Standardabweichung – Einzelfaserorientierung.....	14
3.4.2	Zusammenhang Probekörpergeometrie – $\eta$ .....	16
<b>4</b>	<b>Theoretische Überlegungen zur Faserbetonstreuung.....</b>	<b>18</b>
4.1	Homogene Faserverteilung .....	18
4.2	Falsche Modelle zur Faserverteilung.....	20
4.2.1	Zweidimensionale Betrachtung .....	20
4.2.2	Pyramidenmodell nach [25].....	21
4.3	Streuungskonstante durch $\eta$ .....	22
<b>5</b>	<b>Modellbildung – Programm/ Modell „HM-SC“.....</b>	<b>23</b>
5.1	Allgemeines .....	23
5.2	Programmablaufplan.....	25
5.3	Ablaufschritte des Modells bei geraden Stahlfasern.....	26
5.4	Funktionen bei geraden Stahlfasern.....	27
5.4.1	Schritt 1: Berechnung der Variablen .....	27
5.4.2	Schritt 2: Verteilung der Faserschwerpunkte .....	28
5.4.3	Schritt 3: Ermittlung der den Riss beeinflussenden Schnitte.....	33

5.4.4	Schritt 4: Zuweisung der Faserorientierung .....	34
5.4.5	Schritt 5: Zuweisung der zugehörigen Verbundspannungen.....	36
5.4.6	Schritt 6: Ermittlung der Einzelfasertragfähigkeiten.....	38
5.4.7	Schritt 7: Ermittlung der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung.....	40
5.5	Funktionen bei Fasern mit Endhaken .....	42
5.5.1	Zuweisung der Einzelfasertragfähigkeiten .....	42
5.5.2	Ermittlung der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung .....	44
5.6	Ausgabe der Untersuchungsparameter .....	45
5.7	Streuungsparameter .....	47
5.8	Vergleich mit Versuchsergebnissen.....	47
5.9	Zusammenfassung „HM-SC“ .....	51
<b>6</b>	<b>Parameterstudie .....</b>	<b>52</b>
6.1	Allgemeines .....	52
6.2	Normalbeton .....	53
6.2.1	Poissonverteilung .....	53
6.2.2	Verteilung der Fasermenge – gerade Fasern .....	57
6.2.3	Verteilung der Fasermenge – Fasern mit Endhaken.....	63
6.3	UHPC.....	65
6.3.1	Poissonverteilung .....	65
6.3.2	Verteilung der Fasermenge.....	65
6.4	Vereinfachtes Modell (Fehlerfortpflanzung) .....	70
6.5	Wesentliche Ergebnisse .....	73
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>74</b>
	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>75</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>78</b>
	<b>Tabellenverzeichnis.....</b>	<b>81</b>
<b>A.</b>	<b>Anhang – Quellcode „HM-SC“ (gerade Fasern).....</b>	<b>82</b>

## Verwendete Symbole und Abkürzungen

$l_f$	Faserlänge
$d_f$	Faserdurchmesser
$M_f$	Fasermenge
$\eta$	Faserorientierungsbeiwert
$\lambda$	Verhältnis aus $l_f/d_f$
$l_e$	Einbindelänge
$w$	Rissweite
FiR	Fasern im Riss
FSP	Faserschwerpunkt
UHPC	Ultrahochfester Beton ( <b>U</b> ltra <b>H</b> igh <b>P</b> erformance <b>C</b> oncrete)
UHPFRC	Ultrahochfester faserverstärkter Beton ( <b>U</b> ltra <b>H</b> igh <b>P</b> erformance <b>F</b> iber <b>R</b> einforced <b>C</b> oncrete)
CV	Variationskoeffizient ( <b>C</b> oefficient of <b>V</b> ariation)



# 1 Einleitung

Faserbeton ist ein Baustoff, dessen Materialeigenschaften aufgrund unterschiedlichster Parameter großen Streuungen unterworfen sind. Diese Unsicherheiten im Tragverhalten führen dazu, dass sich das Einsatzgebiet von Faserbeton momentan auf Bauteile mit geringen Beanspruchungen, wie z.B. faserbewehrte Estriche oder auch auf Knotendetails zur Erhöhung der Duktilität von Betonbauteilen im Erdbebenfall beschränkt. Der Einfluss der Fasern auf die Zugtragfähigkeit des Betons ist sehr gering, bzw. vernachlässigbar klein. Die Aufgabe der Fasern besteht darin, die Zugtragfähigkeit nach der Rissbildung zu erhöhen und die Größe der auftretenden Risse zu minimieren.

## 1.1 Ausgangslage und Motivation

Aufgrund der eben genannten Problematik, ist die Streuung im Nachrisszugtragverhalten gerade Bestandteil von Untersuchungen am Institut für Betonbau der TU Graz. Es werden dabei die Einflüsse einzelner Parameter untersucht. Ziel ist es, die Größen der einzelnen Streuungseinflüsse zu quantifizieren. Zukünftig sollen die Annahmen, welche zur Erstellung des in dieser Arbeit entwickelten Modells getroffen wurden, mittels Versuchen verifiziert werden.

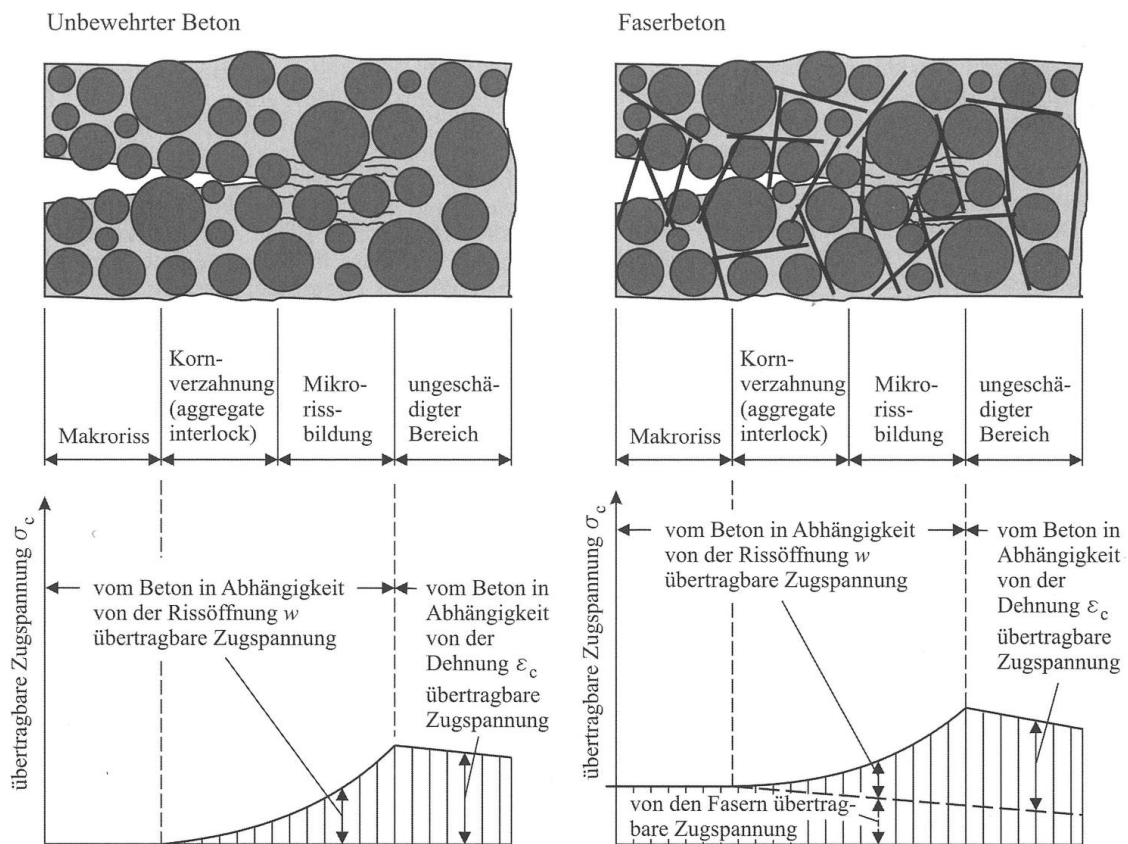
## 1.2 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Rechenmodell zu entwickeln, welches den Einfluss verschiedener Parameter auf die Streuung des Zugtragverhaltens von stahlfaserbewehrtem Beton quantifizieren kann. Mit diesem Modell sollen die Auswirkungen von Streuungen in der Faserverteilung und der Faserorientierung, sowie der Verbundspannung auf das Nachrisszugtragverhalten untersucht werden. Die Leistungsfähigkeit des Rechenmodells wird durch den Vergleich mit Versuchen verifiziert.

## 2 Faserbeton

### 2.1 Allgemeines

In unbewehrten Normalbetonen können nach erfolgter Rissbildung keine Zugkräfte mehr übertragen werden. Bei Faserbetonen werden durch die zugegebenen Fasern auch nach erfolgter Rissbildung Zugkräfte übertragen. Dieses Verhalten wird in **Bild 2.1** dargestellt.



**Bild 2.1** Unterschiede in der übertragbaren Zugspannung zwischen Normal- und Faserbeton [1]

Weitere Vorteile sind die Erhöhung des Verschleißwiderstandes und der Dichtigkeit von Betonbauteilen. Problematisch waren zu Beginn der Faserbetonentwicklung meist die Verarbeitbarkeit des Frischbetons bei erhöhter, zugegebener Fasermenge. Dies stellt inzwischen allerdings kein Problem mehr dar, da neue Faserzugabetechniken entwickelt wurden. Auch die Entwicklung von Fließmitteln hat positiven Einfluss auf die Verarbeitbarkeit von Faserbeton. [2]

Die Nachrisszugfestigkeit des Betons ist jene mechanische Eigenschaft, welche durch die Beimengung von Fasern am markantesten verbessert wird. Um die Nachrisszugfestigkeit von Faserbeton abschätzen zu können bietet sich Glg. ( 1 ) an, wie in [3] beschrieben wird. Diese Gleichung ist nur für gerade Fasern ohne Endhaken gültig. Hierbei wird über eine mittlere Einbindelänge der Fasern von  $l_f/4$  eine konstante Verbundspannung angenommen und dadurch die Nachrisszugfestigkeit  $f_{ct}$  des Faserbetons ermittelt. Der Wirksamkeitsfaktor  $g$  beschreibt hierbei die Faserwirksamkeit. Dieser wird meist vereinfachend als konstant angenommen.

- **Abschätzung der Nachrisszugfestigkeit (nur für gerade Fasern)**

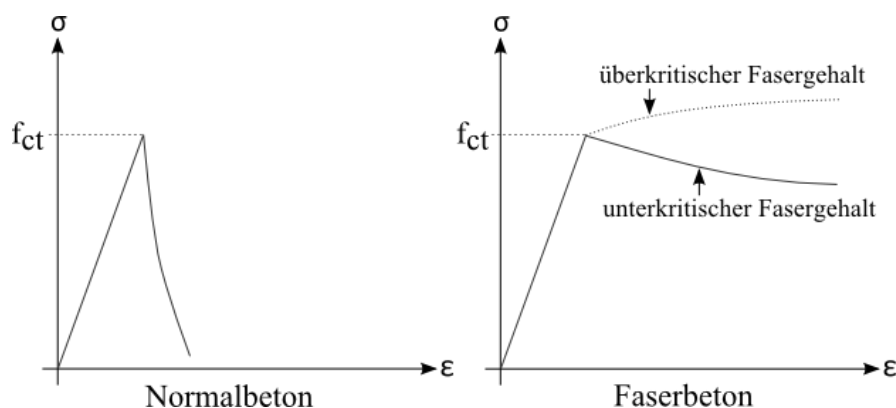
$$f_{ct} = \frac{l_f}{d_f} \cdot g \cdot \tau_f \cdot \eta \cdot \rho_f \quad (1)$$

$g$  ...Wirksamkeitsfaktor

$\tau_f$  ...mittlere Verbundspannung

$\rho_f$  ...Fasermenge

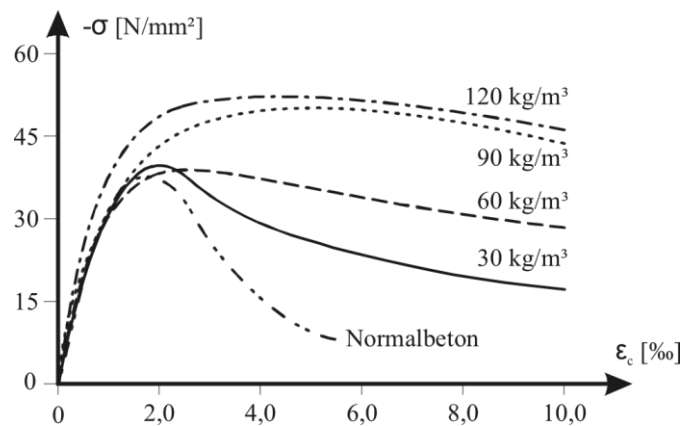
Wie **Bild 2.2** zu entnehmen ist, weist Normalbeton ein sehr sprödes Bruchverhalten auf, wohingegen Faserbeton (je nach Dosierung der Fasermenge) nach einem Spannungsabfall eine gewisse duktile Resttragfähigkeit im Nachrissbereich nutzen kann. Weiters ist zu erkennen, dass bei einem Anstieg der Festigkeit nach der Rissbildung von einem überkritischen Tragverhalten gesprochen wird. Fällt der Nachrissast ab, was in der Regel der Fall ist, wird dies als unterkritisches Tragverhalten bezeichnet. Die Art des Zugtragverhaltens hängt maßgeblich von der zugegebenen Fasermenge ab.



**Bild 2.2** Vergleich der Nachrisszugtragfähigkeit von Normal- und Faserbeton (idealisiert)

Die restlichen Eigenschaften, verglichen mit einem festigkeitstechnisch gleichwertigen Normalbeton, erfahren durch das Beimengen von Fasern nur marginale Veränderungen. Einzig bei stark steigenden Fasermengen (für Normalbeton eher selten eingesetzte Beigabemengen von größer  $100 \text{ kg/m}^3$  (1,27 Vol.-%); übliche Fasermengen im Normalbeton bis ca.  $60 \text{ kg/m}^3$ ) können um bis zu 15 % höhere Druckfestigkeiten erzielt werden. Diese soeben erwähnte Erhöhung der Traglast wird in der Bemess-

sung vernachlässigt. Den größten Unterschied im Verhalten unter Druckbeanspruchung durch die Beigabe von Fasern stellt das in **Bild 2.3** dargestellte duktile Nachbruchverhalten dar. [2]



**Bild 2.3** Last- Verformungskurven von Standardbeton und Stahlfaserbeton im Vergleich [2]

In Bezug auf die Rissbildung wird bei faserverstärktem Stahlbeton, im Vergleich zu einem gleichwertigen reinen Stahlbeton, auch eine Änderung des Rissbildes erreicht. Die Einzelrissweite wird hierbei merklich reduziert. Auch die Abstände zwischen den einzelnen Rissen werden verringert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Zugspannungen, welche in den gerissenen Bereichen übertragen werden, neben der Rissoberfläche in Form von Verbundspannungen wieder in den Beton eingeleitet werden. [2]

Weitere mögliche Verbesserungen der Bauteileigenschaften durch den Einsatz von Faserbeton sind etwa die Verhinderung bzw. Verzögerung der Makrorissbildung und die Verbesserung des Nachbruchverhaltens des Betons.

Für weiterführende, vertiefende Erklärungen zur Änderung der Betoneigenschaften infolge der Faserzugabe wird an dieser Stelle auf die umfangreichen Erklärungen in [1] oder [2] verwiesen.

Es darf an dieser Stelle allerdings nicht unerwähnt bleiben, dass aufgrund der großen Streuungen im Nachrisszugtragverhalten von Faserbeton dessen Einsatzgebiete, wie in Kapitel 1 beschrieben wurde, noch begrenzt sind. Aus den großen Streuungen resultierend, ergeben sich für Faserbeton geringe charakteristische Festigkeitswerte, welche durch entsprechende Sicherheitsbeiwerte weiter abzumindern sind, um Bemessungswerte zu erlangen.

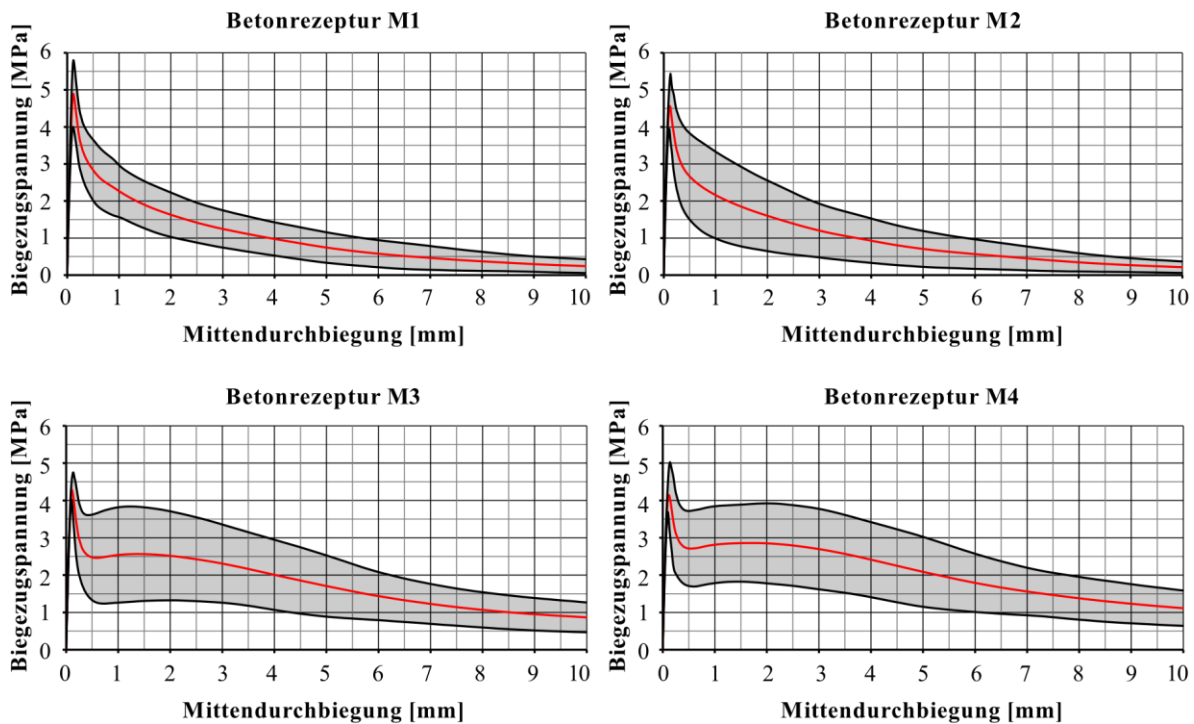
## 2.2 Streuungen im Faserbeton

Im nachfolgenden Abschnitt wird anhand von an der TU Graz von Johannes Gröger durchgeführten (unveröffentlichten) Versuchen das Streuungsverhalten von Faserbeton aufgezeigt. In den Versuchsreihen wurden 48 Biegebalken mit 0,15/ 0,15/ 0,70 m aus Normalbeton hergestellt und untersucht. Die Betonrezepturen sind in **Tabelle 2.1** dargestellt. Die Versuchsdurchführung erfolgte über 4 Punkt Biegezugversuche nach DAfStb – Richtlinie Stahlfaserbeton [4]. Für jede der 4 Normalbetonrezepturen wurden 12 Probekörper an 4 verschiedenen Tagen hergestellt. Die verwendeten Fasern mit Endhaken weisen eine Zugfestigkeit von 1100 MPa auf. Die Faserlänge beträgt 25,0 mm oder 50,0 mm. Der Faserdurchmesser beträgt 0,60 mm.

**Tabelle 2.1** Von Gröger verwendete Betonrezepturen - NORMALBETON

		M1	M2	M3	M4
CEM I 42,5 R	[kg/m <sup>3</sup> ]	300	300	300	300
Flugasche	[kg/m <sup>3</sup> ]	75	75	75	75
Wasser	[kg/m <sup>3</sup> ]	174	174	174	174
Sand 0/4	[kg/m <sup>3</sup> ]	708	708	708	708
Kies 4/8	[kg/m <sup>3</sup> ]	359	359	359	359
Schotter 8/16	[kg/m <sup>3</sup> ]	738	738	738	738
Fließmittel	[kg/m <sup>3</sup> ]	4,9	8,7	4,9	8,7
Stahlfaser WLS-25,0/0,6/H	[kg/m <sup>3</sup> ]	30,0	30,0		
Stahlfaser WLS-50,0/0,6/H	[kg/m <sup>3</sup> ]			30,0	30,0
Frischbetonkonsistenz		F4	F6	F4	F6
Ausbreitmaß		49 – 55	63 – 70	49 – 55	63 – 70

Die graphischen Versuchsauswertungen für die Normalbetonproben sind **Bild 2.4** zu entnehmen. Rot dargestellt sind jeweils die Mittelwerte der Versuchsergebnisse. Die Streubereiche (Festlegung über 5 %- und 95 % Quantilwert) sind grau hinterlegt. Bei allen Normalbetonproben ist ein unterkritisches Tragverhalten (siehe **Bild 2.2**) zu erkennen.



**Bild 2.4** Faserbetonstreuungen in den Versuchen von Gröger (Normalbeton M1 – M4)

Die beträchtliche Größe der Streubereiche ist in den Graphiken gut erkennbar. Diese Streuungen sind für die derzeit noch begrenzten Einsatzgebiete von Faserbeton hauptverantwortlich. Die charakteristischen Werte der Nachrissbiegezugtragfähigkeit sind sehr gering.

Zusätzlich zu den Versuchen mit Normalbetonprobekörpern wurden von Gröger auch Versuche mit UHPFRC (**U**ltra **H**igh **P**erformance **F**iber **R**einforced **C**oncrete) durchgeführt. Hierfür wurden für jede Betonsorte 4 mal 3 Probekörper betonierte. Die verwendeten Betonrezepturen sind **Tabelle 2.2** zu entnehmen. Die genaue Versuchsdurchführung wird in [5] erläutert. Verwendet wurden gerade Fasern mit einer Zugfestigkeit von 2100 MPa. Die eingesetzten Fasern hatten eine Faserlänge von 6,0 mm und 12,7 mm. Der Faserdurchmesser betrug bei beiden Fasern 0,15 mm. Die Faserdosierung wurde mit 0,75 Vol.-% und 1,50 Vol.-% festgelegt.

Die in **Bild 2.5** dargestellten Streuungen sind teilweise größer, als jene im Normalbeton. Da hier größere Fasergehalte verwendet werden als im Normalbeton, wären eigentlich kleinere Streuungen zu erwarten gewesen. Diese hohen Streuungen sind vermutlich auf eine schlechte Faserverteilung zurückzuführen.

Im Gegensatz zum Normalbeton, ist bei den UHPFRC Proben ein überkritisches Tragverhalten im Biegezugversuch zu erkennen. Dies ist auf die höheren Fasergehalte zurückzuführen.

Tabelle 2.2 Von Gröger verwendete Betonrezepturen - UHPFRC

		U1	U2	U3	U4
CEM I 42,5 R - HS	[kg/m <sup>3</sup> ]	725	725	725	725
Mikrosilica	[kg/m <sup>3</sup> ]	131	131	131	131
Wasser	[kg/m <sup>3</sup> ]	159	159	159	159
Quarzmehl	[kg/m <sup>3</sup> ]	391	391	391	391
Quarzsand	[kg/m <sup>3</sup> ]	902	882	902	882
Fließmittel	[kg/m <sup>3</sup> ]	32	32	32	32
Stahlfaser 6,0/0,15/S	[kg/m <sup>3</sup> ]	58,5	117,0		
Stahlfaser 12,7/0,15/S	[kg/m <sup>3</sup> ]			58,5	117,0

Wie zuvor, wird auch in den nachfolgenden Graphiken der Mittelwert jeweils rot dargestellt und der Streubereich grau hervorgehoben. In den nachfolgenden Darstellungen ist jedoch zu beachten, dass die aufnehmbaren Biegezugspannungen auf 25 MPa und nicht auf 6 MPa skaliert sind.

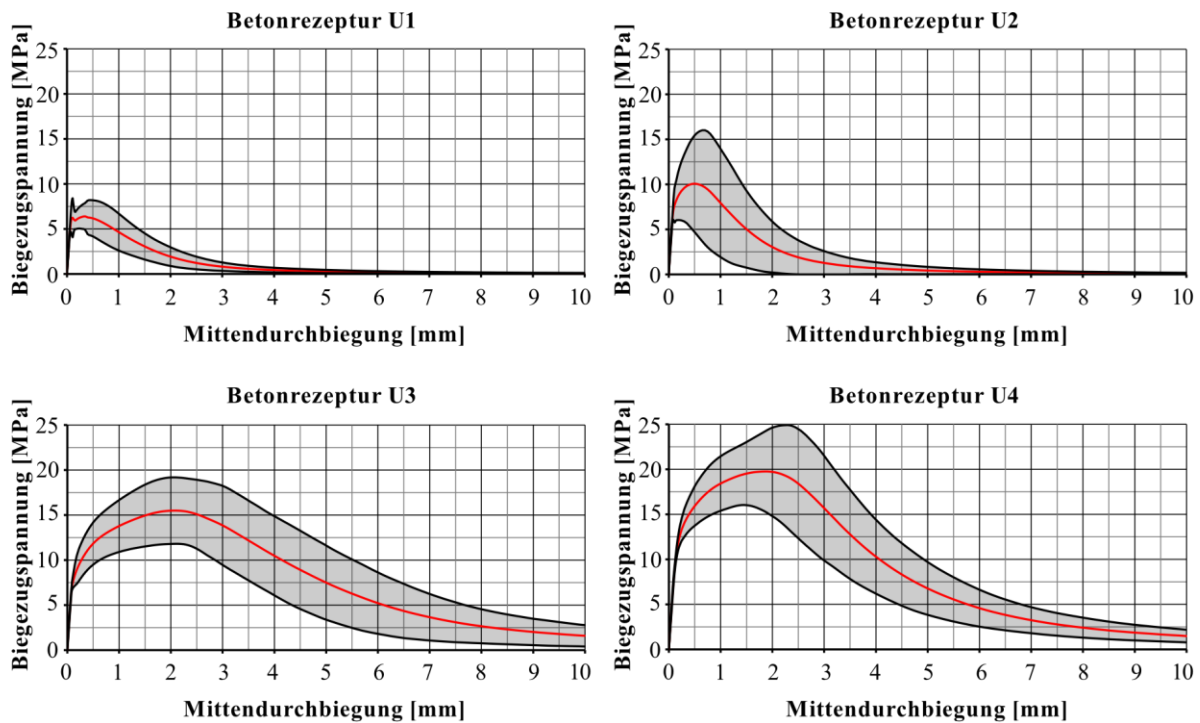


Bild 2.5 Faserbetonstreuungen in den Versuchen von Gröger (UHPFRC U1 – U4)

## 2.3 Modelle zur Ermittlung der Streuung im Nachrisszugtragverhalten

### 2.3.1 Modell nach Naaman [6]

Naaman beschreibt in seinem Modell eine Möglichkeit, die Zugfestigkeit und die Streuungen von Faserbeton ermitteln zu können. Grundlage für sein Modell sind Auszugversuche von Stahlfasern. Dadurch versucht er in seinem statistischen Modell das Verhalten unterschiedlicher Faserbetonprobekörper darzulegen.

Ausgangsbasis für die Verteilung der Fasern ist der Mittelwert der Fasern in einem „Einheitsvolumen“. Mithilfe dieses Mittelwertes und der in **Abschnitt 5.4** noch genauer erläuterten Poissonverteilung ermittelt er die Wahrscheinlichkeit genau  $q$  Fasern in einem Einheitsvolumen anzutreffen.

Die so im Einheitsvolumen ermittelte Anzahl von Fasern wird dann, mit Hilfe von statistischen Erwartungswerten für die Anzahl der Fasern in der Rissfläche und Beziehungen für die Orientierung der Fasern, auf die Rissfläche umgerechnet.

Mittels Faserauszugsmodellen ist es ihm möglich, erwartete Faserauszugskräfte zu definieren. Die Zugfestigkeit des Gesamtquerschnittes ermittelt Naaman anschließend unter Anwendung der „weakest - link - theory“ (siehe [6] und [7]), welche besagt, dass immer das schwächste Glied in einem Querschnitt versagt.

### 2.3.2 Allgemeines

Eine ausführliche Literaturstudie hat ergeben, dass sich sonstige Arbeiten nur am Rande mit den Streuungen im Nachrisszugtragverhalten von Faserbeton beschäftigen.

Demgegenüber wurde eine Vielzahl an Arbeiten verfasst, welche sich mit dem Tragverhalten von Stahlfaserbeton beschäftigen. Auch Modelle zur Beschreibung des Einzelfaserausuges wurden entwickelt. Hierzu sei an dieser Stelle auf die in [2], [6], [8], [9], [10] und [11] beschriebenen Arbeiten verwiesen.



## 3 Fasern

### 3.1 Allgemeines

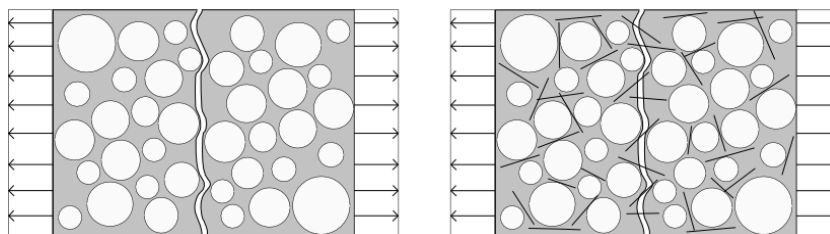
Es gibt verschiedenste Arten und Anwendungsgebiete von Fasern im Betonbau. Diese erstrecken sich von Stahlfasern zur Verbesserung der mechanischen Eigenschaften von Beton, bis hin zu Kunststofffasern, welche z.B. eingesetzt werden, um brandbeständigere Betone zu erzeugen. Alle eingesetzten Faserwerkstoffe sind auf deren Beständigkeit im alkalischen Milieu des Betons zu untersuchen. In [1] wird weiters erläutert, dass durch die Zugabe von Fasern zum Beton, dessen Eigenschaften weder im Frischbetonzustand, noch im festen Zustand, negativ beeinflusst werden dürfen. Essentiell ist auch, dass die eingesetzten Fasern eine ausreichende Biegesteifigkeit aufweisen, um beim Mischvorgang nicht zerstört zu werden.

Da sich die vorliegende Arbeit auf Stahlfasern beschränkt, wird im weiteren Verlauf nur auf deren Eigenschaften genauer eingegangen.

### 3.2 Stahlfasern

Stahlfasern werden, wie bereits mehrfach erwähnt, dazu eingesetzt, um die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffes Beton zu verbessern. Wie in **Bild 3.1** zu erkennen ist, kann durch die Zugabe von Fasern zur herkömmlichen Betonmatrix, eine rissüberbrückende Tragwirkung erreicht werden.

Weiters sind Stahlfasern nicht brennbar und im alkalischen Milieu des Betons ausreichend vor Korrosion geschützt. [1]



**Bild 3.1** Rissüberbrückende Tragwirkung durch Faserzugabe nach [12]

Als Stahlfaserwerkstoff werden meist hochfeste Stähle mit Zugfestigkeiten zwischen 1000 MPa und 2600 MPa eingesetzt.

### 3.2.1 Arten von Stahlfasern

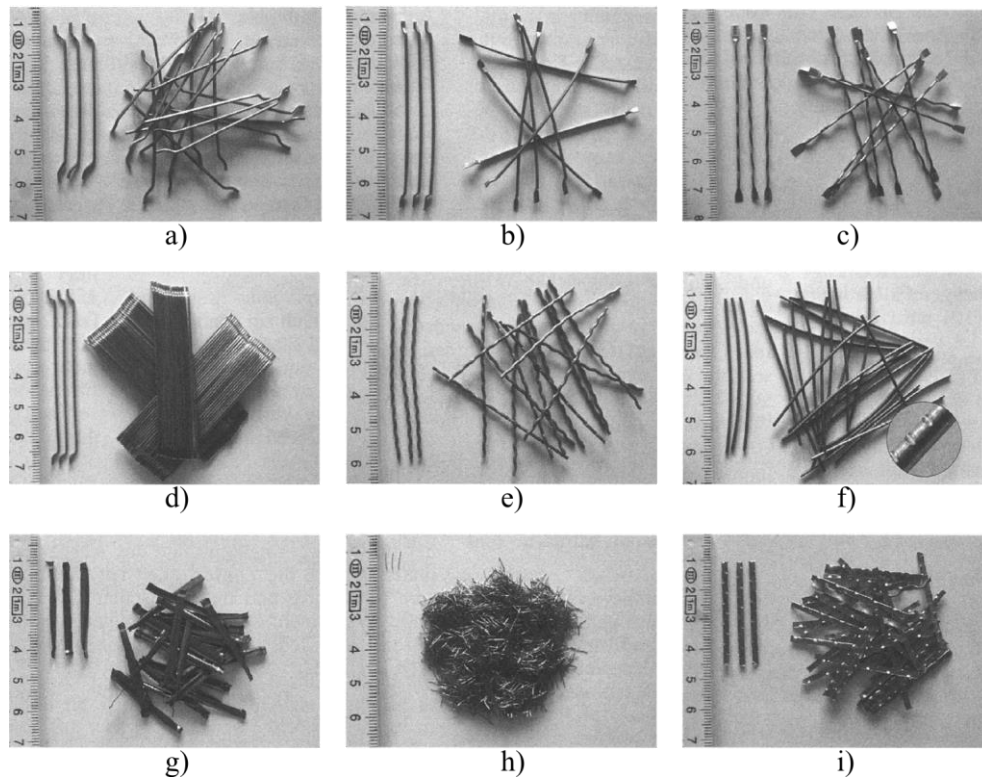


Bild 3.2 Faserarten [1]

Nachfolgend die Bildbeschreibung zu **Bild 3.2**:

- a) Gerade Stahldrahtfaser mit angebogenem Endhaken und glatter Oberfläche
- b) Gerade Stahldrahtfaser mit abgeplattetem Endhaken und glatter Oberfläche
- c) Gewellte Stahldrahtfaser mit abgeplattetem Endhaken und glatter Oberfläche
- d) Gerade Stahldrahtfaser mit angebogenem Endhaken und glatter Oberfläche, verklebt
- e) Gewellte Stahldrahtfaser mit glatter Oberfläche
- f) Gerade Stahldrahtfaser mit profilierter Oberfläche
- g) Spannfaser
- h) Gerade Mikrofaser mit glatter Oberfläche
- i) Blechfaser mit profilierter Oberfläche

Nicht dargestellt sind gerade Stahlfasern mit glatter Oberfläche.

Die in **Bild 3.2** dargestellten Fasern stellen eine Auswahl verschiedener metallischer Faserformen dar. Während, die in h) abgebildeten Mikrofasern meist zur Herstellung von UHPFRC eingesetzt werden, kommen die in d) dargestellten Fasern mit Endhaken hauptsächlich bei Normalbetonen zur Anwen-

dung. Diese unterschiedlichen Einsatzgebiete sind bedingt durch die unterschiedlichen Anforderungen an die Fasergeometrie und deren Versagensmechanismen.

### 3.2.2 Fasern im UHPFRC

Aufgrund der Matrixstruktur von UHPFRC werden hier im Normalfall glatte Mikrofasern eingesetzt. Dies ist dadurch möglich, da in hochfesten Betonen aufgrund der feinen Kornstruktur relativ hohe Verbundspannungswerte zwischen Faser und Matrix erzielt werden können. Die Verbundspannungswerte können bei bis zu 20 MPa und mehr liegen. Im Gegensatz zum Normalbeton sind die Faserdosierungen im UHPFRC wesentlich höher. Die Dosierungen können hier bis zu 3,0 Vol.-% betragen. Bei Normalbeton liegt der Wert der beigegebenen Fasermenge in der Regel zwischen 25 kg/m<sup>3</sup> und 60 kg/m<sup>3</sup>.

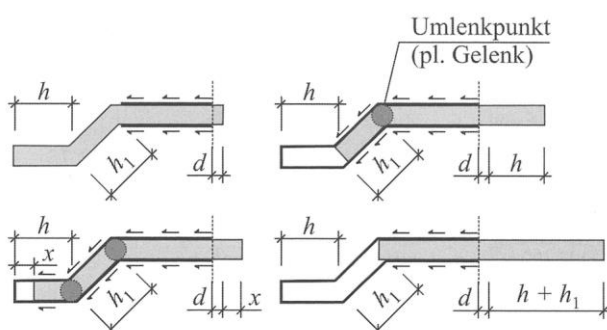
Die Versagensmechanismen bei geraden Stahlfasern im Beton beschränken sich auf den Faserauszug und das Faserreißen. Das Reißen der Fasern ist sowohl abhängig von der eingesetzten Stahlgüte, als auch von der übertragbaren Verbundspannung zwischen Betonmatrix und Faser. Bei hohen Verbundspannungen besteht die Möglichkeit, dass vor einem etwaigen Faserauszug die Zugfestigkeit der Stahlfaser überschritten wird und diese dadurch reißt.

Die übertragbare Verbundspannung ist wiederum abhängig von der in 3.4 beschriebenen Faserorientierung  $\eta$  der Einzelfasern. Bei zu niedrigen Faserorientierungen, also bei zu steil stehenden Fasern, besteht die Möglichkeit, dass die Betonmatrix an der Rissoberfläche abzuplatzen beginnt.

### 3.2.3 Fasern im Normalbeton

Im Normalbeton werden meist Fasern mit Endhaken eingesetzt. Dies ist durch die grobe Kornstruktur des Normalbetons bedingt. Der Vorteil der Fasern mit Endhaken liegt darin, dass die Einbindelänge keine entscheidende Rolle bei der Kraftübertragung über einen Riss einnimmt.

Durch die spezielle Fasergeometrie ist es ausreichend, wenn der Endhaken weit genug in der Betonmatrix eingebunden ist. Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen glatten Stahlfasern, sind hier zwei andere Versagensmechanismen von entscheidender Bedeutung.

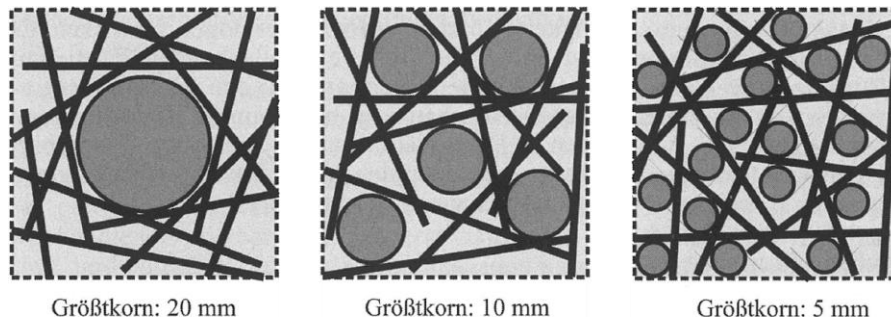


**Bild 3.3** Versagensmechanismus von Endhaken [1]

Bei einer zu kurzen Verankerung des Endhakens, besteht die Gefahr des Ausbrechens der Betonmatrix. Wenn eine ausreichende Verankerung sichergestellt wird, bilden sich, wie in **Bild 3.3** ersichtlich, Fließgelenke an den Umlenkestellen der Endhaken. Dadurch wird die Kraftübertragung über den Riss weiterhin gewährleistet. Nach dem Ausfall des Endhakens wird die Kraft über den Verbund übertragen.

### 3.3 Faserverteilung

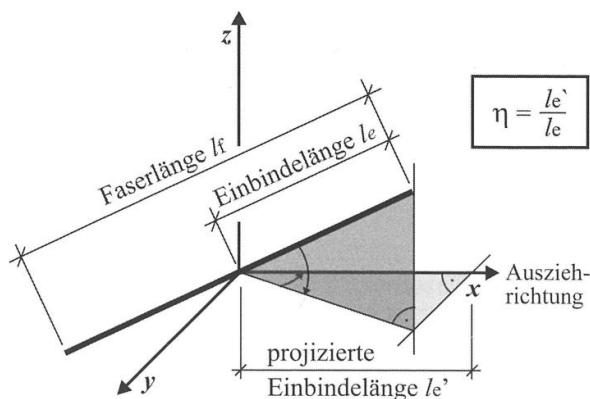
Die Verteilung der einzelnen Fasern in der Betonmatrix ist maßgeblich abhängig von der Art der Faserzugabe, der Mischdauer und dem Größtkorndurchmesser des Betons.



**Bild 3.4** Einfluss des Größtkorndurchmessers auf die Faserverteilung und deren Orientierung [1]

Die Verteilung der Fasern in der Betonmatrix ist insofern ein wichtiger Parameter, da es auch die Anzahl der Fasern im Riss beeinflusst. Dadurch hat sie direkte Auswirkungen auf die Nachrisszugfestigkeit des Betons. Auf die Faserverteilung wird in Kapitel 4 genauer eingegangen.

### 3.4 Faserorientierung $\eta$



**Bild 3.5** Definition der Faserorientierung  $\eta$  [1]

Der Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  wird, wie in **Bild 3.5** dargestellt, als Mittelwert des Verhältnisses aller in Richtung der Zugspannungen projizierten Faserlängen zur tatsächlichen Faserlänge festgelegt. [13]

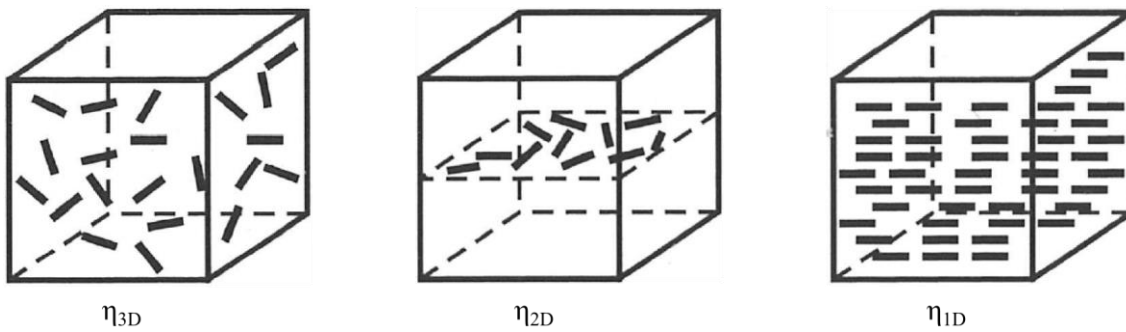
$$\eta = \frac{l_e'}{l_e} \quad (2)$$

$l_e'$  ...projizierte Einbindelänge

$l_e$  ...Einbindelänge

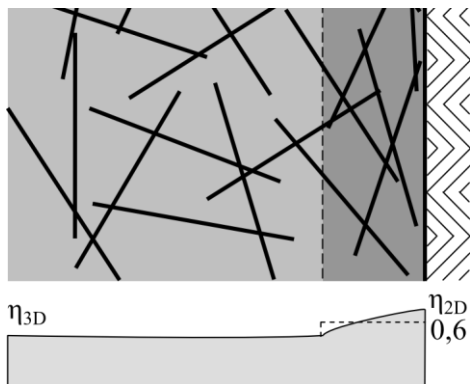
Die Festlegung der Faserorientierung ist von großer Bedeutung, da sie die Zugtragfähigkeit des Betons in der Nachrissbildung maßgeblich beeinflusst.

Eine ideale Orientierung wäre erreicht, wenn alle Fasern in Beanspruchungsrichtung ausgerichtet sind. Dies entspricht einem Orientierungsbeiwert  $\eta$  von 1,0. Man spricht in diesem Fall auch von einer ein-dimensionalen Orientierung. Dies ist jedoch aufgrund der Inhomogenitäten des Werkstoffes Beton, der Faserzugabe und anderen Einflussfaktoren nicht erreichbar.


**Bild 3.6** Faserorientierungen nach [1]

- 3D Orientierung: 0,500 lt. [9]
- 2D Orientierung: 0,637 lt. [9]
- 1D Orientierung: 1,000 lt. [9]

Einen wichtigen Aspekt bei der Orientierung der Fasern stellt der sogenannte Randeffect dar. Dieser beschreibt, dass während Fasern im Kernbereich eines Betonvolumens dazu tendieren sich dreidimensional zu orientieren, Fasern in den Randbereichen des Betonvolumens danach streben, sich zweidimensional auszurichten.



Diese zweidimensionale Orientierung begründet sich durch die Begrenzung des Betons durch Schalflächen, oder durch das Abziehen der Betonoberfläche. Behloul legt in [14] den Bereich, in welchem der Randeffect zu tragen kommt mit  $l_f/2$  fest.

Der Einfluss des Randeffectes bewirkt besonders bei kleinen Probekörpergeometrien starke Änderungen der mittleren Faserorientierung im Gesamtvolumen.

**Bild 3.7** Faserorientierungen an Grenzflächen (Randeffect) nach [9]

Allgemein stellt die Faserorientierung neben der Faserverteilung einen der am stärksten streuenden Parameter im Faserbeton dar.

Untersuchungen der Faserorientierung können, wie in [15] beschrieben, mittels optoanalytischer Verfahren oder mittels Computertomographie (siehe [16]) durchgeführt werden. Weitere Methoden werden auch in [17] gegenübergestellt. Bei der Faserorientierung  $\eta$  ist zu beachten, dass der Faserorientierungsbeiwert im Volumen  $\eta_v$  nicht jenem der Rissfläche entspricht ( $\eta_s$ ). Dieser Umstand ist darauf zurückzuführen, dass Fasern mit einem geringeren  $\eta$  – Wert (steilere Einbindung) eine geringere Wahrscheinlichkeit aufweisen, den Riss zu kreuzen. Als Resultat dessen, ist  $\eta_s$  in jedem Fall höher als  $\eta_v$ . Bei einem Faserorientierungsbeiwert im Volumen von beispielsweise 0,500, ergibt sich eine im Riss tendenziell höhere Orientierung von größer 0,500. Ein daraus resultierender Aspekt ist,

dass in Glg. ( 1 ) ein höheres  $\eta$  angesetzt werden könnte, wodurch wiederum die Nachrisszugtragfähigkeit rechnerisch erhöht wird, was zu falschen Ergebnissen und zu einer Überschätzung des Tragverhaltens führt.

Eine Möglichkeit aus der mittleren Faserorientierung im Riss auf die tatsächliche Faserorientierung im Volumen rückschließen zu können, bietet die Glg ( 3 ).

- **Rückrechnung auf die Faserorientierung im Volumen [18]**

$$\eta_v = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\eta_s}} \quad (3)$$

Um die eben angeführte Gleichung anwenden zu können, wird ein Betonvolumen mit einer Tiefe von  $l_f$  angenommen. Es wird weiters davon ausgegangen, dass die Fasern in diesem Volumen homogen verteilt sind.

### 3.4.1 Zusammenhang Standardabweichung – Einzelfaserorientierung

Zur Erstellung eines Modells, welches es ermöglicht, die Streuungen im Nachrisszugtragverhalten zu quantifizieren, ist es notwendig, eine Beziehung zwischen dem Mittelwert der Faserorientierung im Volumen, mit der Einzelfaserorientierung über eine Standardabweichung festzulegen. Um diesen Zusammenhang abbilden zu können, wurden bereits mehrere Untersuchungen durchgeführt.

In [19] wird die Beziehung zwischen Variationskoeffizient und  $\eta_v$  als linear festgelegt und in **Bild 3.9**, auf Versuchen basierend, dargestellt. In [3] wird jedoch darauf hingewiesen, dass diese Beziehung nur unter gewissen Annahmen Gültigkeit besitzt. Aus diesem Grund wird von Hadl in [3] eine, auf Versuchen und theoretischen Überlegungen aufbauende, weitere Beziehung zwischen dem Mittelwert der Faserorientierung im Volumen und einer Standardabweichung für die Einzelfaserorientierung vorgeschlagen. Dieser Vorschlag ist auch Grundlage für das in Kapitel 5 beschriebene Modell.

Aus der Standardabweichung  $\sigma$  ist es möglich, den benötigten Variationskoeffizienten CV zu errechnen, welcher als Eingangswert für das Rechenmodell dient.

- **Variationskoeffizient**

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (4)$$

$\sigma$  ...Standardabweichung

$\mu$  ...Mittelwert

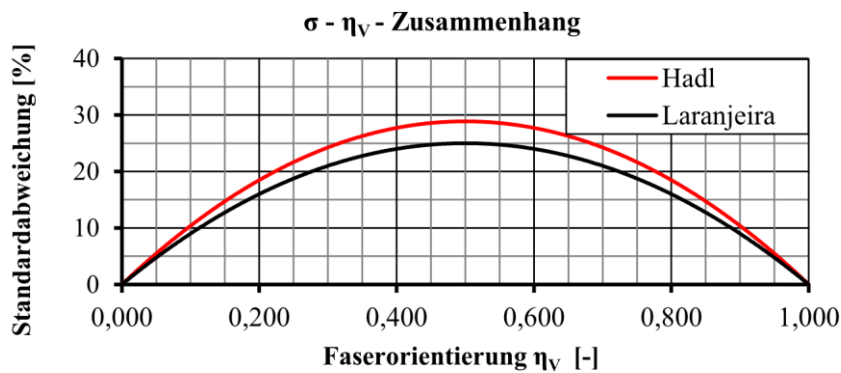
- $\sigma - \eta_V$  – Zusammenhang nach Laranjeira [19]

$$\sigma_{\eta_{Vol}} = \eta_V \cdot (1 - \eta_V) \quad (5)$$

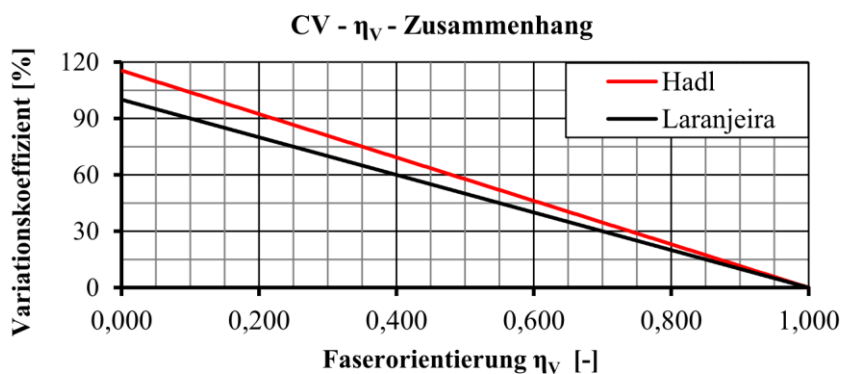
- $\sigma - \eta_{Vol}$  – Zusammenhang nach Hadl [3]

$$\sigma_{\eta_{Vol}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \eta_V \cdot (1 - \eta_V) \quad (6)$$

In **Bild 3.9** werden die unterschiedlichen Ansätze für den Zusammenhang zwischen der Einzelfaserorientierung im Volumen und dem zugehörigen Variationskoeffizienten von Laranjeira und Hadl gegenübergestellt. Erkennbar ist, dass Hadl von wesentlich größeren Streuungen bei geringeren Faserorientierungsbeiwerten ausgeht als Laranjeira.



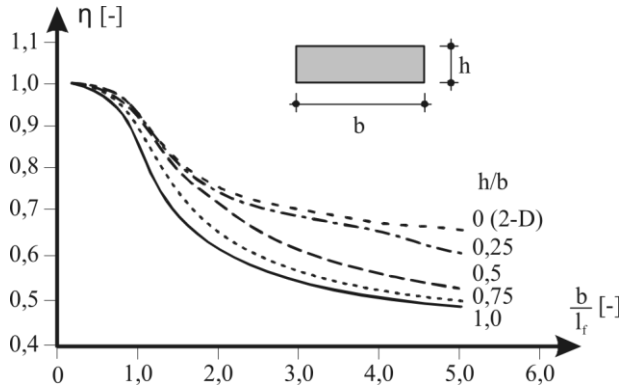
**Bild 3.8**  $\sigma - \eta_V$  – Zusammenhang nach [3] und [19]



**Bild 3.9** CV –  $\eta_V$  – Zusammenhang nach [3] und [19]

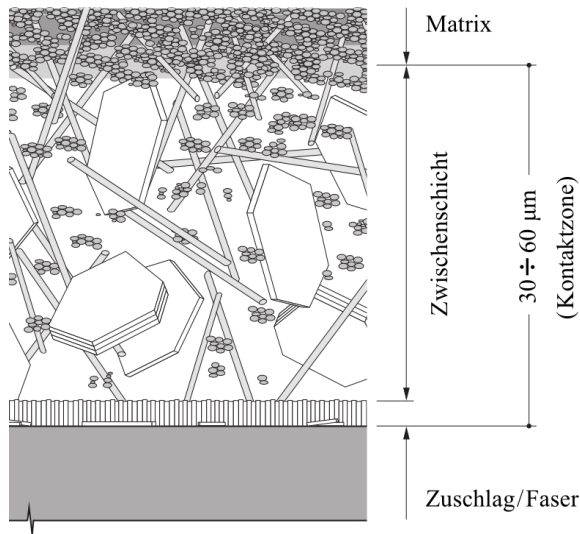
Der hier dargestellte Zusammenhang kann aber nicht für Versuchsnachrechnungen verwendet werden. Die Zusammenhänge nach Hadl oder Laranjeira bieten jedoch gute Näherungen an. Um Vergleichsrechnungen mit Einzelversuchen durchführen zu können, ist es notwendig, die Standardabweichungen der Einzelfaserorientierungen versuchstechnisch festzustellen.

### 3.4.2 Zusammenhang Probekörpergeometrie – $\eta$



**Bild 3.10** Zusammenhang Probekörpergeometrie –  $\eta$  [2]

Die Abmessungen des betrachteten Probekörpers haben einen beträchtlichen Einfluss auf die Faserorientierung. Dies ist im weitesten Sinne auch auf den, zuvor bereits erläuterten, Randeffect zurückzuführen. Bei kleineren Probekörpern liegt die mittlere Faserorientierung zwischen zwei- und dreidimensionaler Orientierung. Die Änderung der Faserorientierung mit zunehmender Bauteilgröße wird in **Bild 3.10** dargestellt.



**Bild 3.11** Kontaktzone zwischen Faser und Matrix [8]

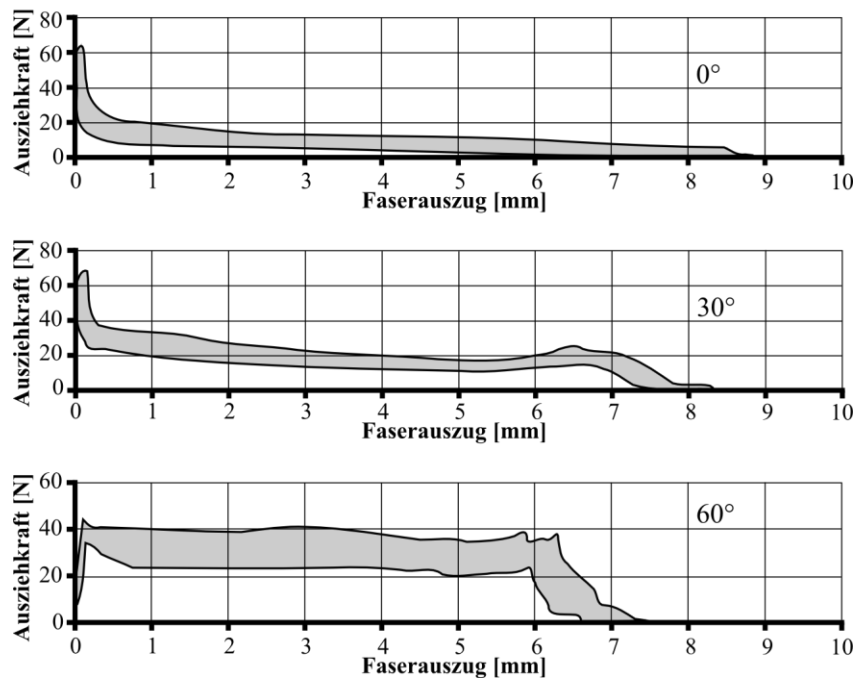
Bei der Untersuchung der maximal übertragbaren Verbundspannungen über Einzelfasern, kommt es häufig zu beträchtlichen Streuungen. Der Verbund zwischen Faser und Matrix wird stark von der die Faser umschließenden Schicht beeinflusst. In **Bild 3.11** wird die Kontaktzone nach Rehm und Zimbelmann schematisch dargestellt. [8]

Ausziehversuche werden für unterschiedliche Einbindelängen und Faserneigungen durchgeführt. Hierbei wird eine Einzelfaser entsprechend der Vorgabe (durch Einbindelänge und Faserneigung) in einer Zement- oder Betonmatrix einge-

legt und nach ausreichender Erhärtung der Matrix einem Ausziehversuch unterzogen. Untersuchungen des Einzelfaserauszeuges, werden unter anderem in [11], [20] und [21] beschrieben.

Die Einzelwerte der Versuchsergebnisse streuen in großem Maße. Es ist anzunehmen, dass ein beträchtlicher Anteil der auftretenden Streuungen aus dem jeweiligen Versuchsaufbau resultiert. Dies wird insbesondere durch die Zunahme der Streuungen bei größerer Faserneigung verdeutlicht (siehe **Bild 3.12**).





**Bild 3.12** Versuchsauswertung für Fasern unter einer Neigung von 0°, 30° und 60° nach Leung [21]

## 4 Theoretische Überlegungen zur Faserbetonstreuung

Die Reduktion der Streuungen im Tragverhalten von Faserbeton setzt das Wissen voraus, welche Streuungsanteile beeinflussbar bzw. reduzierbar sind und ob es eine Art Urstreuungskonstante gibt. Als Urstreuung wird eine nicht beeinflussbare Streuung bezeichnet, die bei einer homogenen Faser-  
verteilung zufolge der nicht unendlichen Faserlänge auftritt.

### 4.1 Homogene Faserverteilung

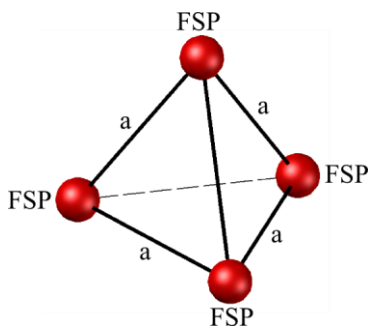


Bild 4.1 Tetraeder

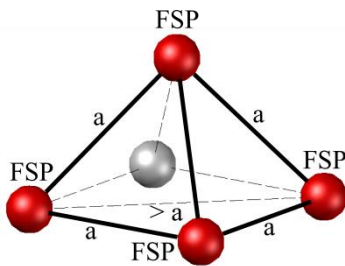


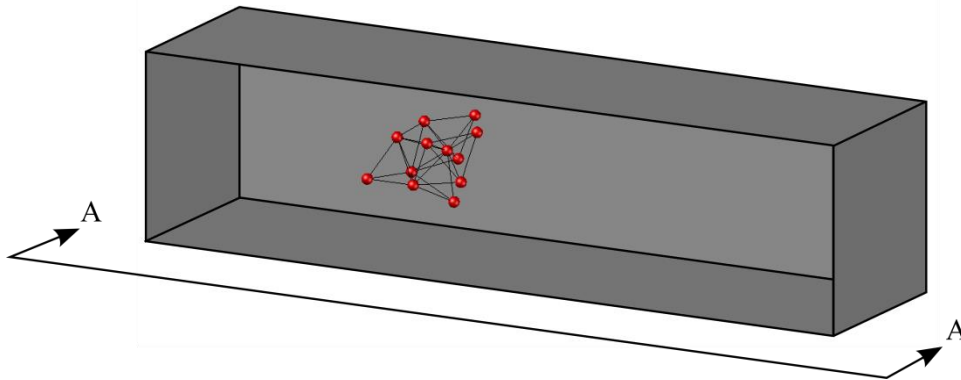
Bild 4.2 Pyramide

Unter Faserverteilung wird die zahlenmäßige Verteilung der Fasern innerhalb eines Volumens eines Bauteils verstanden. Eine homogene Faserverteilung bedeutet, dass die Faseranzahl je Volumeneinheit unabhängig von der Orientierung für jeden Bereich des Bauteils gleich ist (siehe [22] und [23]). Bei der idealen homogenen Faserverteilung ist der Abstand  $a$  zwischen den Faserschwerpunkten (FSP) immer gleich groß. Die einzige geometrische Form, welche diese Bedingung erfüllt, ist ein Tetraeder (siehe **Bild 4.1**).

Eine homogene Faserverteilung ist auch durch die Anordnung von Tetraedern nur bedingt möglich, da die maximal erreichbare Packungsdichte bei rund 80 % liegt [24]. Es ist nicht möglich unendlich viele Tetraeder bündig aneinanderzureihen. Ab einer größeren Anzahl an Elementen gibt es Zwischenräume, sodass der Abstand der Faserschwerpunkte  $a$  nicht mehr konstant ist. Eine Packungsdichte von 100 % ist demnach nicht erreichbar. Dennoch bietet der Tetraeder die einzige Möglichkeit näherungsweise eine homogene Faserverteilung darzustellen.

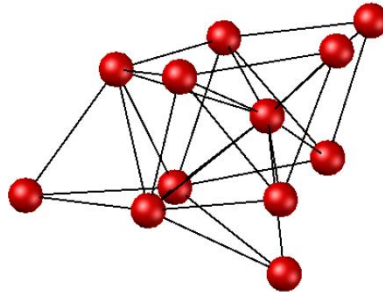
Die nachfolgenden Darstellungen zeigen, dass es bei der Annahme einer homogenen Faserverteilung keine Urstreuung gibt. Der Abstand zwischen den Faserschwerpunkten ist immer gleich groß. Wie erwähnt ist der Tetraeder die einzige geometrische Form die eine homogene Faserverteilung ermöglicht, auch wenn das Modell nicht unendlich weit erweiterbar ist. In **Bild 4.3** ist schematisch ein faser-

verstärktes Betonvolumen, in welchem die Faserschwerpunkte in Form von Tetraedern angeordnet sind, dargestellt.

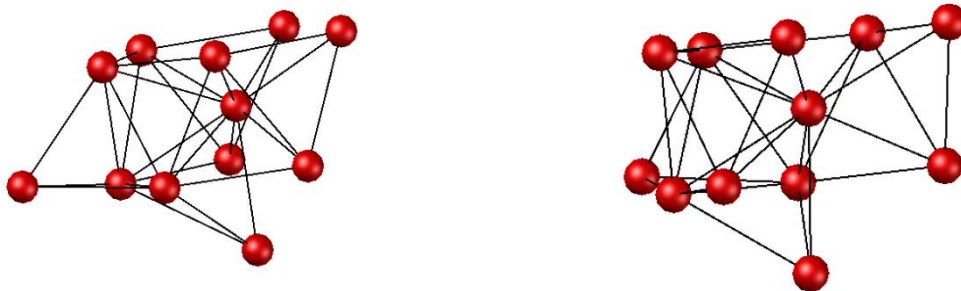


**Bild 4.3** Betrachteter Ausschnitt aus einem Faserbetonvolumen – Faserverteilung „Tetraeder“

In **Bild 4.4** wird der oben dargestellte Ausschnitt in einer Axonometrie abgebildet. **Bild 4.5** zeigt den Längs- und Querschnitt der aneinandergereihten Tetraeder aus **Bild 4.3**. Darin ist ersichtlich, dass sich die Fasern im Raum homogen verteilen und nicht auf bestimmten Ebenen zu liegen kommen. Bei unendlicher Erweiterung des Modells kommt in jeder Rissfläche ein Faserschwerpunkt zu liegen.

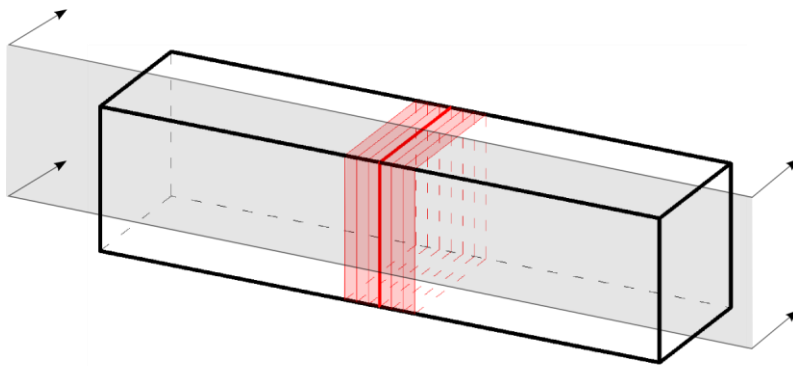


**Bild 4.4** Axonometrische Darstellung der Faserschwerpunktsverteilung



**Bild 4.5** Ansicht A – A (links) und Querschnitt (rechts) des betrachteten Bereiches

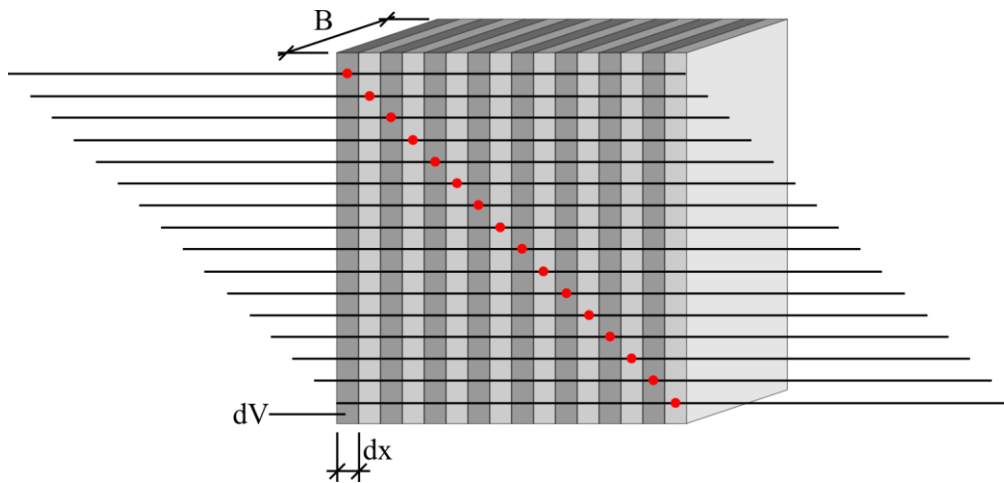
Wie bereits beschrieben ist es ab einer größeren Anzahl von Tetraedern nicht mehr möglich, diese hundertprozentig dicht aneinanderzureihen. Eine homogene Faserverteilung ist auch beschreibbar, wenn davon ausgegangen wird, dass in jeder Volumeneinheit  $dV$  (Tiefe  $B$ ; Breite  $dx$ ) des Faserbetonkörpers die exakt gleiche Anzahl an Fasern situiert ist, siehe **Bild 4.6**. Durch diese Vorstellung wird


**Bild 4.6** Volumenelemente

das Problem der begrenzten Packungsdichte umgangen. Voraussetzung dafür ist eine dreidimensionale Betrachtung des Faserbetonkörpers. Eine zweidimensionale Betrachtung ist nicht ausreichend.

**Bild 4.7** zeigt den Längsschnitt von **Bild 4.6**. Die Faserschwerpunkte je Volumeneinheit  $dV$  sind rot und die Fasern schwarz dargestellt (die Faserorientierung  $\eta$  wird mit 1,000 angenommen). Die Betonvolumina je Faser sind grau hinterlegt. Es ist ersichtlich, dass es einen Versatz zwischen den Faserschwerpunkten gibt. Dieser Versatz ist abhängig vom Fasergehalt und der Größe der gewählten Volumeneinheit  $dV$ . Je kleiner  $dV$  gewählt wird desto geringer der Versatz. Bei großen Fasergehalten und kleinem  $dV$  ist der Versatz infinitesimal klein. Somit gibt es im optimalen Fall einer ideal homogenen Faserverteilung und einer Faserorientierung  $\eta$  von 1,000 keine Urstreuung.

Es ist ersichtlich, dass es einen Versatz zwischen den Faserschwerpunkten gibt. Dieser Versatz ist abhängig vom Fasergehalt und der Größe der gewählten Volumeneinheit  $dV$ . Je kleiner  $dV$  gewählt wird desto geringer der Versatz. Bei großen Fasergehalten und kleinem  $dV$  ist der Versatz infinitesimal klein. Somit gibt es im optimalen Fall einer ideal homogenen Faserverteilung und einer Faserorientierung  $\eta$  von 1,000 keine Urstreuung.

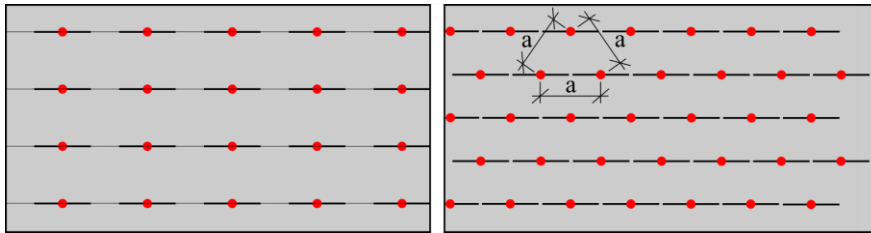

**Bild 4.7** Vereinfachte Betrachtung einer homogenen Faserverteilung

## 4.2 Falsche Modelle zur Faserverteilung

### 4.2.1 Zweidimensionale Betrachtung

In einer einfachen Betrachtung kann von einem durchgehenden Bewehrungsstab ausgegangen werden. Der Bewehrungsstab wird durch Fasern der Länge  $l_f$  ersetzt. Dadurch gibt es Bereiche (Schnitte) in denen keine Faser getroffen wird, wie in **Bild 4.8**, links ersichtlich ist. Der Abstand der Faserschwerpunkte ist weder im zweidimensionalen und schon gar nicht im dreidimensionalen konstant. Diese Betrachtung ist somit falsch, da die Faserschwerpunkte nicht homogen verteilt sind.

Eine Möglichkeit, wie die Fasern im zweidimensionalen homogen angeordnet werden können, ist in **Bild 4.8**, rechts dargestellt. Der Abstand der Faserschwerpunkte in der zweidimensionalen Ansicht ist immer gleich groß. Betrachtet man die Annahme im dreidimensionalen, so ist der Abstand der Faserschwerpunkte  $a$  nicht konstant und auch die Anzahl der Faserschwerpunkte je Volumeneinheit  $dV$  ist unterschiedlich. Da die Anordnung von Faserschwerpunkten ein dreidimensionales und kein zweidimensionales Problem ist führt die Betrachtung in 2D zum falschen Ergebnis einer Urstreuung.

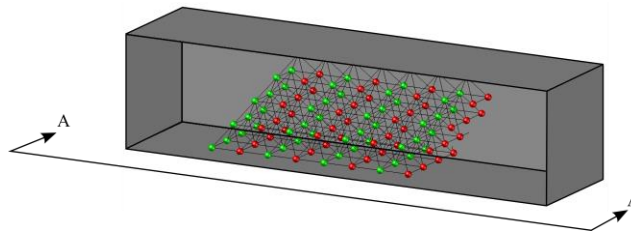


**Bild 4.8** Inhomogene Faserschwerpunktsverteilung

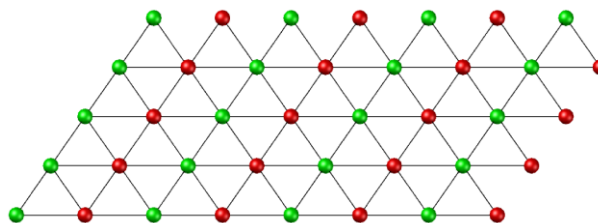
#### 4.2.2 Pyramidenmodell nach [25]

Müller [25] ordnet die Faserschwerpunkte in Form von gleichseitigen Pyramiden an (siehe **Bild 4.2**). Dadurch ist der Abstand der benachbarten Faserschwerpunkte in einer Faserebene nicht konstant. Somit kann durch das Pyramidenmodell keine homogene Faserverteilung beschrieben werden.

**Bild 4.9** zeigt den Ausschnitt eines Faserbetonvolumens mit einer pyramidenförmigen Faserschwerpunktsanordnung. Die Seitenansicht des Pyramidenmodells im Probekörper ist in **Bild 4.10** dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Faserschwerpunkte der einzelnen Ebenen immer genau übereinander liegen. Daraus ergibt sich eine Urstreuung. Diese Annahme ist allerdings falsch, da wie erwähnt der Abstand zwischen den einzelnen Faserschwerpunkten nicht gleich groß ist.



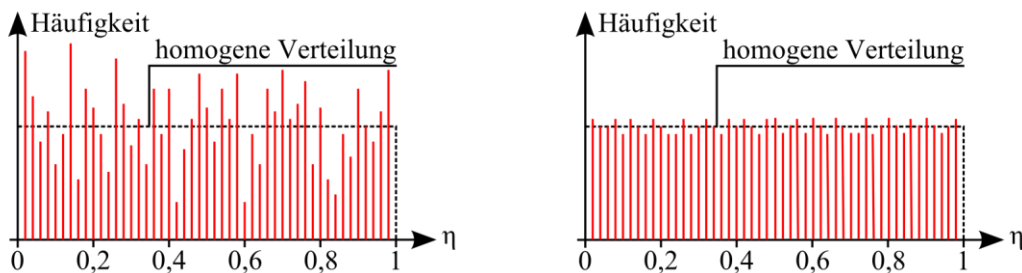
**Bild 4.9** Betrachteter Ausschnitt aus einem Faserbetonvolumen – Faserverteilung „Pyramide“



**Bild 4.10** Ansicht A – A – Faserverteilung „Pyramide“

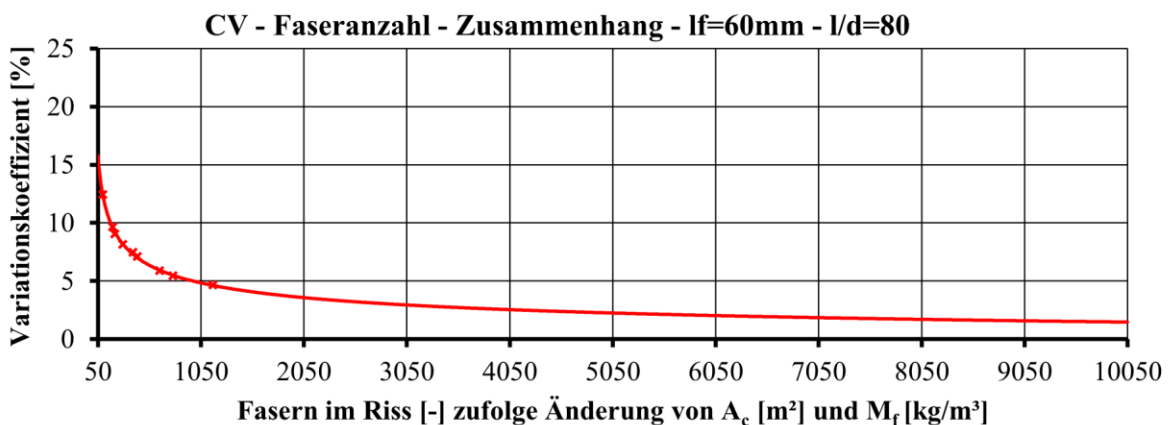
### 4.3 Streuungskonstante durch $\eta$

Eine nur bedingt beeinflussbare Streuungskonstante stellt die Faserorientierung dar. Ist der Mittelwert der Faserorientierung  $\eta$  konstant, so ergibt sich aus der Statistik eine Streuung im Tragverhalten von Faserbeton. Der Mittelwert der Orientierung  $\eta$  im Schnitt ist konstant. Abhängig von der Faseranzahl im Schnitt gibt es bei gleichem Mittelwert beispielsweise unterschiedlich viele Fasern genau in Zugrichtung und sehr steil dazu. Dieser Einfluss nimmt mit steigender Faseranzahl im Schnitt ab. **Bild 4.11** zeigt das Histogramm für sehr viele und sehr wenige Fasern.



**Bild 4.11** Histogramm für wenige (links) und viele Fasern (rechts)

Daraus resultiert die Streuung zufolge der Orientierung, wie in **Bild 4.12** dargestellt ist, berechnet mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Programm. Die Funktion in **Tabelle 4.1** beschreibt den Näherungskurvenverlauf der Streuung und den zugehörigen Bestimmtheitsgrad ( $R^2$ ). Die mittlere Faserorientierung im nachfolgenden Beispiel beträgt 0,500. Bei sehr großen Fasergehalten konvergiert die Streuung gegen null.



**Bild 4.12** Streuungen aus der Faserorientierung bei  $\eta_v = 0,500$  – ohne Randeffekt

**Tabelle 4.1** Funktion des Näherungskurvenverlaufes aus **Bild 4.12**

$$f(x) = 62,020 \cdot \text{FiR}^{-0,3247} - 1,645$$

$$R^2 = 0,999$$

## 5 Modellbildung – Programm/ Modell „HM-SC“

### 5.1 Allgemeines

Das Programm „HM-SC“ (**H**adl **M**ayer – **S**cattering **C**omputation) wurde in MATLAB implementiert. Es ermöglicht dem Nutzer durch Variation der Eingabeparameter die Untersuchung der streuungswirksamen Einflüsse. Dadurch können unterschiedliche Einflussfaktoren, wie die Faserorientierung, der Fasergehalt, die Fasergeometrie, usw. untersucht werden. Grundsätzlich ermittelt dieses Rechenprogramm Spannungs- Rissöffnungsbeziehungen, für einen einaxialen Zugversuch, wobei für die hier durchgeführten Untersuchungen, nur die durch die Fasern über den Riss übertragenen Spannungen von Interesse sind. Es werden mehrere Durchläufe simuliert (je höher die Anzahl der Simulationen, desto höher die Genauigkeit des Ergebnisses), in welchen durch Änderung der Verteilung der Faserschwerpunkte und der Einzelfaserorientierungen (und sonstige Einflüsse) Streuungen in den Spannungen entstehen. Eine solche mehrfache Simulation zur Problemlösung wird auch als „Monte-Carlo-Simulation“ bezeichnet. Aus den resultierenden Streuungen kann der Variationskoeffizient ermittelt werden.

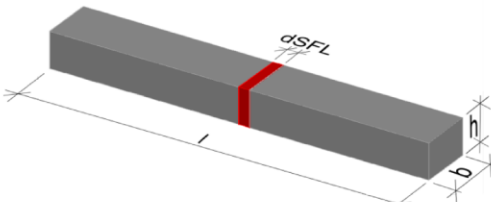
#### Eingabeparameter

Beton und Geometrie:	Fasern:
Betongüte	Fasergeometrie ( $l_f, d_f$ )
Probekörpergeometrie ( $b, h, l$ )	Werkstoffdichte (Stahl)
Größtkorn	Fasermenge ( $M_f$ )
Stärke der Schnittflächen ( $t_s$ beeinflusst Rechengenauigkeit)	mittlere Faserorientierung (Kern, Rand)
	Verbundspannung (bei $\eta = 1$ ; aus Versuchen)

Die eben genannten Eingangsparameter werden über ein für den Benutzer eingabefreundlicheres Input-File (Excel) variiert. Auf die Notwendigkeit der einzelnen Parameter wird in 5.4 noch genauer eingegangen. Eine beispielhafte Darstellung der eben beschriebenen Eingabemaske ist **Bild 5.1** zu entnehmen.

Zur Eingabe ist weiters zu erwähnen, dass, wie bei den Eingabeparametern bereits kurz angemerkt wurde, Parameter wie z.B. die Verbundspannung bei einer Faserorientierung  $\eta = 1$ , nur über Versuche

ermittelt werden können. Beziehungsweise ist es auch möglich, diese aus unterschiedlichsten Veröffentlichungen wie z.B. [11] oder [20] zu entnehmen. Jedoch ist darauf zu achten, dass die gewählte Verbundspannung mit der gewählten Betongüte korreliert.

Materialparameter und Geometrie		
<b>Beton und Geometrie</b>		
Betongüte	=	C 30/37
b	=	0,15 m
h	=	0,15 m
l	=	0,70 m
Größtkorn	=	16 mm
dSFL	=	0,001000 m (Stärke der Schnittflächen)
$E_{cm}$	=	33000,00 MPa
$f_{ek}$	=	30,00 MPa
$f_{ctm}$	=	2,90 MPa
		
<b>Fasern</b>		
$l_f$	=	60 mm
$d_f$	=	0,75 mm $l_f/d_f = 80$
$\rho_f$	=	7850 kg/m <sup>3</sup>
$M_f$	=	39,25 kg/m <sup>3</sup> 0,50 Vol% Fasermenge
$\eta_{Kern}$	=	0,50 - (Annahme)
$\eta_{Rand}$	=	0,64 - (Annahme)
$\eta_\mu$	=	0,55 -
$\tau_0$	=	4,00 MPa (aus Versuchen)
$\tau_{30}$	=	5,48 MPa (aus Versuchen)
$\tau_{45}$	=	5,48 MPa (aus Versuchen)
$\tau_{60} (Start)$	=	1,88 MPa (aus Versuchen)
<b>INPUTFELDER</b>		
<b>NICHT BEARBEITBAR</b>		

**Bild 5.1** Eingabemaske „HM-SC“

Ein wesentlicher Punkt der Eingabe ist die Wahl der Stärke der Schnittflächen. Die Stärke der Schnittflächen bestimmt die Genauigkeit des Rechenergebnisses. Das Betonvolumen des zu untersuchenden Probekörpers wird, je nach Eingabe, in einzelne Schnitte unterteilt. Den Schnitten wird eine aus der Fasermenge und der Fasergeometrie resultierende Anzahl an Faserschwerpunkten je Schnittfläche zugewiesen.



## 5.2 Programmablaufplan

Der nachfolgende Programmablaufplan gibt einen Überblick über die Funktionen von „HM-SC“, welche in Kapitel 5.4 ausführlich erläutert werden.

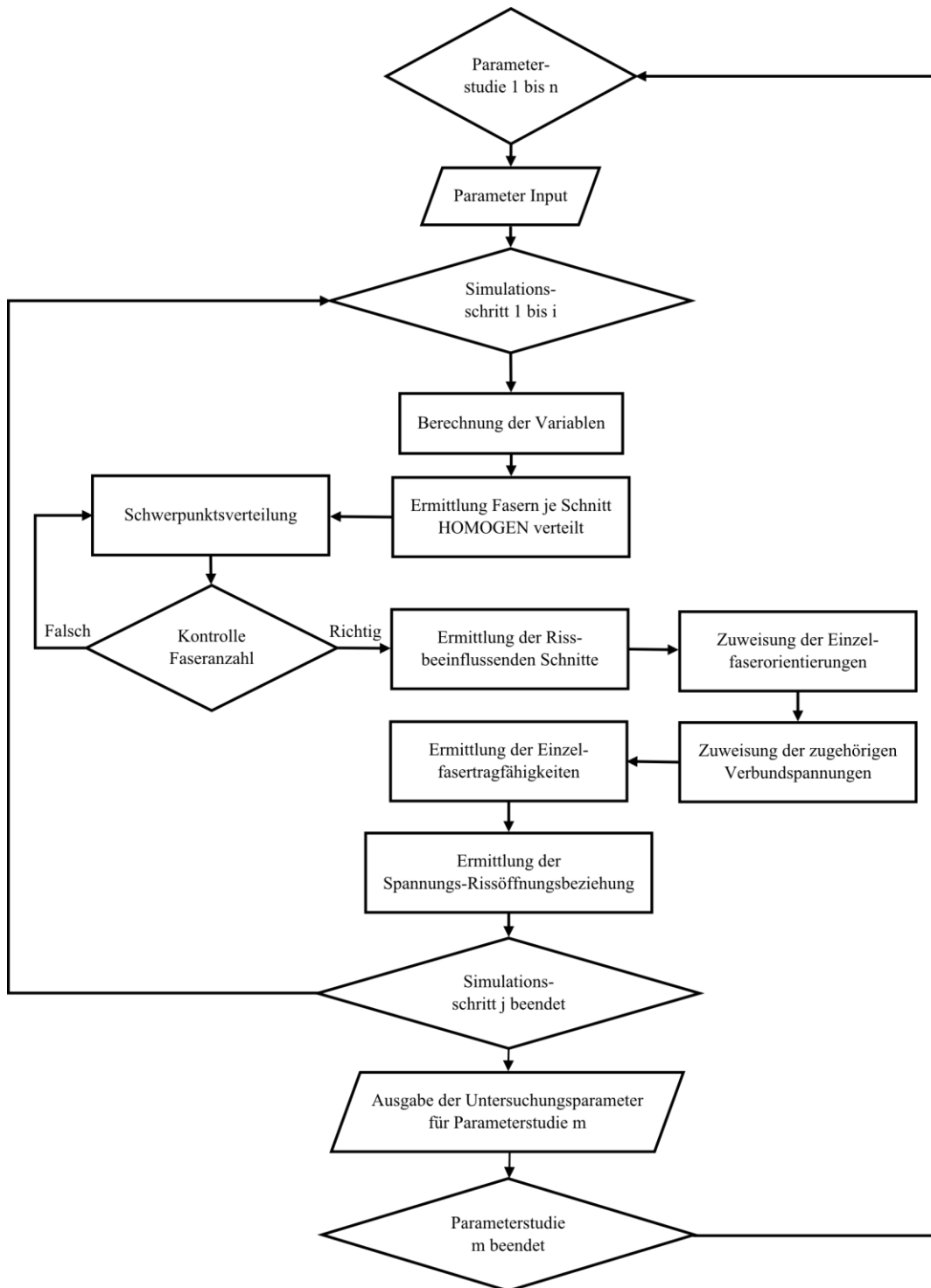


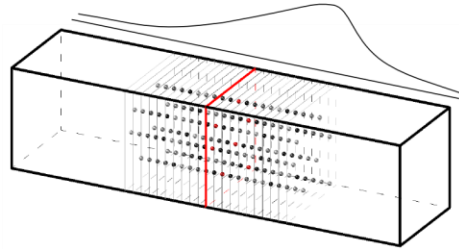
Bild 5.2 Programmablaufplan „HM-SC“

### 5.3 Ablaufschritte des Modells bei geraden Stahlfasern

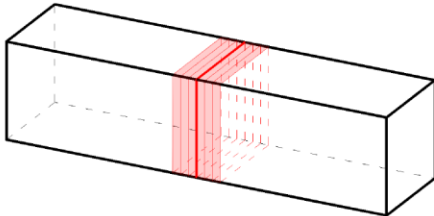
**Schritt 1:** Berechnung der Variablen

- Faserfläche
- Faservolumen
- Masse einer Einzelfaser
- Anzahl der Fasern im Probekörper
- Fasern je Schnittfläche (homogen verteilt)

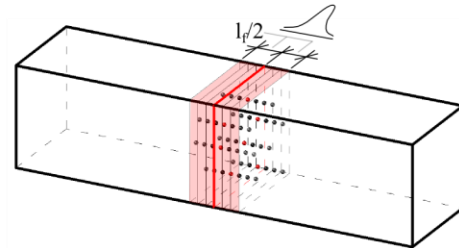
**Schritt 2:** Verteilung der Faserschwerpunkte



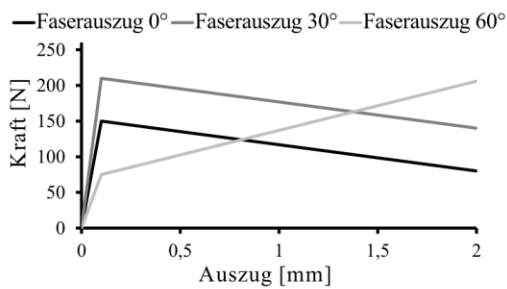
**Schritt 3:** Ermittlung der den Riss beeinflussenden Schnittflächen



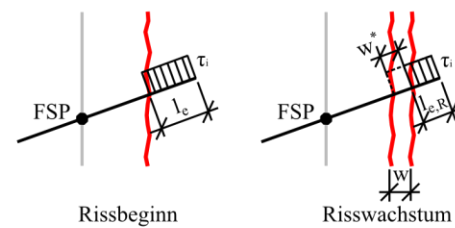
**Schritt 4:** Zuweisung der Einzelfaserorientierungen (im betrachteten Volumen mit der Tiefe  $l_f$ )



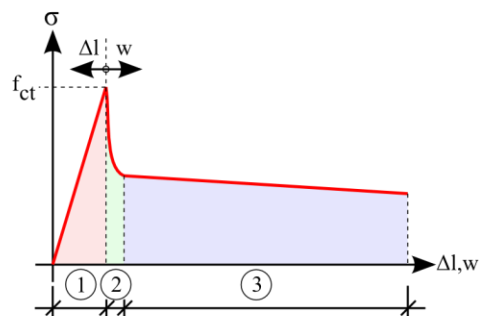
**Schritt 5:** Zuweisung der zugehörigen Verbundspannungen



**Schritt 6:** Ermittlung der Einzelfasertragfähigkeiten



**Schritt 7:** Ermittlung der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung



**Bild 5.3** Modellablauf

## 5.4 Funktionen bei geraden Stahlfasern

Allgemein ist zu erwähnen, dass das Programm mehrere Input-Files nacheinander abarbeitet, wobei im Vorhinein auch festgelegt werden muss, wie oft jede Untersuchung simuliert (Anzahl der Simulationsschritte) werden soll. Da mit steigender Anzahl der Simulationen auch die Rechenzeit steigt, sollte die Zahl der Simulationsschritte mit Bedacht gewählt werden. Der größte Teil der durchgeführten Parameterstudien wurde mit 2500 Durchläufen gerechnet, um die Rechenzeiten in einem verträglichen Maß zu halten.

### 5.4.1 Schritt 1: Berechnung der Variablen

In einem ersten Berechnungsschritt werden die wichtigsten Variablen aus den Eingabeparametern errechnet. Dazu zählen:

- **Faserfläche**

$$A_f = \frac{d_f^2 \cdot \pi}{4} \quad (7)$$

- **Faservolumen**

$$V_f = A_f \cdot l_f \quad (8)$$

- **Masse einer Einzelfaser**

$$m_f = V_f \cdot \rho_f \quad (9)$$

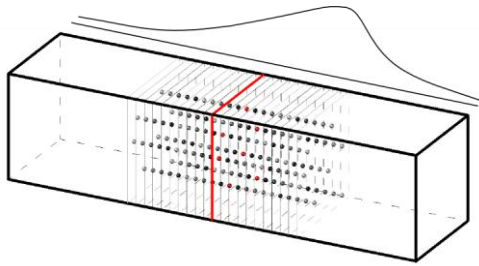
- **Anzahl der Fasern im Probekörper**

$$N_{\text{vol}} = \frac{M_f}{m_f} \cdot b \cdot h \cdot l \quad (10)$$

- **Fasern je Schnittfläche (homogen verteilt)**

$$N_S = \frac{N_{\text{vol}} \cdot t_S}{l} \quad (11)$$

### 5.4.2 Schritt 2: Verteilung der Faserschwerpunkte



**Bild 5.4** Verteilung der Faserschwerpunkte

Im Programm sind vier Möglichkeiten implementiert, um die Verteilung der Faserschwerpunkte im Betonvolumen zu variieren. Die Gemeinsamkeit der ersten drei Varianten besteht darin, dass die Anzahl der Fasern je Schnittfläche verändert wird. Der Neuverteilung der Faserschwerpunkte ist immer eine Kontrolle angeschlossen, um gewährleisten zu können, dass nach der Verteilung exakt dieselbe Anzahl von Fasern im Betonvolumen enthalten ist, wie vor der Neuverteilung der Faserschwerpunkte.

Die Stärke der eben genannten Schnittflächen ist festzulegen. In der idealen Modellvorstellung ist diese infinitesimal.

Da der Variationskoeffizient CV (Coefficient of Variation) eine tragende Rolle bei der Berechnung der Streuungen einnimmt und die Streuungen auch durch diesen dargestellt werden, ist nachfolgend dessen Formel nochmals dargestellt (siehe auch Kapitel 3.4).

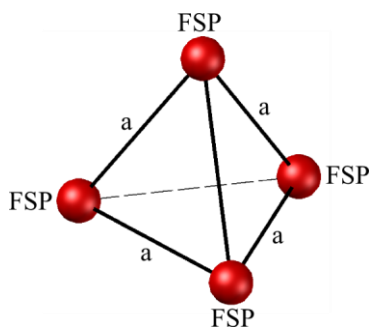
- **Variationskoeffizient**

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (12)$$

$\sigma$  ... Standardabweichung

$\mu$  ... Mittelwert

Der Variationskoeffizient stellt eine auf den Mittelwert normierte Standardabweichung dar, wodurch eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse ermöglicht wird.



**Bild 5.5** Tetraeder Modell zur Betrachtung des Größtkorneinflusses

Einen die Faserverteilung im Volumen beeinflussenden Faktor stellt das Größtkorn dar. Diesem Problem wird Rechnung getragen, indem aufgrund der Fasermenge im Probekörpervolumen ein Abstand  $a$  für eine etwaige homogene Verteilung errechnet wird. Diese Länge  $a$  entspricht der Seitenlänge eines Tetraeders. Ist diesem Tetraeder nun das Größtkorn als innere Kugel einschreibbar, so muss keine zusätzliche Verteilung vorgenommen werden. Ist das Größtkorn größer als die gedachte innere Kugel des Tetraeders, so wird die Verteilung der Faserschwerpunkte verändert.

Der Einfluss dieser Problematik ist bei den kleinen Fasergehalten im Normalbeton vernachlässigbar und wird im Modell nicht mitberücksichtigt.

### VARIANTE 1: Homogene Verteilung der Faserschwerpunkte

Bei der homogenen Faserverteilung wird die Anzahl der Faserschwerpunkte je Schnittfläche nicht variiert. Die Faseranzahl ist in jeder Schnittfläche gleich groß.

### VARIANTE 2: Normalverteilung der Faserschwerpunkte

Der Normalverteilung wird in der Statistik, wie auch in [26] beschrieben, große Bedeutung beigemessen. Im vorliegenden Modell kann die Anzahl der Faserschwerpunkte je Schnittfläche mit Hilfe einer Normalverteilung neu berechnet werden. Der klare Nachteil dieser Variante liegt darin, dass eine Standardabweichung  $\sigma$  gewählt werden muss, welche auch versuchstechnisch nur schwer feststellbar ist. Da diese Standardabweichung einen essentiellen Faktor in der Berechnung darstellt, sollte diese Methode nur dann verwendet werden, wenn die zuvor genannte Standardabweichung  $\sigma$  als ausreichend genau verifiziert werden kann. Die einzige Möglichkeit  $\sigma$  festzustellen, bietet die Computertomographie [16]. Wenn eine passende Standardabweichung ermittelt wurde, wird außerdem empfohlen, deren Anwendbarkeit auf geänderte Parameter hin zu untersuchen. Sei dies durch die Ermittlung einer Funktion eines Variationskoeffizienten oder ähnliches. Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist, dass die Normalverteilung nach oben und unten offen ist, wodurch „Ausreißer“ nicht ausgeschlossen werden können und Werte kleiner null überschrieben werden müssen.

- **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung** [26]

$$y = f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (13)$$

- **Mittelwert** [26]

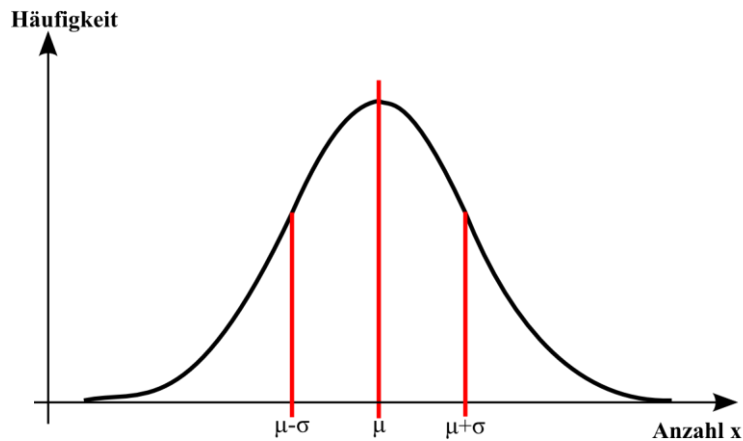
$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (14)$$

- **Standardabweichung** [26]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (15)$$

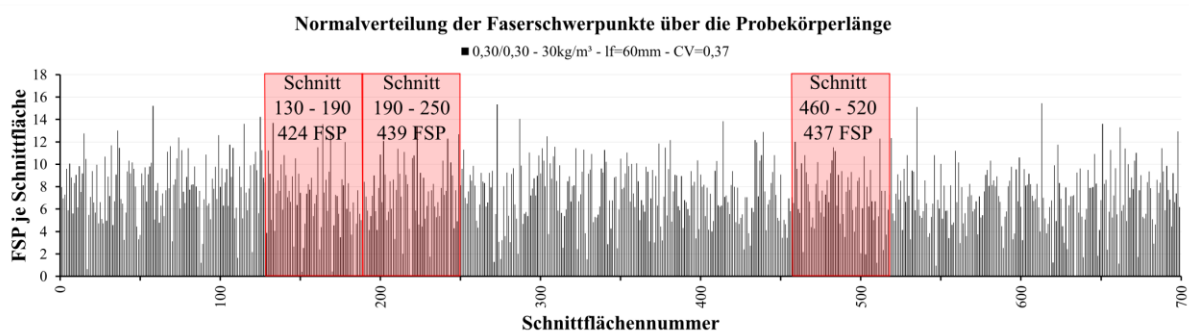
Im Programm werden diese Funktionen umgesetzt, indem in jeder fiktiven Schnittfläche eine zufällige, einer Normalverteilung folgende Neuverteilung der Faserschwerpunkte vorgenommen wird. Diese Neuverteilung folgt einer Funktion, wie sie in **Bild 5.6** dargestellt ist. Je größer die Standardabweichung  $\sigma$  wird, desto flacher wird der Verlauf der dargestellten Glockenkurve, was gleichbedeutend damit ist, dass die Streuungen um den Mittelwert zunehmen. An den Stellen  $\mu \pm \sigma$  befinden sich die Wendepunkte dieser Verteilungsfunktion.

Allgemein sei zur Normalverteilung noch erwähnt, dass Abweichungen vom Mittelwert um  $\pm \sigma$  68,27 %, um  $\pm 2\sigma$  95,45 % und um  $\pm 3\sigma$  99,73 % aller Messwerte abdecken.



**Bild 5.6** Darstellung einer Normalverteilung

In **Bild 5.7** wird die Normalverteilungsfunktion angewendet, auf die Faserschwerpunkte je Schnittfläche beispielhaft dargestellt. Dabei wird auf der x-Achse die Nummer der betrachteten Schnittfläche dargestellt und auf der y-Achse die Anzahl der Faserschwerpunkte je Schnittfläche. Diese Darstellung bezieht sich auf einen Probekörper mit einer Breite und Höhe von 0,30 m, einer beigegebenen Fasermenge von  $30 \text{ kg/m}^3$  und einer Faserlänge von 60 mm, bei einem  $l_f/d_f$ -Verhältnis von 60. Der Variationskoeffizient CV wurde hier mit 0,37 gewählt.



**Bild 5.7** Beispielhafte Darstellung einer Normalverteilung über das Probekörpervolumen

Wie in **Bild 5.7** dargestellt wird, ist die Anzahl der Faserschwerpunkte in einem Vergleichsvolumen mit einer Tiefe von  $l_f$  über das Probekörpervolumen annähernd konstant. Aus diesem Grund wird von einer Anwendung der Normalverteilung abgeraten. Die geringen Unterschiede in den Faseranzahlen der Vergleichsvolumen lassen darauf schließen, dass der Einfluss der Faserverteilung bei einer Anwendung der Normalverteilung unterschätzt wird.

### VARIANTE 3: Poissonverteilung der Faserschwerpunkte

Die Poissonverteilung wird auch von Naaman in seinem Modell in [6] verwendet.

*„Sie wird [...] für die Lösungen der Probleme benutzt, die beim Zählen relativ seltener zufälliger und voneinander unabhängiger Ereignisse in der Zeit-, Längen-, Flächen- oder Raumeinheit auftreten. Man spricht von isolierten Ereignissen in einem Kontinuum.“ [26]*

Weiters stellt die Poissonverteilung eine diskrete Verteilung dar. Dies bedeutet, dass eine ermittelte Zufallsvariable nur ganzzahlige und abzählbar viele Werte annehmen kann. Aus der eben erwähnten Beschreibung der Poissonverteilung geht bereits hervor, dass sie für das vorliegende Problem der Verteilung der Faserschwerpunkte eine relativ treffsichere Lösung bietet.

Für den Benutzer stellt die Anwendung der Poissonverteilung die einfachste Variante dar, da hierfür keine Standardabweichung bzw. kein Variationskoeffizient bekannt sein muss. Der Erwartungswert wird durch die Anzahl der homogen verteilten Faserschwerpunkte je Schnittfläche ermittelt.

- **Verteilungsfunktion der Poissonverteilung [26]**

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } x \geq 0 \quad (16)$$

$$F(x) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung [26]**

$$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad (17)$$

- **Erwartungswert [26]**

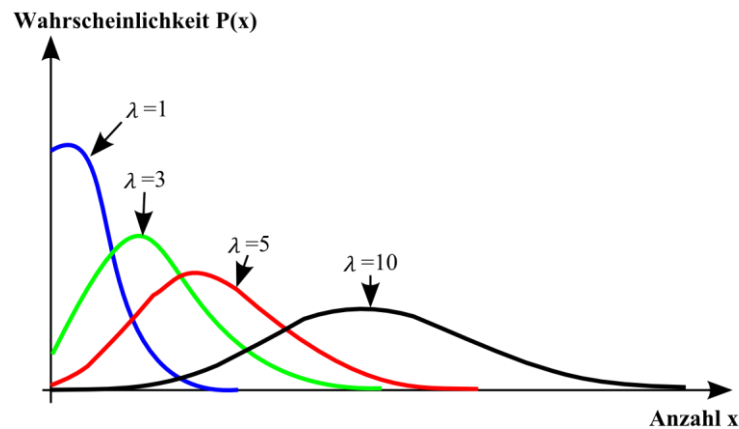
$$\mu = \lambda \quad (18)$$

- **Standardabweichung [26]**

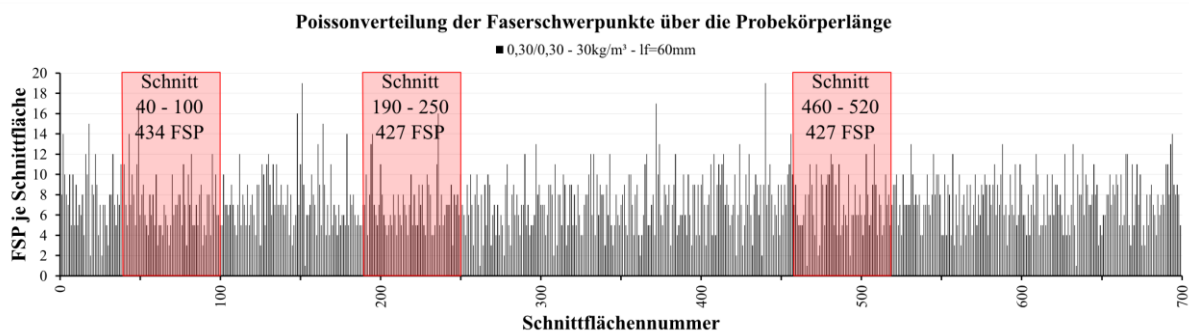
$$\sigma = \sqrt{\lambda} \quad (19)$$

Wie in **Bild 5.8** zu erkennen, nimmt die Schiefe der Verteilung mit zunehmendem  $\lambda$  ab. Das Maximum einer Verteilung tritt bei der nächst kleineren ganzen Zahl zu  $\lambda$  auf. [26] Ein weiteres Merkmal der Poissonverteilung ist, dass sie nach unten hin bei null begrenzt ist, nach oben hin aber offen ist.

In **Bild 5.9** wird beispielhaft eine solche Poissonverteilung der Faserschwerpunkte (FSP) über das in Schnittflächen unterteilte Probekörpervolumen dargestellt. **Bild 5.9** bezieht sich auf einen Probekörper mit einer Breite und Höhe von 0,30 m, einer beigegebenen Fasermenge von 30 kg/m<sup>3</sup> und einer Faserlänge von 60 mm, bei einem  $l_f/d_f$ –Verhältnis von 60.



**Bild 5.8** Darstellung verschiedener Poissonverteilungen



**Bild 5.9** Beispielhafte Darstellung einer Poissonverteilung über das Probekörpervolumen

Wie bei der Normalverteilung wird auch von der Anwendung der Poissonverteilung abgeraten. Auch hier streut die Anzahl der Faserschwerpunkte in einem Vergleichsvolumen mit der Tiefe  $l_f$  nur unwesentlich.

#### **VARIANTE 4: Variation der zugegebenen Fasermenge**

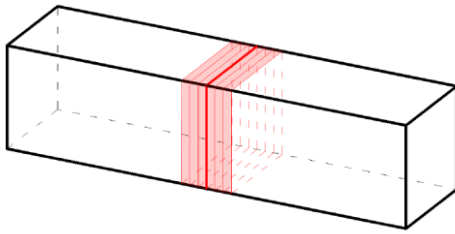
Im Gegensatz zu den zuvor erläuterten Varianten, werden hier die Faserschwerpunkte je Schnittfläche nicht variiert. Es wird von einer homogenen Faserverteilung ausgegangen.

Die Streuung der Fasern in der Rissfläche wird hier durch die Streuung der zugegebenen Fasermenge erzielt. Diese Streuung der zugegebenen Fasermenge wird als normalverteilt angenommen. Durch die Vorgabe der zugegebenen Fasermenge und durch die Festlegung eines Variationskoeffizienten, wird so in jedem Simulationsschritt eine „neue“ Menge der Faserzugabe errechnet.

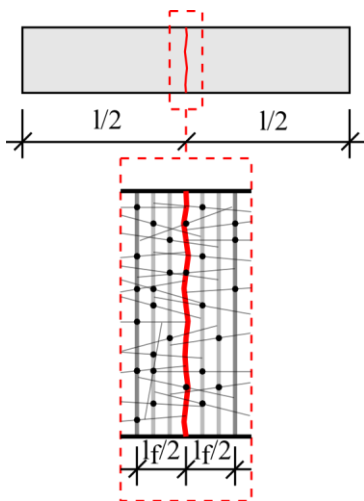
So wird es ermöglicht, die in Versuchen beobachteten Streuungen der Faseranzahl im Riss, welche durch eine inhomogene Faserverteilung hervorgerufen werden, besser abzubilden.



### 5.4.3 Schritt 3: Ermittlung der den Riss beeinflussenden Schnitte



**Bild 5.10** Riss beeinflussende Schnitte



**Bild 5.11** Betrachtetes Volumen der „wirksamen“ Schnittflächen

Im Anschluss an die Verteilung der Faserschwerpunkte werden all jene Schnittflächen ermittelt, welche den Riss durch eine Faser beeinflussen können. Auf den Schnittflächen (deren Stärke in der Eingabemaske definiert wird) sind die einzelnen Faserschwerpunkte situiert. Wesentlich ist es, die Schnittflächenstärke, wie in 5.1 beschrieben, möglichst klein zu wählen. Die Verteilung der Faserschwerpunkte erfolgt wie in Abschnitt 5.4.2 erklärt wurde. Die Entstehung des Risses wird immer in der Mitte des zu untersuchenden fiktiven Probekörpers simuliert. Der maximale Abstand von einer Schnittfläche zum Riss beträgt, wie in **Bild 5.11** dargestellt,  $l_f/2$  ( $l_f$  – Faserlänge). Dies ergibt sich dadurch, da eine Faser mit einer Orientierung  $\eta$  von 1 den Riss gerade noch schneidet, wenn der Faserschwerpunkt auf einer Schnittfläche in einem Abstand von  $l_f/2$  liegt. Die restlichen Schnittflächen werden in der weiteren Berechnung nicht mehr betrachtet.

Die so errechnete Anzahl an Faserschwerpunkten in diesem „wirksamen“ Volumen wird in eine Matrix gespeichert, in welcher auch die restlichen, die Tragfähigkeit beeinflussende Parameter (Faserorientierung, Faserwirksamkeit, Verbundspannung) abgespeichert werden. Hierbei wird jeder Faser eine eigene Zeile zugewiesen.

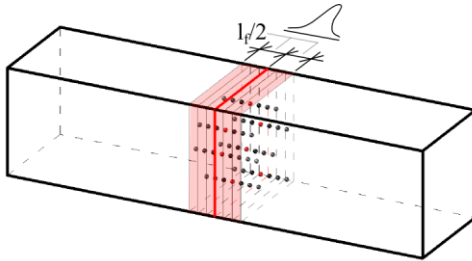
Nummer der Schnittfläche	Faserwirksamkeit	$\eta$	$\cos^{-1}(\eta)$	Abstand zum Riss	Einbindelänge $l_b$	$\tau_\eta$
1	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
i	-	-	-	-	-	-

**Bild 5.12** Aufbau der Schnittflächenmatrix

**Bild 5.12** zeigt den schematischen Aufbau der Matrix. Aus den Werten der Schnittflächenmatrix werden alle relevanten Daten ermittelt, unter anderem die Einzelfasertragfähigkeiten und die Anzahl der Fasern im Riss.

#### 5.4.4 Schritt 4: Zuweisung der Faserorientierung

##### Schritt 4.1: Zuweisung der Einzelfaserorientierungen



**Bild 5.13** Zuweisung der Einzelfaserorientierung

Die Einzelfaserorientierungen nehmen einen entscheidenden Teil in der Simulation der Streuungen ein. Der Zusammenhang zwischen dem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  und der Standardabweichung wurde bereits in 3.4.1 erklärt. Da dieser Zusammenhang von großer Bedeutung für die Zuweisung der Einzelfaserorientierungen ist, wird nachfolgend nochmals die entsprechende Gleichung dargestellt.

- **Zusammenhang  $\sigma - \eta$  [3]**

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \eta_V \cdot (1 - \eta_V) \quad (20)$$

In einigen Untersuchungen, wie z.B. in [19], wird die Verteilung der Einzelfaserorientierung als Normalverteilung beschrieben. Ein daraus resultierender Nachteil ist, dass die Normalverteilung nach oben und unten hin offen ist, der Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  aber zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt. Dadurch können Ausreißer mit einem Einbindewinkel von kleiner  $0^\circ$  oder größer  $90^\circ$  auftreten. Um dieses Problem zu umgehen, wird in [19] ein Korrekturfaktor eingeführt.

Um diese Problematik zu vermeiden und um keinen weiteren Korrekturfaktor einführen zu müssen, wird im vorliegenden Modell eine Betaverteilung angewendet. Diese stetige, geschlossene Verteilungsfunktion wird über ein Intervall in den Grenzen  $a$  und  $b$  definiert. Wobei  $a$  und  $b$  für die vorliegende Fragestellung mit 0 und 1 festgelegt werden. Die Summe der Ereignisse unter dieser Verteilungsfunktion ergibt wieder 1, also eine Eintretenswahrscheinlichkeit aller Ereignisse von 100 %. Weiters wird diese Verteilung durch die Formparameter  $\alpha$  und  $\beta$  beschrieben. Es besteht die Möglichkeit, die eben genannten Formparameter durch den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  der Einzelfaserorientierung zu schätzen. Über die Schätzung der Parameter kann auch die Schiefe der Verteilung angepasst werden.

- **Dichtefunktion der Beta - Verteilung [27]**

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(x - a)^{(\alpha - 1)} \cdot (b - x)^{(\beta - 1)}}{(b - a)^{(\alpha + \beta - 1)}} \quad (21)$$

für  $a \leq x \leq b$

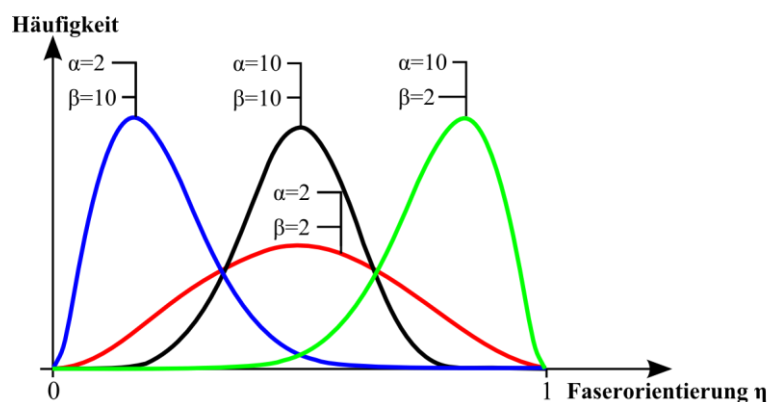
- **Schätzung der Formparameter  $\alpha$  und  $\beta$  der Betaverteilung [28]**

$$\alpha = \left( \frac{1 - \mu}{\sigma^2} - \frac{1}{\mu} \right) \cdot \mu^2 \quad (22)$$

$$\beta = \alpha \cdot \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) \quad (23)$$

An der TU Graz durchgeführte Untersuchungen in [29] zeigen, dass die Betaverteilung eine bessere Näherung zu Versuchsergebnissen darstellt, als etwa die in [19] verwendete Normalverteilung.

In **Bild 5.14** sind beispielhaft mehrere Betaverteilungen dargestellt, um den Einfluss der Formparameter  $\alpha$  und  $\beta$  aufzuzeigen. Bei gleichbleibenden Parametern ergibt sich eine symmetrische Verteilung, bei unterschiedlichen Beiwerten  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt sich eine links- oder rechtsschiefe Verteilung.



**Bild 5.14** Darstellung verschiedener Betaverteilungen

Durch die eben genannte Vorgehensweise wird jeder einzelnen Faser im betrachteten Volumen (**Bild 5.11**) eine eigene Faserorientierung zugewiesen. Dies ist essentiell, um die Einzelfasertragfähigkeiten richtig berechnen zu können.

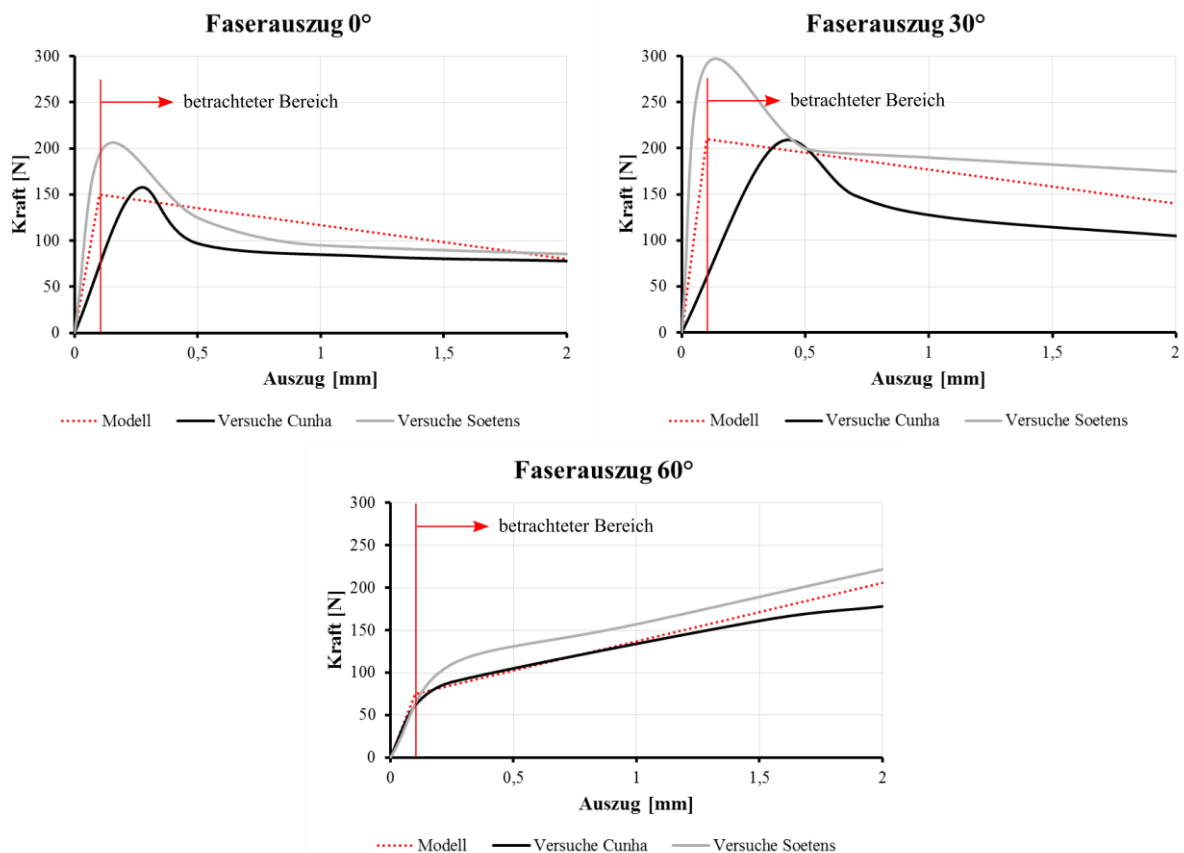
#### Schritt 4.2: Variation der Faserorientierung im Volumen

Zusätzlich zur Streuung der Einzelfaserorientierung besteht auch die Möglichkeit, den Mittelwert der Faserorientierung im Probekörpervolumen in jedem Durchlauf zu variieren, um realistischere Ergebnisse erzielen zu können. Auch die Mittelwertstreuungen folgen im vorliegenden Modell einer Beta-Verteilung. Die für die Formparameter  $\alpha$  und  $\beta$  benötigte Standardabweichung wird über einen zuvor festgelegten Variationskoeffizienten ermittelt, wohingegen die Standardabweichung der Einzelfaserorientierungen mittels Glg. ( 20 ) automatisch errechnet wird.

### 5.4.5 Schritt 5: Zuweisung der zugehörigen Verbundspannungen

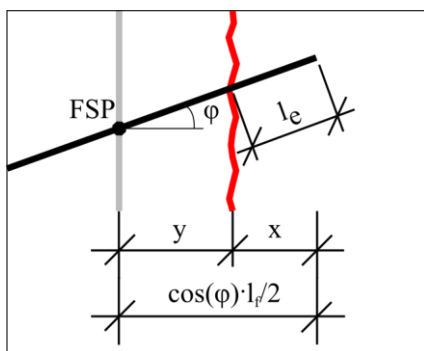
Da das Zusammenwirken der einzelnen Streuungen in diesem Modell auf Spannungsniveau untersucht wird, besteht die Notwendigkeit, die Einzelfasertragfähigkeiten zu ermitteln. Um die Tragfähigkeiten berechnen zu können, werden jeder einzelnen Faser Anfangsverbundspannungen, abhängig von der Faserorientierung, zugewiesen. Die Einzelverbundspannungen sind über die Rissöffnung konstant und basieren auf Einzelfaserausziehversuchen von [20] und [11].

Als Eingabeparameter wird zunächst eine Verbundspannung  $\tau_0$  bei einer Faserorientierung von  $\eta = 1$  ( $\eta = 1 \triangleq \varphi = 0^\circ$ ) festgelegt. Abhängig von dieser Anfangsverbundspannung werden die weiters benötigten Verbundspannungen aufbauend auf den Versuchen von [20] und [11] ermittelt. Hierbei werden die Anfangswerte mit  $\tau_{30} = \tau_{45} = 1,40 \cdot \tau_0$  und  $\tau_{60} = 0,50 \cdot \tau_0$  festgelegt. Dazwischenliegende Verbundspannungswerte werden linear interpoliert bzw. zwischen  $\eta = 0,50 - 0,33$  ( $\varphi = 60^\circ - 70,53^\circ$ ) konstant gehalten. Die Verbundspannung wird als über die Rissöffnung konstant implementiert. Eine Abnahme der Fasertragfähigkeit mit zunehmender Rissöffnung wird durch den Faserauszug erzielt. Durch die kürzer werdende Einbindelänge mit zunehmender Rissöffnung nehmen die Einzelfasertragfähigkeiten ab. In **Bild 5.15** wird die Änderung des Faserausziehwiderstandes mit zunehmender Rissöffnung aus den Versuchen von [11] und [20] mit jener im Modell verglichen.



**Bild 5.15** Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen

Wie **Bild 5.15** zu entnehmen ist, wird der Anfangsbereich des Faserausuges vernachlässigt. Eine Abnahme des Faserauszieh Widerstandes mit zunehmender Rissöffnung wird für Fasern mit einer Orientierung von  $\eta = 1 - 2/\pi$  ( $1 - 0,637$ ) angesetzt. Fasern mit einer Orientierung im Bereich von  $\eta = 2/\pi - 1/3$  ( $0,637 - 0,333$ ) werden mit einem über die Rissöffnung zunehmenden Faserauszieh Widerstand behaftet. Fasern mit einer Orientierung von  $\eta < 1/3$  ( $\varphi > 70,53^\circ$ ) werden in der Berechnung vernachlässigt, da diese als nicht die Nachrisszugfestigkeit erhöhend betrachtet werden können. In [30] beispielsweise werden bereits Fasern mit einem  $\eta < 1/2$  in der Berechnung vernachlässigt. Diese Annahmen beruhen auch darauf, dass Fasern mit höheren Faserausziehwinkeln zum Abplatzen der Betonoberfläche führen können.



**Bild 5.16** Ermittlung  $l_e$

Neben der Verbundspannung stellt auch das Wissen um die Einbindelänge der Einzelfasern einen essentiellen Faktor zur Berechnung der Einzelfasertragfähigkeiten dar. Die Einbindelänge  $l_e$  wird durch den bekannten Abstand des Faserschwerpunktes vom Riss und durch die der Faser zugewiesene Orientierung ermittelt. **Bild 5.16** stellt die Ermittlung der Einbindelänge  $l_e$  dar. Maßgebend wird in jedem Fall die kürzere Einbindelänge. Weiters gilt es zu erwähnen, dass der  $\cos(\varphi)$  dem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  entspricht.

- **Ermittlung der Einbindelänge  $l_e$**

$$x = \cos(\varphi) \cdot \frac{l_f}{2} - y = \eta \cdot \frac{l_f}{2} - y \quad (24)$$

$y$  ... Abstand des Faserschwerpunktes FSP vom Riss

$$l_e = \frac{x}{\eta} \quad (25)$$

In einem nächsten Schritt werden die Einzelfasertragfähigkeiten für jede wirksame Faser ermittelt. Bei diesen Fasertragfähigkeiten ist zu beachten, dass die Einbindelänge mit zunehmender Rissöffnung verkürzt wird.

### 5.4.6 Schritt 6: Ermittlung der Einzelfasertragfähigkeiten

Die für die Ermittlung der Einzelfasertragfähigkeiten  $F_{f,i}$  notwendigen Parameter wurden bereits in den vorigen Programmschritten ermittelt. Einen zuvor nicht beschriebenen Einflussparameter stellt die Faserwirksamkeit  $g$  dar. Die Faserwirksamkeit berücksichtigt, dass bei der homogenen oder der normalverteilten Faserschwerpunktsanordnung nicht ganzzahlige Schwerpunktswerte auftreten können, wie z.B. 4,8 Fasern je Schnittfläche. In diesem Beispiel bedeutet die Anzahl von 4,8 Fasern, dass vier Fasern eine Wirksamkeit von „1,0“ und einer Faser eine Wirksamkeit von „0,8“ zugewiesen wird.

- **Einzelfasertragfähigkeit zum Zeitpunkt der Rissöffnung**

$$F_{f,i} = \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot l_e \cdot g \quad (26)$$

- **Einzelfasertragfähigkeit während des Risswachstums**

$$F_{f,i,Riss} = \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot l_{e,R} \cdot g \quad (27)$$

mit  $l_{e,R} = l_e - w^*$

$$w^* = \frac{w}{\eta}$$

$w$  ... Rissöffnungsweite

- **Differenztragfähigkeit während des Risswachstums**

$$\Delta F_{f,i} = F_{f,i} - F_{f,i,Riss} \quad (28)$$

$$\Delta F_{f,i} = \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot l_e \cdot g - \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot (l_e - w^*) \cdot g$$

$$\Delta F_{f,i} = \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot g \cdot (l_e - l_e + w^*)$$

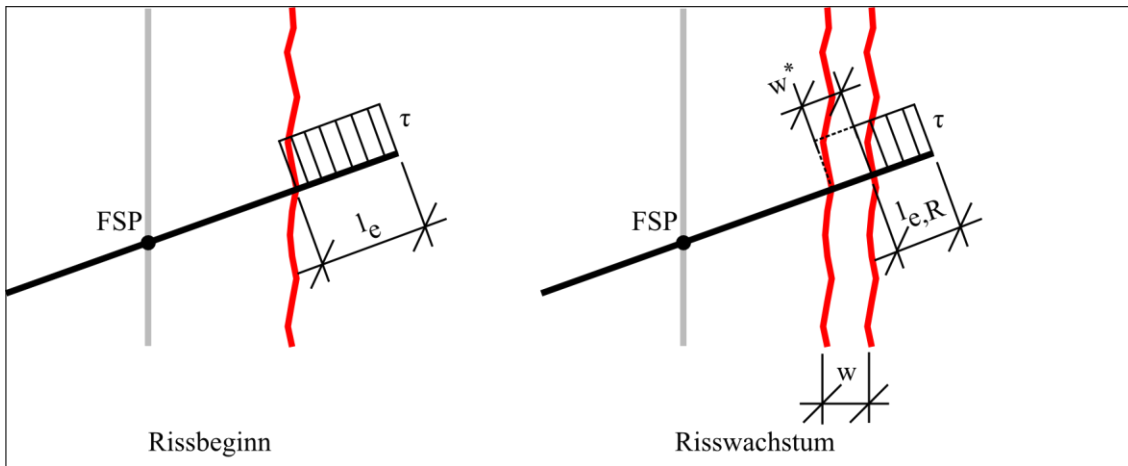
$$\Delta F_{f,i} = \tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot g \cdot w^*$$

$$\Delta F_{f,i} = \frac{\tau_i \cdot d_f \cdot \pi \cdot g \cdot w}{\eta} \quad (29)$$

Die Spannungsverteilung über die Einbindelänge wird vereinfacht als konstant angenommen. Die tatsächliche Verteilung kann, wie z.B. in [8] dargestellt, als Kosinus Hyperbolicus abgebildet werden. Da das vorliegende Modell allerdings darauf ausgerichtet ist, die Streuungen im Faserbeton quantifizieren zu können und nicht den Anspruch erhebt, exakte Spannungsgrößen zu errechnen, wird dieser Einfluss vernachlässigt.

Eine Darstellung des Einzelfaserausuges kann **Bild 5.17** entnommen werden. Im linken Bild wird der Verbund einer Faser zum Zeitpunkt des Rissbeginns dargestellt und im rechten Bild die Verkürzung der Einbindelänge  $l_e$  zur neuen Einbindelänge  $l_{e,R}$ . Die Spannungsberechnung der Gesamtfasertragfä-

higkeit wird auf die Betonrissfläche ( $b \cdot h$ ) bezogen, um im weiteren Verlauf eine rissweitenabhängige Arbeitslinie des Stahlfaserbetons ermitteln zu können.



**Bild 5.17** Darstellung der Spannungsänderung bei zunehmender Rissöffnung

Nachfolgend dargestellt sind die Ermittlung der Anfangsspannung der Nachrisszugfestigkeit bei Rissbeginn  $\sigma_{f0}$  und die Spannung während des Faserauszuges bei zunehmender Rissöffnung  $\sigma_{\text{Auszug}}$ .

- **Nachrisszugfestigkeit bei Rissbeginn ( $w=0$ )**

$$\sigma_{f0} = \frac{1}{b \cdot h} \sum_{i=1}^n F_{f,i} \quad (30)$$

- **Nachrisszugfestigkeit während des Risswachstums ( $w$ =variabel)**

$$\sigma_{\text{Auszug}} = \frac{1}{b \cdot h} \sum_{i=1}^n (F_{f,i} - \Delta F_{f,i}) \quad (31)$$

Die Abnahme der Nachrisszugtragfähigkeit wird auch in [31] beschrieben. Der dort ermittelte Faktor  $\eta_{\text{Auszug}}(w)$  wird wie folgt errechnet:

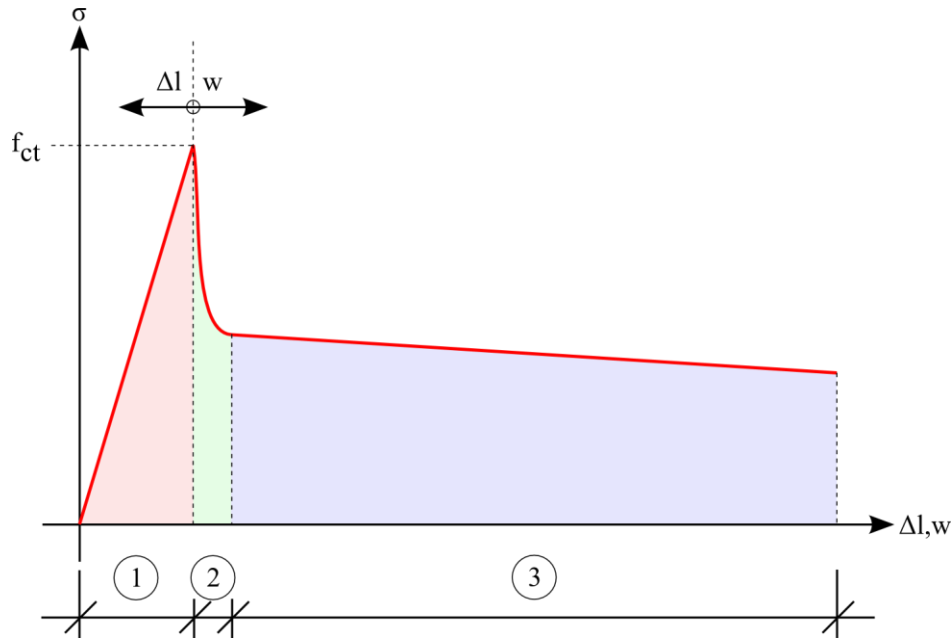
$$\eta_{\text{Auszug}}(w) = \left(1 - \frac{2 \cdot w}{l_f}\right)^2 \quad (32)$$

Der in Glg. ( 32 ) dargestellte Faktor wird mit der Ausgangsspannung multipliziert. Bei diesem Ansatz wird die Änderung der Einbindelänge mit zunehmender Rissöffnung vernachlässigt. Aus diesem Grund wird die Nachrisszugtragfähigkeit im vorliegenden Modell nach Glg. ( 31 ) ermittelt.

### 5.4.7 Schritt 7: Ermittlung der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung

Zur Ermittlung der spannungs- und rissöffnungsabhängigen Arbeitslinie des Stahlfaserbetons wird diese in 3 Bereiche unterteilt. Diese 3 Bereiche sind in **Bild 5.18** dargestellt.

- **Bereich 1:** linear – elastischer Bereich
- **Bereich 2:** Rissbeginn mit „Softening – Effekt“
- **Bereich 3:** Faserauszug



**Bild 5.18** Darstellung der 3 Bereiche der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung

Allgemein sei erwähnt, dass die Bereiche 1 und 2 in diesem Modell keinen Einfluss auf die Streuungen der Nachrisszugfestigkeit ausüben. Sie wurden der Vollständigkeit halber implementiert, um in weiterführenden Untersuchungen oder Überarbeitungen des Modells als Grundlage zu dienen.

#### **Bereich 1: linear – elastischer Bereich**

Hierbei handelt sich um den bis zur Zugfestigkeit des Betons  $f_{ct}$  linear elastischen Bereich der Betonarbeitslinie. Dieser Abschnitt ist für Normalbeton und Faserbeton ident. Auf eine Streuung des Mittelwertes der Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  wurde verzichtet, da dies keinen nennenswerten Einfluss auf die Streuung der Nachrisszugfestigkeit ausübt. Die Berechnung dieses Bereiches erfolgt über das Hookesche Gesetz.

#### **Bereich 2: Rissbeginn mit „Softening – Effekt“**

Bereich 2 beschreibt den eintretenden Rissbeginn. In der Phase des Rissbeginns besitzt der Beton die Eigenschaft, weiterhin dank einer verbleibenden Kornverzahnung, Kräfte über die Rissufer zu übertragen. Wie in [32] genauer beschrieben, bezeichnet man diesen Effekt als „Softening –Effekt“. Zur



Ermittlung der Spannungsabnahme bei zunehmender Rissöffnung wird vorausgesetzt, dass die Fläche unter der  $\sigma - w$  Linie (**Bild 5.18**, grün hinterlegter Abschnitt) der Bruchenergie  $G_f$  entspricht. Dadurch lässt sich wie in [31] dargestellt, eine Funktion für den Kurvenverlauf ermitteln.

- **Verringerung der Zugfestigkeit während der Rissöffnung** [31]

$$\sigma_{ct}(w) = f_{ct} \cdot e^{-\frac{w \cdot f_{ct}}{G_f}} \quad (33)$$

- **Ermittlung der Bruchenergie  $G_f$**  [32]

$$G_f = G_{f0} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,7} \quad (34)$$

$G_{f0}$ ...Grundwert der Bruchenergie

Die im vorliegenden Modell verwendeten Grundwerte der Bruchenergie  $G_{f0}$  sind **Tabelle 5.1** zu entnehmen.

**Tabelle 5.1** Grundwerte der Bruchenergie  $G_{f0}$  [32]

Größtkorn [mm]	8	16	32
Bruchenergie $G_{f0}$ [N/mm]	0,025	0,030	0,032

Für ein Größtkorn  $\leq 4$ mm wird die Bruchenergie  $G_f$ , wie in [33] vorgeschlagen, mit 0,06 N/mm angesetzt. Es wird davon ausgegangen, dass die Bruchenergie abhängig von der Druckfestigkeit des verwendeten Betons und dem Größtkorndurchmesser ist. Dieser Zusammenhang ist auch in Glg. ( 34 ) ersichtlich.

### Bereich 3: Faserauszug

Der Abschnitt des Faserauszuges stellt den für die Untersuchung der Streuungen der Nachrisszugfestigkeit maßgebenden Bereich dar. Die Ermittlung der Spannungen in diesem Bereich erfolgt, wie in den Gleichungen ( 26 ) bis ( 31 ) dargestellt. Einfluss auf die Streuungen dieses Bereichs üben in diesem Modell die Faserorientierung, die Verteilung der Faserschwerpunkte und die Streuung der Verbundspannungen aus.

Der Faserauszug wird bis zu einer Rissöffnung von 2 mm berechnet.

## 5.5 Funktionen bei Fasern mit Endhaken

Die Berechnung von Fasern mit Endhaken ist in der derzeitigen Version des Modells für Fasern mit einer Länge von 60 mm und einem Durchmesser von 0,75 mm möglich. Unverändert bleiben die Berechnungsschritte 1 bis 4. Sie sind ident mit jenen bei geraden Fasern. Die geänderten Funktionen werden nachfolgend beschrieben. Berechnungsschritt 5 entfällt.

### 5.5.1 Zuweisung der Einzelfasertragfähigkeiten

Die Einzelfasertragfähigkeiten werden bei Fasern mit Endhaken über, auf Versuchsergebnissen basierenden, Arbeitslinien von Einzelfaserausziehversuchen implementiert. Als Grundlage dienen die in [20] ausgewerteten Versuche. Untersucht wurden in der Arbeit von Cunha, Fasern mit einer Länge von 60 mm und einem Durchmesser von 0,75 mm.

In **Bild 5.19** bis **Bild 5.21** werden die Faserauszugskurven der Versuche bei verschiedenen Faserneigungen und Einbindelängen mit den im Modell implementierten Ausziehkurven verglichen.

Die Funktionen der im Modell verwendeten Faserauszugskurven und deren Bestimmtheitsgrad sind in **Tabelle 5.2** und **Tabelle 5.3** dargestellt.

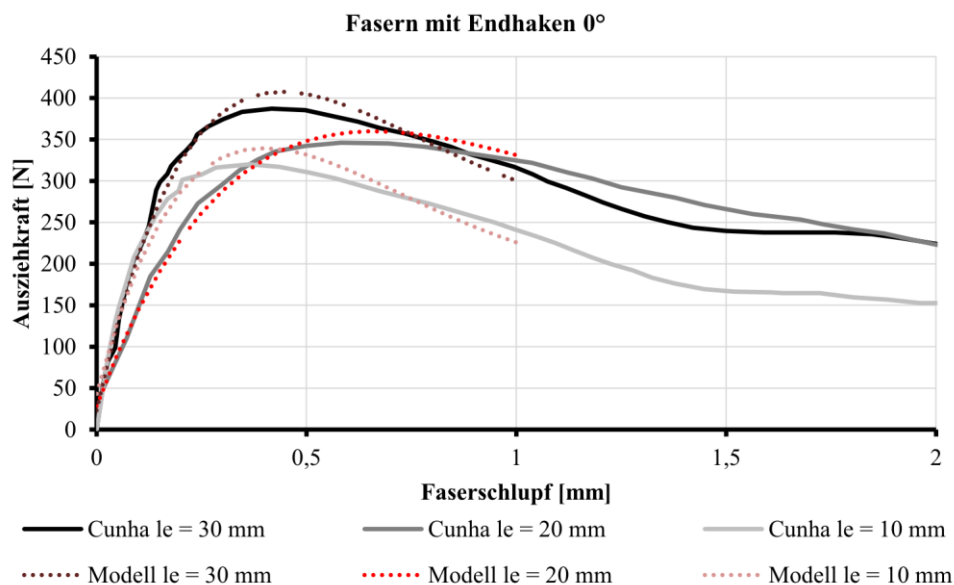
**Tabelle 5.2** Funktionen der im Modell implementierten Faserausziehkurven – 0° und 30°

0°	$l_e = 30 \text{ mm}$	$f(x) = -0,899 \cdot w^8 + 19,930 \cdot w^7 - 186,900 \cdot w^6 + 960,00 \cdot w^5$ $- 2907,000 \cdot w^4 + 5192,000 \cdot w^3 - 5148,000 \cdot w^2$ $+ 2348,000 \cdot w + 23,200$	$R^2 = 0,990$
	$l_e = 20 \text{ mm}$	$f(x) = -0,031 \cdot w^8 + 1,017 \cdot w^7 - 14,120 \cdot w^6 + 107,600 \cdot w^5$ $- 486,000 \cdot w^4 + 1305,000 \cdot w^3 - 1957,000 \cdot w^2$ $+ 1346,000 \cdot w + 28,610$	$R^2 = 0,989$
	$l_e = 10 \text{ mm}$	$f(x) = -0,899 \cdot w^8 + 19,930 \cdot w^7 - 186,900 \cdot w^6 + 960,00 \cdot w^5$ $- 2907,000 \cdot w^4 + 5192,000 \cdot w^3 - 5148,000 \cdot w^2$ $+ 2348,000 \cdot w + 23,200$	$R^2 = 0,983$
30°	$l_e = 30 \text{ mm}$	$f(x) = -1,631 \cdot 10^4 \cdot w^4 + 2,316 \cdot 10^4 \cdot w^3$ $- 1,189 \cdot 10^4 \cdot w^2 + 2995,000 \cdot w$	$R^2 = 0,986$
	$l_e = 20 \text{ mm}$	$f(x) = -2605,000 \cdot w^4 + 6077,000 \cdot w^3$ $- 5073,000 \cdot w^2 + 1960,000 \cdot w + 24,520$	$R^2 = 0,992$
	$l_e = 10 \text{ mm}$	$f(x) = -3973,000 \cdot w^4 + 8423,000 \cdot w^3$ $- 6270,000 \cdot w^2 + 2084,000 \cdot w + 25,930$	$R^2 = 0,976$

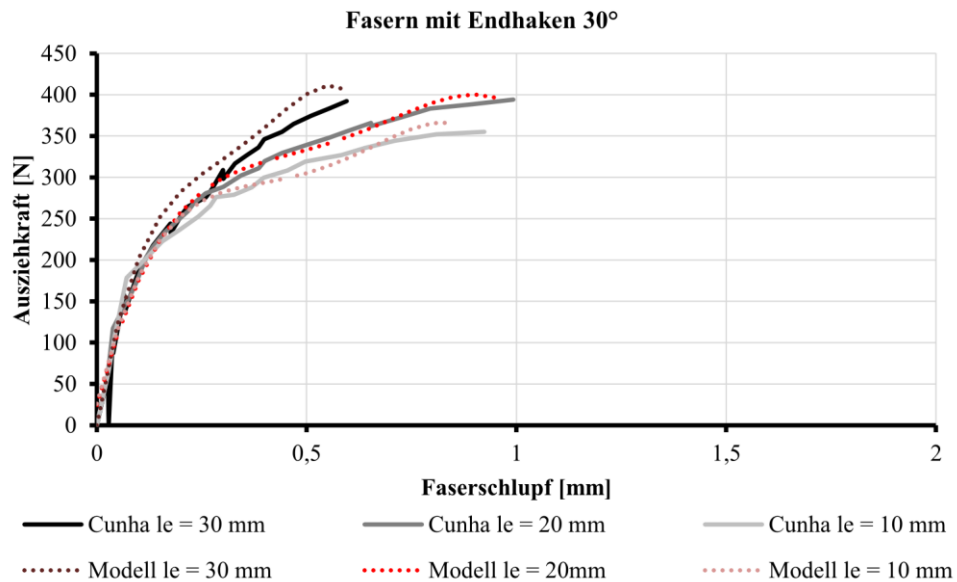
**Tabelle 5.3** Funktionen der im Modell implementierten Faserausziehkurven – 60°

<b>60°</b>	$l_e = 30 \text{ mm}$	$f(x) = - 122,400 \cdot w^4 + 575,900 \cdot w^3$ $- 896,600 \cdot w^2 + 590,200 \cdot w + 20,790$	$R^2 = 0,985$
	$l_e = 20 \text{ mm}$	$f(x) = - 19,740 \cdot w^8 + 818,000 \cdot w^7 - 5125,000 \cdot w^6$ $+ 1,383 \cdot 10^4 \cdot w^5 - 1,967 \cdot 10^4 \cdot w^4 + 1,561 \cdot 10^4 \cdot w^3$ $- 6744,000 \cdot w^2 + 1477,000 \cdot w$	$R^2 = 0,999$
	$l_e = 10 \text{ mm}$	$f(x) = - 1759,000 \cdot w^8 - 1,147 \cdot 10^4 \cdot w^7 + 2,914 \cdot 10^4 \cdot w^6$ $- 3,644 \cdot 10^4 \cdot w^5 + 2,004 \cdot 10^4 \cdot w^4 - 471,400 \cdot w^3$ $- 4092,000 \cdot w^2 + 1419,000 \cdot w$	$R^2 = 0,997$

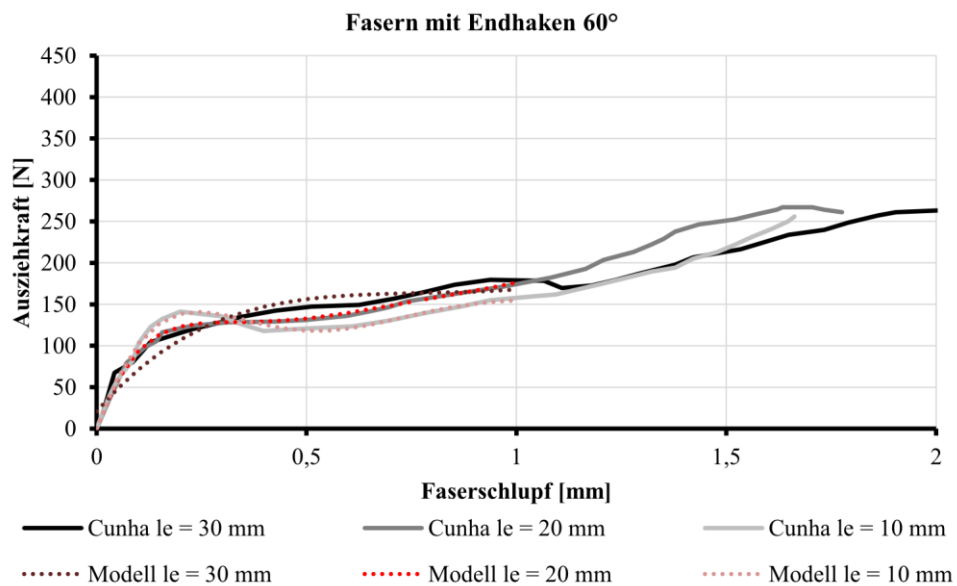
Im Modell wird jeder Faser je nach Faserorientierung und Einbindelänge die entsprechende Funktion zugewiesen. Bei zwischen den Versuchsergebnissen liegenden Orientierungswerten und Einbindelängen wird linear interpoliert. Die Interpolation erfolgt sowohl für die Einbindelänge, als auch für die Faserorientierung. Fasern mit einer Einbindelänge von weniger als 6,50 mm sind im Modell unwirksam. Bei Fasern mit einer Einbindelänge zwischen 6,50 mm und 10 mm erfolgt keine Extrapolation hinsichtlich der Einbindelänge. Die Funktionen werden nur an die jeweilige Faserorientierung angepasst.


**Bild 5.19** Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – 0°

Wie bei geraden Fasern, werden auch hier Fasern bis zu einer Faserorientierung von  $\eta = 0,333$  berücksichtigt. Bei Fasern mit einer Orientierung zwischen  $\eta = 0,500$  und  $0,333$  wird auf eine Extrapolation der Ausziehkurven verzichtet. Es wird hier nur die jeweilige Einbindelänge der Fasern berücksichtigt.



**Bild 5.20** Vergleich des Faserauszeuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – 30°



**Bild 5.21** Vergleich des Faserauszeuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – 60°

### 5.5.2 Ermittlung der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung

Im Gegensatz zu den geraden Fasern wird die Rissöffnung bei Fasern mit Endhaken, aufgrund mangelnder Versuchsergebnisse, nur bis 0,50 mm berechnet. Die übertragbare Gesamtspannung ergibt sich aus der Summe der Einzelfasertragfähigkeiten, bezogen auf die Rissfläche des Probekörpers.

## 5.6 Ausgabe der Untersuchungsparameter

Ausgegeben werden für jede Untersuchung, nach Beendigung der vordefinierten Anzahl an Simulationsschritten, 2 Ausgabedateien im xls - Format.

### Ausgabefile 1

File 1 beinhaltet die generierten Faserorientierungen für jeden Durchlauf und deren Mittelwert sowohl für das Probekörpervolumen, als auch für den Rissquerschnitt. Weiters beinhaltet diese Ausgabe auch die Anzahl der wirksamen Fasern im Riss. Der Mittelwert der Faseranzahl im Riss sowie das 5 % Quantil und das 95 % Quantil werden direkt daraus abgeleitet.

### Ausgabefile 2

Im zweiten File werden der Mittelwert der Spannungen der Nachrisskurve, der Mindest- und Maximalwert, das 5 % und 95 % Quantil sowie der Variationskoeffizient der übertragbaren Zugspannungen ausgegeben.

Die Ermittlung der Quantilwerte erfolgt über die Student- Verteilung. Diese in der Literatur auch häufig als t- Verteilung bezeichnete Testverteilung ermöglicht es, aus einer begrenzten Anzahl von Prüfwerten einen Stichprobenmittelwert und eine Stichprobenvarianz zu ermitteln. Zugrunde gelegt werden hier die Voraussetzungen, dass Einzelbeobachtungen unabhängig voneinander und normalverteilt sind. Mit wachsender Probenanzahl nähert sich die Student- Verteilung immer mehr an die Normalverteilung an. Wie auch die Normalverteilung ist diese stetig, symmetrisch, glockenförmig und besitzt einen Variationsbereich von  $+\infty$  bis  $-\infty$ . Der Unterschied zwischen beiden besteht darin, dass die t- Verteilung unabhängig vom Mittelwert und der Standardabweichung ist. [26]

Der größte Vorteil der Student- Verteilung resultiert daraus, dass sie auch bei Stichproben mit einem sehr kleinen Stichprobenumfang anwendbar ist. Dadurch kann bereits eine Varianz bei nur 2 Stichproben ermittelt werden. [34]

In **Tabelle 5.4** werden verschiedene Quantile der t- Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade dargestellt.

*„**Freiheitsgrad:** Die Anzahl der Freiheitsgrade [...] einer Zufallsgröße ist definiert durch die Zahl „frei“ verfügbarer Beobachtungen, dem Stichprobenumfang  $n$  minus der Anzahl  $a$  aus der Stichprobe geschätzter Parameter.“ [26]*

Von den in **Tabelle 5.4** dargestellten Werten, ist nur das Quantil bei einem Verteilungsanteil von 95 % und unendlich vielen Freiheitsgraden von Bedeutung. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird in diesem Modell mit  $\infty$  festgelegt, da davon ausgegangen wird, dass in jeder Anwendung des Modells mehr als 1000 Simulationsschritte durchgeführt werden, um ausreichend genaue Ergebnisse generieren zu können.

**Tabelle 5.4** Ausgewählte Quantile der Student- Verteilung für unterschiedliche Freiheitsgrade [34]

Verteilungsanteil	90 %	95 %	97,5 %	99,9 %
<b>1</b>	3,078	6,314	12,706	318,309
<b>2</b>	1,886	2,920	4,303	22,327
<b>3</b>	1,638	2,353	3,182	10,214
<b>10</b>	1,372	1,812	2,228	4,144
<b>11</b>	1,363	1,796	2,201	4,025
<b>12</b>	1,356	1,782	2,179	3,930
<b>100</b>	1,290	1,660	1,984	3,174
<b>150</b>	1,287	1,655	1,976	3,145
<b>200</b>	1,286	1,653	1,972	3,131
<b>500</b>	1,283	1,648	1,965	3,107
<b>1000</b>	1,282	1,646	1,962	3,098
$\infty$	1,282	1,645	1,960	3,090

Mit dem in **Tabelle 5.4** rot hervorgehobenen Z – Wert ist es möglich, mittels einer Abwandlung des zentralen Grenzwertsatzes wie in ( 35 ) dargestellt die benötigten 5 % und 95 % Quantilwerte zu ermitteln. Der Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  können aus den Einzelergebnissen errechnet werden.

- **Abgewandelter Grenzwertsatz für  $\infty$  viele Freiheitsgrade [35]**

$$X_{0,95;0,05} = \mu \pm Z \cdot \sigma \quad (35)$$

Die Wahl eines 5 % bzw. 95 % Quantils ist darauf zurückzuführen, dass auch in [36] die unteren und oberen charakteristischen Werte von Baustoffen mit Hilfe dieser Quantilwerte festgelegt werden. Der in [36] verwendete Begriff des Fraktilwertes stellt eine veraltete Bezeichnung des Quantilwertes dar.

## 5.7 Streuungsparameter

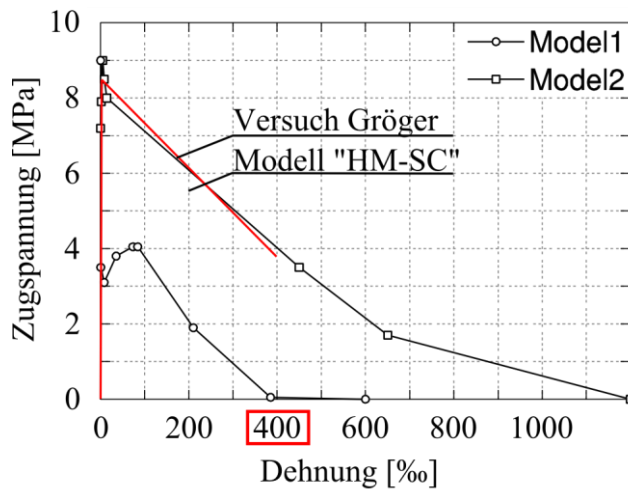
Zusammenfassend wird hier eine Auflistung der im Modell die Streuung beeinflussenden Parameter angeführt.

- **Faserschwerpunktsverteilung** mittels:
  - homogener Verteilung,
  - Normalverteilung (mit vordefinierter Standardabweichung),
  - Poissonverteilung,
  - Variation der Fasermenge
- **Mittelwert der Faserorientierung** im Gesamtvolumen:
  - Streuung durch vordefinierten Variationskoeffizienten ( $\beta$  – verteilt)
- **Einzelfaserorientierung**:
  - abhängig vom Mittelwert der Faserorientierung im Gesamtvolumen ( $\beta$  – verteilt)
- **Verbundspannung**:
  - Streuung durch vordefinierten Variationskoeffizienten (normalverteilt)

Die Wahl der Berechnungsmethoden bleibt dem Nutzer überlassen. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden wurden bereits in Abschnitt 5.4 erläutert. Der quantitative Einfluss dieser einzelnen Parameter auf die Streuung wird in Kapitel 6 dargestellt. Bereits an dieser Stelle kann allerdings erwähnt werden, dass die Faserorientierung  $\eta$  in der Rissfläche sowohl Einfluss auf die Streuungen der einzelnen Orientierungswerte im Riss, als auch auf die Anzahl der den Riss kreuzenden Fasern ausübt. Von einer Anwendung der Normal- oder Poissonverteilung zur Faserschwerpunktsverteilung wird abgeraten. Wie in Kapitel 6 ersichtlich, sind diese Berechnungsmethoden nicht zielführend.

## 5.8 Vergleich mit Versuchsergebnissen

Zur Verifizierung des Modells wurde der Verlauf der Nachrisszugfestigkeitskurve (noch ohne Berücksichtigung der Richtigkeit der Streuungen) Versuchsergebnissen von Gröger gegenübergestellt. In **Bild 5.22** ist einer dieser Vergleiche dargestellt. Erkennbar ist eine gute Annäherung der Ergebnisse des Modells an die in [5] durchgeführten Versuche. Der auftretende Wiederfestigungsast zu Beginn des Nachrisszugtragverhaltens wird im Modell nicht abgebildet. Die in **Bild 5.22** dargestellten Dehnungen  $\varepsilon$  aus den Versuchen von Gröger, beziehen sich auf eine Vergleichsfaserlänge von 5 mm. 1000 ‰ entsprechen also einer Rissöffnung von 5 mm. Da das Rechenmodell „HM-SC“ so kalibriert ist, dass nur Rissöffnungen bis 2mm berechnet werden, ist der letzte Ausgabewert der Zugfestigkeit im Modell mit jenem bei einer Dehnung von 400 ‰ in den Versuchen von Gröger zu vergleichen.



**Bild 5.22** Vergleich Versuch Gröger – Modell „HM-SC“ [5]

$\sigma_{\text{mittel}}$ [MPa]	Rissweite $w$ [mm]
8,65	0,00
8,16	0,20
7,18	0,60
6,20	1,00
3,75	2,00

**Tabelle 5.5** Ausgewählte Ergebnisse der Spannungsberechnung mittels „HM-SC“

Als Eingabeparameter wurden die in den Versuchen zur Anwendung kommenden Werte im Modell wie folgt vordefiniert:

- Faserlänge  $l_f$ : 12,7 mm
- Faserdurchmesser  $d_f$ : 0,15 mm
- Faserdosierung: 1,50 Vol-%
- Probekörperabmessungen (b/h/l): 150/150/600 mm
- E-Modul Beton: 48.000,0 MPa
- $f_{ck}$  (Druckfestigkeit): 160,0 MPa
- $f_{ctm}$  (Zugfestigkeit): 7,5 MPa

Zusätzliche Definitionen:

- Verbundspannung  $\tau_0$ : 11,5 MPa
- Faserorientierung im Kern  $\eta_K$ : 0,600 - (nach [18])
- Faserorientierung am Rand  $\eta_R$ :  $2/\pi = 0,637$  -

Die zahlenmäßigen Ergebnisse der Spannungsberechnung sind in **Tabelle 5.5** dargestellt.



Neben Vergleichen mit Versuchsergebnissen auf Spannungsebene, wurden auch weitere Berechnungsergebnisse mit Versuchen von Gröger (unveröffentlicht) verglichen. Die Ergebnisse sind in **Tabelle 5.6** bis **Tabelle 5.8** gegenübergestellt. Die in den Tabellen dargestellten Ergebnisse stehen für 3 verschiedene von Gröger untersuchte Balken, von welchen jeweils 5 Schnittproben ausgewertet wurden. S1 bis S5 kennzeichnet hierbei die Schnittnummer. Als Eingabeparameter im Modell dienten hierbei die Balkengeometrie mit 0,25 m auf 0,40 m, die zugegebene Fasermenge und die Faserorientierung im Schnitt.

**Tabelle 5.6** Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 1)

		S1	S2	S3	S4	S5
<b>Balken 1</b>	<b>N<sub>Schnitt</sub></b>	821	708	700	666	802
	<b>Fasermenge [kg/m<sup>3</sup>]</b>	32,0	27,4	26,7	23,7	28,9
	<b>η<sub>Gesamt</sub></b>	0,569	0,574	0,582	0,624	0,616
	<b>σ<sub>η, Gesamt</sub></b>	0,230	0,263	0,269	0,259	0,235
	<b>η<sub>Schnitt soll</sub></b>	0,662	0,695	0,706	0,731	0,706
	<b>η<sub>Schnitt Mayer</sub></b>	0,661	0,695	0,706	0,731	0,706
	<b>N<sub>Schnitt Mayer</sub></b>	820	707	699	664	801
	<b>η<sub>3D Mayer</sub></b>	0,570	0,577	0,586	0,626	0,616
<b>Abweichungen [%]</b>	<b>N<sub>S</sub></b>	<b>0,12</b>	<b>0,14</b>	<b>0,14</b>	<b>0,30</b>	<b>0,12</b>
	<b>η<sub>S</sub></b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,03</b>	<b>0,02</b>
	<b>η<sub>3D</sub></b>	<b>-0,11</b>	<b>-0,58</b>	<b>-0,68</b>	<b>-0,32</b>	<b>-0,08</b>

**Tabelle 5.7** Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 2)

		S1	S2	S3	S4	S5
<b>Balken 2</b>	<b>N<sub>Schnitt</sub></b>	827	917	972	696	644
	<b>Fasermenge [kg/m<sup>3</sup>]</b>	38,1	29,3	33,0	25,4	25,0
	<b>η<sub>Gesamt</sub></b>	0,481	0,694	0,654	0,609	0,572
	<b>σ<sub>η, Gesamt</sub></b>	0,294	0,237	0,241	0,239	0,241
	<b>η<sub>Schnitt soll</sub></b>	0,661	0,775	0,742	0,702	0,673
	<b>η<sub>Schnitt Mayer</sub></b>	0,661	0,774	0,742	0,702	0,673
	<b>N<sub>Schnitt Mayer</sub></b>	825	914	970	695	643
	<b>η<sub>3D Mayer</sub></b>	0,500	0,694	0,654	0,610	0,573
<b>Abweichungen [%]</b>	<b>N<sub>S</sub></b>	<b>0,24</b>	<b>0,33</b>	<b>0,21</b>	<b>0,14</b>	<b>0,16</b>
	<b>η<sub>S</sub></b>	<b>-0,03</b>	<b>0,07</b>	<b>0,05</b>	<b>0,02</b>	<b>0,01</b>
	<b>η<sub>3D</sub></b>	<b>-3,90</b>	<b>0,01</b>	<b>-0,07</b>	<b>-0,12</b>	<b>-0,21</b>

**Tabelle 5.8** Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 3)

		S1	S2	S3	S4	S5
<b>Balken 3</b>	<b>N</b> Schnitt	752	793	735	793	695
	<b>Fasermenge [kg/m<sup>3</sup>]</b>	29,9	33,6	27,0	32,0	29,0
	<b><math>\eta</math></b> Gesamt	0,557	0,524	0,605	0,550	0,532
	<b><math>\sigma_{\eta}</math></b> Gesamt	0,276	0,309	0,266	0,289	0,260
	<b><math>\eta</math></b> Schnitt soll	0,694	0,706	0,721	0,702	0,658
	<b><math>\eta</math></b> Schnitt Mayer	0,694	0,705	0,721	0,701	0,658
	<b>N</b> Schnitt Mayer	751	792	734	792	694
	<b><math>\eta</math></b> 3D Mayer	0,552	0,481	0,603	0,537	0,529
<b>Abweichungen [%]</b>	<b>N<sub>s</sub></b>	<b>0,13</b>	<b>0,13</b>	<b>0,14</b>	<b>0,13</b>	<b>0,14</b>
	<b><math>\eta</math> s</b>	<b>0,00</b>	<b>0,06</b>	<b>-0,01</b>	<b>0,03</b>	<b>0,01</b>
	<b><math>\eta</math> 3D</b>	<b>0,97</b>	<b>8,23</b>	<b>0,23</b>	<b>2,45</b>	<b>0,43</b>

Die Rückrechnung aus der Faserorientierung im Schnitt auf jene im Volumen, erfolgte für die Versuche von Gröger nach Glg. ( 3 ). Durch das Modell kann Glg. ( 3 ) verifiziert werden.

Aus diesen Gegenüberstellungen ist gut zu erkennen, dass das Modell eine zuverlässige Berechnung der Faserbetonparameter ermöglicht. Die relativ großen Abweichungen in S1 (**Tabelle 5.7**) und S2 (**Tabelle 5.8**), bezogen auf die Faserorientierung im Volumen, sind auf eine ungünstig gewählte Standardabweichung zurückzuführen.

Die Abweichungen in der Faseranzahl im Schnitt (meist ein Unterschied von einer Faser im Vergleich zu den Versuchen) sind darauf zurückzuführen, dass die Faseranzahl im Modell immer abgerundet wird. In der Berechnung mittels „HM-SC“ wurden 5000 Simulationen je Balken und Schnittfläche durchgeführt.

## 5.9 Zusammenfassung „HM-SC“

„HM-SC“ ist in seiner derzeitigen Form darauf ausgelegt, die Streuungen in Faserbetonzugproben zu quantifizieren. Mit dem Modell sind Untersuchungen glatter Stahlfasern und von Fasern mit Endhaken möglich. Die Anwendung zur Untersuchung von Fasern mit Endhaken ist derzeit auf Fasern mit einer Faserlänge von 60 mm und einem Faserdurchmesser von 0,75 mm beschränkt.

Grundlage für das Modell sind die, in Kapitel 5.7 festgelegten, Streuungsparameter. In einem ersten Schritt werden in „HM-SC“ die grundlegenden Parameter, wie z.B. die vorhandene Faseranzahl aus den eingegebenen Parametern errechnet.

Der nächste Berechnungsschritt dient dazu, die Verteilung der Fasern im Betonvolumen zu steuern. Im Anschluss an die Faserverteilung wird für jede Faser, im betrachteten Vergleichsvolumen mit einem Abstand von  $l_f/2$  zum Riss, die Einzelfaserorientierung generiert und zugewiesen. Diese Einzelfaserorientierungen sind abhängig vom vordefinierten Mittelwert der Faserorientierung und der Standardabweichung. Der Mittelwert der Faserorientierung kann selbst streuen, sodass die Einzelfaserorientierungen von diesem abhängig sind. Der Mittelwert der Faserorientierung  $\eta_V$  wird in der Eingabe festgelegt und berücksichtigt auch den Randeffect. Durch die Orientierung der Einzelfasern und den Abstand der betreffenden Schnittfläche zum Riss werden die einzelnen Einbindelängen errechnet.

Basierend auf den zugewiesenen Einzelfaserorientierungen wird für jede einzelne Faser die übertragbare Verbundspannung ermittelt und der betreffenden Faser zugeordnet. Die Verbundspannung bei einem Fasereinbindewinkel von  $0^\circ$  ( $\eta = 1$ ) ist für jede Untersuchung festzulegen. Die übertragbaren Verbundspannungen für alle Fasern mit den zugehörigen generierten Orientierungen werden auf  $\tau_0$  (Verbundspannung bei einem Einbindewinkel von  $0^\circ$ ) basierend ermittelt. Abhängig von der Faserorientierung, wird auch jeder Faser das zugehörige Ausziehverhalten zugewiesen. Bei Fasern mit Endhaken wird den einzelnen Fasern keine übertragbare Verbundspannung zugeordnet, sondern direkt ein auf Versuchen basierender Verlauf für den Einzelfaserauszug. Nachdem für jede Faser die Orientierung, die Einbindelänge und die übertragbare Verbundspannung ermittelt wurden, werden die Einzelfasertragfähigkeiten nach Glg. ( 26 ) errechnet (entfällt bei Fasern mit Endhaken). Die Einzelfasertragfähigkeiten werden anschließend verwendet, um die über den Riss übertragbare Zugspannung feststellen zu können. Die übertragbare Zugspannung ist mit zunehmender Rissöffnung veränderlich. Eine Veränderung der Zugspannung bewirkt auch eine Änderung der Streuungen.

Durch mehrmalige Simulation und unterschiedliche Untersuchungsparameter wird es so ermöglicht, den quantitativen Streuungseinfluss für jeden Parameter zu ermitteln. Werden die einzelnen Streuungsparameter überlagert, ergibt sich die Gesamtstreuung. Diese Gesamtstreuung wiederum kann in die Einflüsse der einzelnen Parameter aufgeteilt werden.

Verifiziert wird das vorliegende Rechenmodell durch die in **Abschnitt 5.8** dargestellten Vergleiche mit Versuchsergebnissen von Gröger.

## 6 Parameterstudie

Im folgenden Kapitel sind die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen dargestellt. Hierfür werden die Faserorientierung, die Faserverteilung, sowie die Verbundspannung variiert und deren Einfluss auf die Gesamtstreuungen ermittelt.

### 6.1 Allgemeines

Die nachfolgend dargestellten Variationskoeffizienten der Gesamtstreuung stellen jeweils den Mittelwert der Variationskoeffizienten über die Rissweite dar. Sowohl für den Normalbeton, als auch für die Auswertungen des ultrahochfesten Betons werden 2 Arten der Faserverteilung angewendet. Einerseits wird die Poissonverteilung untersucht, andererseits erfolgt die Faserverteilung über die Variation der zugegebenen Fasermenge. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind immer in Abhängigkeit der mittleren Faseranzahl im Riss dargestellt. Der Einfluss des Größtkorns auf die Faserverteilung wird vernachlässigt, da bei Normalbetonen auch mit einem Größtkorndurchmesser von 8 mm gearbeitet werden kann. Somit ist der Größtkorneinfluss wieder vernachlässigbar. Um die Streuungseinflüsse aufgeteilt darstellen zu können, werden für jede Untersuchung mehrere Untersuchungsvarianten durchgeführt. Da in den Legenden der nachfolgenden Graphiken nur die Kurzbezeichnungen der Untersuchungen angeführt sind, werden die Kurzbezeichnungen einleitend erläutert.

#### Variante 1

*In dieser Untersuchung wird nur der Einfluss der Faserverteilung berechnet. Die Verteilung der Faserschwerpunkte erfolgt über die Poissonverteilung.*

#### Variante 2

*Bei Variante 2 erfolgt die Variation der Faserverteilung über Streuungen in der beigegebenen Fasermenge. Die Faserverteilung je Simulationsschritt ist homogen. Die Streuungswirksamkeit der restlichen Parameter wird deaktiviert.*

#### Variante 3

*Hier werden nur die Streuungen aus einer Variation der Verbundspannungen untersucht.*

## Variante 4

*Variante 4 wird angewendet, um die Streuungen zu ermitteln, welche aus der Verteilung der Einzelfaserorientierung und der Streuung des Mittelwertes der Faserorientierung im Volumen resultieren.*

## Kombination 1

*Diese Variante stellt eine Kombination der Varianten 1, 3 und 4 dar. Diese Untersuchung ist notwendig, um die Gesamtstreuungen zu erhalten.*

## Kombination 2

*Hier wird die Kombination aus Variante 2, 3 und 4 gebildet. Wie Kombination 1 ist auch diese zur Ermittlung der Gesamtstreuungen notwendig.*

Die Auswertungen der einzelnen Ergebnisse zeigen den Zusammenhang der Faseranzahl im Riss mit einem zugehörigen Variationskoeffizienten. Die ausgegebene Streuung im Tragverhalten wird über die Rissbreite von 0 bis 2 mm gemittelt. Variiert werden jeweils die zugegebene Fasermenge und die Probekörpergeometrie. Untersucht werden weiters die Einflüsse unterschiedlicher Fasergeometrien und unterschiedlicher Betongüten. Wobei die Betongüte in den nachfolgenden Untersuchungen lediglich einen Einfluss auf die maximal übertragbare Verbundspannung ausübt. Die Ergebnisse der in Abschnitt 6.2 und 6.2.3 dargestellten Auswertungen werden in Abschnitt 6.5 besprochen.

## 6.2 Normalbeton

### 6.2.1 Poissonverteilung

In diesem Abschnitt werden die Untersuchungsergebnisse von Normalbetonproben mit poissonverteilten Faserschwerpunkten abgebildet. Den Darstellungen in **Bild 6.1** bis **Bild 6.4** ist zu entnehmen, dass die Poissonverteilung keine zielführenden Ergebnisse liefert, was bereits in Abschnitt 5.4.2 erläutert wurde. Die Eingabeparameter sind **Tabelle 6.1** und **Tabelle 6.2** zu entnehmen. Die Untersuchungen unter Anwendung der Poissonverteilung werden ohne Berücksichtigung des Randeffectes durchgeführt.

Die Variationskoeffizienten für die Berechnungen dieses Abschnittes wurden wie folgt festgelegt:

- CV  $\tau$ :                      15,00 %
- CV  $\eta_V$ :                      5,00 %

Der Variationskoeffizient der Verbundspannung ergibt sich aus Rückrechnungen der Materialparameter für Beton in [37]. Dieser Koeffizient ist allerdings als zu hoch zu erachten, da in der Norm ungünstigste Einflüsse berücksichtigt werden. Wie sich in den Auswertungen allerdings zeigt, ist der Einfluss der Verbundspannung vernachlässigbar klein, weshalb auch der Einfluss dieses hohen Variationskoeffizienten

fizienten zu keinen Beeinträchtigungen des Ergebnisses führt. Der Variationskoeffizient von 5 % für  $\eta_V$  ergibt sich aus den, von Gröger durchgeführten, Versuchen.

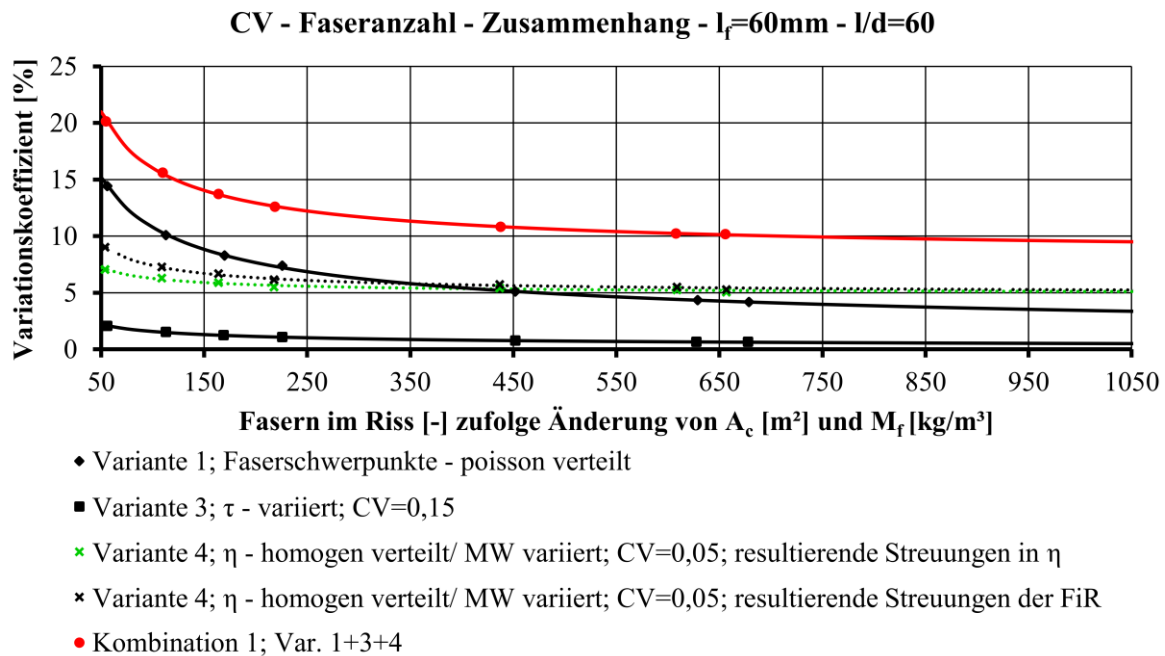
Alle Auswertungen werden jeweils zweimal dargestellt. In der ersten Darstellung wird der Streuungseinfluss aus der Faserorientierung in die daraus resultierende Streuung der Faseranzahl im Riss und in die Streuung in der Orientierung aufgeteilt. In der zweiten Darstellung ist die überlagerte Summe dieser beiden Streuungen dargestellt. Im Anschluss an die graphischen Darstellungen werden in **Tabelle 6.3** die Näherungsfunktionen der einzelnen Kurvenverläufe aufgelistet. Sowohl für die Fasern mit 30 mm, als auch für die Fasern mit 60 mm Länge werden die identen Kurvenfunktionen gewählt, wodurch aufgezeigt wird, dass der Einfluss der Fasergeometrie auf die Streuungen zu vernachlässigen ist.

**Tabelle 6.1** Eingabeparameter –  $l_f = 60 \text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Normalbeton

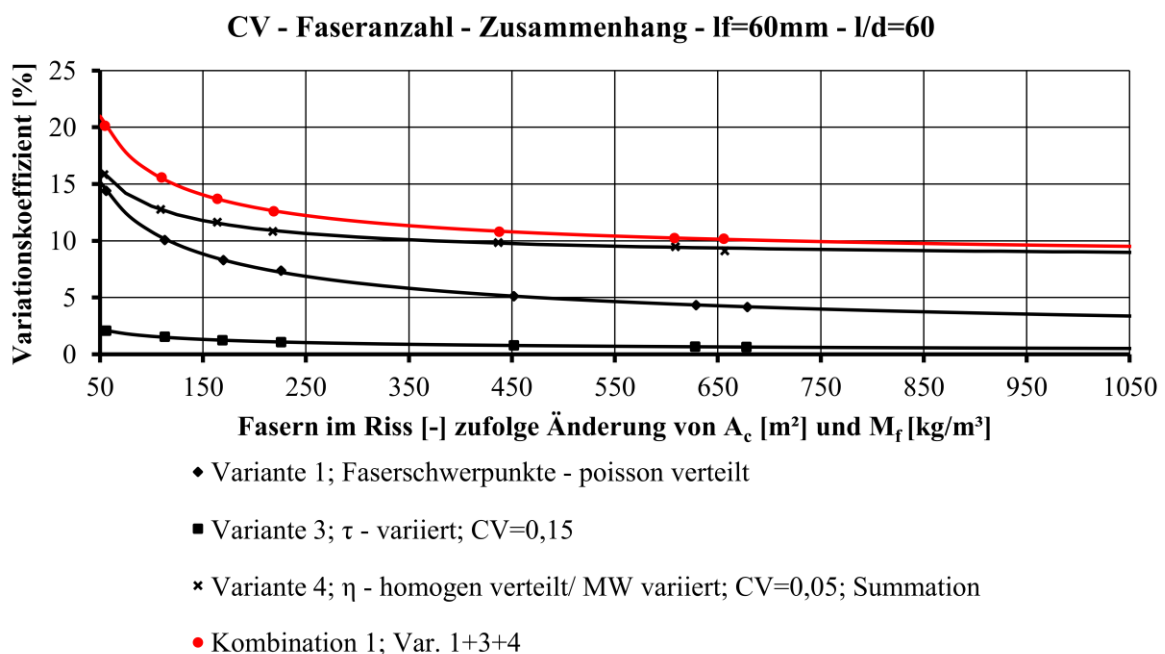
Faserlänge $l_f$	60	mm
Faserdurchmesser $d_f$	1,00	mm
Fasermenge	30/ 60/ 90	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50	-
$\eta_{\text{Rand}}$	0,50	-
$\tau_0$	3,00	MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,15/ 0,70	m
	0,30/ 0,30/ 0,70	m
	0,50/ 0,50/ 0,70	m

**Tabelle 6.2** Eingabeparameter –  $l_f = 30 \text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Normalbeton

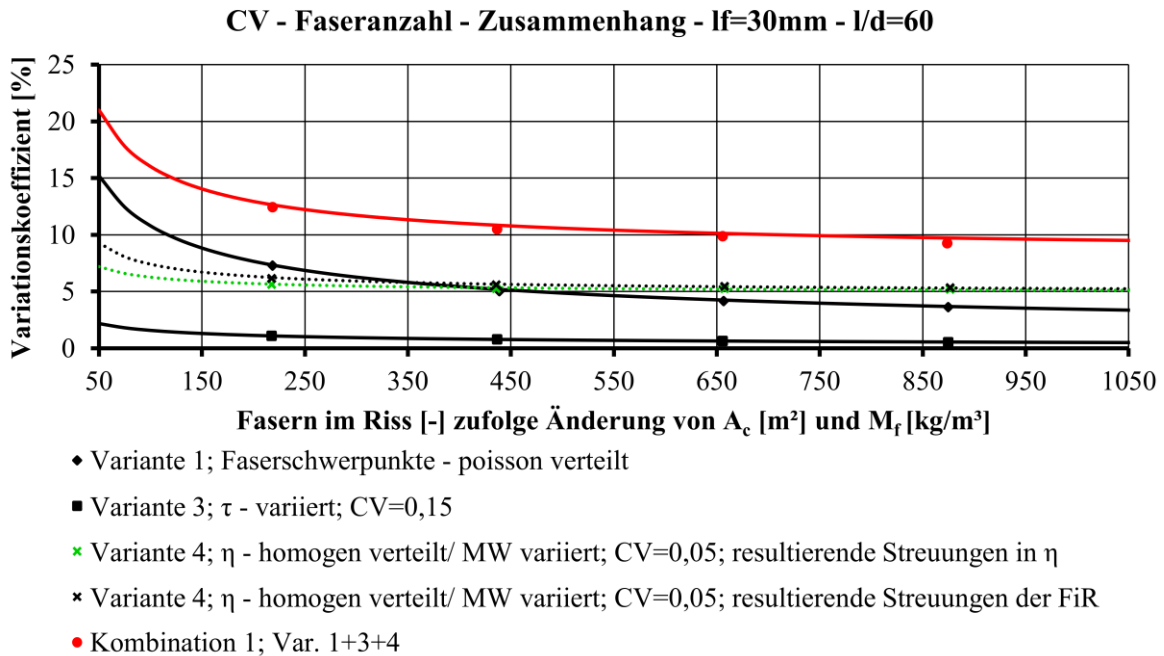
Faserlänge $l_f$	30	mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,50	mm
Fasermenge	30/ 60/ 90	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50	-
$\eta_{\text{Rand}}$	0,50	-
$\tau_0$	3,00	MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,15/ 0,70	m
	0,30/ 0,30/ 0,70	m
	0,50/ 0,50/ 0,70	m



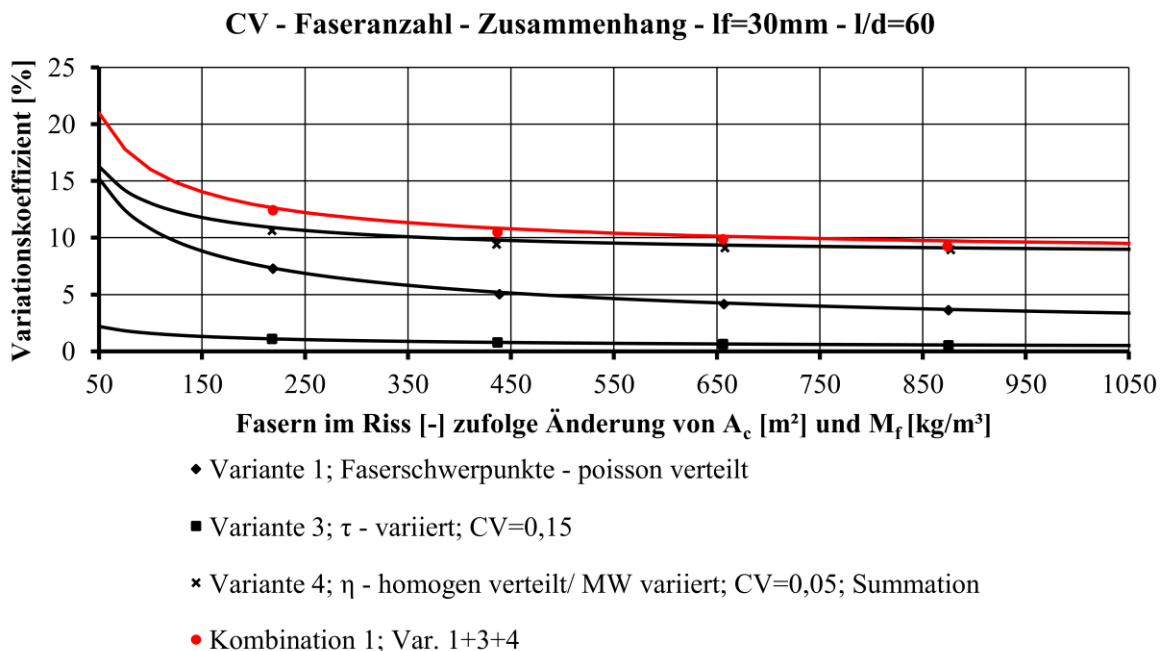
**Bild 6.1** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 60 \text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt



**Bild 6.2** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 60 \text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Einfluss aus  $\eta$  überlagert



**Bild 6.3** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 30\text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt



**Bild 6.4** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 30\text{ mm}$  –  $l/d = 60$  – Poissonverteilung – Einfluss aus  $\eta$  überlagert



**Tabelle 6.3** Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Poissonverteilung – Normalbeton

Variante 1	
$f(x) = 104,500 \cdot \text{FiR}^{-0,492} - 0,043$	$R^2 = 0,999$
Variante 3	
$f(x) = 13,060 \cdot \text{FiR}^{-0,450} - 0,064$	$R^2 = 0,999$
Variante 4 – Streuungen $\eta$	
$f(x) = 39,640 \cdot \text{FiR}^{-0,722} + 4,841$	$R^2 = 0,967$
Variante 4 – Streuungen FiR	
$f(x) = 95,710 \cdot \text{FiR}^{-0,785} + 4,838$	$R^2 = 0,993$
Variante 4 – Gesamt	
$f(x) = 137,500 \cdot \text{FiR}^{-0,721} + 8,071$	$R^2 = 0,995$
Kombination 1	
$f(x) = 192,800 \cdot \text{FiR}^{-0,688} + 7,892$	$R^2 = 0,999$

Das Bestimmtheitsmaß der einzelnen Näherungskurven ist in **Tabelle 6.3** dargestellt. Es ist eine sehr gute Anpassung der Näherungskurven an die Versuchsergebnisse zu erkennen.

### 6.2.2 Verteilung der Fasermenge – gerade Fasern

Da eine Poissonverteilung nicht zielführend ist, werden in diesem Abschnitt die Untersuchungsergebnisse von Normalbetonproben dargestellt, wobei die Fasermenge in jedem Simulationsschritt variiert. Die Ergebnisse sind in **Bild 6.6** bis **Bild 6.9** dargestellt. Die Eingabeparameter sind **Tabelle 6.4** und **Tabelle 6.5** zu entnehmen. Im Unterschied zu den Untersuchungen mit einer Poissonverteilung, wird der Einfluss des Randeffektes in diesen Berechnungen mitberücksichtigt. Es wird davon ausgegangen, dass sich der Randeffekt in einem Bereich im Abstand von  $l_f/2$  zum Rand mit einer mittleren Faserorientierung von  $\eta = 0,60$  einstellt. Dies wird von Behloul in [14] vorgeschlagen.

Der Variationskoeffizient für die Änderung der Fasermenge wird in diesem Fall mittels der nachfolgend dargestellten Funktion beschrieben. Diese Funktion lässt sich aus Versuchsergebnissen von Gröger näherungsweise ableiten. Zur Ermittlung der Fasern im Riss vor Simulationsstart wird die Formel von Hilsdorf angewendet. Dies ist notwendig, da der CV von der Faseranzahl im Riss abhängig ist,

wie in der verwendeten Gleichung für den Variationskoeffizienten der Fasermenge zu erkennen ist (siehe **Bild 6.5**). Die Anzahl der Fasern im Riss im Modell wird erst im späteren Verlauf aufgrund der streuenden Versuchsparameter errechnet. Die Gleichung von Hilsdorf ist in Glg. ( 37 ) dargestellt.

- **Variationskoeffizient der Fasermenge**

$$CV_{Mf} = 111,400 \cdot FiR^{-0,402} + 2,158 \quad (36)$$

- **Gleichung nach Hilsdorf [38]**

$$\eta = \frac{N_f \cdot A_f}{V_f \cdot A_C} \cdot 100 \quad (37)$$

$N_f$  ...Anzahl der die Bruchfläche kreuzenden Fasern (FiR)

$A_f$  ...Querschnittsfläche einer Faser

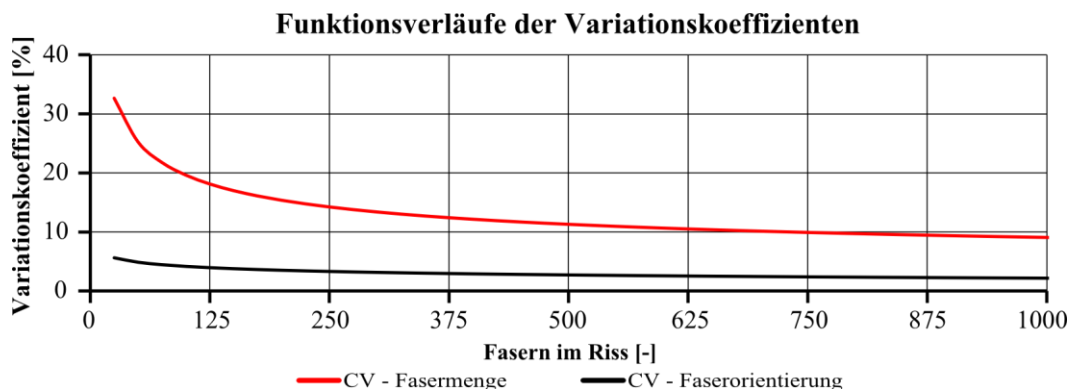
$V_f$  ...Fasergehalt in Vol.-%

$A_C$  ...Querschnittsfläche der Betonprobe

Umformen der Formel nach Hilsdorf führt zu Glg. ( 38 ), welche in Glg. ( 36 ) eingesetzt werden kann.

$$FiR = \frac{V_f \cdot A_C \cdot \eta_V}{A_f \cdot 100} \quad (38)$$

Zur Ermittlung des Variationskoeffizienten des Mittelwertes der Faserorientierung, wird in diesen Untersuchungen auch eine, anhand der Versuche von Gröger abgeleitete Funktion verwendet. Diese Funktion wird in Glg. ( 39 ) abgebildet. Die dargestellten Funktionen sind Annahmen und in einer weiteren Arbeit zu verifizieren.



**Bild 6.5** Funktionsverläufe der verwendeten Variationskoeffizienten

Zur vorzeitigen Ermittlung von FiR wird wiederum Glg. ( 38 ) verwendet. Die Funktionsverläufe der Gleichungen ( 36 ) und ( 39 ) werden in **Bild 6.5** dargestellt.

- **Variationskoeffizient des Mittelwertes der Faserorientierung**

$$CV_{\eta_V} = 15,030 \cdot FiR^{-0,106} - 5,073 \quad (39)$$

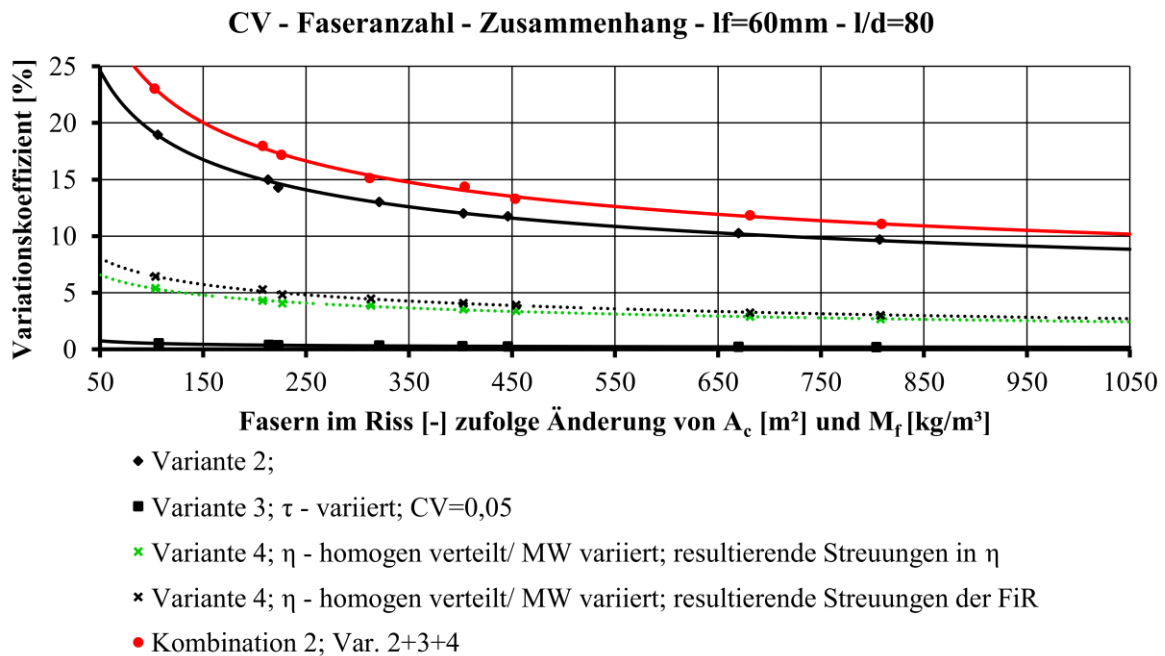
**Tabelle 6.4** Eingabeparameter –  $l_f = 60 \text{ mm}$  –  $l/d = 80$  – Änderung  $M_f$  – Normalbeton

Faserlänge $l_f$	60	mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,75	mm
Fasermenge	30/ 60/ 90	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50	-
$\eta_{\text{Rand}}$	0,60	-
$\tau_0$	3,00	MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,15/ 0,70	m
	0,25/ 0,20/ 0,70	m
	0,30/ 0,30/ 0,70	m

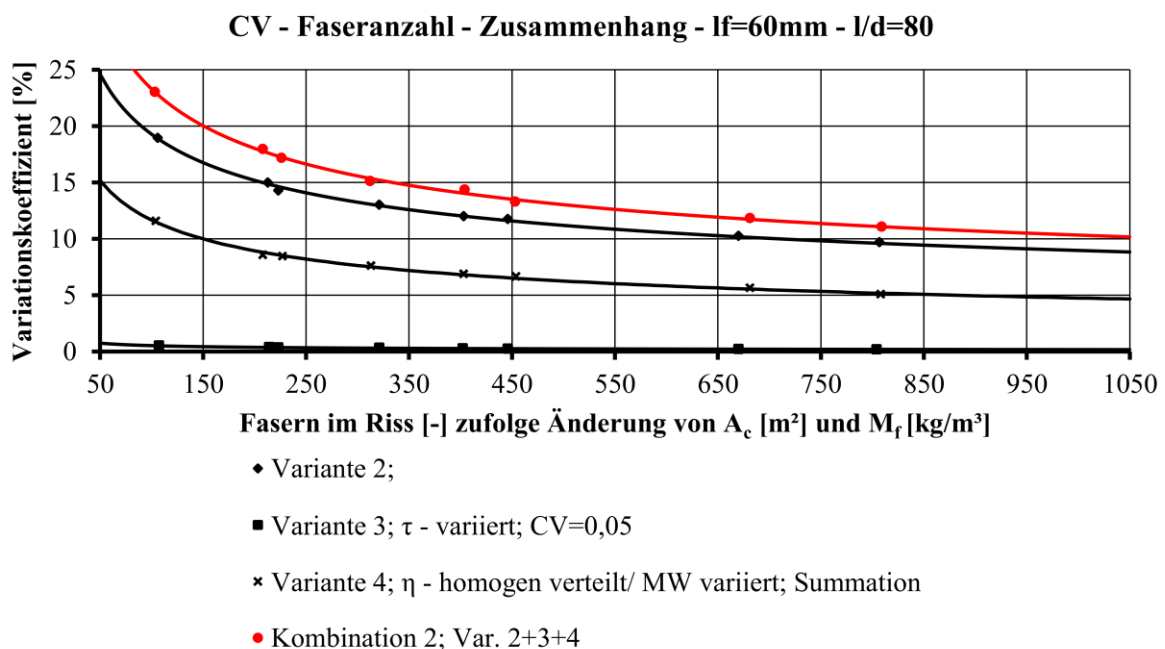
**Tabelle 6.5** Eingabeparameter –  $l_f = 30 \text{ mm}$  –  $l/d = 50$  – Änderung  $M_f$  – Normalbeton

Faserlänge $l_f$	30	mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,60	mm
Fasermenge	30/ 60/ 90	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50	-
$\eta_{\text{Rand}}$	0,60	-
$\tau_0$	3,00	MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,15/ 0,70	m
	0,25/ 0,20/ 0,70	m
	0,30/ 0,30/ 0,70	m

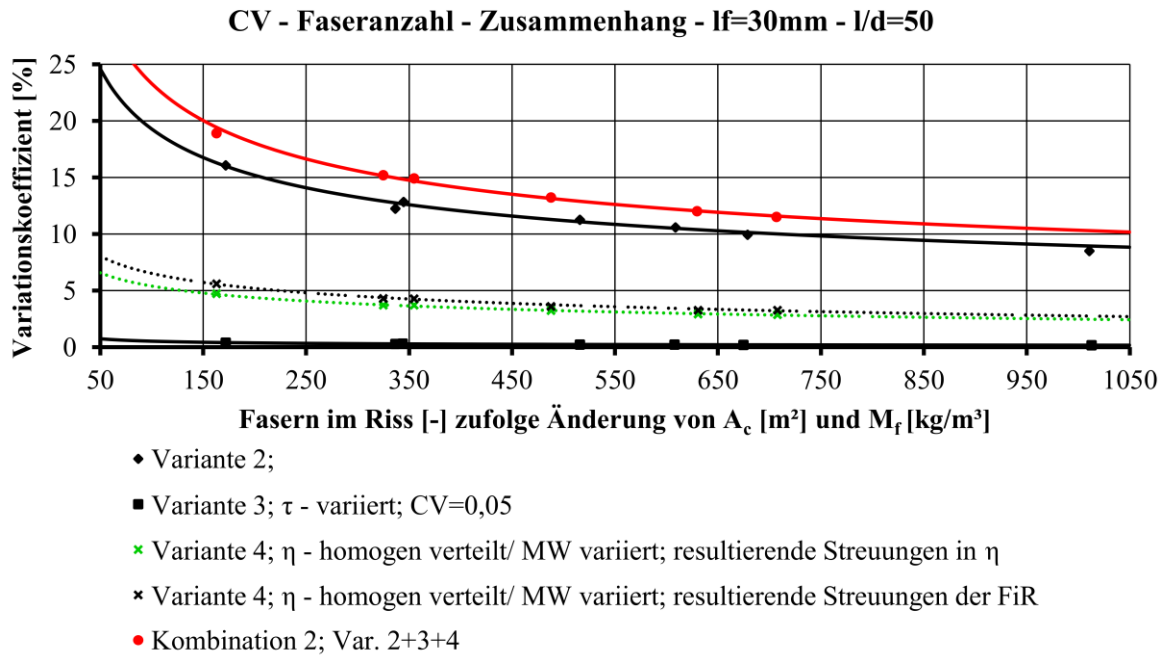
Der Variationskoeffizient für  $\tau$  wird auf 5 % reduziert.



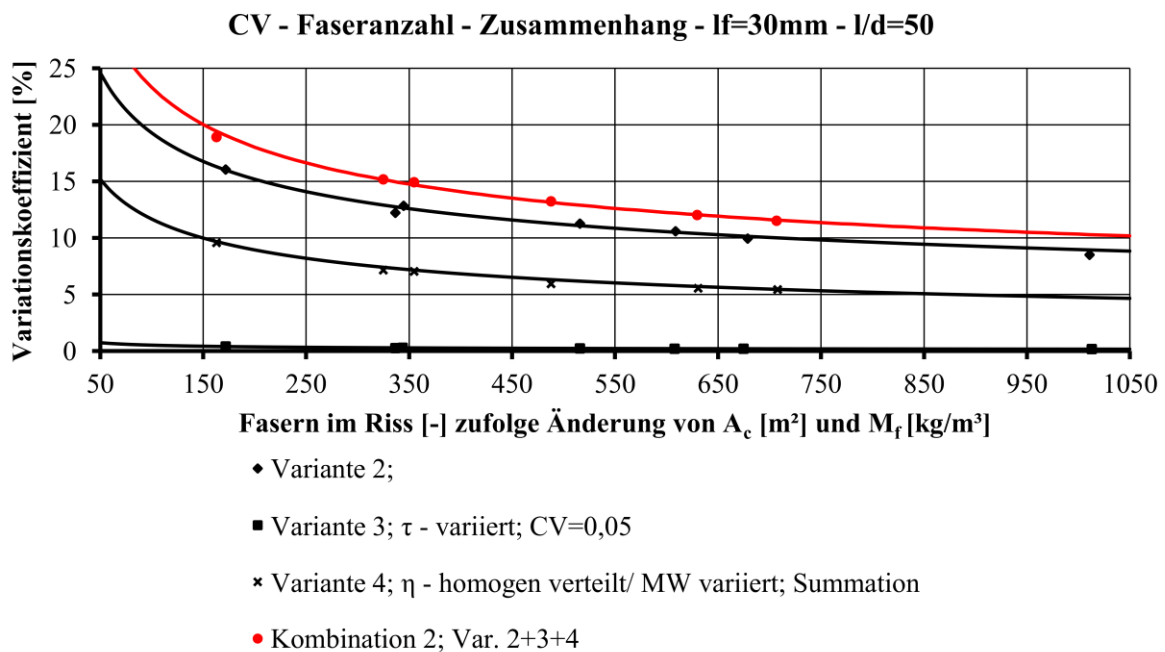
**Bild 6.6** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 60\text{ mm}$  –  $l/d = 80$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt – Normalbeton



**Bild 6.7** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 60\text{ mm}$  –  $l/d = 80$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  überlagert – Normalbeton



**Bild 6.8** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 30\text{ mm}$  –  $l/d = 50$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt – Normalbeton



**Bild 6.9** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 30\text{ mm}$  –  $l/d = 50$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  überlagert – Normalbeton

**Tabelle 6.6** zeigt die Funktionen der Näherungskurvenverläufe und deren Bestimmtheitsgrad. Es werden wiederum für beide Fasertypen die identen Kurvenfunktionen verwendet.

**Tabelle 6.6** Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung  $M_f$  – Normalbeton

<b>Variante 2</b>	
$f(x) = 101,500 \cdot \text{FiR}^{-0,379} + 1,574$	$R^2 = 0,998$
<b>Variante 3</b>	
$f(x) = 5,152 \cdot \text{FiR}^{-0,500} + 0,011$	$R^2 = 0,993$
<b>Variante 4 – Streuungen <math>\eta</math></b>	
$f(x) = 19,860 \cdot \text{FiR}^{-0,195} - 2,687$	$R^2 = 0,995$
<b>Variante 4 – Streuungen FiR</b>	
$f(x) = 25,660 \cdot \text{FiR}^{-0,204} - 3,504$	$R^2 = 0,996$
<b>Variante 4 – Gesamt</b>	
$f(x) = 66,160 \cdot \text{FiR}^{-0,369} - 0,407$	$R^2 = 0,997$
<b>Kombination 2</b>	
$f(x) = 142,600 \cdot \text{FiR}^{-0,415} + 2,246$	$R^2 = 0,997$

Die Anpassung der Näherungskurven an die Versuchsergebnisse zeigt wiederum eine gute Übereinstimmung.

### 6.2.3 Verteilung der Fasermenge – Fasern mit Endhaken

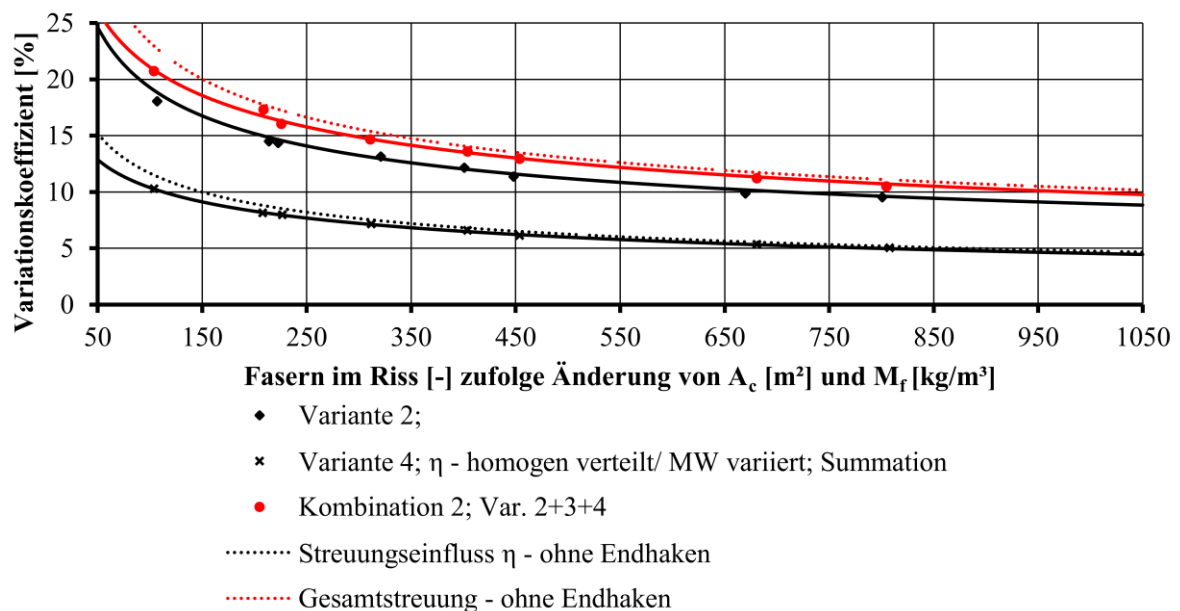
Die Auswertung der Fasern mit Endhaken ist in **Bild 6.10** dargestellt. Punktiert eingezeichnet sind die Näherungskurvenverläufe der gleichen Fasern ohne Endhaken aus Abschnitt 6.2.2.

Die Eingabeparameter sind **Tabelle 6.7** zu entnehmen.

**Tabelle 6.7** Eingabeparameter –  $l_f = 60 \text{ mm}$  –  $l/d = 80$  – Änderung  $M_f$  – Normalbeton – Endhaken

Faserlänge $l_f$	60 mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,75 mm
Fasermenge	30/ 60/ 90 kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50 -
$\eta_{\text{Rand}}$	0,60 -
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,15/ 0,70 m
	0,25/ 0,20/ 0,70 m
	0,30/ 0,30/ 0,70 m

**CV - Faseranzahl - Zusammenhang -  $l_f=60\text{mm}$  -  $l/d=80$  - Endhaken**



**Bild 6.10** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 60\text{mm}$  –  $l/d = 80$  – Änderung  $M_f$  – Normalbeton – Endhaken

**Tabelle 6.8** zeigt die Funktionen der Näherungskurvenverläufe und deren Bestimmtheitsgrad für die untersuchten Fasern mit Endhaken.

**Tabelle 6.8** Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung  $M_f$  – Normalbeton – Endhaken

Variante 2	
$f(x) = 101,500 \cdot \text{FiR}^{-0,379} + 1,574$	$R^2 = 0,998$
Variante 4 – Gesamt	
$f(x) = 41,260 \cdot \text{FiR}^{-0,235} - 3,569$	$R^2 = 0,999$
Kombination 2	
$f(x) = 85,310 \cdot \text{FiR}^{-0,281} - 2,329$	$R^2 = 0,994$

Die in **Bild 6.10** dargestellte Auswertung zeigt, dass bei Fasern mit Endhaken die Streuungen, welche aus der Faserorientierung resultieren, im Bereich von 50 bis 150 Fasern im Riss geringer sind. Bei steigender Anzahl der Fasern im Riss geht diese, aus den Endhaken resultierende, Streuungsverringern gegen null.



## 6.3 UHPC

### 6.3.1 Poissonverteilung

Da die Ergebnisse der Berechnungen der Faserverteilung mittels Poissonverteilung, wie zuvor bereits erläutert wurde, als nicht repräsentativ angesehen werden können, wird auf die Ergebnisse dieser Versuchsauswertungen bei den UHPC – Probekörpern verzichtet.

### 6.3.2 Verteilung der Fasermenge

Es werden dieselben Funktionen für die Variationskoeffizienten der Fasermenge und der Faserorientierung verwendet, wie bereits zuvor bei den Normalbetonprobekörpern (siehe **Bild 6.5**).

Die Ergebnisse der Berechnungen der UHPC – Probekörper werden in **Bild 6.11** bis **Bild 6.14** dargestellt. **Tabelle 6.9** und **Tabelle 6.10** sind die Eingabeparameter für die folgend ausgewerteten Untersuchungen zu entnehmen.

Der Variationskoeffizient der Verbundspannung wird, wie bereits bei der Untersuchung der Änderung der Fasermenge bei den Normalbetonprobekörpern mit 5 % festgelegt.

In den Untersuchungen der UHPC Probekörper werden Mikrofasern verwendet. Die Faserdosierungen steigen im Gegensatz zu den Normalbetonuntersuchungen.

**Tabelle 6.9** Eingabeparameter –  $l_f = 20 \text{ mm}$  –  $l/d = 100$  – Änderung  $M_f$  – UHPC

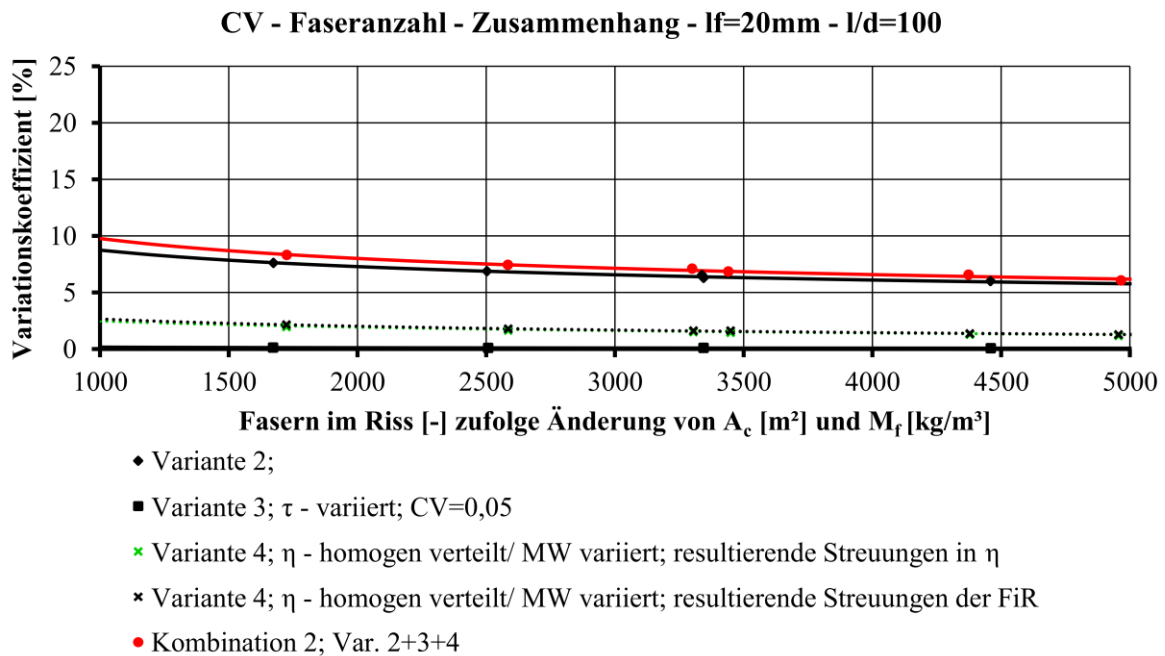
Faserlänge $l_f$	20	mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,20	mm
Fasermenge	100/ 150/ 200	kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50	-
$\eta_{\text{Rand}}$	0,60	-
$\tau_0$	10,00	MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,05/ 0,70	m
	0,15/ 0,10/ 0,70	m
	0,20/ 0,10/ 0,70	m

**Tabelle 6.10** Eingabeparameter –  $l_f = 10 \text{ mm}$  –  $l/d = 67$  – Änderung  $M_f$  – UHPC

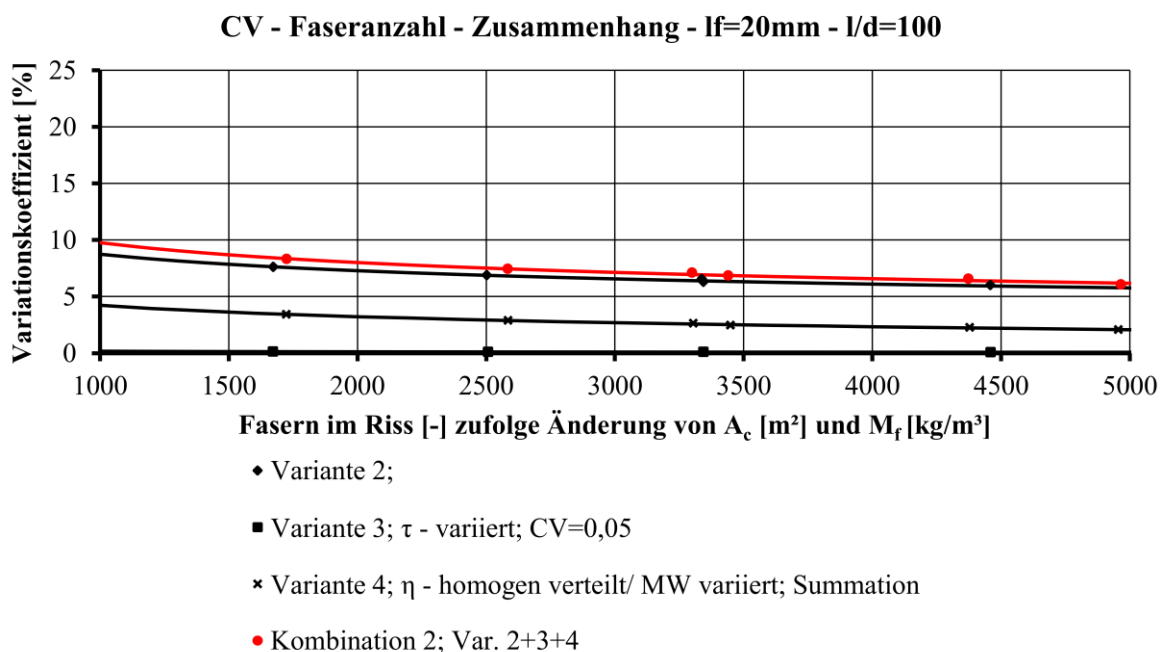
Faserlänge $l_f$	10 mm
Faserdurchmesser $d_f$	0,15 mm
Fasermenge	100/ 150/ 200 kg/m <sup>3</sup>
$\eta_{\text{Kern}}$	0,50 -
$\eta_{\text{Rand}}$	0,60 -
$\tau_0$	10,00 MPa
Probekörperabmessungen (b/ h/ l)	0,15/ 0,05/ 0,70 m
	0,15/ 0,10/ 0,70 m
	0,20/ 0,10/ 0,70 m

Die in **Bild 6.11** bis **Bild 6.14** dargestellten Auswertungen sind im Gegensatz zu den Normalbeton-  
auswertungen auf eine Faseranzahl im Riss von 1000 bis 5000 skaliert. Der Variationskoeffizient im  
Bereich von 50 bis 1000 Fasern im Riss folgt dem gleichen Näherungskurvenverlauf, wie bei den  
Normalbetonproben.

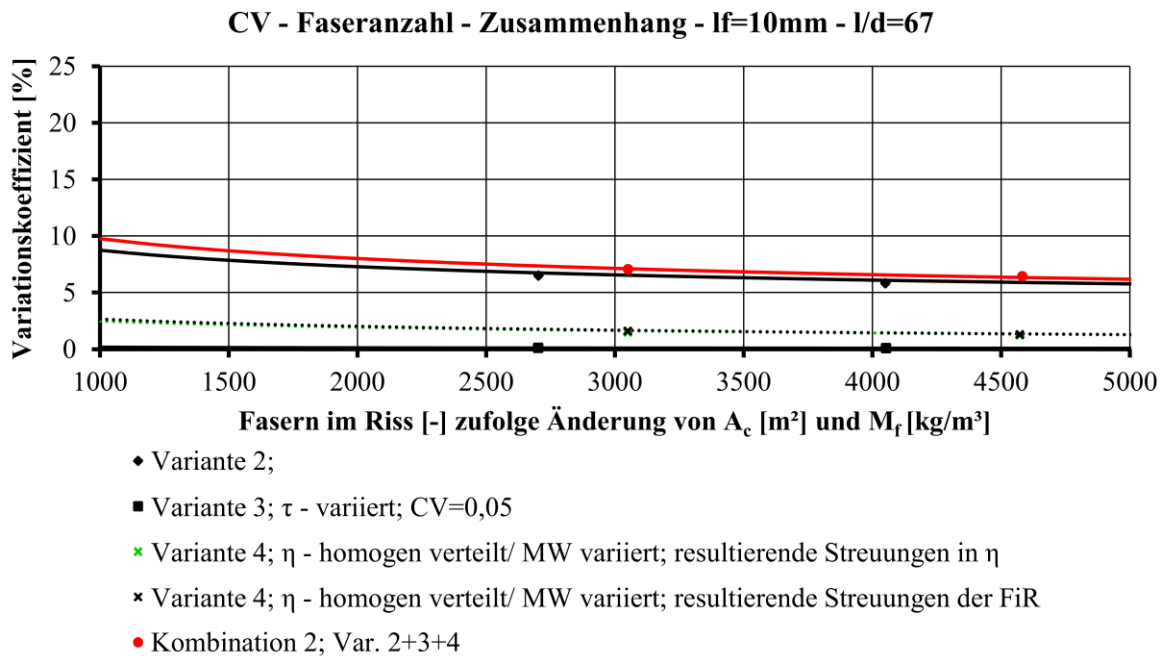
Daraus geht hervor, dass der Variationskoeffizient nahezu unabhängig vom  $l_f/d_f$  – Verhältnis der ein-  
zelnen Fasern ist. Maßgebend für die Größe des Variationskoeffizienten ist die Anzahl der Fasern im  
Riss. Mit zunehmender Faseranzahl im Riss nimmt der Variationskoeffizient ab.



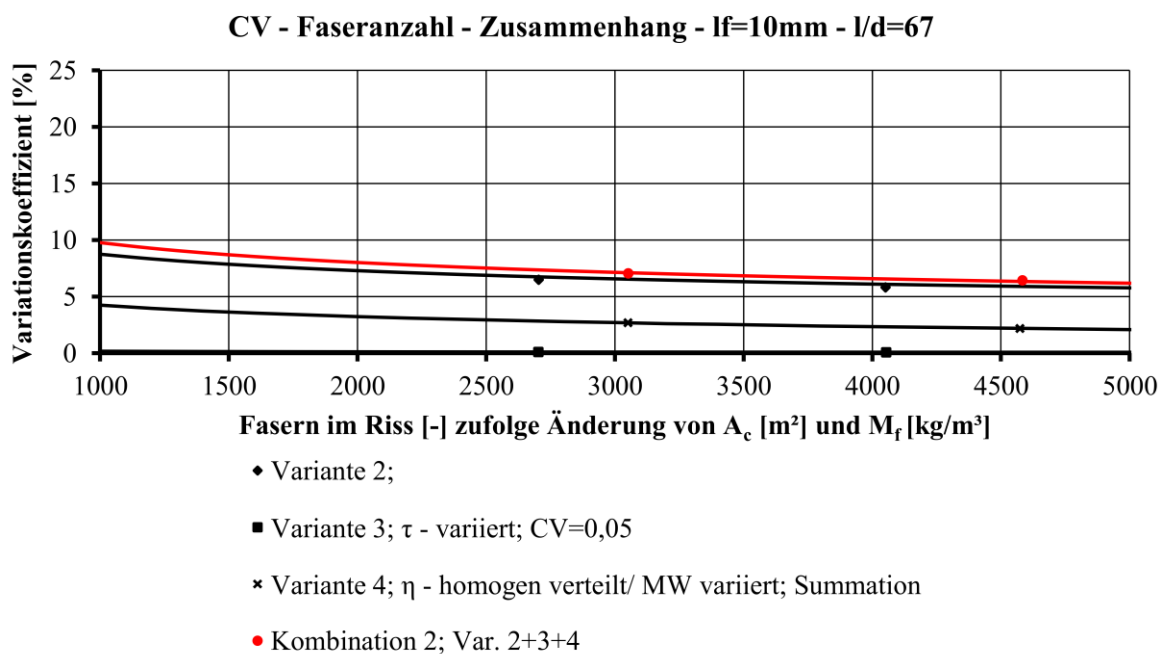
**Bild 6.11** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 20$  mm –  $l/d = 100$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt – UHPC



**Bild 6.12** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 20$  mm –  $l/d = 100$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  überlagert – UHPC



**Bild 6.13** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 10 \text{ mm}$  –  $l/d = 67$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  aufgeteilt – UHPC



**Bild 6.14** Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss –  $l_f = 10 \text{ mm}$  –  $l/d = 67$  – Änderung  $M_f$  – Einfluss aus  $\eta$  überlagert – UHPC

**Tabelle 6.11** zeigt die Funktionen der Kurvenverläufe und deren Bestimmtheitsgrad. Es werden wiederum für beide Fasertypen die identen Kurvenfunktionen verwendet.

**Tabelle 6.11** Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung  $M_f$  – UHPC

<b>Variante 2</b>	
$f(x) = 60,460 \cdot \text{FiR}^{-0,295} + 0,885$	$R^2 = 0,989$
<b>Variante 3</b>	
$f(x) = 9,303 \cdot \text{FiR}^{-0,592} + 0,016$	$R^2 = 0,977$
<b>Variante 4 – Streuungen <math>\eta</math></b>	
$f(x) = 16,370 \cdot \text{FiR}^{-0,097} - 5,983$	$R^2 = 0,999$
<b>Variante 4 – Streuungen FiR</b>	
$f(x) = 18,450 \cdot \text{FiR}^{-0,168} - 3,123$	$R^2 = 0,999$
<b>Variante 4 – Gesamt</b>	
$f(x) = 29,860 \cdot \text{FiR}^{-0,183} - 4,225$	$R^2 = 0,998$
<b>Kombination 2</b>	
$f(x) = 73,260 \cdot \text{FiR}^{-0,297} + 0,322$	$R^2 = 0,992$

Die Anpassung der Kurven an die Versuchsergebnisse zeigt wiederum eine gute Übereinstimmung.

## 6.4 Vereinfachtes Modell (Fehlerfortpflanzung)

Um den Einfluss eines einzelnen Streuungsparameters auf die Gesamtstreuung abschätzen zu können, wird in diesem Abschnitt ein einfaches, auf der Fehlerfortpflanzung basierendes Modell vorgestellt. Dies bietet die Möglichkeit, Änderungen der Gesamtstreuungen ohne rechenaufwändige Simulationen feststellen zu können.

Das Fehlerfortpflanzungsprinzip beruht darauf, dass jeder Term der Messgrößen einer Funktion fehlerbehaftet ist. Die Summe dieser Einzelfehler ergibt allerdings aufgrund von Überlagerungen nicht den Gesamtfehler. Der Gesamtfehler ist in jedem Fall kleiner, als die Summe der Einzelfehler. In der nachfolgenden Gleichung wird die Funktion der Fehlerfortpflanzung dargestellt.

- **Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz** [35]

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{df(\bar{x}_i)}{dx_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (40)$$

Durch dieses Fehlerfortpflanzungsgesetz ist es möglich, eine näherungsweise Standardabweichung zu berechnen. Um die Verwendung einer Funktion zu vermeiden, wird hier eine spezielle Form dieses Gesetzes angewendet.

- **Spezialfall der Fehlerfortpflanzung** [35]

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (41)$$

Durch Anpassung dieser Gleichung an die vorhandene Anzahl an Streuungsparametern und Änderung der Standardabweichung auf Variationskoeffizienten, ergibt sich nachfolgendes Gleichungssystem.

- **Abgewandelter Spezialfall der Fehlerfortpflanzung**

$$CV_{ges} = \sqrt{CV_{\tau}^2 + CV_{\eta}^2 + CV_{M_f}^2} \quad (42)$$

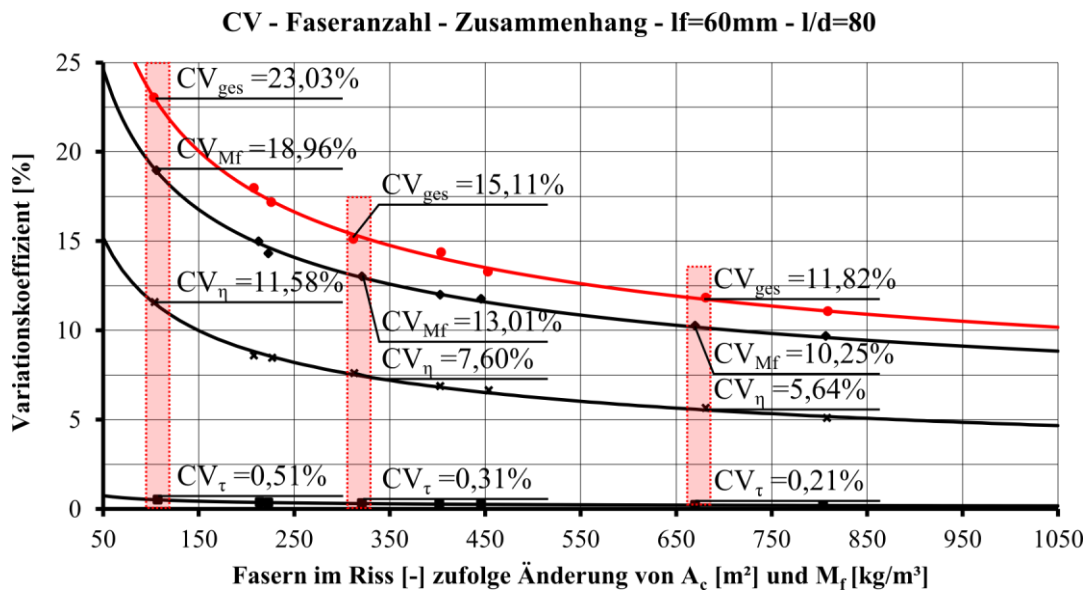
$CV_{ges}$  ... Variationskoeffizient – gesamt

$CV_{\tau}$  ... Variationskoeffizient der Verbundspannung

$CV_{\eta}$  ... Variationskoeffizient der Faserorientierung

$CV_{M_f}$  ... Variationskoeffizient der Fasermenge

Durch einsetzen der Einzelstreuungsanteile lässt sich die Gesamtstreuung näherungsweise berechnen. Sollten weitere Streuungseinflüsse berücksichtigt werden, ist Glg. ( 42 ) um diese zu erweitern. Nachfolgend werden Beispiele angeführt, um die Genauigkeit dieser Abschätzung darzulegen. Die Beispiele beziehen sich auf die Auswertungen der in **Bild 6.6** bis **Bild 6.14** dargestellten Versuche.



**Bild 6.15** Beispiel zur Überprüfung der Fehlerfortpflanzung (vgl. **Bild 6.7**)

Als Ausgangswerte dienen die oben angegebenen Einzelstreuungen.  $CV_{ges}$  aus der obigen Abbildung stellt den Zielwert der einzelnen Nachrechnungen dar.

**Bsp.1:** Variationskoeffizient bei 103 Fasern

$$CV_{ges,Test1} = \sqrt{0,51^2 + 11,58^2 + 18,96^2}$$

$$CV_{ges,Test1} = 22,22 \%$$

$$CV_{ges,Soll1} = 23,03 \%$$

$$\text{Abweichung} = 3,64 \%$$

**Bsp.2:** Variationskoeffizient bei 312 Fasern

$$CV_{ges,Test2} = \sqrt{0,31^2 + 7,60^2 + 13,01^2}$$

$$CV_{ges,Test2} = 15,07 \%$$

$$CV_{ges,Soll2} = 15,11 \%$$

$$\text{Abweichung} = 0,26 \%$$

**Bsp.3:** Variationskoeffizient bei 681 Fasern

$$CV_{ges,Test3} = \sqrt{0,21^2 + 5,64^2 + 10,25^2}$$

$$CV_{ges,Test3} = 11,70 \%$$

$$CV_{ges,Soll3} = 11,82 \%$$

$$\text{Abweichung} = 1,02 \%$$

Aus den Ergebnissen geht hervor, dass dieser Ansatz eine gute Näherung darstellt. Die Ergebniswerte der Fehlerfortpflanzungsberechnung unterschätzen den tatsächlichen Gesamtwert der Streuungen nur geringfügig.

Die eben dargestellten Beispiele bauen auf den Modellauswertungen auf und geben die Streuungen auf Spannungsniveau an. Die aus Versuchsergebnissen gewonnenen Streuungsgrößen sind allerdings nicht auf Spannungsniveau, weshalb Glg. ( 42 ) nicht direkt angewendet werden kann.

Aus Versuchsergebnissen resultieren Einzelstreuungen der Faserorientierung und der Faserverteilung. Die aus den übertragbaren Verbundspannungen resultierenden Streuungen sind vernachlässigbar.

Die Gesamtstreuungen in Versuchen lassen sich näherungsweise durch Glg. ( 43 ) bestimmen. Als Eingangswerte dienen die Variationskoeffizienten der Versuchsergebnisse.

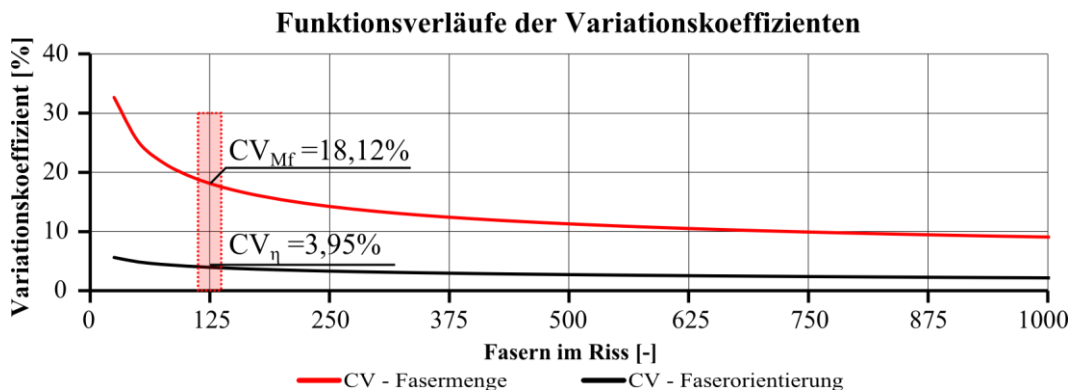
$$CV_{ges} = \sqrt{(3 \cdot CV_{\eta})^2 + CV_{M_f}^2} \quad (43)$$

$CV_{ges}$  ... Variationskoeffizient – gesamt

$CV_{\eta}$  ... Variationskoeffizient der Faserorientierung

$CV_{M_f}$  ... Variationskoeffizient der Fasermenge

Verifiziert werden kann Glg. ( 43 ) durch den Vergleich mit Versuchsergebnissen. Nachfolgend wird ein, auf den von Gröger durchgeführten Versuchen basierendes, Beispiel dargestellt.



**Bild 6.16** Beispiel zur Überprüfung der Fehlerfortpflanzung (vgl. **Bild 6.5**)

Als Ausgangswerte dienen die oben angegebenen Einzelstreuungen.  $CV_{ges}$  bei 125 Fasern im Riss (21,44 %) aus **Bild 6.15** stellt den Zielwert der Nachrechnung dar.

**Bsp.1:** Variationskoeffizient bei 125 Fasern

$$CV_{ges,Test1} = \sqrt{(3 \cdot 3,95)^2 + 18,12^2}$$

$$CV_{ges,Test1} = 21,65 \%$$

$$CV_{ges,Soll1} = 21,44 \%$$

$$\text{Abweichung} = 0,98 \%$$

Das Ergebnis zeigt wiederum eine gute Näherung.



## 6.5 Wesentliche Ergebnisse

Die Ergebnisse aus Kapitel 4 und Abschnitt 6.2 und 6.3 zeigen deutlich, dass es im Faserbeton keine Urstreuung gibt. Aus weiteren, hier allerdings nicht angeführten Untersuchungen geht hervor, dass der Einfluss der Faserabmessungen auf die Streuungen als gering zu bewerten ist. Dieser Trend ist auch in den Graphiken in Abschnitt 6.2 und 6.3 zu erkennen. Die Faserabmessungen beeinflussen einzig bei gleicher Faserdosierung die Anzahl der Fasern im Riss. Bei gleicher Anzahl an Fasern im Riss gibt es keinen sichtbaren Unterschied in den Streuungen bei wechselnden Faserabmessungen. Durch die Anwendung von Endhaken, können nur die aus der Faserorientierung resultierenden Streuungen verringert werden. Allerdings nur bei einer geringen Anzahl an den Riss kreuzenden Fasern (50 bis 150 Fasern im Riss).

Eine steigende Faseranzahl führt, wie in **Bild 6.1** bis **Bild 6.4** und **Bild 6.6** bis **Bild 6.14** zu erkennen ist, zu einer Abnahme der Streuungen. Da die Faseranzahl im Riss auch bei zunehmenden Probeabmessungen ansteigt, führt auch dies zu einer Reduktion der Streuungen.

Wesentlich hervorzuheben ist, dass bei der Anwendung der Poissonverteilung der Streuungseinfluss der Faserverteilung deutlich unterschätzt wird, siehe Abschnitt 5.4.2. Dies ist durch den Vergleich von **Bild 6.1** bis **Bild 6.4** und **Bild 6.6** bis **Bild 6.15** deutlich zu erkennen. Wird die Poissonverteilung zur Ermittlung der Faserverteilung verwendet, so ist der Einfluss der aus der Faserorientierung stammenden Streuungen maßgebend.

Aus der Faserorientierung resultieren in Summe zwei unterschiedliche streuungswirksame Einflüsse. Die Streuungen der Faserorientierung bewirken einerseits Streuungen in den Mittelwerten der Faserorientierung im Riss und andererseits beeinflussen sie die Anzahl der Fasern im Riss. Die Streuungsgrößen dieser beiden Anteile sind als weitestgehend gleich groß zu erachten.

Der Einfluss der Streuungen der Verbundspannungen auf die Gesamtstreuungen kann ebenso, wie der Einfluss der Fasergeometrie als vernachlässigbar klein angesehen werden.

Eine der wesentlichen Aussagen, welche auch bereits in [10] dargelegt wurde, ist, dass die Streuungen in Probekörpern wesentlich größer sind, als jene tatsächlicher Bauteile mit größeren Abmessungen. Dies kann auch mit den vorliegenden Untersuchungsergebnissen bestätigt werden. Entscheidend für die Größe der Streuungen ist die Anzahl der den Riss kreuzenden Fasern.

Weiters zeigt **Kapitel 6.4**, dass es durch Anwendung einer speziellen Form der Fehlerfortpflanzung möglich ist, aus Einzelstreuungen die Gesamtstreuung relativ treffsicher zu ermitteln. Dadurch kann auf einfache Weise untersucht werden, wie sich Änderungen der Einzelstreuungen auf die Gesamtstreuung auswirken.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Modell zur Bestimmung der Streuungen im Nachrisszugtragverhalten von Faserbeton entwickelt. Das Modell bietet die Möglichkeit den Einfluss von Streuungen in der Faserverteilung und der Faserorientierung, sowie der Verbundspannung auf das Tragverhalten von Faserbeton zu quantifizieren. Untersuchbar sind sowohl gerade Stahlfasern, als auch Stahlfasern mit Endhaken. Im Modell durchgeführte Spannungs- Rissöffnungsberechnungen beruhen auf vereinfachten Annahmen. Die Leistungsfähigkeit des Modells wurde durch den Vergleich mit Versuchen verifiziert.

Ein wesentliches Ergebnis der Untersuchungen ist, dass es im Faserbeton keine Urstreuungskonstante gibt. Der Einfluss der Faserabmessungen auf die Gesamtstreuungen ist, ebenso wie der Einfluss der Verbundspannungstreuerungen, bei geraden Fasern vernachlässigbar klein. Durch den Einsatz von Fasern mit Endhaken sind die aus der Faserorientierung resultierenden Streuungen reduzierbar. Eine solche Reduktion der Streuungen ist allerdings nur bei einer geringen Anzahl an die Rissfläche kreuzenden Fasern möglich.

Entscheidend für die Größe der Streuungen ist die Anzahl der den Riss kreuzenden Fasern. Je höher die Anzahl der Fasern im Riss wird, desto geringer sind die zu erwartenden Streuungen. Den größten Einfluss auf die Gesamtstreuungen bewirkt die Faserverteilung. Weiters wurde verifiziert, dass die Streuungen in Versuchskörpern wesentlich größer sind, als die Streuungen in tatsächlichen Bauteilen mit größeren Abmessungen.

Zudem wurde auch ein auf dem Fehlerfortpflanzungsgesetz basierendes Modell entwickelt, welches es ermöglicht, die zu erwartenden Gesamtstreuungen aus den Einzelstreuungen einfach abzuschätzen.

In Zukunft sind labortechnische Untersuchungen notwendig, um die getroffenen Annahmen in der Faserverteilung und der Faserorientierung genau zu quantifizieren. Die Streuung in der Faserverteilung dürfte dabei hauptsächlich durch den Mischprozess beeinflusst werden. Es wird erwartet, dass eine langsame und kontinuierliche Zugabe der Fasern während des Mischprozesses dazu führen kann, die Streuungen der Faserverteilung deutlich zu verringern. Weiters ist es zukünftig notwendig die für die Fasern mit Endhaken verwendeten Ausziehkurven mittels zusätzlicher Versuche zu verifizieren.

## Literaturverzeichnis

- [1] Bergmeister, K., Fingerloss, F. und Wörner, J. D. BetonKalender 2011. *Kraftwerke, Faserbeton*. Berlin : Ernst & Sohn, 2011. No. 2.
- [2] Erdem, E. Probabilistisch basierte Auslegung stahlfasermodifizierter Betonbauteile auf experimenteller Grundlage. *Dissertation*. Bochum : s.n., 2002.
- [3] Hadl, P. Vorhandene Forschungsergebnisse zur Streuung im Zugtragverhalten von Faserbeton. Graz : s.n., unveröffentlicht.
- [4] DAfStb. Richtlinie Stahlfaserbeton. Berlin : Beuth Verlag, 2009.
- [5] Gröger, J., Tue, N. V. und Wille, K. Bending Behaviour and Variation of flexural Parameters of UHPFRC.
- [6] Naaman, A. E. A statistical theory of strength for fiber reinforced concrete. *Dissertation*. Massachusetts : s.n., 1972.
- [7] Liu, J. Weakest link theory and multiaxial criteria. *European Structural Integrity Society*. 1999. Bd. 25.
- [8] Pfyl, T. Tragverhalten von Stahlfaserbeton. *Dissertation*. Zürich : s.n., 2003.
- [9] Jungwirth, J. Zum Tragverhalten von zugbeanspruchten Bauteilen aus Ultra-Hochleistungs-Faserbeton. *Dissertation*. 2006.
- [10] Lingemann, J. und Zilch, K. Zum Einfluss der Bauteilgröße auf das Tragverhalten von Bauteilen aus Stahlfaserbeton. *Bauingenieur*. 2013. No. 12.
- [11] Soetens, T., et al. A semi-analytical model to predict the pull-out behaviour of inclined hooked-end steel fibres. *Construction and Building Materials*. 2013.
- [12] Tritthart, J. und Maydl, P. Skriptum Betontechnologie VU. Graz : TU Graz - Institut für Materialprüfung und Baustofftechnologie, 2006. S-6-31.
- [13] Lin, Y. Tragverhalten von Stahlfaserbeton. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 1999. Heft 494.
- [14] Behloul, M. Analyse et modélisation du comporment d'un matériau à matrice cimentaire fibrée à ultra hautes performances. *Dissertation*. 1996.

- [15] Tue, N. V., et al. Ein optoanalytisches Verfahren zur Bestimmung der Faserverteilung und -orientierung in stahlfaserverstärktem UHFB. *Beton- und Stahlbetonbau*. Leipzig : Ernst & Sohn, 2007. Bd. 102, Heft 10.
- [16] Schnell, J., Schladitz, K. und Schuler, F. Richtungsanalyse von Fasern in Betonen auf Basis der Computer-Tomographie. *Beton- und Stahlbetonbau*. Kaiserslautern : Ernst & Sohn, 2010. Bd. 105, Heft 2.
- [17] Wichmann, H. J., Holst, A. und Budelmann, H. Ein praxisgerechtes Messverfahren zur Bestimmung der Fasermenge und -orientierung im Stahlfaserbeton. *Beton- und Stahlbetonbau*. Braunschweig : Ernst & Sohn, 2013. Bd. 108, Heft 12.
- [18] Trummer, M. Experimentelle Analyse von Faserorientierungszuständen mittels räumlich kombinierter Schnittbildauswertung. *Masterarbeit*. Graz : s.n., 2013.
- [19] Laranjeira, F., et al. Characterization of the orientation profile of steel fiber reinforced concrete. *Materials and Structures*. 2011. Bd. 44, No. 6.
- [20] Cunha, V. M. C. F., Barros, J. A. O. und Sena-Cruz, J. M. Pullout Behavior of Steel Fibers in Self-Compacting Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2010. Bd. 22, No. 1.
- [21] Leung, K. Y. und Shapiro, N. Optimal Steel Fiber Strength for Reinforcement of Cementitious Materials. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 1999. Bd. 11, No. 2.
- [22] Bonzel, J. und Schmidt, M. Verteilung und Orientierung von Stahlfasern im Beton und ihr Einfluss auf die Eigenschaften von Stahlfaserbeton - Teil 1.
- [23] —. Verteilung und Orientierung von Stahlfasern im Beton und ihr Einfluss auf die Eigenschaften von Stahlfaserbeton - Teil 2.
- [24] [Online] Wissenschaft aktuell. [Zitat vom: 10. 08 2014.] [http://www.wissenschaft-aktuell.de/artikel/Dichter\\_geht\\_nicht\\_1771015586550.html](http://www.wissenschaft-aktuell.de/artikel/Dichter_geht_nicht_1771015586550.html).
- [25] Müller, T. Untersuchungen zum Biegetragverhalten von Stahlfaserbeton und betonstahlbewehrtem Stahlfaserbeton unter Berücksichtigung des Einflusses von Stahlfaserart und Betonzusammensetzung. *Dissertation*. Leipzig : s.n., in Vorbereitung.
- [26] Sachs, L. und Hedderich, J. Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R. Kiel : Springer-Verlag, 2006.
- [27] Johnson, N. L., Kotz, S. und Balakrishnan, N. Continuous univariate distributions. New York : Wiley, 1995.
- [28] [Online] Stack Exchange Inc. [Zitat vom: 27. 06 2014.] <http://stats.stackexchange.com/questions/12232/calculating-the-parameters-of-a-beta-distribution-using-the-mean-and-variance>.

- [29] Hadl, P. und Gröger, J. Versuche zur Streuung im Zugtragverhalten von Faserbeton. Graz : s.n., 2014.
- [30] Foster, S.J. On Behaviour of High-Strength Concrete Columns: Cover Spalling, Steel Fibres, and Ductility. *ACI Structural Journal*. 2001. Bd. 98, No. 4.
- [31] Strack, M. Modellbildung zum rissbreitenabhängigen Tragverhalten von Stahlfaserbeton unter Biegebeanspruchung. *Dissertation*. Bochum : s.n., 2007.
- [32] König, G., Tue, N. V. und Schneck, G. Grundlagen des Stahlbetonbaus. Leipzig : Vieweg + Teubner, 2007.
- [33] Leutbecher, T. Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC). *Dissertation*. Kassel : s.n., 2007.
- [34] Liu, Q. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Bauingenieure. *Vorlesungsskriptum*. Graz : s.n., 2013.
- [35] Bartsch, H. J. Taschenbuch mathematischer Formeln. Chemnitz : Fachbuchverlag Leipzig, 2007. 21. Auflage.
- [36] ÖNORM EN 1990 (2003-03-01) - Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung. Wien : Österreichisches Normungsinstitut.
- [37] ÖNORM EN 1992-1-1 (2011-12-01) - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Wien : Österreichisches Normungsinstitut.
- [38] Hilsdorf, H. K., Brameshuber, W. und Kottas, R.: Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben "Weiterentwicklung und Optimierung der Materialeigenschaften faserbewehrten Betons und Spritzbetons als Stabilisierungselemente der Felssicherung". s.l. : Universität Karlsruhe, 1985. Teil C.

## Abbildungsverzeichnis

<b>Bild 2.1</b> Unterschiede in der übertragbaren Zugspannung zwischen Normal- und Faserbeton [1]	2
<b>Bild 2.2</b> Vergleich der Nachrisszugtragfähigkeit von Normal- und Faserbeton (idealisiert)	3
<b>Bild 2.3</b> Last- Verformungskurven von Standardbeton und Stahlfaserbeton im Vergleich [2]	4
<b>Bild 2.4</b> Faserbetonstreuungen in den Versuchen von Gröger (Normalbeton M1 – M4)	6
<b>Bild 2.5</b> Faserbetonstreuungen in den Versuchen von Gröger (UHPFRC U1 – U4)	7
<b>Bild 3.1</b> Rissüberbrückende Tragwirkung durch Faserzugabe nach [12]	9
<b>Bild 3.2</b> Faserarten [1]	10
<b>Bild 3.3</b> Versagensmechanismus von Endhaken [1]	11
<b>Bild 3.4</b> Einfluss des Größtkorndurchmessers auf die Faserverteilung und deren Orientierung [1]	12
<b>Bild 3.5</b> Definition der Faserorientierung $\eta$ [1]	12
<b>Bild 3.6</b> Faserorientierungen nach [1]	13
<b>Bild 3.7</b> Faserorientierungen an Grenzflächen (Randeffekt) nach [9]	13
<b>Bild 3.8</b> $\sigma - \eta_v$ – Zusammenhang nach [3] und [19]	15
<b>Bild 3.9</b> $CV - \eta_v$ – Zusammenhang nach [3] und [19]	15
<b>Bild 3.10</b> Zusammenhang Probekörpergeometrie – $\eta$ [2]	16
<b>Bild 3.11</b> Kontaktzone zwischen Faser und Matrix [8]	16
<b>Bild 3.12</b> Versuchsauswertung für Fasern unter einer Neigung von $0^\circ$ , $30^\circ$ und $60^\circ$ nach Leung [21]	17
<b>Bild 4.1</b> Tetraeder	18
<b>Bild 4.2</b> Pyramide	18
<b>Bild 4.3</b> Betrachteter Ausschnitt aus einem Faserbetonvolumen – Faserverteilung „Tetraeder“	19
<b>Bild 4.4</b> Axonometrische Darstellung der Faserschwerpunktsverteilung	19
<b>Bild 4.5</b> Ansicht A – A (links) und Querschnitt (rechts) des betrachteten Bereiches	19
<b>Bild 4.6</b> Volumenelemente	20

<b>Bild 4.7</b> Vereinfachte Betrachtung einer homogenen Faserverteilung	20
<b>Bild 4.8</b> Inhomogene Faserschwerpunktsverteilung	21
<b>Bild 4.9</b> Betrachteter Ausschnitt aus einem Faserbetonvolumen – Faserverteilung „Pyramide“	21
<b>Bild 4.10</b> Ansicht A – A – Faserverteilung „Pyramide“	21
<b>Bild 4.11</b> Histogramm für wenige (links) und viele Fasern (rechts)	22
<b>Bild 4.12</b> Streuungen aus der Faserorientierung bei $\eta_v = 0,500$ – ohne Randeffect	22
<b>Bild 5.1</b> Eingabemaske „HM-SC“	24
<b>Bild 5.2</b> Programmablaufplan „HM-SC“	25
<b>Bild 5.3</b> Modellablauf	26
<b>Bild 5.4</b> Verteilung der Faserschwerpunkte	28
<b>Bild 5.5</b> Tetraeder Modell zur Betrachtung des Größtkorneinflusses	28
<b>Bild 5.6</b> Darstellung einer Normalverteilung	30
<b>Bild 5.7</b> Beispielhafte Darstellung einer Normalverteilung über das Probekörpervolumen	30
<b>Bild 5.8</b> Darstellung verschiedener Poissonverteilungen	32
<b>Bild 5.9</b> Beispielhafte Darstellung einer Poissonverteilung über das Probekörpervolumen	32
<b>Bild 5.10</b> Riss beeinflussende Schnitte	33
<b>Bild 5.11</b> Betrachtetes Volumen der „wirksamen“ Schnittflächen	33
<b>Bild 5.12</b> Aufbau der Schnittflächenmatrix	33
<b>Bild 5.13</b> Zuweisung der Einzelfaserorientierung	34
<b>Bild 5.14</b> Darstellung verschiedener Betaverteilungen	35
<b>Bild 5.15</b> Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen	36
<b>Bild 5.16</b> Ermittlung $l_e$	37
<b>Bild 5.17</b> Darstellung der Spannungsänderung bei zunehmender Rissöffnung	39
<b>Bild 5.18</b> Darstellung der 3 Bereiche der Spannungs- Rissöffnungsbeziehung	40
<b>Bild 5.19</b> Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – $0^\circ$	43
<b>Bild 5.20</b> Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – $30^\circ$	44
<b>Bild 5.21</b> Vergleich des Faserauszuges im Modell mit Versuchen bei Fasern mit Endhaken – $60^\circ$	44
<b>Bild 5.22</b> Vergleich Versuch Gröger – Modell „HM-SC“ [5]	48

<b>Bild 6.1</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 60 \text{ mm} - l/d = 60$ – Poissonverteilung – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt	55
<b>Bild 6.2</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 60 \text{ mm} - l/d = 60$ – Poissonverteilung – Einfluss aus $\eta$ überlagert	55
<b>Bild 6.3</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 30 \text{ mm} - l/d = 60$ – Poissonverteilung – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt	56
<b>Bild 6.4</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 30 \text{ mm} - l/d = 60$ – Poissonverteilung – Einfluss aus $\eta$ überlagert	56
<b>Bild 6.5</b> Funktionsverläufe der verwendeten Variationskoeffizienten	58
<b>Bild 6.6</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 60 \text{ mm} - l/d = 80$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt – Normalbeton	60
<b>Bild 6.7</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 60 \text{ mm} - l/d = 80$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ überlagert – Normalbeton	60
<b>Bild 6.8</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 30 \text{ mm} - l/d = 50$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt – Normalbeton	61
<b>Bild 6.9</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 30 \text{ mm} - l/d = 50$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ überlagert – Normalbeton	61
<b>Bild 6.10</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 60 \text{ mm} - l/d = 80$ – Änderung $M_f$ – Normalbeton – Endhaken	63
<b>Bild 6.11</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 20 \text{ mm} - l/d = 100$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt – UHPC	67
<b>Bild 6.12</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 20 \text{ mm} - l/d = 100$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ überlagert – UHPC	67
<b>Bild 6.13</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 10 \text{ mm} - l/d = 67$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ aufgeteilt – UHPC	68
<b>Bild 6.14</b> Zusammenhang des Variationskoeffizienten (CV) mit der Anzahl der Fasern im Riss – $l_f = 10 \text{ mm} - l/d = 67$ – Änderung $M_f$ – Einfluss aus $\eta$ überlagert – UHPC	68
<b>Bild 6.15</b> Beispiel zur Überprüfung der Fehlerfortpflanzung (vgl. <b>Bild 6.7</b> )	71
<b>Bild 6.16</b> Beispiel zur Überprüfung der Fehlerfortpflanzung (vgl. <b>Bild 6.5</b> )	72



## Tabellenverzeichnis

<b>Tabelle 2.1</b> Von Gröger verwendete Betonrezepturen - NORMALBETON	5
<b>Tabelle 2.2</b> Von Gröger verwendete Betonrezepturen - UHPFRC	7
<b>Tabelle 4.1</b> Funktion des Näherungskurvenverlaufes aus <b>Bild 4.12</b>	22
<b>Tabelle 5.1</b> Grundwerte der Bruchenergie $G_{f0}$ [32]	41
<b>Tabelle 5.2</b> Funktionen der im Modell implementierten Faserausziehkurven – $0^\circ$ und $30^\circ$	42
<b>Tabelle 5.3</b> Funktionen der im Modell implementierten Faserausziehkurven – $60^\circ$	43
<b>Tabelle 5.4</b> Ausgewählte Quantile der Student- Verteilung für unterschiedliche Freiheitsgrade [34]	46
<b>Tabelle 5.5</b> Ausgewählte Ergebnisse der Spannungsberechnung mittels „HM-SC“	48
<b>Tabelle 5.6</b> Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 1)	49
<b>Tabelle 5.7</b> Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 2)	49
<b>Tabelle 5.8</b> Vergleich der Versuchsergebnisse von Gröger mit jenen von „HM-SC“ (Balken 3)	50
<b>Tabelle 6.1</b> Eingabeparameter – $l_f = 60 \text{ mm}$ – $l/d = 60$ – Poissonverteilung – Normalbeton	54
<b>Tabelle 6.2</b> Eingabeparameter – $l_f = 30 \text{ mm}$ – $l/d = 60$ – Poissonverteilung – Normalbeton	54
<b>Tabelle 6.3</b> Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Poissonverteilung – Normalbeton	57
<b>Tabelle 6.4</b> Eingabeparameter – $l_f = 60 \text{ mm}$ – $l/d = 80$ – Änderung $M_f$ – Normalbeton	59
<b>Tabelle 6.5</b> Eingabeparameter – $l_f = 30 \text{ mm}$ – $l/d = 50$ – Änderung $M_f$ – Normalbeton	59
<b>Tabelle 6.6</b> Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung $M_f$ – Normalbeton	62
<b>Tabelle 6.7</b> Eingabeparameter – $l_f = 60 \text{ mm}$ – $l/d = 80$ – Änderung $M_f$ – Normalbeton – Endhaken	63
<b>Tabelle 6.8</b> Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung $M_f$ – Normalbeton – Endhaken	64
<b>Tabelle 6.9</b> Eingabeparameter – $l_f = 20 \text{ mm}$ – $l/d = 100$ – Änderung $M_f$ – UHPC	65
<b>Tabelle 6.10</b> Eingabeparameter – $l_f = 10 \text{ mm}$ – $l/d = 67$ – Änderung $M_f$ – UHPC	66
<b>Tabelle 6.11</b> Funktionen der Näherungskurvenverläufe – Änderung $M_f$ – UHPC	69

## **A. Anhang – Quellcode „HM-SC“ (gerade Fasern)**

```

1 %% Input of the parameters for the model (TENSION)
2
3 tic                %measures the computation time
4 clc                %clears the command window
5 clear              %clears the workspace
6
7 %% Definition of the names for the Input- and Output Files
8
9 strin='Eingabe_%d.xlsx';
10 strout='Faser_Output_mysig_stress_%d.xlsx';
11 strout2='Faser_Output_eta_%d.xlsx';
12
13 for test=1:1
14
15 filein=sprintf(strin,test);
16 fileout=sprintf(strout,test);
17 fileout2=sprintf(strout2,test);
18
19 %% Concrete parameters
20
21 ConcreteP=xlsread(filein,'MATLAB_Beton');
22 b=      ConcreteP(1);      %width of the specimen
23 h=      ConcreteP(2);      %height of the specimen
24 l=      ConcreteP(3);      %length of the specimen
25 fctm=   ConcreteP(4);      %tensile strength of the concrete
26 GK=     ConcreteP(5);      %biggest grain of the concrete
27 thCS=   ConcreteP(6);      %thickness of the Cross Sections in m
28 Ec=     ConcreteP(7);      %Youngs modulus of the concrete
29 fck=    ConcreteP(8);      %cylinder strength of the Concrete
30
31 %% Fibre parameters
32
33 FibreP=xlsread(filein,'MATLAB_Fasern');
34 lf=     FibreP(1);         %length of the fibres
35 df=     FibreP(2);         %diameter of the fibres
36 rhof=   FibreP(3);         %density of the fibres
37 Mf=     FibreP(4);         %fibres per m3 concrete
38 etaK=   FibreP(5);         %fibre orientation in the body
39 etaR=   FibreP(6);         %fibre orientation in the border area
40 etamy=  FibreP(7);         %weighted fibre orientation in the whole
41                                     %cross section
42 tau0=   FibreP(8);         %maximum of the transmittable bond stress
43                                     %for a fibre orientaion of 0 degree
44 tau30=  FibreP(9);         %maximum of the transmittable bond stress
45                                     %for a fibre orientaion of 30 degree
46 tau45=  FibreP(10);        %maximum of the transmittable bond stress
47                                     %for a fibre orientaion of 45 degree
48 tau60=  FibreP(11);        %maximum of the transmittable bond stress
49                                     %for a fibre orientaion of 60 degree
50
51 disp('Daten erfolgreich importiert')
52
53 %% Start of the loop
54
55 CrackNf=floor((etamy*Mf/rhof*b*h)/((df*10-3)2*pi/4)); %number of fibers
56                                     %in the crack
57                                     %according to the
58                                     %Hilsdorf formula
59 lcount=2500;
60 outp=zeros((lcount+2),4);

```

```

61 mysig=zeros(lcount,11);
62 CVFC=0; %coefficient of variation for the distribution
63 %of the fibre center (for the normal distribution)
64 CVtau=0.05; %coefficient of variation for the distribution
65 %of the credible bond stress
66 CVeta=(15.03*CrackNf^-0.1056-5.073)/100;%coefficient of variation for the
67 %scattering of the mean value of eta
68 CVMf=(111.4*CrackNf^-0.4024+2.158)/100; %coefficient of variation for the
69 %scattering of the added amount
70 %of fibers
71 MATMf=zeros(1,lcount);
72
73 for MfVAR=1:lcount
74     MATMf(1,MfVAR)=normrnd(Mf,CVMf*Mf);
75 end
76
77 alphae1=((1-etamy)/(CVeta*etamy)^2-1/etamy)*etamy^2;
78 betae1=alphae1*(1/etamy-1);
79
80 MATeta=zeros(1,lcount);
81
82 for etaVAR=1:lcount
83     MATeta(1,etaVAR)=betarnd(alphae1,betae1);
84 end
85
86 for lo=1:lcount
87     percent=lo/lcount*100
88
89 %% Computation of the mean variables
90
91 FibreA= df^2/4*pi; %cross section area of one Fibre
92 FibreV= FibreA*lf; %Volume of one Fibre
93 mf= FibreV*10^-9*rhof; %mass of one Fibre
94 nf= MATMf(1,lo)/mf; %Fibres per m3 Concrete
95 nm= floor(nf*b*h*1); %Fibres per specimen
96
97 % disp(' ')
98 % fprintf('%d Fasern im Probekörper',nm);
99 % disp(' ')
100
101 %% Distance between the fibre centers and Fibres per Cross Section
102 % - normally distributed
103
104 a=((12*b*h*1)/(sqrt(2)*nm))^(1/3);%normal distance
105 aGK=sqrt(6)*GK/1000; %distances as a result of GK
106 A=[a aGK]; %Vector of the distances
107
108 % if aGK>a
109 %     sigmaGK=std(A); %standard deviation between the distances
110 % end
111
112 nCS=int64(1/thCS); %numbers of Cross Sections
113 fCS=nm*thCS/l; %fibres per Cross Section
114
115 elementsCS=zeros(1,nCS); %generates a vector with nCS rows
116 elementsCS(1,:)=fCS; %fills the Vector with fCS
117
118 % if aGK>a %generates a new distribution
119 %in case of aGK>a
120 %     elementsCS(1,:)=normrnd(fCS,sigmaGK,nCS,1);

```

```

121 % end
122
123 disp(' ')
124 fprintf('%d Fasern im Probekörper normalverteilt - KONTROLLE',...
125         round(sum(elementsCS)));
126 disp(' ')
127
128 if round(sum(elementsCS))~=nm %verification
129     error('Anzahl der Faserschwerpunkte inkorrekt')
130 end
131
132 %% New distribution of the fibre centres per Cross Section
133
134 % elCSdist=poissrnd(elementsCS(),1,nCS); %fibres per Cross Section
135 %poisson distributed
136 elCSdist=normrnd(elementsCS(),CVFC*fCS,1,nCS); %fibres per Cross Section
137 %normally distributed
138
139
140 while round(sum(elCSdist))~=nm %verification
141 %     elCSdist=poissrnd(elementsCS(),1,nCS);
142     elCSdist=normrnd(elementsCS(),CVFC*fCS,1,nCS);
143 end
144
145 disp(' ')
146 fprintf('%d Fasern im Probekörper zufällig verteilt - KONTROLLE',...
147         round(sum(elCSdist)));
148 disp(' ')
149
150 %% Allocation of the fibre orientation
151
152 CSn=zeros(nCS,1); %creates a nCS cross 2 matrix
153 CSn(:,1)=elCSdist; %fills the created matrix with the values of elCSdist
154
155 %% Determination of the Cross Sections with a distance of lf/2 to the crack
156
157 nCScrack=1/(2*thCS); %gives you the number of the Cross Section in
158 %which the crack occurs
159 nCSdist=lf/(1000*2*thCS); %gives you the number of contributive Cross Sections
160
161 nCSmin=nCScrack-nCSdist; %lower limit of contributive nCS
162 nCSmax=nCScrack+nCSdist; %upper limit of contributive nCS
163
164 dist=nCSmax-nCSmin; %gives you the length of the new matrix
165
166 CSnNEW=zeros(dist,2); %creates a new matrix for the contributive
167 %Cross Sections
168 i=1; %counter
169
170 for j=1:length(CSn) %fills the new matrix for the Cross Sections
171     %nCSmin to nCSmax
172
173     if j >= nCSmin && j <= nCSmax
174
175         CSnNEW(i,1)=abs(nCScrack-(nCSmin+i));
176         CSnNEW(i,2)=CSn(j,1);
177         i=i+1;
178
179     end
180

```

```

181 end
182
183 %% Allocation of the fibre orientation for each Cross Section
184
185 CSnNEW1=ceil(CSnNEW(:,2));
186 fmax=max(CSnNEW1); %gives you the rounded up number of fibres in one
187 %Cross Section
188
189 flength=length(CSnNEW); %gives you the size of the before created matrix
190 fsize=fmax*flength;
191 CSM=zeros(fsize,14); %creates in new matrix which should be filled with
192 %the distance from the Cross Section to the crack,
193 %the number of fibres and
194 %the fibre orientaion for EACH fibre
195 CSMHELP=zeros(fsize,2);
196 k=1;
197 m=1;
198 n=1;
199 o=1;
200
201 for f=1:fsize %fills the first column of the Matrix with the
202 %number of the Cross Section
203 %and fills the second column of the Matrix with
204 %the number of active fibres per Cross Section
205     if k*fmax<=fsize
206         CSM(k*fmax,1)=CSnNEW(m,1);
207         if m<flength
208             m=m+1;
209         end
210     end
211
212     if k<=fsize
213         CSM(k,1)=CSnNEW(n,1);
214         CSM(k,2)=o+(CSnNEW(n,2)-fmax);
215         o=o+1;
216
217         if CSM(k,2)<0
218             CSM(k,2)=0;
219         end
220
221         if CSM(k,2)>=1
222             CSM(k,2)=1;
223         end
224     end
225
226     if k<fsize
227         k=k+1;
228     end
229
230     if k>n*fmax
231         n=n+1;
232     end
233
234     if o>fmax
235         o=1;
236     end
237
238 end
239
240 etamy=MATeta(1,lo);

```



```

301     CSM(f4,7)=tau60;
302 end
303
304 if CSM(f4,7)~=0 %variation of the
305 %transmittable
306 %bond stress
307     CSM(f4,7)=normrnd(CSM(f4,7),CVtau*CSM(f4,7));
308 end
309
310 if CSM(f4,4) <= acos(2/pi)*180/pi
311     CSM(f4,8)=CSM(f4,7)*pi*df*CSM(f4,6)*CSM(f4,2); %loading capacity
312 %for each fibre in N
313 end
314
315 if CSM(f4,4) > acos(2/pi)*180/pi && CSM(f4,4) <= acos(1/3)*180/pi
316     CSM(f4,8)=CSM(f4,7)*(1/3)*pi*df*CSM(f4,6)*CSM(f4,2);
317 end
318
319 if CSM(f4,6) ~= 0
320     CSM(f4,9)=CSM(f4,2); %number of effective fibres
321 end
322
323 if CSM(f4,6) ~= 0 && CSM(f4,2) ~=0
324     CSM(f4,10)=CSM(f4,3); %fibre orientations in the crack
325 end
326
327 if CSM(f4,6) ~= 0 && CSM(f4,2) ~=0 %1/eta for validating the model
328     CSM(f4,11)=1/CSM(f4,3);
329 end
330
331 if CSM(f4,8) ~=0 && CSM(f4,4) <= acos(2/pi)*180/pi %deltaF/w
332     CSM(f4,12)=(CSM(f4,7)*df*pi)/CSM(f4,3);
333 end
334
335 if CSM(f4,8) ~=0 && CSM(f4,4) > acos(2/pi)*180/pi && ...
336     CSM(f4,4) <= acos(1/3)*180/pi
337
338     CSM(f4,13)= (CSM(f4,7)*df*pi)/CSM(f4,3);
339 end
340
341     CSM(f4,14)=CSM(f4,10)*(CSM(f4,10)+df/lf*sin(acos(CSM(f4,10))));
342
343 end
344
345 disp(' ')
346 disp('Einzelfasertragfähigkeiten generiert.')
347
348 LC=sum(CSM(:,8)); %collective loading capacity
349
350 RLC=sum(CSM(:,12)); %reduction of the loading capacity
351 %due to the crack eta= 1 to 2/pi
352
353 ILCQ=sum(CSM(:,13)); %increase of the loading capacity after
354 %the crack due to fibres with
355 %an eta beetwen 2/pi and 1/3
356
357 CSMHELP(:,1)=CSM(:,10);
358 CSMHELP(:,2)=CSM(:,11);
359 CSMHELP(CSMHELP(:,1)==0,:)=[];
360 etacrack=sum(CSM(:,10));

```



```

361 etacrackmiddle=mean(CSMHELP(:,1));
362 contr=length(CSMHELP(:,:))/sum(CSMHELP(:,2));           %verification with
363                                                         %the equation by Freytag
364 effAreas=sum(CSM(:,9));           %number of effective fibre areas
365
366 disp(' ')
367 fprintf('mittlere Faserorientierung im Gesamtquerschnitt: %f [-]',...
368         mean(CSM(:,3)));
369 disp(' ')
370 disp(' ')
371 fprintf('%d Fasern im Rissquerschnitt',floor(effAreas));
372 disp(' ')
373 disp(' ')
374 fprintf('mittlere Faserorientierung im Rissquerschnitt: %f [-]',...
375         etacrackmiddle);
376 disp(' ')
377 disp('-----')
378
379 %% Computation of the sigma - w curves (Three Parts plus Plot)
380
381 %% First part of the curve
382
383 sigmaf0=LC/((b*h)*10^6);           %stress capacity of the fibres (w=0)
384 deltasigma=RLC/((b*h)*10^6);
385 deltasigmaQ=ILCQ/((b*h)*10^6);
386
387 deltal=delatalfctm=fctm*1*1000/Ec; %elastic deformation till the crack occurs
388 deltal=-delatalfctm:0.001:0;
389
390 sigmac=zeros(length(deltal),1);
391
392 for f5=1:length(deltal)           %first region of the curve
393     sigmac(f5,1)=fctm+Ec*deltal(f5)/(1*1000);
394 end
395
396 %% Second part of the curve
397
398 %Computation of Gf (fracture energy) from Diss STRACK page 57
399
400 if GK<=4
401     Gf=60/1000;
402 end
403
404 if GK>4
405     if GK==8
406         Gf0=25;
407     end
408
409     if GK==16
410         Gf0=30;
411     end
412
413     if GK==32
414         Gf0=38;
415     end
416
417     Gf=Gf0*(fck/10)^0.7/1000;
418 end
419
420 wlength=-Gf/fctm*log(sigmaf0/fctm);

```

```

421
422 w1=0:0.001:wlength;
423
424 sigmac2=zeros(length(w1),1);
425
426 for f6=1:length(w1)
427     sigmac2(f6,1)=fctm*exp(-(w1(f6))*fctm/Gf);
428 end
429
430 %% Third part of the curve
431
432 w=wlength:0.001:2;           %width of the crack which is computed
433
434 sigmaw=zeros(length(w),1);
435
436 curveinc=sum(CSM(:,12));
437
438 for f7=1:length(w)           %third region of the curve
439     sigmaw(f7,1)=sigmaf0-deltasigma*w(f7)+deltasigmaQ*w(f7)*(60/(0.8*pi*30));
440 %     sigmaw(f7,1)=sigmaf0*(1-2*w(f7)/lf)^2;      %V2computation after Strack
441 end
442
443 %% Output of the curve
444
445 line1=plot(deltal(:),sigmac(:));
446 hold all
447 line2=plot(w1,sigmac2);
448 hold all
449 line3=plot(w,sigmaw);
450 xlim([-deltalfctm max(w)])
451 ylim([0 fctm+0.2])
452 title('\sigma - w - Beziehung')
453 xlabel('w [mm]')
454 ylabel('\sigma [MPa]')
455 text(-deltalfctm,-0.2,'\leftarrow \Delta l [mm]',...
456     'HorizontalAlignment','left')
457 set(line1,'Color','red','LineWidth',0.5)
458 set(line2,'Color','blue','LineWidth',0.5)
459 set(line3,'Color','green','LineWidth',0.5)
460 legend([line1; line2; line3],{'1.Bereich: linear-elastisch';...
461     '2.Bereich: Softening ';...
462     '3.Bereich: Faserauszug'})
463 grid on
464 set(gca,'XTick',0:0.1:max(w),'XMinorTick','on','YTick',0:0.2:fctm+0.2)
465
466 %% Output of the data
467
468 outp(10,1)=mean(CSM(:,3));
469 outp(10,2)=floor(effAreas);
470 outp(10,3)=etacrackmiddle;
471 outp(10,4)=contr;
472
473 posi=length(sigmaw(:,1));
474
475 mysig(10,1)= sigmaw(1,1);
476 mysig(10,2)= sigmaw(ceil(posi*1/10),1);
477 mysig(10,3)= sigmaw(ceil(posi*2/10),1);
478 mysig(10,4)= sigmaw(ceil(posi*3/10),1);
479 mysig(10,5)= sigmaw(ceil(posi*4/10),1);
480 mysig(10,6)= sigmaw(ceil(posi*5/10),1);

```

```

481 mysig(lo,7)= sigmaw(ceil(posi*6/10),1);
482 mysig(lo,8)= sigmaw(ceil(posi*7/10),1);
483 mysig(lo,9)= sigmaw(ceil(posi*8/10),1);
484 mysig(lo,10)= sigmaw(ceil(posi*9/10),1);
485 mysig(lo,11)= sigmaw(floor(posi*10/10),1);
486
487 %% End of the loop
488 end
489
490 %% Creating of additional output variables
491
492 mysig(isnan(mysig(:,1)),:)=[];
493
494 outmysig=zeros(11,6);
495
496 for coeta=1:11
497
498     outmysig(coeta,1)= mean(mysig(:,coeta));           %fills the first column
499                                                         %of the matrix with
500                                                         %the mean values
501
502     outmysig(coeta,2)= min(mysig(:,coeta));           %fills the second column
503                                                         %of the matrix with
504                                                         %the minimum values
505
506     outmysig(coeta,3)= max(mysig(:,coeta));           %fills the third column
507                                                         %of the matrix with
508                                                         %the maximum values
509
510     outmysig(coeta,4)= (std(mysig(:,coeta))/mean(mysig(:,coeta)))*100;
511     %fills the fourth column of the matrix with the coefficient of variation
512
513     outmysig(coeta,5)= outmysig(coeta,1)-1.645*std(mysig(:,coeta));
514     %5percent quantil
515     outmysig(coeta,6)= outmysig(coeta,1)+1.645*std(mysig(:,coeta));
516     %95percent quantil
517
518 end
519
520 outp((lcount+2),1)=mean(outp(1:lcount,1));
521 outp((lcount+2),2)=round(mean(outp(1:lcount,2)));
522 outp((lcount+2),3)=mean(outp(1:lcount,3));
523 outp((lcount+2),4)=mean(outp(1:lcount,4));
524
525 fibcr05=round(outp((lcount+2),2)-1.645*std(outp(1:lcount,2)));
526 fibcr95=round(outp((lcount+2),2)+1.645*std(outp(1:lcount,2)));
527 etacrsig=std(outp(1:lcount,3));
528
529 %% Output
530
531 %-----
532 % Output of the stresses and the CV
533 %-----
534
535 valueA1=sprintf('%smit [MPa]',char(963));
536 valueB1=sprintf('%smin [MPa]',char(963));
537 valueC1=sprintf('%smax [MPa]',char(963));
538 valueE1=sprintf('%s0.05 [MPa]',char(963));
539 valueF1=sprintf('%s0.95 [MPa]',char(963));
540

```

```

541 xlswrite(fileout, {valueA1, valueB1, valueC1, 'CV [%]', valueE1, valueF1}, ...
542         'Tabelle1', 'A1')
543 xlswrite(fileout, outmysig(:, :), 'Tabelle1', 'A2')
544
545 %-----
546 % Output of the fibre orientatiions and the number of fibres in the crack
547 %-----
548
549 valA=sprintf('%svol', char(951));
550 valC=sprintf('%sRiss', char(951));
551 valD=sprintf('%scontr', char(951));
552
553 valA2=sprintf('%svol mittel', char(951));
554 valC2=sprintf('%sRiss mittel', char(951));
555 valD2=sprintf('%scontr mittel', char(951));
556
557 valC3=sprintf('std(%sRiss)', char(951));
558
559 rowout=sprintf('A%d', (lcount+2));
560 rowout1=sprintf('A%d', (lcount+5));
561 rowout2=sprintf('A%d', (lcount+6));
562
563 xlswrite(fileout2, {valA, 'n Riss', valC, valD}, 'Tabelle1', 'A1')
564 xlswrite(fileout2, outp(:, :), 'Tabelle1', 'A2')
565 xlswrite(fileout2, {valA2, 'n Riss mittel', valC2, valD2}, 'Tabelle1', rowout)
566 xlswrite(fileout2, {'n Riss 0.05', 'n Riss 0.95', valC3}, 'Tabelle1', rowout1)
567 xlswrite(fileout2, {fibcr05, fibcr95, etacrsig}, 'Tabelle1', rowout2)
568
569 %-----
570 % Output of the stress-CMOD-curve
571 %-----
572
573 % (CMOD = Crack Mouth Opening Displacement)
574
575 print(figure(1), '-djpeg', 'Faser_Output.jpg')
576
577 %% End of the computation of one test
578
579 disp(' ')
580 disp('=====')
581 fprintf('Eingabe_%d berechnet', test);
582 disp(' ')
583 disp('=====')
584 disp(' ')
585 end
586
587 %% Time for computing the model
588
589 disp(' ')
590 toc

```