



Michael Ofner, BSc

Prepaymentrisiko von Hypothekarkrediten

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin:

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda Dragoti-Cela

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Graz, Juli 2014

Für meine große Liebe.

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich bei meiner Familie und ganz besonders bei meinen Eltern und Schwestern, Tanja und Christina, bedanken. Sie waren es, die mir einerseits die Möglichkeit gegeben haben eine solche Ausbildung zu genießen und mir andererseits während der ganzen Jahre mit Rat und Tat zur Seite standen.

Gleichermaßen möchte ich mich bei all meinen Freunden bedanken, die mich in dieser Zeit begleitet haben. Ein spezieller Dank geht hierbei an Andreas, Verena und Florian, die mich sowohl im privaten Bereich als auch im Rahmen des Studiums jederzeit unterstützt und motiviert haben. Vielen Dank auch allen anderen besonderen Menschen, die mir während dieser langen Zeit immer Zuspruch und Mut gegeben haben.

Einen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle an meine Betreuerin, Frau Professor Eranda Dragoti-Cela richten. Zum Einen zeigte sie mir in zahlreichen Besprechungen, durch Anregungen und kompetente Beantwortung zahlreicher Fragen, den richtigen Weg zur Fertigstellung dieser Arbeit und zum Anderen fand sie, in schwierigen Phasen der Arbeit, immer Worte der Motivation.

Ein großes Dankeschön auch an alle, die sich dem Korrekturlesen dieser Arbeit widmeten und mir Anregungen zu Verbesserungen gaben.

Zuletzt möchte ich mich noch bei Herrn Andreas Schiestl bedanken, der mir trotz zahlreicher Komplikationen und Verzögerungen schlussendlich einen Auszug an Echtdateien zur Verfügung stellen konnte und mir bei einigen Fragen zur Seite stand.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt das Prepaymentrisiko von Krediten. Vorwiegend wird in der theoretischen Betrachtung die Gefahr von vorzeitigen, außerplanmäßigen Tilgungen von hypothekarisch gesicherten Krediten behandelt. Zu diesem Thema gibt es schon zahlreiche Analysen und Beschreibungen aus dem amerikanischen Finanzmarkt, doch diese sind nicht unmittelbar auf den europäischen Markt anwendbar. Deshalb werden der österreichische Kreditmarkt und Charakteristika von Hypothekarkrediten analysiert, die in weiterer Folge auch gleichermaßen Merkmale für unterschiedliche Rückzahlungspotentiale sind. Neben weiteren Merkmalen und Ursachen für vorzeitige Rückzahlungen werden im Rahmen dieser Arbeit die mathematischen Modellierungen diskutiert. Ziel dieser Modelle ist es einerseits durch stochastische Prozesse Verteilungen von Rückzahlungswahrscheinlichkeiten zu approximieren (e.g. Levy Modell) und andererseits die Merkmale und Ursachen von Rückzahlungen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in einen funktionalen Zusammenhang zu stellen (e.g. Cox-Proportional-Hazard Modell). Außerdem sollen diverse Praktiken zur Refinanzierung von Krediten, insbesondere das Verbriefungskonzept, näher dargestellt werden. Ein weiterer Punkt dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Möglichkeit Hypothekarkredite mit Hilfe derivativer Finanzinstrumente zu interpretieren und daraus eine Bewertung und Bepreisung der enthaltenen Rückzahlungsoptionen zu betreiben.

Aus praktischer Sicht wurde zunächst aus den theoretischen Erkenntnissen eine Simulation programmiert, die eine Schar an Kreditdaten generiert. Das Hauptaugenmerk der praktischen Analysen liegt an der Modellierung der Prepaymentwahrscheinlichkeiten. Dazu werden sowohl simulierte, als auch reale Daten herangezogen und Modelle dahingehend parametrisiert und verglichen. Die Analyse hat im Speziellen die Besonderheiten verschiedener Faktoren, wie Altersstrukturen, oder die Unterschiede in der Anwendbarkeit der Modelle unter realen und simulierten Bedingungen aufgezeigt.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
Zusammenfassung	iv
Abbildungsverzeichnis	xi
Tabellenverzeichnis	xi
Listings	xiii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufgabenstellung und Forschungsfragen	2
1.2.1 Motivationsbeispiel	3
1.3 Aufbau der Arbeit	4
2 Immobilien und Kreditfinanzierung	6
2.1 Immobilienmarkt in Österreich	7
2.2 Immobilienkredite in Österreich	9
3 Hypotheken und deren Finanzierung	11
3.1 Hypothekendarlehen	11
3.1.1 Pfandrechtsvorrang	12
3.1.2 Kreditlaufzeit	12
3.1.3 Kreditqualität	13
3.1.4 Zinsrate	14
3.1.5 Tilgungstypen	14
3.1.6 Kreditbetrag	16
3.1.7 Strafen für vorzeitige Tilgung	17

3.2	Refinanzierung der Hypotheken	17
3.2.1	Verbriefung (Securitization)	18
3.2.2	Das Verbriefungskonzept von MBS	19
3.2.3	Prepayment bei MBS	23
4	Modellierung der Prepaymentwahrscheinlichkeit	25
4.1	Anreizbeispiele	26
4.2	Allgemeines zur Modellierung	31
4.3	Einflussfaktoren	32
4.4	Deterministische Modelle	37
4.4.1	Überlebensmodell	39
4.4.2	Generalisiertes Lineares Modell	42
4.4.3	CPR und PSA Modell	44
4.5	Stochastische Modelle	47
4.5.1	Normales-Einfaktor-Prepayment Modell	48
4.5.2	Levy-Portfolio-Prepayment Modell	50
4.5.3	Default Modelle	53
5	Bewertung des Prepaymentrisikos	55
5.1	Eigenschaften der Preisfunktion	57
5.2	Bewertung von Hypotheken	58
5.3	Konstruktion der Optionen	59
5.4	Modelle zur Bewertung	62
5.4.1	KKME Modell	62
5.4.2	Bivariates Binomialbaum Modell	64
5.4.3	Allgemeine Bemerkungen	67
6	Praktische Implementierung	69
6.1	Allgemeines	69
6.2	Datensimulation	70
6.2.1	Simulation	70
6.2.2	Datenanalyse	77
6.2.3	Modellauswahl und -kalibrierung	83
6.2.4	Ergebnisse	102
6.3	Reale Daten	103
6.3.1	Datenanalyse	105
6.3.2	Rückzahlungsmotive	109

6.3.3	Modellauswahl und -kalibrierung	111
6.3.4	Cashflow und Zinsverluste	117
6.3.5	Ergebnisse	128
7	Zusammenfassung und Ausblick	129
7.1	Zusammenfassung	129
7.2	Ausblick und offene Fragen	131
	Literaturverzeichnis	132
	Internetquellen	134
A	R-Code	135

Abbildungsverzeichnis

2.1	Vergleich der Sparquoten (Netto) zwischen Österreich und USA, in Anlehnung an [21] und [2]	7
2.2	Reales Wachstum der MFI-Kredite und der Anlageinvestitionen, aus [19]	8
2.3	Durchschnittliche Zinsentwicklung in Österreich in Wohnbau- und Konsumbereich mit dem Leitzinssatz als Referenz, aus [19]	10
3.1	Kredittilgungsplan mit konstanten Annuitäten	15
3.2	Kredittilgungsplan mit Interest-Only Raten	16
3.3	Anteile an Refinanzierungsmethoden von Hypothekarkrediten (vgl. [1])	18
3.4	Chronologische Entwicklung von Verbriefungen in Europa (nur Neuemissionen) (vgl. [8])	20
3.5	Vom Kreditpool zur Tranchenbildung, nach [6]	21
3.6	Schema der Verbriefung, aus [22]	22
4.1	Zinsverläufe der Prepaymentszenarien mit fixen Zinssätzen	28
4.2	Zeitreihe des 3-Monats EURIBOR zwischen 1.1.2001 und 31.12.2012	29
4.3	Zinsverläufe der Prepaymentszenarien mit variablen Zinssätzen	30
4.4	Rückzahlungsverhalten in einem Pool gemäß dem CPR Modell, nach [3]	45
4.5	Rückzahlungsverhalten in einem Pool anhand dem PSA Modell, nach [3]	46
5.1	Die Eigenschaften Duration und Konvexität von Finanzprodukten, aus [3]	57
5.2	Bivariater Binomialbaum, aus [24]	67
6.1	Entwicklung der Fixed Mortgage Rates zwischen 1.1.1972 und 31.12.2013	72
6.2	Prinzip des Simulationsaufbaus	75
6.3	Simulierter historischer Rückzahlungsanreiz eines fiktiven Kreditnehmers	77
6.4	Datenauszug der simulierten Kreditdaten	78
6.5	Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditlaufzeiten in Monaten	79

6.6	Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditnominalen	79
6.7	QQ-Plot der Nominalen und Laufzeiten	80
6.8	Relative Häufigkeiten der simulierten Loan-to-Value Kennzahlen	81
6.9	Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditzinssätze	81
6.10	Relative Häufigkeiten der simulierten, jährlichen Kreditabschlüsse	82
6.11	Rückzahlungsrate je Kreditalter zum Tilgungszeitpunkt (links) und nor- mierter Vergleich zwischen theoretischer und empirischer Altersfunktion (rechts)	83
6.12	Empirische Überlebensfunktion der Kredite	87
6.13	Plot zur Erfassung zeitlicher Veränderungen der Parameter β	88
6.14	Empirische Prepaymentraten der Kredite mit Laufzeitmerkmalen “short”, “medium” und “long”	89
6.15	Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit kurzer Laufzeit . . .	91
6.16	Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit mittlerer Laufzeit . .	93
6.17	Einflussnahme der Beobachtungen zur Findung von Hebelpunkten	93
6.18	Diagnoseplot zur Überprüfung auf Linearität des Faktors	94
6.19	Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit langer Laufzeit . . .	96
6.20	Monatliche Rückzahlungsraten und empirische Verteilungsfunktion der si- mulierten Kredite mit Laufzeiten von 10 Jahren (oben) und 30 Jahren (unten)	97
6.21	Mehrere simulierte Pfade für die Verteilungsfunktion der Kredite mit Lauf- zeiten von 10 Jahren (links) und 30 Jahren (rechts)	99
6.22	Vergleich der über den Levy-Prozess simulierten Prepaymentraten und der empirischen Prepaymentraten	99
6.23	QQ-Plot zwischen den empirischen Prepaymentraten und normalverteilten Samples	100
6.24	Simulierte Verteilungsfunktion vom Normal-Einfaktor Modell der simulier- ten Kreditdaten mit Laufzeiten von 10 Jahren (oben) und 30 Jahren (unten)	101
6.25	Datensatzauszug von vollständig getilgten oder geschmäleren Krediten . .	104
6.26	Relative Häufigkeiten der aufgezeichneten Laufzeiten und Kreditbeträge der realen Daten	105
6.27	Häufigkeiten der aufgezeichneten Laufzeiten der realen Kredite	106
6.28	Häufigkeiten von Abschlussjahr und -monat beziehungsweise Tilgungsjahr und -monat	106
6.29	Relative Häufigkeiten von Annuitätenhöhe und Kreditratings	108
6.30	Relative Häufigkeiten der Tilgungsbeträge von Kompletttilgungen bzw. Schmälerungen	108

6.31	Rückzahlungszeitpunkte der realen Kredite	109
6.32	Boxplotserie der EURIBOR-Differenz (zwischen Kreditbeginn und Tilgungszeitpunkt) unterteilt nach Tilgungsjahren (links), Boxplotserie der vertraglichen Zinssätze unterteilt nach Tilgungsjahren (rechts)	110
6.33	Zeitreihen der relativen Häufigkeiten getilgter Kredite von Kompletttilgungen und Schmälerungen	110
6.34	Überlebensfunktion der realen Kreditdaten	111
6.35	Relative Häufigkeiten der Prepaymentzeitpunkte für die drei definierten Kreditpools	112
6.36	Survivalfunktionen der drei Kreditpools	113
6.37	Über Levy-Prozesse simulierte Verteilungen der Rückzahlungszeitpunkte für die drei Laufzeitpools	114
6.38	Gegenüberstellung der über den Levy-Prozess simulierten (durchgezogener Verlauf) und der empirischen Verteilung (gepunkteter Verlauf) für den Pool der Kredite mit Laufzeit von 300 Monaten (links) und Quantilplot der empirischen und theoretischen Samples (rechts)	115
6.39	Gegenüberstellung der deterministisch modellierten und der empirischen Prepaymentraten	116
6.40	Vergleich der über das Normal-Einfaktor-Modell simulierten und der empirischen Verteilungen	117
6.41	Relative Häufigkeit der außerordentlichen Tilgungsbeträge (links) und Auszug davon im Wertebereich [100.000,400.000] zur näheren Betrachtung der Tails (rechts)	119
6.42	Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Kompletttilgungen	120
6.43	Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Kompletttilgungen je Laufzeitenpool	121
6.44	Zeitreihe der monatlichen Verluste, resultierend aus vorzeitigen, vollständigen Tilgungen zwischen 2006 und 2014	122
6.45	Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Schmälerungen .	123
6.46	Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Schmälerungen eingeteilt nach Pools	124
6.47	Zeitreihe der monatlichen Verluste, resultierend aus Kreditschmälerungen zwischen 2006 und 2014	125
6.48	Histogramm, QQ-Plot und empirische Verteilung der monatlichen Gesamtzinsverluste	126
6.49	Zeitreihe sowie Hillplot der gesamten, monatlichen Zinsverluste	127

Tabellenverzeichnis

2.1	Aus [4]: Fakten zur Wirtschaftslage und Hypotheken in Österreich und der Europäischen Union	8
5.1	Bezeichnungen für die Optionsbepreisung von Hypotheken, nach [16]	60
6.1	Kategorisierung von Laufzeit, Nominale und LTV	89
6.2	Mittelwert und Varianz aus empirischer Verteilung der Daten mit 10 bzw. 30 Jahren Laufzeit	98
6.3	Parameterschätzer der Levy-Prozesse für die Daten mit 10 bzw. 30 Jahren Laufzeit	98
6.4	Erwartungswert und Standardabweichung der empirischen Verteilungen aus den Laufzeitkategorien	113
6.5	Parameter der Levy-Prozesse für verschiedene Laufzeitkategorien	114
6.6	VaR_α für monatliche Gesamtzinsverluste	126

Listings

6.1	Simulation von Kreditdaten in R	73
6.2	Simulation eines Kreditbeginns und einer Fixzinsrate	74
6.3	Anpassung der Rückzahlungsintensitäten, die aus den simulierten Laufzeiten resultieren: Den Laufzeiten aus bestimmten Intervallen werden bestimmte Rückzahlungsintensitäten zugeordnet.	74
6.4	Simulation der Rückzahlungsintensität, die aus dem Alter des simulierten Kredites nach Gleichung 4.19 abgeleitet wird	74
6.5	Simulation der Zinsintensität, die sich aus der Differenz zwischen dem vertraglichen Zinssatz <code>fr</code> und dem am Markt beobachteten Zins <code>zins</code> ergibt .	75
6.6	Hypothesentest der Nominalen für Test auf Normalverteilung: Shapiro-Wilk Test und Kolmogorov-Smirnov Test	78
6.7	Auszug aus dem ergänzten, simulierten Datensatz: Zusätzlich sind hier das eventuelle Alter zum Zeitpunkt der vorzeitigen Rückzahlung (<code>prep.alt</code>), der Rückzahlungsindikator (<code>prep.yon</code>) und die Differenz zwischen Fixzinssatz und Marktzinssatz zum Prepaymentzeitpunkt (<code>fr.cm</code>) aufgelistet . . .	84
6.8	Modellierung des Proportionalen-Hazard Modells	85
6.9	Signifikanzanalyse der Faktoren im zuvor definierten Modell	85
6.10	Diagnose der Faktoren auf Eignung für das Proportionale-Hazard Modell .	87
6.11	Signifikanzanalyse der Faktoren aus den Daten mit kurzer Laufzeit	90
6.12	Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit kurzer Laufzeit	91
6.13	Signifikanzanalyse der Faktoren für Daten mit mittlerer Laufzeit	92
6.14	Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit mittlerer Laufzeit	92
6.15	Signifikanzanalyse der Faktoren für Daten mit mittlerer Laufzeit	95

6.16	Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit langer Laufzeit	95
6.17	Parameterschätzung der Levy-Prozesse in <i>Mathematica</i>	98
6.18	Simulation der Prepaymentverteilung über Normales-Einfaktor Modell . . .	101
6.19	Quantile der Annuitäten (in EUR)	107
6.20	Berechnung der Zinsverluste aus den Schmälerungen	123
A.1	Simulation der Rückzahlungsintensität, die sich aus dem Alter des Kredites nach Gleichung 4.19 ableitet	135
A.2	Modulo-Funktion für Laufzeitgenerierung: Dadurch werden Werte in einem vorgegebenen Intervall erzeugt.	136
A.3	Erzeugung einer aus der Laufzeit abgeleiteten Rückzahlungsintensität . . .	136
A.4	Erzeugung einer aus der Nominale abgeleiteten Rückzahlungsintensität . .	136
A.5	Simulation zur Generierung von LTV-Kennzahlen	137
A.6	Erzeugung einer aus der LTV-Kennzahl abgeleiteten Rückzahlungsintensität	137
A.7	Simulation eines zulässigen Kreditbeginns: Aus den verfügbaren histori- schen Zinsdaten und der simulierten Laufzeit wird ein Kreditbeginn simuliert.	138
A.8	Simulation einer Fixzinsrate: Aus den historisch vorliegenden Zinsdaten wird zum simulierten Kreditbeginn eine Zinsrate generiert.	138
A.9	Simulation der Gesamtrückzahlungsintensität: Aus allen einzelnen Rück- zahlungsintensitäten wird ein Gesamtanreiz erzeugt.	139
A.10	Simulation eines eventuellen Rückzahlungszeitpunktes: Aus dem zeitlichen Intensitätenprofil des Kredites wird ein eventueller Rückzahlungszeitpunkt generiert.	139
A.11	Simulation von Tilgungszeitpunkten für den gesamten Datensatz	140
A.12	Hauptfunktion der Simulation	140

“One of the basic rules of the universe is that nothing is perfect.

Perfection simply doesn't exist....

Without imperfection, neither you nor I would exist.”

Stephen Hawking (1942 – present)

1

Einleitung

1.1 Motivation

In der heutigen Zeit gehören gewisse finanzielle Investitionen zur Routine eines jeden Menschen. Im Laufe des Lebens werden vielerlei Dinge gekauft und angeschafft, um zumindest den Standard an Luxus, wie ihn unsere Gesellschaft oder unser soziales Umfeld vorgibt, zu decken. Doch ganz gleich aus welcher Notwendigkeit oder Motivation heraus dies geschieht, ein wichtiger Aspekt bei jedem Kauf ist die Finanzierung unserer Konsumgüter. Wenngleich eine Vielzahl dieser Güter, im Speziellen solche des täglichen Gebrauchs, üblicherweise durch Eigenkapital finanziert werden können, gibt es auch gewisse Investitionen (Grundstücke, Immobilien, Fahrzeuge, Ausbildungen, etc.), die traditionellerweise zunächst und übermäßigen Anteils durch Fremdkapital angeschafft werden. Bei Beschaffung von Fremdmittel wendet man sich in vielen Fällen an Geldinstitute, die einem das notwendige Kapital unter gewissen Voraussetzungen und Bedingungen zur Verfügung stellen.

Im üblichen Fall wird jeder Kreditantrag vom jeweiligen Kreditinstitut nach gewissen Vorgaben überprüft, ob die wirtschaftlichen und persönlichen Verhältnisse des Kreditsuchen-

den eine ordnungsgemäße Tilgung des Kredites garantieren können. Dadurch versucht das Kreditinstitut das Risiko von etwaigen Zahlungsausfällen zu minimieren. Da der globale Finanzmarkt jedoch sehr komplex ist, lassen sich solche unerwünschten Vorgänge nicht vollends ausschließen. In jüngster Vergangenheit ließen sich jedoch so manche Finanzinstitute aus Gier nach Profit zur wirtschaftlichen Unvernunft hinreißen und nahmen diese Art von Risiko billigend in Kauf. Wie in [21, Sinn 2009] geschildert wird, wurden vor allem am amerikanischen Markt der durch fehlende gesetzliche Bestimmungen juristische Graubereich genutzt, um in gewisser Hinsicht unvernünftige Gewinne zu lukrieren. Was lange Zeit sowohl für Kreditnehmer als auch Kreditgeber und damit gekoppelten Investoren ein unheimlich gutes Geschäft war, endete schlussendlich durch die schon angesprochene Komplexität und Verstrickung des weltweiten Marktes in der jüngsten Finanzkrise beginnend im Jahr 2008. Diese Facette ist zum Einen nur ein kleiner Teil dieser Krise, wie man in [21] nachvollziehen kann und zum Anderen enthält sie nur eines der vielen Risiken, denen Finanzinstitute ausgesetzt sind. Diese Arbeit wird sich im weiteren Verlauf mit diesen Risiken und im Speziellen mit dem Prepaymentrisiko, also dem Risiko von vorzeitigen, außerplanmäßigen Tilgungszahlungen, beschäftigen.

1.2 Aufgabenstellung und Forschungsfragen

Wie schon erwähnt, sehen sich verschiedenste Kreditinstitute mit einer Vielzahl von Risiken konfrontiert. Um der wirtschaftlichen Vernunft Rechnung zu tragen, müssen all diese Gefahren erkannt und entsprechend behandelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll nun ein besonderes Investitionsgut, der Hypothekarkredit, und die damit verbundene Kreditform analysiert werden. Der Kredit zur Finanzierung der eigenen vier Wände stellt für sehr viele die wichtigste und einschneidendste finanzielle Entscheidung dar. Ebenso wird diesen "Häuslbauerkredit" auch auf Seiten der Kreditinstitute ein besonderer Stellenwert eingeräumt. Einerseits handelt es sich meist um hohe Kapitalsummen und andererseits enthalten diese Kredite neben dem Ausfallrisiko oder dem Zinsrisiko auch das bereits erwähnte Prepaymentrisiko, welche allesamt untereinander verstrickt sind und daher eine genaue und umfangreiche Analyse erfordern. Natürlich unterliegt ein jedes dieser Institutionen auch Gefahren, die nicht unmittelbar mit individuellen Krediten verbunden sind, wie beispielsweise dem Marktrisiko. Auf solche soll in weiterer Betrachtung nicht näher eingegangen werden.

In der Chronologie einer Kreditanwartschaft kommt es nach dem Antrag und nach Abschluss des Vertrages, in dem alle relevanten Details festgehalten werden, auch zur so-

genannten Tilgungsphase. In dieser vertraglich definierten Zeitspanne wird der entlehnte Geldbetrag in Raten samt den ebenso vereinbarten Zinsen zurückgezahlt, wobei sich hierin das angesprochene Prepaymentrisiko verbirgt. Denn wie in [14, Jacobs *et al.* 2005, S.1] erläutert, handelt es sich bei Hypothekarkrediten um unvollständige Verträge, da nicht jeder mögliche Fall vorhergesehen und somit im Vertrag festgehalten werden kann. Solche Fälle sind beispielsweise sich individuell oder gesamtwirtschaftlich ändernde Umstände, die den vorhergesehenen Tilgungsplan zwangsläufig verändern. Ein plausibel erscheinender Einschnitt in diesen Tilgungsplan ist, dass der Kreditnehmer, aus welchen Gründen auch immer, die Tilgungsraten nicht mehr zur Verfügung stellen kann (Ausfallrisiko). Doch auch der Fall, dass der Kreditnehmer seinen Kredit, oder zumindest einen Teil, über eine außerordentliche Tilgung begleicht, stellt für das Kreditinstitut eine nicht vernachlässigbare Vertragssituation dar (Prepaymentrisiko). Um das Problem beziehungsweise die Gefahr kurz zu motivieren, dient folgendes hypothetisches Beispiel.

1.2.1 Motivationsbeispiel

Beispiel 1:

Ein Kredit wurde mit einer Gesamtlaufzeit von 30 Jahren und einem Zinssatz von 5% abgeschlossen. Nach einiger Zeit ändern sich die Marktgegebenheiten und es gibt gleichwertige Kredite mit einem Zinssatz von 4,5%. Der Kreditnehmer beschließt, trotz etwaiger Strafzahlungen, einen neuen Kredit zu den günstigeren Konditionen aufzunehmen und den fälligen Restbetrag des ursprünglichen Kredits auf einmal zu tilgen. Aus Sicht des Kreditnehmers, abhängig von den Strafzahlungen, unter Umständen ein gewinnbringendes Vorhaben. Für den Kreditgeber ergeben sich daraus jedoch Probleme. Wie schon vorhin erwähnt, müssen Kredite auf Seiten der Kreditinstitute irgendwie refinanziert werden. Dies geschieht beispielsweise durch Verbriefung oder Aufnahme von Fremdkapital. Durch den Vorgang der vollkommenen Tilgung verliert das Kreditinstitut einige Zahlungen und es reduziert sich die Rendite dieses Geschäfts. Im schlimmsten Fall können dadurch die Fremdkapitalkosten nicht mehr gedeckt werden und es wird sogar zum Verlustgeschäft.

Das offensichtliche Risiko in diesem sehr einfachen Szenario sind Zinsveränderungen am Markt, doch es gibt noch eine Vielzahl anderer Einflussfaktoren. Strafzahlungen sorgen

dafür, dass diese Szenarien nicht all zu gravierend und verlustbringend sind, doch daraus ergibt sich die Frage, was sind faire Strafzahlungen?

Bestandteil dieser Arbeit soll es nun sein, diese Probleme theoretisch zu beleuchten. Welche Umstände oder Faktoren beeinflussen eine solche vorzeitige, außerplanmäßige Tilgung? Wie gehen die Kreditinstitute generell mit der Schar an Krediten um? Welche bekannten Modelle und Bewertungsverfahren gibt es, um die angesprochenen Gefahren so gut als möglich einzuschätzen und erwartungsgemäß zu prognostizieren?

Eine gewisser Anteil bei der Beantwortung all dieser Fragen wird im Zusammenhang mit sogenannten Mortgage Backed Securities (MBS) geschehen. Was und wofür MBS sind, wird ebenfalls in dieser Arbeit beschrieben. Wie in [3, Jacob *et al.* 2006] einleitend erwähnt, stellen diese eine wertvolle Erfindung in Amerika dar. Tatsächlich resultieren daraus eine Vielzahl von Vorteilen, sowohl für Kreditnehmer als auch für Kreditgeber. Wie sich schon vermuten lässt, kommt ein übermäßiger Anteil der gesamten bekannten Literatur aus dem amerikanischen Bereich und beschreibt hauptsächlich Erkenntnisse, die unmittelbar zunächst auch nur auf den amerikanischen Markt anwendbar sind. Die Risiken, die aus den vorzeitigen Tilgungszahlungen hervorgehen, sind aus europäischer Sicht noch ein etwas jüngeres Forschungsthema. Daher stellt sich die Frage, ob und in welchem Ausmaß diese bestehenden Erkenntnisse auch auf den europäischen Markt, insbesondere in Österreich, anwendbar sind.

1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird ein Überblick über das Kredit- und Immobilienwesen speziell in Österreich gegeben. Dabei sollen diverse Unterschiede zum amerikanischen Markt aufgezeigt werden, aus denen sich in weiterer Folge essentielle Unterschiede in der Refinanzierungspolitik von Banken ergeben.

Kapitel 3 beschäftigt sich einerseits mit den für diese Arbeit notwendigen Inhalten eines Hypothekarkredites. Andererseits wird auf Refinanzierungsmethoden von Krediten seitens der Banken eingegangen. Dabei soll insbesondere etwas näher auf das in Europa noch nicht sehr verbreitete Verbriefungskonzept eingegangen werden.

Das anschließende Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Modellierung von Rückzahlungswahrscheinlichkeiten. Dabei werden zunächst Einflussfaktoren diskutiert und danach deter-

ministische und stochastische Modelle, durch die Prepaymentwahrscheinlichkeiten zum Ausdruck gebracht werden können, vorgestellt.

Das letzte theoretische Kapitel 5 beschreibt Möglichkeiten, wie das Prepaymentrisiko bewertet und bepreist werden kann. Dabei werden das Rückzahlungs- und das Ausfallrisiko als Derivate betrachtet und daraus Modelle zur Bepreisung dieser Optionen angeführt.

Im abschließenden praktischen Teil (Kapitel 6) wird speziell auf die Modellierung von Prepaymentwahrscheinlichkeiten eingegangen. Die zuvor dargestellten Modelle sollen einerseits anhand von eigenständig simulierten und andererseits durch Echtdateen parametrisiert und untersucht werden.

2

Immobilien und Kreditfinanzierung

Um die Bedeutung dieses Themas etwas besser zu erfassen, sollen die nachfolgenden Fakten erstens einen kurzen Überblick zum aktuellen Kreditwesen und zweitens auch einen Einblick in den Immobilienmarkt in Österreich geben. Nichtsdestotrotz sei gesagt, dass die Finanzierung über Kredite in Österreich beziehungsweise auch im restlichen EU-Raum bei weitem nicht denselben Stellenwert besitzt wie etwa in den USA.

Dies zeigt beispielsweise auch ein Vergleich des Sparverhaltens zwischen amerikanischen und österreichischen privaten Haushalten. Eine Gegenüberstellung der Sparquote, wie in Abbildung 2.1, weist darauf hin, dass österreichische Staatsbürger im Gegensatz zu amerikanischen wesentlich mehr Anteile ihres Einkommens auf die Seite legen, um für Finanzierungen größerer Investitionen gerüstet zu sein.

Abbildung 2.1 bestätigt zudem die Tatsache, dass beispielsweise ein durchschnittlicher, amerikanischer Haushalt über eine Vielzahl an Kreditkarten verfügt und damit bereits Dinge des täglichen Gebrauchs finanziert werden und zugleich die offenen Beträge nur teilweise sofort abbezahlt werden, der Rest eben über kurzfristige Kredite. Dieses Vorgehen ist in Europa, insbesondere in Österreich, kaum verbreitet und zeigt, dass Kredite in den USA eine wesentlich andere Rolle spielen als im europäischen Raum. Amerikaner leben

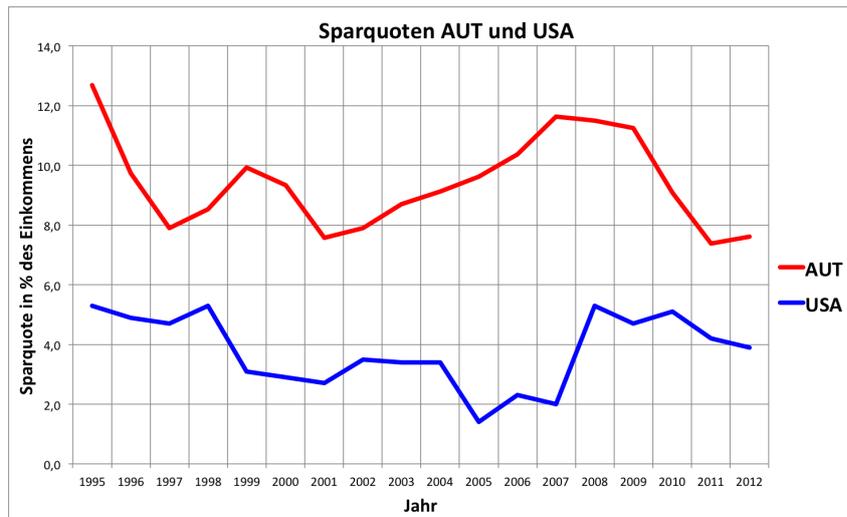


Abbildung 2.1: Vergleich der Sparquoten (Netto) zwischen Österreich und USA, in Anlehnung an [21, S.34] und [2, Statistik Austria 2012]

auf Pump (vgl. [21, ab S.33]). Trotzdem lassen auch heimische Statistiken vermuten, dass ein beträchtlicher Anteil der Investitionen kreditfinanziert wird. So zeigt ein Bericht der Österreichischen Nationalbank, dass in den letzten beiden Jahrzehnten das reale Wachstum an Anlageinvestitionen und MFI-Krediten¹ sehr hohe Übereinstimmungen aufweisen, wengleich um ein bis zwei Quartale verzögert, siehe Abbildung 2.2.

2.1 Immobilienmarkt in Österreich

Auf die zirka 8,3 Millionen Einwohner in Österreich kommt nach [4, Amann *et al.* 2011] in etwa ein Immobilienbestand von 4,17 Millionen Einheiten und eine Anzahl von 3,65 Millionen Haushalten. Über die Hälfte (56%) dieser Haushalte lebt in Eigenheimen, der Rest teilt sich auf private und öffentliche Miethäuser und -wohnungen auf. Außerdem wurden dem Bericht zufolge im Jahr 2010 über 39.500 und im Jahre 2011 sogar 43.500 neue Baugenehmigungen erteilt, sowie nur unwesentlich weniger Wohneinheiten in den beiden Jahren fertiggestellt. Im europäischen Vergleich liegt Österreich, gemessen an der Bevölkerung, über dem Durchschnitt. Es wird erwartet, dass sich dieser Trend auch weiterhin fortsetzt.

Ein Blick auf die Immobilienpreise zeigt im Jahr 2011 einen durchschnittlichen Anstieg um 3,1% (vgl. Tabelle 2.1) im Vergleich zum Vorjahr und für das erste Quartal in 2012

¹Monetary Financial Institutions (MFI) ist eine spezielle Bezeichnung für Kreditinstitute, deren Kreditfinanzierung übermäßig aus Einlagen erfolgt.

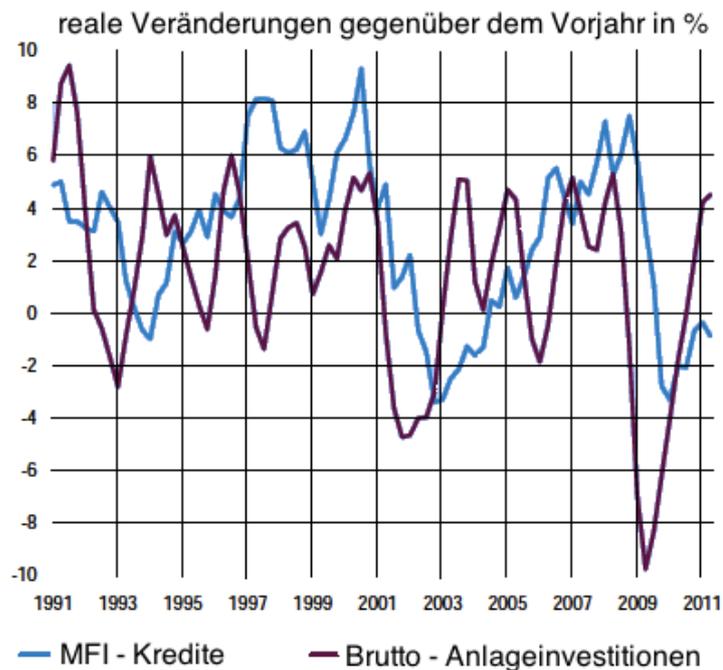


Abbildung 2.2: Reales Wachstum der MFI-Kredite und der Anlageinvestitionen, aus [19, Mosslechner *et al.* 2011]

sogar eine Steigerung um 11,3%. Die extremen Preisanstiege konzentrieren sich dabei vorwiegend auf Wien sowie auf einige Landeshauptstädte wie Salzburg und Innsbruck und ein paar touristische Regionen, während in den meisten übrigen Gebieten die Preise stagnieren. Trotz der in manchen Städten drastisch steigenden Preise befürchten Experten, wie in [4] beschrieben, keine Überhitzung des Immobilienmarktes, wie beispielsweise vor der Finanzkrise in den Vereinigten Staaten zu beobachten war.

	EU27 2011	AT 2011	AT 2010
Wirtschaftswachstum (in %)	1,5	3,1	2,3
Inflation (in %)	3,1	3,6	1,7
Eigentumsimmobilien (in %)	68,9	57,4	57,4
Hypothekarkredite (in %) des BIP	51,7	27,8	28
Gesamtsumme an Wohnbaukredite (in Mio. EUR)	6.534.919	83.863	80.000
Immobilienpreissteigerung (in %)	-1,1	3,1	5,1
mittlere Zinsrate von Wohnbaukrediten (in %)	3,49	2,86	2,71

Tabelle 2.1: Aus [4]: Fakten zur Wirtschaftslage und Hypotheken in Österreich und der Europäischen Union

Wie in Tabelle 2.1 weiters ersichtlich ist, liegt der Anteil an Eigentumsimmobilien in Österreich deutlich unter dem europäischen Durchschnitt. Sehr interessant ist auch die Tatsache, dass Hypothekarkredite in Österreich vergleichsweise sehr günstig sind und der Anteil an hypothekarisch gesicherten Krediten am BIP in der EU27 beinahe um das doppelte so hoch ist wie in Österreich.

2.2 Immobilienkredite in Österreich

Obwohl die gesamte Kreditvergabe an private Haushalte durch die Finanzkrise abgeschwächt wurde, zeigt die Entwicklung nach [19] in den letzten Jahren zumindest in Österreich keinen Rückgang sondern nur eine Verlangsamung. Rund um das Jahr 2010 ging die Wachstumsrate auf bis zu 0,7% zurück, seither setzte jedoch wieder eine starke Erholung ein. Wohnbaukredite machen dabei einen übermäßigen Anteil von ungefähr 59% aus und stellen somit die wichtigste Gruppe dar. Die Entwicklung der Wohnbaukredite erwies sich außerdem, verglichen mit Konsumkrediten und sonstigen Krediten, als die einzige Sparte, die sich permanent positiv entwickelte. Aus einer Befragung von 106 Banken ging hervor, dass im Zeitraum von Jänner bis September 2011 eine Summe von 14,7 Milliarden Euro an Krediten für private Haushalte ausgegeben wurde, wobei 51% davon in die Sparte der Wohnbaukredite fiel.

Zu den beliebtesten dieser Wohnbaukredite zählen Hypothekarkredite mit variablen Zinssätzen, sowie Fremdwährungskredite und die in Österreich sehr beliebten Bauspardarlehen. Bei letzterer Form der Finanzierung handelt es sich grundsätzlich um eine Sonderform von hypothekarisch gesicherten Krediten. Dabei gilt, dass zirka 20 Prozent der benötigten Summe aus Eigenmittel stammen sollte, in Österreich liegt dieser Anteil sogar zwischen 25 und 30 Prozent. Ein großer Vorteil von Bausparkrediten ist der gesetzlich geregelte Höchstzinssatz von derzeit 6%, der sich vor allem in Hochzinsphasen bewährt. Andererseits gestaltet sich die Finanzierung über übliche Hypothekardarlehen nach [28, Wally 2012] im Vergleich als wesentlich einfacher, da keine Wartezeit eingeräumt werden muss, bis ein gewisser Polster angespart ist und die Kreditrahmen für die Bausparvariante sind mit 180.000 EUR pro Person limitiert.

Die weiteren Unterschiede und Varianten im Rahmen von Hypothekarkrediten werden in den nachfolgenden Kapiteln noch weiter vertieft.

Die historische Entwicklung der durchschnittlichen Zinsraten im Wohnbau- und Konsumbereich (Abb. 2.3) zeigt, dass diese wie der Leitzinssatz bis vor dem Ausbruch der Finanzkrise stark angestiegen sind, danach stark einbrachen und seither wieder leicht ansteigen. Die Finanzierung von Immobilien über Kredite ist derzeit vergleichsweise günstig.

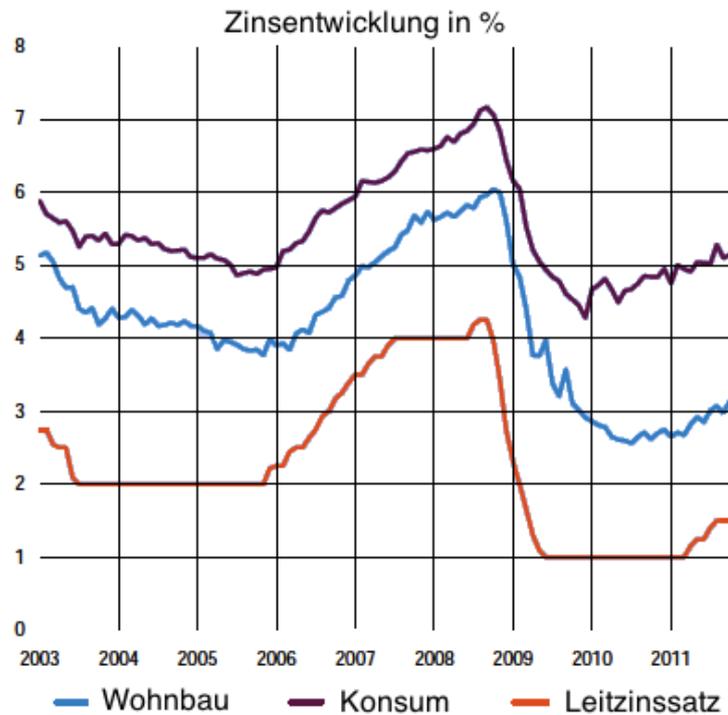


Abbildung 2.3: Durchschnittliche Zinsentwicklung in Österreich in Wohnbau- und Konsumbereich mit dem Leitzinssatz als Referenz, aus [19]

3

Hypotheken und deren Finanzierung

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Aspekte von Hypotheken näher betrachtet werden. Kernfragen in diesem Kontext sind unter anderem welche vertraglichen Inhalte ein Hypothekarkredit enthält, welche Arten von Hypothekarkrediten es mittlerweile gibt oder auch wie Kreditinstitute mit der Schar an hypothekarisch gesicherten Darlehen umgehen und insbesondere wie diese aus ihrer Sicht finanziert werden.

3.1 Hypothekendarlehen

Ein Hypothekendarlehen lässt sich in unvollständige und private Vertragsbeschlüsse einteilen. Die dabei involvierten Vertragspartner sind zum einen der Kreditnehmer und zum anderen der Kreditgeber, das schon öfters erwähnte Kreditinstitut. Ein großer Unterschied zu anderen Krediten ist dabei das im Vertrag festgehaltene Sicherungsgut der Hypothek. Dieses zugrundeliegende Sicherungsgut ist üblicherweise die Immobilie samt dem, unter Umständen, dazugehörigen Grundstück. Kann der Kreditnehmer die Rückzahlungen nicht mehr gewähren, so kann das Sicherungsgut dazu verwendet werden, um ausstehende

Tilgungsbeträge damit zu bedienen. Der Kreditgeber ist in weiterer Folge üblicherweise mit zahlreichen zusätzlichen Aufgaben beschäftigt, die die Abwicklung eines Kredites betreffen. Alle organisatorischen Angelegenheiten, die in Zusammenhang mit dem Kredit auftreten, können aber auch von externen Parteien gegen eine Servicegebühr ausgeführt werden. Oft wird eine solcher Kredit auch mit einer Lebensversicherung gekoppelt.

Wie der Kreditgeber die Finanzierung vornimmt ist ebenso von Bedeutung. Auf dies wird aber erst etwas später näher eingegangen. Die durch die Unvollständigkeit des Vertrages eventuell unerwartet auftretenden Ereignisse stellen Risiken dar, die es aus Sicht des Kreditgebers abzuwiegen gilt. Diese Gefahren bilden den Hauptteil dieser Arbeit und werden ebenso erst in späteren Kapiteln näher betrachtet. Zuvor soll hier noch ein Blick auf die wichtigsten vertraglichen Inhalte geworfen werden (vgl. [9, Fabozzi *et al.* 2007, S.4 ff]). Viele dieser Inhalte beschreiben die Eigenschaften eines solchen Hypothekarkredites und bilden die Basis zur Charakterisierung und in weiterer Folge zur mathematischen Modellierung gewisser Fragestellungen.

3.1.1 Pfandrechtsvorrang

Dieser Punkt klärt im Falle einer Zwangsliquidierung des Sicherungsgutes die Aufteilung des daraus entstandenen Kapitals (vgl. [9]). Erster Anspruchsinhaber ist naturgemäß der Kreditgeber. Werden im Laufe der Zeit noch weitere Kredite, wiederum auf dasselbe Sicherungsgut abgeschlossen, dann entstehen daraus nachrangige Ansprüche, die bedient werden.

3.1.2 Kreditlaufzeit

Nach [9] ist ein Großteil der Hypothekarkredite mit einer Laufzeit von 30 Jahren ausgestattet. Dies bezieht sich jedoch ausschließlich auf den amerikanischen Markt. Sehr gängige Kreditlaufzeiten sind außerdem 10, 15 und 20 Jahre. Diese Eigenschaft bildet beispielsweise ein erstes Kriterium zur Einteilung von Hypothekardarlehen.

3.1.3 Kreditqualität

Aus all den gesammelten, individuellen Informationen zum Kreditnehmer wird nach [9] ein Profil gebildet, das die Qualität des Kredites abbildet.

Kredite erster Klasse (prime loans) sind solche bei denen der Kreditnehmer eine sichere Beschäftigung mit ausreichend hohem Einkommen sowie eine einwandfreie Kredithistorie vorweisen kann. Außerdem wird das Sicherungsgut als mehr als ausreichend wertvoll qualifiziert. In solchen Fällen wird die Rückzahlung des Darlehensbetrages als sehr sicher eingestuft und es hat sich gezeigt, dass solche Kredite ein sehr geringes Ausfallrisiko beinhalten.

Kredite, deren Ausfallwahrscheinlichkeit deutlich höher ist, werden als zweitklassig (subprime loans) eingestuft. Dabei wird das Einkommen des Kreditnehmers als kritisch eingestuft, die Sicherheiten als gering eingeschätzt und/oder die Kredithistorie als mangelhaft charakterisiert. Mithilfe dieser Einschätzungen werden entsprechend unsichere Kreditnehmer sehr genau beobachtet um einerseits so schnell als möglich Hilfestellung anzubieten und den Schaden so gering als möglich zu halten.

Zwischen diesen beiden Klassen gibt es noch eine weitere, etwas nebulöse, Klasse (alt-A loans). Solche Kredite werden zwar als erstklassig eingestuft, enthalten jedoch gewisse Attribute, die das Risiko entweder erhöhen oder aber schwer einschätzbar machen.

Um Kredite nun in diese Klassen einzuteilen gibt es zahlreiche Maßstäbe. Einerseits haben sich gewissen Verhältnismaßstäbe zur quantitativen Beurteilung etabliert, andererseits gibt es zusätzlich noch qualitative Beurteilungskriterien, die meist von Unternehmen vorgenommen werden, die es sich zur Aufgabe gemacht haben, Kreditnehmer nach ihrer vergangenen Kredithistorie einzuschätzen (zum Beispiel: FICO Score). Zu den quantitativen Maßstäben zählen unter anderem:

- Loan-to-Value Ratio (LTV)

Dieses Verhältnis vergleicht den Darlehensbetrag mit dem Marktwert der zugrundeliegenden Immobilie und zeigt an, welcher Anteil des Kreditbetrages im Falle einer Zwangsliquidierung erhalten werden könnte. Ein hoher Wert weist außerdem auf ein höheres Ausfallrisiko hin. Im Falle einer Refinanzierung des Kredites wird dieses Verhältnis immer wieder neu bewertet, da sich sowohl der Kreditbetrag als auch der Wert der Immobilie durch verschiedene Umstände ändern kann.

- Income Ratio

Dazu werden sämtliche, mit dem Kredit verbundene, monatliche Zahlungen (Tilgungsrate, Steuern, Versicherungen) mit dem Einkommen verglichen. Alternativ können zu den Zahlungen noch weitere Kredittilgungen, von Fahrzeugen oder Kreditkarten, hinzugerechnet werden.

Maßstäbe erstklassiger Kredite sind FICO Scores ab 660, Income Ratios nicht höher als 28% bis 36% und LTV nicht höher als 95%. Die Klasse der Alt-A-Kredite weichen in manchen dieser Punkte etwas ab, oder es ist schwierig aus der Dokumentation gewisse Schlüsse zu ziehen. Zweitklassige Kredite erreichen keinen dieser genannten Maßstäbe. Im Zusammenhang mit der Finanzkrise haben gerade diese zweitklassigen Kredite eine große Rolle gespielt, wie in [21, S.131 ff] näher ausgeführt wird. Durch den Einbruch des Immobilienmarktes verloren die den Krediten zugrundeliegenden Häuser und Wohnungen alle drastisch an Wert und da ohnehin Kredite sehr leicht vergeben wurden, konnten die sehr zahlreich ausgefallenen Kredite bei weitem nicht mehr bedient werden, wodurch unzählige Banken hohe Verluste zu schreiben hatten.

3.1.4 Zinsrate

Hinsichtlich der Zinsrate r unterscheidet man zum Einen fixe Zinsraten, die bei Vertragsabschluss fixiert werden und über den gesamten Tilgungszeitraum gleich bleiben, und zum Anderen gibt es Hypothekarkredite mit variablen Zinsen (Adjustable rate mortgage (ARM)). Die Änderungen basieren dabei auf einem Index, wie zum Beispiel LIBOR oder EURIBOR (siehe Abbildung 4.2). Diese werden dabei jährlich, halbjährlich oder auch monatlich vorgenommen. Aus diesen ARM gehen wiederum weitere Arten hervor, die sich im Wesentlichen durch die Gestaltung der Zinsperioden unterscheiden, in denen zusätzlich unterschiedliche Zinsratengrenzen zur Geltung kommen.

3.1.5 Tilgungstypen

Die üblichsten Arten Kredite zu tilgen sind jene, in denen die Rückzahlung des Nominalbetrags zusammen mit den Zinsen in gleichmäßige Raten eingeteilt werden. Für Kredite mit fixer Zinsrate sind dies vollkommen identische (monatliche) Raten über den Rückzahlungszeitraum. Für Kredite mit Nominalen 1, n konstanten Tilgungsraten

und dem konstanten (unterjährig) Zinssatz $r_{(m)}$ (angepasst an die Betrachtung von m jährlichen Perioden) wird die regelmäßige Rate wie folgt berechnet:

$$A_{n,r} = \frac{r_{(m)}(1 + r_{(m)})^n}{(1 + r_{(m)})^n - 1} \quad (3.1)$$

Während der Gesamtbetrag über den gesamten Zeitraum gleich bleibt, verändern sich die Beträge der anteilmäßigen Zinsen und der Anteil der jeweils getilgten Nominalen. Zu Beginn werden beinahe ausschließlich Zinsen bezahlt und erst im Verlauf der Zeit steigt der tatsächlich getilgte Betrag an und die Zinsen werden geringer. Die nachfolgende Grafik (Abb. 3.1) zeigt die Zeitverläufe der Tilgungsrate, der Zinsen und der anteilmäßigen Tilgung der Nominalen (Nominalen: 200.000 EUR, $n = 30 \times 12 = 360$ Raten, Zinssatz $r_{(12)} = 0,5\%$).

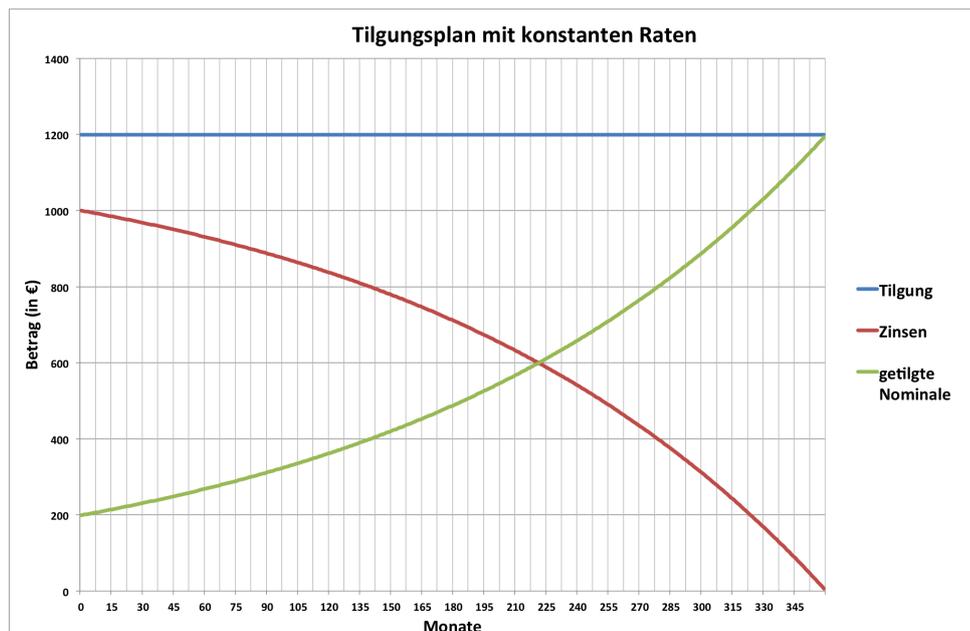


Abbildung 3.1: Kredittilgungsplan mit konstanten Annuitäten

Bei Krediten mit variablen Zinsen werden die ausstehende Nominalen samt den neu anfallenden Zinsen kontinuierlich neu berechnet. In diesem Fall ergibt sich ein wesentlich unsicherer Planungshorizont. Fixiert man den Tilgungszeitraum, so können sich die Tilgungsraten permanent ändern. Als Referenz für den Zinssatz wird dabei oft der LIBOR verwendet. Fixiert man andererseits die regelmäßige Tilgungsrate, so kann sich die Laufzeit verändern.

Mittlerweile haben sich am (amerikanischen) Markt jedoch auch neue Konstrukte etabliert. Ein sehr populärer Typ sind die Interest-Only Produkte, in denen in einer initialen Phase nur Zinsen bezahlt werden. In weiterer Folge haben sich noch leicht davon abgewandelte Produkte entwickelt. Das nachfolgende Diagramm (Abb. 3.2) zeigt einen Tilgungsplan mit denselben Daten wie oben (Nominale: 200.000 EUR, $n = 30 \times 12 = 360$ Raten, Zinssatz $r_{(12)} = 0,5\%$), nur dass in den ersten 5 Jahren keine Tilgung der Nominale vorgenommen wird und nur die ausstehenden Zinsen (1.000 EUR) bezahlt werden. In den ersten Jahren ist die Tilgungssumme zwar geringer, sie steigt danach jedoch dementsprechend an, und ist um beinahe 100 EUR höher als bei einem konstanten Tilgungsplan. Ebenso ist in der Grafik ersichtlich, dass zunächst keine Nominale getilgt wird und diese danach über die Jahre etwas stärker ansteigt als beim vorherigen Modell. Durch die verzögerte Rückzahlung der Nominale steigt die Gesamtbelastung für den Kreditnehmer, bringt aber den Vorteil mit sich, anfangs weniger zu zahlen. Auch diese Variante kann mit variablen Zinsen vereinbart werden.

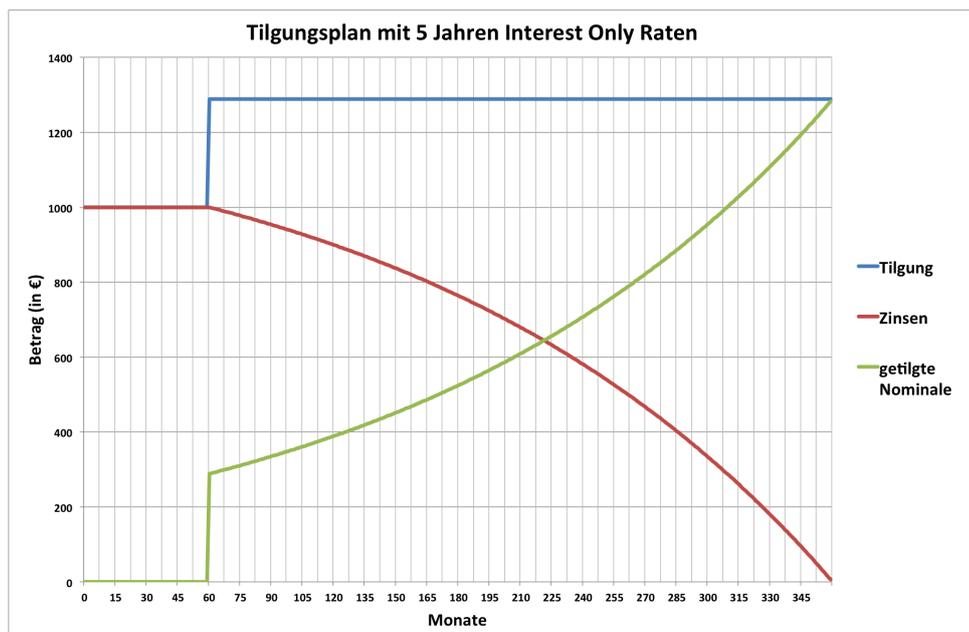


Abbildung 3.2: Kredittilgungsplan mit Interest-Only Raten

3.1.6 Kreditbetrag

In den USA wird der maximale Kreditbetrag jährlich an die Veränderungen von Immobilienpreisindizes angepasst. Im Jahre 2006 betrug dieses Limit beispielsweise 417.000 USD. Diese Limits spielen jedoch hauptsächlich bei der Art der Besicherung der Kredite eine

Rolle. Kredite mit Beträgen über diesem Limit können nur privat abgesichert werden. In Österreich gelten grundsätzlich nur für Bauspardarlehen Limits.

3.1.7 Strafen für vorzeitige Tilgung

Wie schon mehrfach erwähnt, stellt eine vorzeitige, außerordentliche Tilgung des Kreditbetrages Gefahren für das Kreditinstitut dar, die im folgenden, gemeinsam mit den Motiven für Rückzahlungen, noch näher erläutert werden. Kreditinstitute versuchen diese Anreize der außerordentlichen Tilgung durch Strafen zu mindern. Üblicherweise werden zusätzliche Zinsen auf das Kapital aufgeschlagen.

3.2 Refinanzierung der Hypotheken

Dass Kreditinstitute mit dem Verleih von Geld wirtschaften wurde bisher verdeutlicht und wie dies insbesondere im Rahmen von Hypothekendarlehen abläuft, wurde in den vorangegangenen Seiten bereits erläutert. Abläufe, Pflichten und Rechte der beiden Vertragspartner eines Darlehensvertrags sind nun geklärt. Der Kreditnehmer bekommt grob gesprochen im günstigsten Fall seinen beantragten Geldbetrag, um seine gewünschte Investition zu tätigen und verpflichtet sich, seine Schuld, ebenso im günstigsten Fall, über regelmäßige Zahlungen zu tilgen. Aus Sicht des Kreditgebers tun sich im Rahmen eines solchen Geschäftes noch einige andere Aufgaben auf. Wo kommt verliehenes Geld her? Wie wird das Risiko abgesichert?

Ein Kreditinstitut kann seine benötigten Kapitalmittel auf unterschiedliche Weise erhalten. Zunächst muss ein gewisser Anteil ohnehin durch Eigenkapital gedeckt sein. Dieser Anteil wurde infolge der letzten Bankenkrise durch gesetzliche Regulierungen weiter verschärft und angepasst². Des Weiteren besitzt eine Bank natürlich die Möglichkeit, Einlagen der eigenen Kunden weiter zu verleihen oder aber Kredite von anderen Banken (z.B.: Zentralbanken) oder speziellen Refinanzierungsgesellschaften dafür aufzunehmen. Speziell der Interbankenhandel, der Kreditgewährungen zwischen den Banken betrifft, war im Rahmen der letzten Krise besonders im Fokus. Durch das große Misstrauen am Markt wurden zwischen den Banken keine Kredite mehr gewährt, wodurch die

²Die EU beschloss unter anderem zunächst eine Kernkapitalquote (Anteil an risikobehafteten, durch Eigenkapital gedeckten, Aktiva) von 8%. Im Rahmen von Basel III wurde schlussendlich eine Quote von 7% vereinbart.

Banken ihrerseits ihre Geldversprechungen an Kunden oder anderen Banken nicht mehr bedienen konnten. Investmentbanken traf dies besonders hart, da sie speziell auf diese Kredite angewiesen waren, während Sparkassen durch den hohen Anteil an Spargeldern zwar genug Kapital hatten, es aber aus Angst ihre Gelder zu verlieren nicht mehr weitergaben. Abbildung 3.3 zeigt eine prozentuelle Auflistung der üblichsten Refinanzierungsmöglichkeiten.

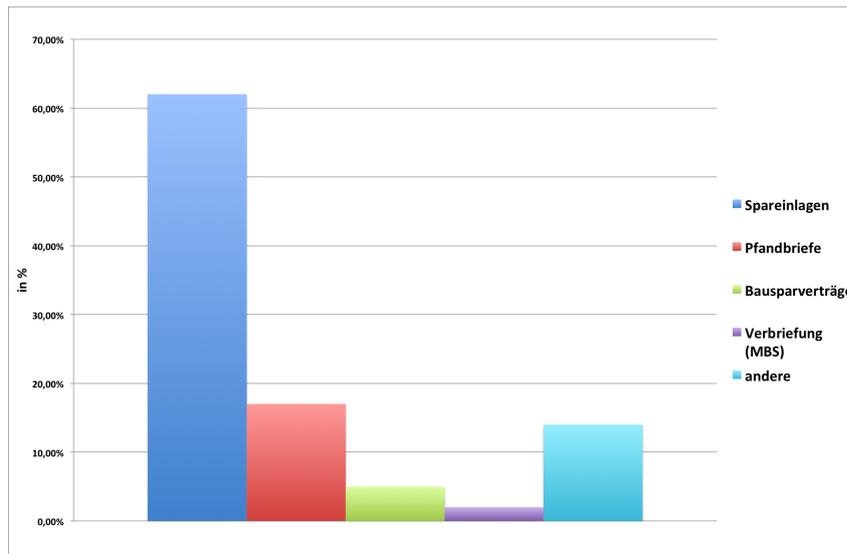


Abbildung 3.3: Anteile an Refinanzierungsmethoden von Hypothekarkrediten (vgl. [1, TEGoVA 2002])

3.2.1 Verbriefung (Securitization)

Eine weitere, im europäischen Raum noch sehr neue Form der Refinanzierung stellt die Verbriefung von Forderungen dar. Dabei werden kurz gesagt vermögensgedeckte Forderungen gleicher Art (z.B.: Hypothekarkredite mit gewissen Eigenschaften) zusammengefasst und die daraus resultierenden Zahlungsströme (Tilgungszahlungen) an Investoren verkauft. Dieses Vorgehen, das im Folgenden noch detaillierter dargestellt wird, bringt zahlreiche Vorteile mit sich, sowohl für die Kreditnehmer, als auch für die Kreditgeber und in weiterer Folge auch den darin involvierten Investoren. In jedem Fall stellt aber die Verbriefung von Forderungen einen Liquiditätszugang dar. Vor allem für schlechter bewertete Banken kann ein solcher Zugang oft günstiger sein als andere Möglichkeiten zur Kapitalbesorgung.

Doch die Kapitalbeschaffung ist nur ein Motiv aus Sicht der Banken, sich der Verbriefung anzunehmen. Die große Anzahl an Forderungen, die sie gegen all ihre Kunden im Rahmen von Krediten haben, enthält auch ein nicht unbedeutendes Risiko. Auch wenn die Kredite mit der Hypothek besichert sind, kann im ungünstigsten Fall einer Zwangsvollstreckung der Immobilie selten der gesamte Kreditbetrag zurückerstattet werden, was für die Bank einen Verlust bedeutet. Dies ist ein weiterer Anreiz, diese Forderungen über Verbriefungen zu verkaufen und nun anstelle der risikobehafteten Forderungen die Erlöse der verkauften Forderungen in die Bilanzen aufzunehmen. Also ist es eine Überlegung, die Risiken zu isolieren und weiterzugeben, anstatt sie in der eigenen Hand zu halten.

Aufgrund der immer strenger werdenden Bilanzierungsaufgaben für Banken kann eine Verbriefung auch zur Eigenmittelentlastung beitragen. Anstelle von, mit gewisser Unsicherheit behafteten, Forderungen und den unter Umständen dazu notwendigen Krediten, können durch die Verbriefungsstrategie beide Positionen aus der Bilanz reduziert werden. Dies hat zur Folge, dass der Eigenkapitalanteil verhältnismäßig steigt. Weitere Anreize wären beispielsweise noch die Konstruktion von interessanten Finanzprodukten, um so Investoren zu finden, da durch Verbriefung häufig sehr attraktive Finanzkonstrukte mit hohen Renditen generiert werden können.

Die Idee der Verbriefung wurde bereits Mitte des 20. Jahrhunderts in Amerika aufgegriffen. Primäres Ziel war es, mehr finanzielle Mittel für Hypotheken zu günstigeren Konditionen zur Verfügung zu stellen. Im Laufe der Zeit wurde dieses Vorgehen auch von amerikanischen Regierungsstellen gefördert. In Europa etablierte sich die Verbriefung erst Ende der 90er so richtig, als sich die Volumina der neu emittierten Wertpapiere erstmals nennenswert vergrößerten, wie in Abbildung 3.4 dargestellt.

3.2.2 Das Verbriefungskonzept von MBS

Die Verbriefungen beziehen sich, wie bereits erwähnt, auf bestimmte Vermögenswerte (Asset Backed Securities). Bei Mortgage Backed Securities (MBS) handelt es sich um Kredite, die durch Hypotheken gesichert werden. Andere Beispiele zur Bündelung sind Autokredite oder auch Kreditkarten.

In allen Fällen bildet jedoch der Pool den zentralen Bestandteil (siehe Abb. 3.5) zur Bildung dieser Finanzprodukte, wie beispielsweise in [9, S.22 ff] beschrieben. Das Vorgehen ist dabei identisch zu Versicherungsgesellschaften. Dort werden gleichartige Risiken, in Form von Versicherungsnehmern, in einem gemeinsamen Pool zusammengefasst, um

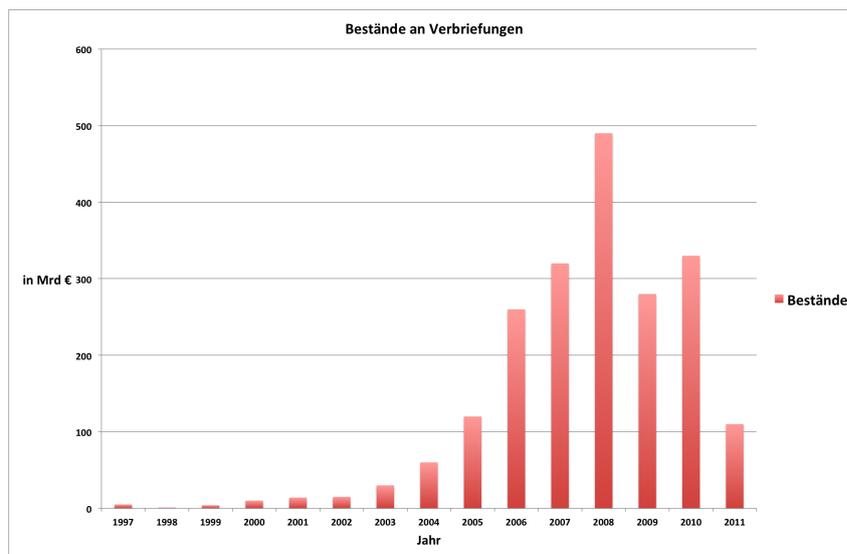


Abbildung 3.4: Chronologische Entwicklung von Verbriefungen in Europa (nur Neuemissionen) (vgl. [8, Erber 2011])

das Gesamtrisiko durch das Kollektiv zu streuen. Im Falle von MBS bilden üblicherweise gleichartige Kredite mit spezifischen Eigenschaften (Laufzeit, Zinssatz, etc.) den Grundstein. Auch hier wird über das Kollektiv eine Risikostreuung bezweckt. Bei der Poolbildung im Rahmen der Verbriefung können jedoch auch unterschiedliche Forderungen verwendet werden, da durch das weitere Verfahren ohnehin eine Strukturierung innerhalb des Pools vorgenommen wird.

Danach kann dieser Pool in Anteile zerlegt werden und diese über eine Zweckgesellschaft (Special Purpose Vehicle) an Investoren verkauft werden. Dabei werden die fälligen Tilgungszahlungen aus den einzelnen Kreditverträgen anteilmäßig an die Investoren weitergeleitet. In diesem Schritt werden die Forderungen von der Bonität der ursprünglichen Forderungsinhaber isoliert. Da es sich lediglich um ähnliche Kredite handelt und nicht um identische, gibt es immer noch Unterschiede, die sich insbesondere auf die Haftung bei Zahlungsausfällen auswirken. Somit kann innerhalb des Pools nochmals eine Klassifizierung vorgenommen werden, woraus unterschiedliche Risikoklassen (mindestens zwei) zum zugrundeliegenden Pool entstehen. Diese qualitativ unterschiedlichen Klassen werden auch als Tranchen bezeichnet.

Dieser Schritt fällt unter den Begriff Strukturierung. Das mit den Tranchen verbundene Risiko muss sorgfältig analysiert werden und wird danach auch von Ratingagenturen (z.B. Moodys) überprüft und durch diverse Risikobewertungen gekennzeichnet. Ein großer Fehler, der in diesem Zusammenhang auftreten kann, ist die fehlende Analyse der

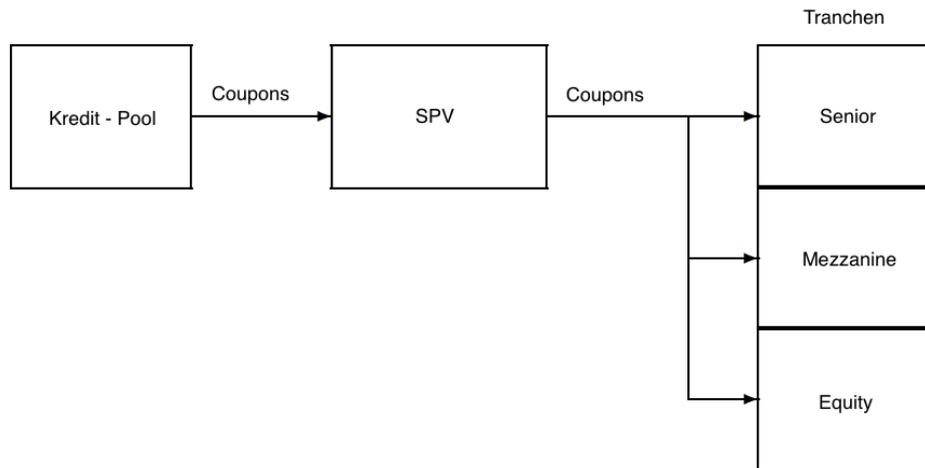


Abbildung 3.5: Vom Kreditpool zur Tranchenbildung, nach [6, Donnelly *et al.* 2010]

Abhängigkeit zwischen den einzelnen Risiken. So stellte man nach der Finanzkrise ab 2007 fest, dass viele Banken zwar die Möglichkeit gleichzeitiger Ausfälle betrachteten, aber die gleichzeitige Ausfallwahrscheinlichkeit mehrerer Kredite völlig unterschätzten. Schließlich sind die einzelnen Kredite allein schon durch das Marktrisiko sehr eng verknüpft.

Die Tranchen, wie sie beispielsweise auch in Abbildung 3.5 dargestellt sind, werden nun auch hinsichtlich des Cashflows unterschiedlich bedacht. Vermindern sich die Cashflows aus irgendwelchen Gründen, so werden nach dem Wasserfallprinzip, zunächst die qualitativ hochwertigeren Klassen (Senior) bedient und erst danach die anderen. Verluste werden somit zunächst von den minderwertigeren Klassen (Equity) getragen. Die mittlere Mezzanine Klassifizierung stellt eine Mischung aus Sicherheit und Risiko dar. Somit können unterschiedliche Investorengruppen bedient werden. Solche, die das Risiko scheuen und sichere Cashflows mit geringeren Renditen bevorzugen, und jene, die durch die minderwertigeren Klassen zwar ein höheres Risiko in Kauf nehmen, jedoch auf höhere Gewinne spekulieren. Durch Tranchierung des Pools wird automatisch ein Schutzmechanismus vor Verlusten in den höherwertigen Klassen geschaffen. Es können aber auch externe Garantiegeber installiert werden, die für eventuelle Verluste bürgen.

Die Verwaltung dieser Geschäftsabwicklung übernimmt dabei die eigens eingerichtete Zweckgesellschaft (SPV). Diese wird vom emittierenden Kreditinstitut ins Leben gerufen.

Um gewisse Bilanzvorteile auszunutzen, wird die Gesellschaft jedoch von der Muttergesellschaft ausgliedert.

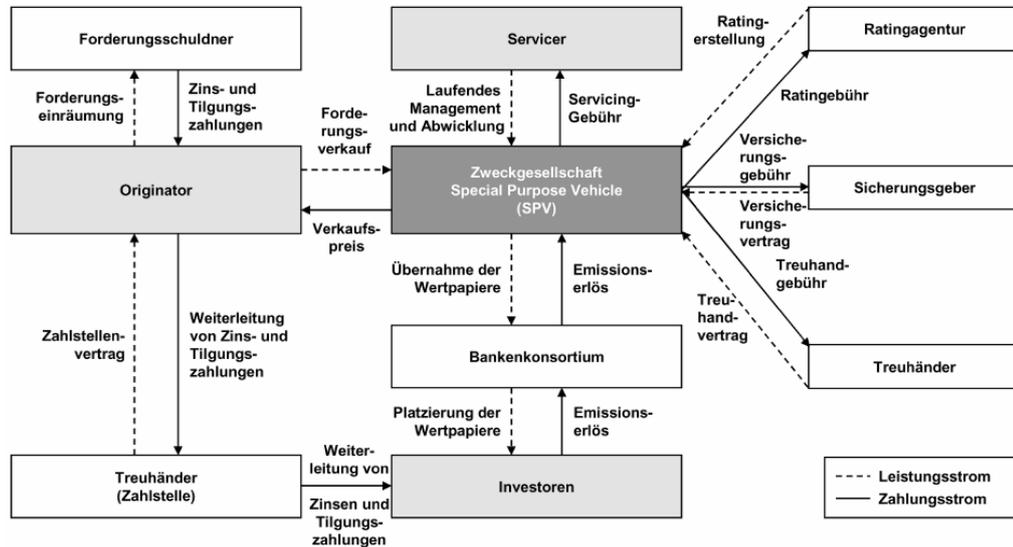


Abbildung 3.6: Schema der Verbriefung, aus [22, Thonabauer *et al.* 2004]

Wie Abbildung 3.6 zeigt, existieren neben dem Originator (Kreditgeber), dem Investor und der Zweckgesellschaft üblicherweise noch eine Partei (Servicer), die die Abwicklung und das Management gegen eine Gebühr durchführt. Als Nebendarsteller dieses Prozesses können die Ratingagentur, Treuhänder oder auch der externe Sicherungsgeber gesehen werden. Aufgrund von diesem Vorgang abgeleiteter Merkmale lassen sich Verbriefungen allgemein von anderen Kapitalmarktinstrumenten abgrenzen. Wie in [22] beschrieben, enthalten beispielsweise der direkte Verkauf von einzelnen Forderungen oder die derivative Absicherung keinen Forderungspool oder keine Strukturierung. Bei Pfandbrief hingegen wird der Forderungspool von der Bonität des Forderungsinhabers nicht vollständig isoliert.

Finanzinstrumente, wie es ein solches Verbriefungsobjekt ist, definieren sich nach [5, Davidson *et al.* 2003] ebenfalls wie ein Bond durch:

- Zeitpunkt der Rückzahlung (in Raten oder einmalig)
- Zahlungsmodalitäten der Zinszahlungen (fixe/variable Zinsen)
- Qualität des Objekts

MBS Pool Charakteristiken

In den USA wird dieses Prozedere zu einem sehr großen Teil von staatlichen Einrichtungen gesteuert (vgl. [9]) und eben durch externe Sicherungsgeber gestützt. Erfüllen die Kredite in einem Pool gewisse Kriterien, so werden diese bisher von staatlichen, gemeinwirtschaftlichen Einrichtungen (Fannie Mae, Freddie Mac und Ginnie Mae) verwaltet. Dadurch besitzen solche Kredite den Vorteil, dass sie durch die Zahlung einer Risiko-prämie versichert sind und dadurch die Qualität sehr hoch gehalten werden kann, weshalb eine Strukturierung im obigen Sinne nicht mehr notwendig ist. Trotz dieser Vorteile gibt es gemäß [27, Heinrich 2014] Überlegungen seitens des US-amerikanischen Senats diese Einrichtungen aufzulösen. Jene Kredite, die solche Kriterien nicht erfüllen, werden in private Pools zusammengefasst. Solche Agency Pools sollen in der vorliegenden Arbeit nicht näher behandelt werden.

Private Pools sind die in Europa gängige Methode, da keine staatlichen Einrichtungen wie in den USA für die Kredite garantieren. Die Risikominderung wird dabei durch die oben angeführte Strukturierung unternommen. Dabei wird, wie schon angeführt und in Abbildung 3.5 verdeutlicht, der Pool in mindestens zwei Tranchen unterteilt. Diese werden durch Junior und Senior bezeichnet. Um nun eine Risikominderung in der Senior Tranche zu erreichen, werden Verluste (Default) zunächst von der (den) Junior Tranche(n) absorbiert. Außerdem gelangen alle außerplanmäßigen Tilgungen (Prepayment) zunächst in die Senior Tranche. Diese Reglementierungen gewährleisten eine ausreichend hohe Sicherheit in der Senior Tranche und den eventuell höherwertigen Junior Tranchen. Durch dieses Vorgehen werden aus der Vielzahl an illiquiden Kreditforderungen Finanzgüter geschaffen, die nun am Markt handelbar sind. Im Laufe der Zeit haben sich unterschiedlichen Überlegungen zufolge weitere aus MBS abgeleitete Finanzgüter entwickelt. Aus dem Coupon Stripping beispielsweise ergaben sich Interest Only (IO) und Principal Only (PO) Zertifikate. Wie der Name schon schließen lässt, handelt es sich dabei um Ansprüche, die sich einerseits ausschließlich auf die Zinszahlungen und andererseits nur auf Tilgungen der Nominale aus dem Pool beziehen.

3.2.3 Prepayment bei MBS

Die Arbeit beschäftigt sich, wie schon erwähnt, mit der Gefahr von vorzeitigen, außerplanmäßigen Tilgungszahlungen. Eine Herangehensweise im Umgang mit Kreditforderungen ist die Verwendung von Verbriefungen. Welche Vorteile sich daraus ergeben wurde

bereits erläutert und obwohl diese Methode mittlerweile schon sehr verbreitet ist, schützt sie Anleger, Kreditgeber etc. von verbrieften Kreditforderungen, nicht aber von den genannten Risiken. In der Literatur gibt es grundsätzlich sehr viel Material, das sich mit Prepayment im Umgang von MBS beschäftigt. Dieses Vorgehen ist jedoch in Zusammenhang mit dieser Arbeit nicht unmittelbar anwendbar, weshalb nicht auf weitere Einzelheiten eingegangen wird.

4

Modellierung der Prepaymentwahrscheinlichkeit

Wie in der Einleitung schon angeführt, resultieren aus Sicht eines Kreditinstituts in Zusammenhang mit Hypotheken einige Risiken, die das Kapital des Kreditinstitutes betreffen. Eine Möglichkeit mit einer Schar von Krediten umzugehen, wurde durch die Verbriefung dargestellt. Da in Europa aber noch immer ein Großteil der Kreditinstitute nicht damit operiert, müssen die Risiken auch gesondert betrachtet werden. Oft besitzen die Banken nicht die Möglichkeiten, auf Verbriefungen zurückzugreifen, weshalb das Vorgehen aus zahlreicher Literatur in Zusammenhang mit Prepayment nicht unmittelbar anwendbar ist.

In diesem Abschnitt soll eine der Gefahren im Umgang mit Krediten, nämlich das Prepaymentrisiko, näher betrachtet werden. Insgesamt sehen sich Kreditinstitute mit weitaus mehr Risiken konfrontiert, die im Rahmen eines ordentlichen Risikomanagements vernünftig diskutiert gehören. Dazu gehören:

- Ausfallrisiko (Default)

- Zinsrisiko
- Marktrisiko

Da sie sich gegenseitig beeinflussen, lassen sich die einzelnen Gefahren, wie man in weiterer Folge erkennen wird, nie vollkommen voneinander isolieren. Der nähere Fokus soll allerdings trotzdem auf den Gefahren von vorzeitigen Tilgungen liegen. Ziel ist es, ein Modell zu finden, dass die Wahrscheinlichkeit von solchen vorzeitigen Tilgungen beschreibt. Dabei gilt es vor allem die relevanten Einflussfaktoren herauszufiltern, die solche Anreize steuern. Darauf aufbauend wird in Kapitel 5 das Prepaymentrisiko entsprechend bewertet und bepreist.

Ausschlaggebend ist auch hier wiederum eine Analyse eines gesamten Kreditportfolio eines Kreditinstitutes. Die Untersuchungen einzelner Verträge stehen nicht zur Diskussion.

4.1 Anreizbeispiele

Um sich das Problem von solchen vorzeitigen Tilgungen besser vorstellen zu können, folgt ein Anreizbeispiel. Die Verluste, die ein Kreditinstitut durch vorzeitige, außerordentliche Tilgungszahlungen erfahren kann, sollen in folgenden Szenarien abgebildet werden. Die grundsätzlich zufälligen Komponenten, die Zeitpunkte und Höhen der außerordentlichen Zahlungen, werden im Beispiel willkürlich angenommen.

Ausgehend von einem ordentlichen, planmäßigen Tilgungsplan, wie er in 3.1.5 auf Seite 14 in Abbildung 3.1 bereits erklärt wurde, sollen die Verluste skizziert werden, die durch verschiedene Szenarien eintreten. In diesen Beispielen werden eventuell fällige Strafzahlungen vernachlässigt.

Beispiel 2:

Ausgangsszenario A

Ein Kredit in Höhe von $N = 150.000$ EUR soll mit einem jährlichen Zinssatz $r_a = 5\%$ über konstante monatliche Zahlungen im Zeitraum von 12 Jahren getilgt werden. Zunächst ergeben sich

$$r_{12} = \sqrt{1 + r_a} - 1 = \sqrt{1,05} - 1 = 0,367\% \quad (4.1)$$

für den unterjährigen (monatlichen) Zinssatz. Nach Gleichung 3.1 ergibt sich daraus eine konstante Tilgungsrate von $A = 1.343,34$ EUR. Die monatlich wachsenden (rohen, unverzinsten) Zinsgewinne ZG_t für das Kreditinstitut lassen sich nach

$$ZG_t = \sum_{i=1}^t [N - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=1, \dots, 144 \quad (4.2)$$

bestimmen. Man betrachte dazu zwei Fälle von Prepayment.

Im ersten Fall wird nach exakt sieben Jahren die gesamte ausstehende Nominale getilgt. Somit fallen als Konsequenz keinerlei Zinsen für die eigentlich geplante übrige Laufzeit mehr an. Das Kreditinstitut fällt somit um einen Großteil seiner eigentlich geplanten Zinsen um. Die Zinsgewinne lassen sich analog wie im Ausgangsszenario A berechnen, mit dem Unterschied, dass nach der Tilgung keine Zinsgewinne mehr hinzukommen.

$$ZG_t = \sum_{i=1}^t [N - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=1, \dots, 84 \quad (4.3)$$

$$ZG_t = \sum_{i=1}^{84} [N - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=85, \dots, 144 \quad (4.4)$$

Im zweiten Fall wird nach drei beziehungsweise fünf Jahren eine außerordentliche zusätzliche Tilgung in Höhe von $Pp_1 = 15.000$ EUR beziehungsweise von $Pp_2 = 10.000$ EUR durchgeführt. Bei sonst gleichbleibenden Tilgungsbedingungen verringert sich ebenfalls die Laufzeit und als Konsequenz der Zusatzzahlungen verringern sich auch die Zinszahlungen an das Kreditinstitut.

$$ZG_t = \sum_{i=1}^t [N - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=1, \dots, 36 \quad (4.5)$$

$$ZG_t = ZG_{36} + \sum_{i=37}^t [N - Pp_1 - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=37, \dots, 60 \quad (4.6)$$

$$ZG_t = ZG_{60} + \sum_{i=61}^t [N - Pp_1 - Pp_2 - (i - 1)A] r_{12}, \quad \text{für } t=61, \dots, 120 \quad (4.7)$$

$$ZG_t = ZG_{120}, \quad \text{für } t=121, \dots, 144 \quad (4.8)$$

Das folgende Diagramm (Abb. 4.1) zeigt die drei zeitlichen Verläufe der über den Zeitraum angesammelten Zinsbeträge.

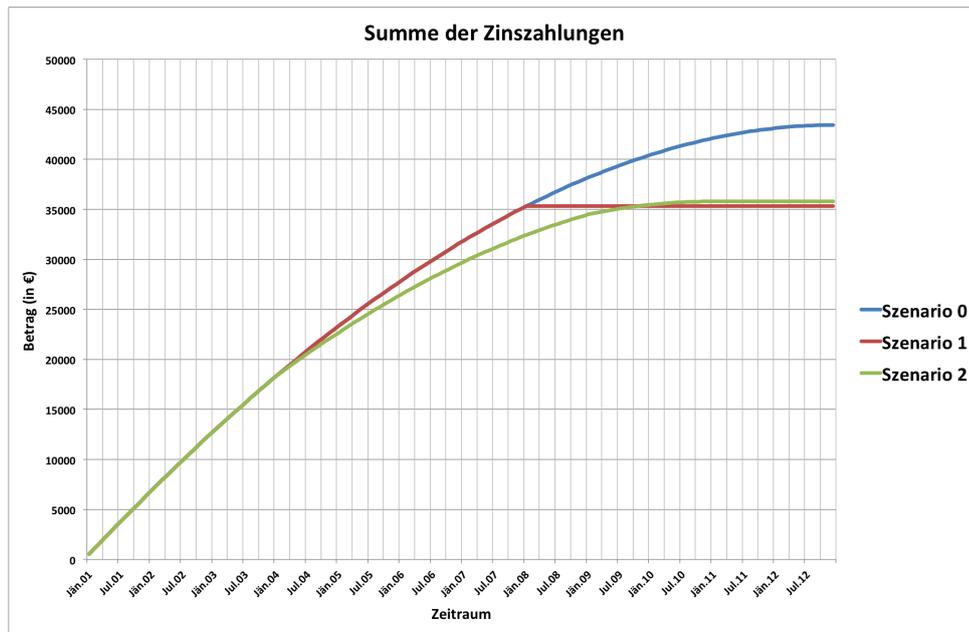


Abbildung 4.1: Zinsverläufe der Prepaymentszenarien mit fixen Zinssätzen

Es zeigen sich im Vergleich zum Regelfall ohne Prepayment (blau) Zinseinbußen von grob gerechnet jeweils 8.000 EUR. Obwohl sich auf den ersten Blick sowohl der Tilgungsaufwand als auch die realen Laufzeiten der beiden Szenarien stark unterscheiden, ergeben sich überraschenderweise kaum Unterschiede in den insgesamt gezahlten Zinsen. Durch die kleineren Tilgungsbeträge wird der Zinssummenverlauf insgesamt viel flacher (grün), während im Szenario mit der sofortigen einmaligen Tilgung (rot) der Zinszuwachs sinn gemäß abrupt endet.

Ausgangsszenario B

Dieselbe Kreditnominale von 150.000 EUR soll nun mit einer variablen Verzinsung über monatliche Zahlungen im Zeitraum von 12 Jahren getilgt werden. Als Rechnungsbasis zur Kalkulation der Zinsen wird der in diesen Fällen oft verwendete 3-Monats EURIBOR, aus [25, European Banking Federation 2014] (siehe dazu Abbildung 4.2), mit einem Aufschlag von 1% verwendet.

$$r_t = 1 + r_t^{3M \text{ EUR}} \quad (4.9)$$

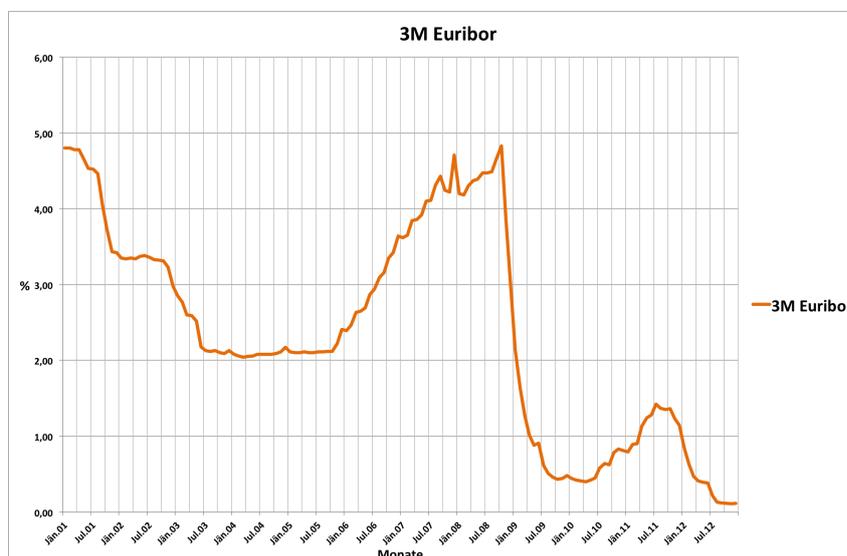


Abbildung 4.2: Zeitreihe des 3-Monats EURIBOR zwischen 1.1.2001 und 31.12.2012

Die Kalkulation der Zinsen ist in diesem Fall dynamisch. Zur Berechnung der monatlichen Annuitäten wird eine konstante Nominalentilgung³ verwendet. Zusätzlich tragen die im jeweiligen Monat gültigen Zinssätze zur Rechnung bei. Alternativ kann man auch beispielsweise eine fixe monatliche Tilgungssumme vereinbaren. Dabei wäre der Tilgungshorizont, je nach Zinsentwicklung, sehr unsicher.

Im Grunde werden die Zinsgewinne ZG_t gleichermaßen berechnet wie im Ausgangsszenario A unter konstanten Zinsen. Der einzige Unterschied dazu ist die Tatsache, dass statt dem fixen Zinssatz r_{12} nun ein variabler, unterjähriger Zinssatz r_t^{12} zugrunde liegt, der wiederum nach Gleichung 4.1 berechnet werden kann. Daraus resultiert ebenfalls, dass

³Annahme von gleichbleibenden, konstanten Nominalentilgungen über den Zeitraum von $12 \times 12 = 144$ Perioden: $150.000 \text{ EUR}/144 = 1.041,67 \text{ EUR}$

statt den fixen Tilgungsraten A nun auch variable Tilgungsraten A_t vorliegen, die sich aus den konstanten Nominalentilgungen A_N und den variablen Zinszahlungen A_t^z zusammensetzen.

$$A_t = A_N + A_t^z \quad (4.10)$$

Ansonsten verhalten sich die beiden Prepaymentszenarien ähnlich wie zuvor und lassen sich unter Verwendungen der Gleichungen 4.2 - 4.8 mit den variablen Größen r_t^{12} und A_t bestimmen. Im ausgewählten Zeitraum sinken die variablen Zinsen stark, weshalb die Gesamtbelastung an Zinsen weitaus geringer ist als im Ausgangsszenario A. Allgemein gilt es noch zu sagen, dass die Tilgungshöhen in diesem Fall sehr unterschiedlich sein können, je nach Zinsverhalten.

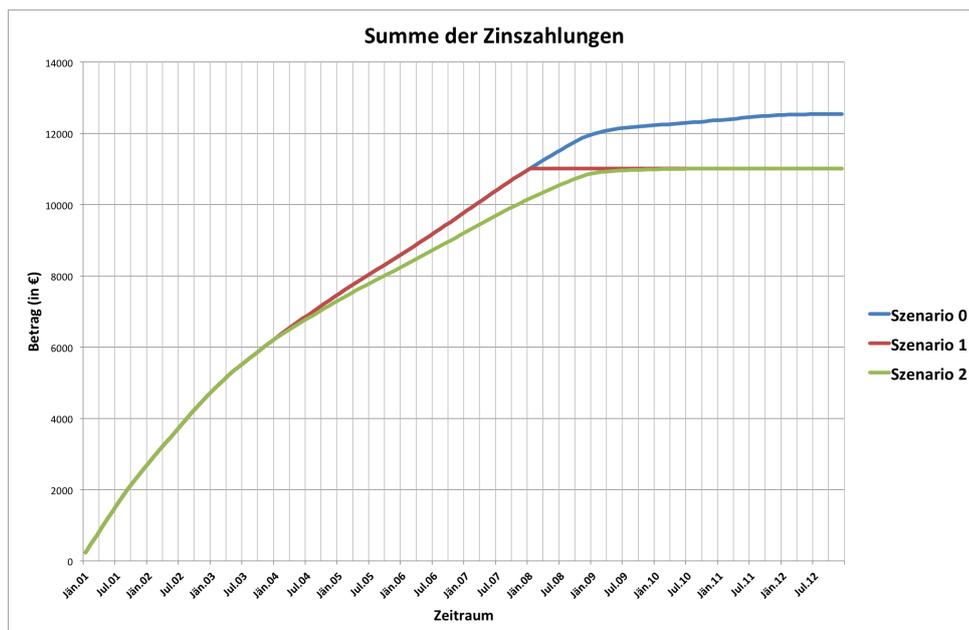


Abbildung 4.3: Zinsverläufe der Prepaymentszenarien mit variablen Zinssätzen

Vergleicht man die beiden Prepaymentszenarien (rot und grün) aus Abbildung 4.3 wiederum mit dem Normalfall (blau) ohne außerordentliche Tilgung, erleidet das Kreditinstitut im Falle von variablen Zinsen zwar nur Zinseinbußen von 1.500 EUR, die Zinsgewinne sind aber durch den stark abfallenden Zinssatz über den Zeitbereich ohnehin wesentlich geringer. Diese Einbußen werden jedoch vom hier ebenfalls mitwirkenden Zinsrisiko ge-

tragen, da aus der Dynamik am Zinsmarkt ein ebenso beachtliches Gefahrenpotential aus Sicht der Kreditinstitute entspringt.

In diesen konstruierten Beispielen wurden die beiden risikobehafteten Komponenten, nämlich die Zeitpunkte und die Tilgungshöhen, deterministisch festgelegt. In der Realität stecken genau dort die zu untersuchenden Gegebenheiten. Zudem wurde in keinem der beiden Szenarien über die Motive von solchen Prepayments gesprochen. Und genau dort setzt die Analyse von Prepayments an. Warum und wann wird eine außerordentliche Tilgung vorgenommen? Und natürlich auch in welchen Höhen werden Tilgungen veranlasst? Wobei die erste Fragestellung die wesentlich interessantere ist, auf die im Folgenden deutlich mehr Bezug genommen werden soll. Zur Fragestellung der Rückzahlungshöhe beschränken sich die meisten Autoren auf Modellierungen von ausschließlich vollständigen Tilgungen.

4.2 Allgemeines zur Modellierung

Wie man bei den vorherigen Beispielen erkennen konnte, ergeben sich durch außerordentliche Tilgungszahlungen jeglicher Art Zinsverluste auf Seiten der Kreditinstitute, die solche außerplanmäßigen Rückzahlungen deshalb sanktionieren. Dazu werden meist vertragliche Maßnahmen gesetzt, inwieweit solche Zahlungen genehmigt werden oder welche Strafzahlungen zu solchen zusätzlichen Tilgungen hinzukommen können. All diese Sanktionen sollen auf Seiten der Kreditnehmer die Anreize dämpfen, ihre Kredite schneller als grundsätzlich vereinbart zurück zu zahlen.

Betrachtet man die Möglichkeit von außerordentlichen Tilgungszahlungen aus finanzwirtschaftlicher Sicht, so stellt sie eine Option dar. Dem Kreditnehmer wird das Recht eingeräumt, seinen Kredit jederzeit teilweise oder in vollem Restumfang zu tilgen. Wie bei allen anderen Optionen auch hat dieses Recht einen Preis. Um nun dieses Rückzahlungsrecht bepreisen zu können, muss man zunächst die Wahrscheinlichkeiten dieser Rückzahlungen analysieren. Wie die Bepreisung der Hypothek und den darin enthaltenen Optionen erfolgt, wird im nachfolgenden Kapitel 5 beschrieben. Hier liegt der Fokus zunächst an der Modellierung der Rückzahlungswahrscheinlichkeiten. Ein weiterer Anreiz für Kreditinstitute die Wahrscheinlichkeiten hinter diesen Tilgungen zu analysieren ist, Prognosen erstellen zu können. Je besser man die Einflüsse solcher Prepayments kennt, desto besser lassen sich solche Zahlungen erahnen und in weiterer Folge die problembehafteten Konsequenzen reduzieren.

4.3 Einflussfaktoren

Da Kreditinstitute meist mit einer Vielzahl an Krediten konfrontiert sind, sind sie nicht an der Analyse einzelner Kredite und deren außertourlichen Tilgungen interessiert, was zugegebenermaßen auch sehr schwierig wäre. Vielmehr wird versucht aus einem geeigneten Pool an Krediten Einflüsse und Faktoren zu filtern, die das Vorkommen von solchen Zahlungsströmen steuern. Aus der Vielzahl an (möglichen) Einflüssen und Faktoren haben sich nach verschiedensten Analysen die folgenden erklärenden Faktoren als meist sehr signifikant erwiesen. Einige der nachher genannten Faktoren lassen sich intuitiv errahnen, andere wiederum wurden erst nach statistischen Analysen erkannt. Natürlich kommt es jedoch im konkreten Fall immer auf die grundsätzlichen Daten an. Nach [14] werden diese üblichen Faktoren, die Einfluss auf Prepayments nehmen, in folgende vier Gruppen eingeteilt:

1. Refinanzierung

Sie werden in [14, S.5 ff] als die Schlüsselfaktoren bezeichnet und hängen von folgenden Betrachtungen ab:

- kreditspezifische Steuersätze
- Burn-Out Effekt
- Medien Effekt: jegliche Nachrichten über wirtschaftliche Veränderungen im Zusammenhang mit Krediten (z.B. Änderungen von Zinsraten)
- Strafzahlungen im Falle von getätigten Zahlungen

2. Immobilienverkäufe

- Arbeitsverhältnisse und damit verbundene Umzugsabsichten
- kreditspezifische Kriterien (Art, Laufzeit,...)
- Seasoning Effekt
- Saisonalität: Unterschiede im Laufe des Jahres, z.B.: Sommer/Winter
- Coupon Effekt

3. Kreditausfälle

Kann aus Sicht des Kreditnehmers als eine unfreiwillige Form des Prepayments angesehen werden und wird von folgenden Faktoren beeinflusst:

- demographische Einflüsse
- Wirtschaftszyklus
- Alter des Kredites

4. Höhe der Tilgungszahlungen

- Zahlungen der vollständigen ausstehenden Nominale (üblicher Fall)
- Kredithöhenschmälerungen: teilweise Tilgungen führen zur Verringerung der ausstehenden Nominale und zur Verringerung der Zinsbelastung

Im Folgenden sollen einige dieser Faktoren näher beschrieben werden. Die Bedeutung und Signifikanz der jeweiligen Einflüsse ist wie bereits erwähnt abhängig von den jeweiligen Daten und kann von Mal zu Mal unterschiedlich sein. Einige dieser Einflüsse bedürfen keiner weiteren näheren Erklärung, da sie für sich sprechen. So ist es beispielsweise nachvollziehbar, dass gewisse demographische Einflüsse Unterschiede in den Wahrscheinlichkeiten eines Prepayments verursachen. Angefangen von regionalen Unterschieden, bei denen wohlhabendere Gegenden wahrscheinlich ein anderes Risiko mit sich bringen als wirtschaftlich schlechter gestellte Gebiete, bis hin zu alters- oder auch berufsspezifischen Unterschieden, können Rückzahlungswahrscheinlichkeiten in verschiedenen Gruppen mehr oder weniger signifikant variieren.

Des Weiteren beeinflussen unter Umständen auch kreditabhängige Steuersätze sowie die vertraglich definierten Rahmenbedingungen (Strafzahlungen) die Häufigkeiten von Tilgungen in einem solchen Pool. Gesamtwirtschaftliche Rahmenbedingungen stellen dabei ebenso einen naheliegenden Einfluss dar. So werden in verschiedenen Konjunkturphasen eventuell auch unterschiedliche Gefahrenpotentiale bezüglich Prepayments vorliegen. Wie man sieht, kann man aufgrund intuitiver Überlegungen schon jede Menge Ursachen für Unterschiede in Prepaymentwahrscheinlichkeiten finden. Einige andere Überlegungen sind jedoch nicht so naheliegend und wurden durch Analysen entdeckt.

Gewisse Phänomene wie beispielsweise der Burn-Out Effekt ergaben sich durch Analysen des Pools. Dabei zeigte sich, dass je länger Kredite nicht getilgt werden und sie somit im Pool verbleiben, desto geringer werden die Rückzahlungswahrscheinlichkeiten für diese. Je

kleiner somit ein Pool wird, desto geringer sind die Risiken hinsichtlich der entsprechend verbliebenen Kredite.

Der Coupon Effekt beschreibt die Erkenntnis, dass Kredite mit geringen Zinsraten eine wesentlich geringere Rückzahlungsgeschwindigkeit aufweisen, da solche Kreditnehmer auch im Falle eines Umzugs oder dergleichen den Kredit behalten und ihre neuen Kosten durch den Verkauf der Immobilie decken.

Mit dem Begriff Seasoning ist in diesem Zusammenhang die Alterung des Kredites gemeint. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Prepaymentwahrscheinlichkeit einer typischen funktionalen Form (S-gekrümmte Kurven) folgt. Sie ist bei Vertragsabschluss nahezu 0, steigt danach bis zu einem gewissen Zeitpunkt stark an und fällt danach wieder langsam ab. Dieses Verhalten bildet eine sehr gängige Basis für Modelle, wie später auch in 4.4.1 näher ausgeführt wird.

Die zuvor genannten Überlegungen folgen hauptsächlich aus den Erkenntnissen einer Analyse des niederländischen Prepaymentrisikos und können in [14, S.6] noch näher nachgelesen werden.

Wie bereits angesprochen, gelangen über die Jahre immer wieder neue Erkenntnisse über das tatsächliche Prepaymentverhalten hinzu. Im Folgenden sollen die Überlegungen von [18, Montano *et al.* 2003] näher ausgeführt werden. Demzufolge sollen in einem geeigneten Modell die erklärenden Variablen die zugrundeliegenden Daten nicht nur fitten, sondern auch - dem Namen entsprechend - erklären. Viele ad-hoc Modelle der letzten Jahre neigen dazu, durch Überparametrisierung die Daten nicht mehr ausreichend erklären zu können. Sind bestehende Modelle nicht mehr in der Lage, neue Daten ausreichend gut zu beschreiben, so wurde oftmals einfach eine zusätzliche Variable eingeführt, um das Modell wieder passender zu machen. Dies ist jedoch ein ungünstiges Vorgehen, da dabei die Transparenz des Modells stark leidet. Viele der zuvor bereits genannten Einflüsse sind damit nicht unbedingt geeignet, um Prepaymentdaten zu beschreiben. Aus diesem Grund wurden die Einflussgrößen in [18, S.3] nochmals näher betrachtet. Dabei hat sich gezeigt, dass das im Laufe der Zeit bestehende Modell immer wieder an neue wirtschaftliche Gegebenheiten angepasst werden musste. Immer wieder zeigten sich klare Schwächen der bestehenden Modelle, die Prepayments über- oder unterschätzten, weshalb schon gezweifelt wurde, ob überhaupt jemals ein vernünftiges Modell entwickelt werden könne. Im Rahmen der jahrelangen Entwicklungen ließen sich nun aber ausreichend Daten zusammentragen, die Modellen eine genügend hohe Sensibilität auf eine Vielzahl an Einflüssen gewähren.

Um einige Punkte aus [18] aufzugreifen, sollen die wichtigsten, zusätzlichen Erkenntnisse daraus hinsichtlich einer vernünftigen Wahl an Einflussgrößen, in den nachfolgenden Absätzen diskutiert werden. Einige Punkte fanden dabei auch schon in der zuvor gemachten Auflistung auf Seite 32 Verwendung. So spielten unterschiedliche Kredithöhen eine Rolle, ebenso wie auch die Marktbewegung am Immobilienmarkt oder der Burn-Out Effekt. Bezüglich dem Burn-Out Effekt gilt es noch zu sagen, dass ein optimales Modell diesen Effekt nicht berücksichtigen muss. Die meisten Modelle enthalten den Einfluss dieses Effekts auf die Prepaymentfunktion trotzdem über eine Art Dämpfungsvariable.

Außerdem wird in diesem Kontext hingewiesen, dass die Kreditnehmer durch die Wahl der Rückzahlungsmodalitäten (Laufzeit, Zinssatz) in gewisser Art und Weise eine Selbstselektion betreiben. Das heißt, durch die ökonomischen Umstände ist die Wahl der Produkte vorgegeben, oder zumindest sind gewisse Kreditformen günstiger. Wie in [18] als Beispiel angeführt wird, werden in Zeiten von flachen Zinskurven vermehrt Produkte mit langer Laufzeit realisiert, womit es in unruhigeren Zeiten zu erhöhten Rückzahlungsaktivitäten kommt. Somit enthalten Kredite, die in Zeiten geringer Zinsveränderungen abgeschlossen werden, das höchste Ausübungsrisiko von Prepayments. Das kommt daher, da vom Zeitpunkt des Abschlusses gesehen nur Zeiten größerer Zinsvariabilität entgegenkommen, die den Kreditnehmer eher zu einem Prepayment motiviert. Aus diesem Grund kann schon aus ökonomischen Hintergründen die Risikotendenz abgeleitet werden. Diese Erkenntnisse sollen im folgenden weiter vertieft werden.

Der wohl wichtigste und ausschlaggebendste Punkt für die Modellierung von Prepaymentwahrscheinlichkeiten fehlte in der bisherigen Auflistung: der Zinssatz - unabhängig ob fix oder variabel - und dessen zeitliche Dynamik. Im Zeitverlauf der letzten Jahre, in denen Prepayments näher untersucht wurden, ergaben sich verschiedenste Ansätze wie man Zinsveränderungen, als eines der obersten Ursachen für Prepayments, in ein Modell integrieren könnte. Intuitiv kann natürlich die Differenz aus der momentan gültigen, zu Vertragsbeginn vereinbarten, Zinsrate r_C und dem aktuell am Markt verfügbaren Zins r_M herangezogen werden:

$$r_C(t) - r_M(t). \tag{4.11}$$

Dies bringt natürlich das Problem mit sich, dass die Differenz alleine einen Informationsverlust verbirgt. Fällt der Zinssatz von 3% auf 2%, so ergibt sich vermutlich ein

anderer (höherer) Rückzahlungsanreiz als wenn die Zinsrate beispielsweise von 6% auf 5% fällt.

Der Quotient

$$\frac{r_C(t)}{r_M(t)} \tag{4.12}$$

enthält in diesem Zusammenhang schon wesentlich mehr Information.

In [18] werden Zinsänderungen und deren Form der Einflussnahme auf die Prepaymentfunktion nochmals näher diskutiert. Dabei werden die zuvor gemachten Anmerkungen bezüglich der ökonomischen Gegebenheiten zu Vertragsabschluss aufgegriffen. Dabei wird die Spanne (Differenz) zwischen dem jeweils zwei- und zehnjährigen Zinsswap als Curve at Origination (CATO) bezeichnet und diese wird in Basispunkten gemessen beziehungsweise angegeben. Aus dieser Betrachtung soll nun die Erkenntnis gewonnen werden, wie sich die aktuellen wirtschaftlichen Gegebenheiten auf die Prepayments auswirken.

Wie der Autor näher erklärt, können so auch der Einfluss oder die Abhängigkeit des durchschnittlichen gewichteten Alters des Kredits (WALA) abgebildet werden. Üblicherweise wird dieser Aspekt entweder nicht beachtet oder über statische Maßnahmen, wie sogenannte Altersrampen, in das Modell eingebunden. Da sie dabei statisch sind, müssen sie regelmäßig und vor allem nach Rückzahlungswellen neu angepasst werden.

Eine weitere Überlegung in [18] ist, einen Einfluss zu untersuchen, der sich aus den Couponraten eines Pools verglichen mit der durchschnittlichen Rate aller Pools ergibt. Diese Differenz wird als Spread at Origination (SATO) bezeichnet. Üblicherweise sollte dadurch die Qualität von Krediten, wie in Abschnitt 3.1.3 auf Seite 13 beschrieben, in das Modell integriert werden. Diese Idee zielt eigentlich auf die amerikanischen Gegebenheiten ab, wo ja die Kreditqualität erheblichen Einfluss auf die Absicherung (staatlich oder privat) hat, und ist daher nicht unmittelbar zu übernehmen. Sehr wohl könnte jedoch die Qualität der Kredite, mit einem geeigneten Indikator, eine sinnvolle zusätzliche Ergänzung darstellen.

4.4 Deterministische Modelle

Welche Einflüsse schlussendlich wirklich entscheidend oder ausreichend sind, zeigt sich bei der Analyse der Daten. Hier soll nun erläutert werden, wie ein deterministisches Modell konzipiert ist und wie die erklärenden Variablen darin zusammenspielen. Zunächst soll jedoch über nachfolgende Definition festgelegt werden, wie die Prepaymentwahrscheinlichkeit und die dazugehörige Funktion zu verstehen ist. Wie in [20, Schwartz 1989] erläutert, beschreibt die sogenannte Prepaymentfunktion die konditionale Wahrscheinlichkeit, dass ein Hypothekarkredit in einem Zeitfenster getilgt wird, unter der Bedingung dass er bisher noch nicht getilgt wurde. Wie schon vorhin erwähnt, resultiert diese Wahrscheinlichkeit aus dem Einfluss verschiedener erklärender Variablen $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s)$, deren Signifikanz vorab noch geklärt werden muss und deren Parameter $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ in weiterer Folge noch zu schätzen sind. Mathematisch formuliert:

Definition 1 *Prepayment Funktion*

Sei T eine positive stetige Zufallsvariable, die die Länge des Zeitintervalls von der Kreditvergabe bis zu der vorzeitigen Tilgung beschreibt und $\mathbb{P}(T \leq t)$ sei die Verteilungsfunktion von T . Mit den Variablen $\vec{\nu}$ und den Parametern $\vec{\theta}$ lässt sich die Prepayment Funktion definieren als:

$$\begin{aligned} \pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})}{F(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})} \end{aligned}$$

wobei $F(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})$ die Überlebensfunktion

$$F(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \mathbb{P}(T \geq t | \vec{\nu}, \vec{\theta}) \tag{4.13}$$

darstellt und $f(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von T ist:

$$f(t; \vec{v}, \vec{\theta}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.14)$$

$$= -\frac{dF(t)}{dt} \quad (4.15)$$

Die Prepaymentfunktion $\pi(t; \vec{v}, \vec{\theta})$ beschreibt somit die unmittelbare infinitesimale Wahrscheinlichkeitsrate der Tilgung zum Zeitpunkt $T = t$, bedingt darauf, dass bis dahin keine Tilgung erfolgt ist.

Analysiert man ein Portfolio an (ähnlichen) Kreditforderungen, so lassen sich durch statistische Methoden verschiedenste makro- und mikroökonomische Einflüsse finden. Obwohl wissenschaftliche Arbeiten in diesem Bereich noch eher selten sind, haben sich doch bereits einige unterschiedliche Ansätze etabliert, wie von den nachfolgenden Modelle beschrieben. Wesentlich unterschiedlicher bewerten jedoch Forscher die Auswahl an passenden Einflussfaktoren, die teilweise von Autor zu Autor variieren. Somit können empirische Prepaymentdaten mit unterschiedlichsten Ansätzen an Einflussfaktoren modelliert werden. Immer wieder zeigen sich jedoch neue Erkenntnisse, um Modelle effizienter, stabiler und auch flexibler zu machen. Viele dieser getätigten Überlegungen sollen ebenso im Zusammenhang mit den Modellen aufgelistet und diskutiert werden. Aus [14] geht hervor, dass sich die folgenden, beiden Typen von Modellen in Verbindung mit einer bestimmten Anzahl an potentiellen Einflussgrößen anbieten, die Rückzahlungswahrscheinlichkeit zu modellieren:

- Überlebensmodelle
- Generalisierte Lineare Modelle

Jedes Modell versucht dabei prinzipiell die Wahrscheinlichkeit wiederzugeben, als dass ein Kreditnehmer aus dem zugrundeliegenden Pool unter gewissen gegebenen Einflussfaktoren sein Kredit vollkommen tilgt und zwar über eine außerplanmäßige Tilgung. Der Fall, dass Kreditschmälerungen vorgenommen werden, soll nicht mehr weiter betrachtet werden, da nach [23, Vinar 2011] eine Modellierung von Teilzahlungen eher unüblich ist.

Der erste Fokus richtet sich auf ein Überlebensmodell, im Speziellen auf das sogenannte Hazard Modell. Danach soll aus dem Kreis der Generalisierten Linearen Modelle eine Mo-

dellierungsvariante vorgeschlagen werden, bevor noch abschließend statische Basismodelle (CPR und PSA) angeführt werden.

4.4.1 Überlebensmodell

Proportionales-Hazard Modell

Eine Möglichkeit die Prepaymentwahrscheinlichkeiten zu modellieren ist über das sogenannte Proportionale-Hazard Modell (nach [20]) gegeben. Nach [11, Fox 2002] wird dieses infinitesimale Risiko des Ablebens $\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})$ auch als Hazard-Rate bezeichnet, woraus sich die Begriffe des Überlebensmodells und des Hazard-Modells ableiten lassen. Die dazugehörige Prepaymentfunktion wird dabei folgendermaßen definiert:

$$\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) \pi_1(\vec{\beta}, \vec{\nu}) \quad (4.16)$$

mit

$$\pi_1(\vec{\beta}, \vec{\nu}) = \exp(\vec{\beta}^t \vec{\nu}). \quad (4.17)$$

Der Term $\pi_0(t; \gamma, p)$ wird als die Basisfunktion bezeichnet und beschreibt die Prepaymentwahrscheinlichkeit unter homogenen Bedingungen ($\vec{\nu} = 0$). γ und p sind Kalibrierungsparameter. Das bedeutet, unabhängig von allen anderen Einflussgrößen wird dem Prepayment eine gekrümmte Basisfunktion zugrunde gelegt. Dementsprechend wird laut [11] dieses Modell als semiparametrisch bezeichnet, da die Basisfunktion $\pi_0(t; \gamma, p)$ grundsätzlich jede Form annehmen kann, während die Einflussgrößen ν , wie in Gleichung 4.17 dargestellt, linear (im Exponenten) in das Modell einfließen. Diese Wahl für $\pi_1(\vec{\beta}, \vec{\nu})$ wird auch in [11] unter dem Begriff Cox Proportional-Hazard Modell, näher beschrieben. Dabei wird auch auf die logarithmische Darstellung

$$\log \pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \log \pi_0(t; \gamma, p) + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_k \nu_k \quad (4.18)$$

hingewiesen, woraus sich für die logarithmische Hazard-Rate ein lineares Modell mit willkürlicher Basisfunktion $\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})$ ergibt. Diese Beschreibung aus [11] ist in weiterer Folge vor allem im praktischen Teil (Kapitel 6) relevant, da hierbei die Kalibrierung des Modells über \mathbb{R} näher erläutert wird. Beispielsweise kann $\pi_0(t; \gamma, p)$ folgendermaßen gegeben werden:

$$\pi_0(t; \gamma, p) = \frac{\gamma p (\gamma t)^{p-1}}{1 + (\gamma t)^p}. \quad (4.19)$$

Die Struktur dieser Komponente enthält den schon in 4.3 erwähnten Einfluss des Alters der Hypothek (Seasoning) auf die Tilgungswahrscheinlichkeit $\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta})$. In seiner Form steigt die Wahrscheinlichkeit für $p > 1$ von 0 auf ein Maximum im Zeitpunkt

$$t^* = \frac{(p-1)^{\frac{1}{p}}}{\gamma} \quad (4.20)$$

an und fällt dann wieder auf eine Wahrscheinlichkeit von 0 zurück. Daraus können aus den historischen Beobachtungen die Parameter p und γ kalibriert werden. Zahlreiche historische Beobachtungen führten zu diesem Ansatz, der sich durch mehrfache Tests auch bestätigt hat. Demnach zeigen Hypotheken anfangs eine sehr geringe Tilgungswahrscheinlichkeit, während die Wahrscheinlichkeit in den nachfolgenden Jahren bis zu einem gewissen Alter ansteigt und danach wieder abfällt. Aus [14] geht ein anderer Ansatz für die Basisfunktion hervor:

$$\pi_0(t, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{(1 + \exp(-\mu_1 - \mu_2 t))}, \quad (4.21)$$

wobei μ_1 den Basisparameter und μ_2 den Steigungsparameter darstellt. Üblicherweise sollte diese Basisfunktion einer S-gekrümmten Funktion entsprechen.

Das Alter einer Hypothek ist üblicherweise nicht der einzige Einflussfaktor der Prepaymentfunktion. Nach [20] gibt es noch weitere erklärende Variablen $\vec{\nu}$, die die Entscheidung eines Kreditnehmers hinsichtlich einer Tilgung beeinflussen. Nachdem diese erklärenden Variablen $\vec{\nu}$ in jedem Alter das Verhalten beeinflussen sollen, erhalten diese nach dem

Hazard Modell einen proportionalen Einfluss. Die dazugehörigen Regressionskoeffizienten β messen den Effekt der Variablen auf die Prepaymentwahrscheinlichkeit. Dieser multiplikative Term, der die übrigen erklärenden Variablen enthält, kann nach [14] auch folgendermaßen definiert werden:

$$\pi_1(\vec{\beta}, \vec{v}) = \exp(-\exp(-\vec{\beta}\vec{v})). \quad (4.22)$$

Modellierungsbeispiel

Aus der Vielzahl an möglichen Einflussfaktoren wurden im Modell nach [20] die folgenden Variablen als erklärende Variablen verwendet.

Zunächst ist ein Tilgungsanreiz unumstritten von den zugrundeliegenden Zinsraten abhängig. Hier wird der sehr triviale Ansatz aus Gleichung 4.11 verwendet. Liefert der Markt eine Refinanzierungsmöglichkeit des ursprünglichen Kredites zu einer Rate r_M , die unter der ursprünglichen Rate r_C liegt, so wird in jedem Fall der Tilgungsanreiz gesteigert. Da die Vertragsabwicklung üblicherweise Zeit in Anspruch nimmt ($s \geq 0$), tritt eine Verzögerung zum Initiierungszeitpunkt t ein. Daraus ergibt sich die erste Variable

$$\nu_1(t) = r_C(t) - r_M(t - s). \quad (4.23)$$

Ist die Variable $\nu_1(t) > 0$, so entsteht sinngemäß ein Anreiz für einen Kreditnehmer seinen Kredit durch einen besser konditionierten zu ersetzen. Demzufolge muss der dazugehörige Parameter $\beta_1 > 0$ sein.

Um den Anreiz, der sich aus einer hohen Differenz der beiden zu vergleichenden Zinsraten ergibt, noch zu verstärken, wird zusätzlich die Variable

$$\nu_2(t) = (r_C(t) - r_M(t - s))^3 \quad (4.24)$$

im Modell miteinbezogen. Auch hier ergibt sich die Folgerung, dass für $\nu_2(t) > 0$ der Koeffizient $\beta_2 > 0$ sein muss.

Die nächste Variable bezieht sich auf den Pool, in dem die gesamten Kredite eines Kreditinstitutes gesammelt sind. Dabei soll der Einfluss der zuletzt getätigten Tilgungszahlungen aus dem Pool einbezogen werden. Empirische Studien haben gezeigt, je höher die zuletzt getätigten Zahlungen sind, desto weniger Anreize besitzen die übrigen Poolteilnehmer, ihren Kredit vorzeitig zu tilgen. Dazu definiert man sich die Variable

$$\nu_3(t) = \log\left(\frac{AO_t}{AO_t^*}\right), \quad (4.25)$$

wobei AO_t den ausstehenden Betrag des Pools zum Zeitpunkt t und AO_t^* den ausstehenden Betrag ohne die getätigten außerordentlichen Tilgungen beschreibt. Je größer somit die getätigten bisherigen Zahlungen sind, desto kleiner ist $\nu_3(t)$ und ebenso der Anreiz für weitere Tilgungen im Pool. Unter dieser Konstellation wird somit für β_3 ein Wert größer 0 erwartet.

Die letzte erklärende Variable in [20] wird durch den Saisonalitätsverlauf beschrieben. Diese Variable wird als Indikatorvariable definiert, wenn beispielsweise historische Tilgungsanreize in den wärmeren Monaten höher sind als umgekehrt.

$$\nu_4(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t = \text{Mai bis August} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.26)$$

Somit erwartet man für $\beta_4 > 0$, da Tilgungszahlungen über den gesamten Altersbereich einer Hypothek in den warmen Jahreszeiten grundsätzlich höher sind.

4.4.2 Generalisiertes Lineares Modell

Eine Alternative zum bisherigen Modellansatz stellt die Modellierung über ein logistisches Regressionsmodell aus der Klasse der Generalisierten Linearen Modellen (GLM) dar. Letztere zeichnen sich zusammengefasst, wie in [12, Friedl 2010] beschreiben, durch folgende Charakteristika aus.

Definition 2 GLM

Existieren für einen Zufallsvektor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ sowohl der Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ und die Varianz $\text{Var}(Y)$, so werden in der Klasse der GLM Parametrisierungen der Form

- $Y_i \sim \text{Exponentialfamilie}(\theta_i)$ mit $\mathbb{E}(Y_i) = \mu(\theta_i)$ und $\text{Var}(Y_i) = \phi_i V(\mu_i)$,
- mit systematischer Komponente $\eta_i = \nu^T \beta$
- und Linkfunktion $g(\mu_i) = \eta_i$

betrachtet. Über die erklärenden Variablen ν und den Parametern β wird ein linearer Zusammenhang dargestellt, welcher der Funktion des Erwartungswert $g(\mu_i)$ entspricht. Über den Dispersionsparameter ϕ und eine Varianzfunktion $V(\mu_i)$ kann die Varianz auch in Abhängigkeit des Erwartungswertes modelliert werden.

Dies stellt eine Verallgemeinerung von Linearen Regressionsmodellen dar.

Logistisches Regressionsmodell

Wie in [14] ersichtlich, kann eine außerordentliche Tilgung als eine binäre Zufallsvariable Y aufgefasst werden.

$$Y_{i,t} = \begin{cases} 1, & \text{Prepayment des Kredites } i \text{ (zum Zeitpunkt } t) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.27)$$

Die Modellierung bezieht sich in diesem Fall auf

$$\mathbb{P}(y_{i,t} = 1 | \nu) = G(\vec{\nu}, \vec{\beta}), \quad (4.28)$$

mit den erklärenden Variablen ν und den Koeffizienten β . Es gibt in diesem Zusammenhang verschiedene Ansätze für logistische Regressionsmodelle, den Probit- oder den Logitlink. Der Probitlink $G(\vec{\nu}, \vec{\beta}) = \Phi(\vec{\beta}^T \vec{\nu})$ ist über die Normalverteilung $\Phi(x)$ mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ spezifiziert, während der Logitlink über folgende Form definiert wird:

$$G(\vec{v}, \vec{\beta}) = \frac{\exp(\vec{\beta}^t \vec{v})}{1 + \exp(\vec{\beta}^t \vec{v})} \quad (4.29)$$

Dieses logistische Modell ist sehr eng mit dem Proportionalen-Hazard Modell, wie es durch die Gleichungen 4.16 und 4.17 gegeben ist, verbunden. Dies zeigt man, wie in [14] beschrieben, indem man

$$\pi(t; \vec{v}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) \exp(\vec{\beta}^t \vec{v}) = \exp(\log(\pi_0(t; \gamma, p)) + \vec{\beta}^t \vec{v}) \quad (4.30)$$

darstellt. Daraus verwendet man

$$\vec{\eta} = \log(\pi_0(t; \gamma, p)) + \vec{\beta}^t \vec{v} \quad (4.31)$$

in der Anwendung

$$G(t, \vec{v}) = \frac{\exp(\vec{\eta})}{1 + \exp(\vec{\eta})}. \quad (4.32)$$

Besonders für kleine Hazard-Raten π ergibt sich dadurch ein Zusammenhang zwischen dem Proportionalen Hazard-Modell und dem Logit Modell.

Eine Schätzung der Parameter wird üblicherweise mit Maximum Likelihood Methoden durchgeführt. Die dabei auftretenden Parameterschätzungen können nur mehr numerisch gelöst werden und erfordern den Einsatz von Näherungsverfahren wie beispielsweise dem Newton-Raphson Verfahren. Auf ein solches Vorgehen wird auch in [20] näher eingegangen.

4.4.3 CPR und PSA Modell

Eine weitere Möglichkeit Rückzahlungswahrscheinlichkeiten zu modellieren wird beispielsweise in [3] aufgegriffen, wo vor allem die Begriffe Rückzahlungsgeschwindigkeit und -rate

von Bedeutung sind. Diese Modelle versuchen jedoch vielmehr das Rückzahlungsverhalten eines gesamten Pools zu beschreiben. Das erste Modell in diesem Zusammenhang wird mit CPR (Constant Prepayment Rate) abgekürzt. Es unterstellt den Kreditnehmern eines Pools eine über die Jahre verhältnismäßig konstante Tilgungsrate ihrer Kredite.

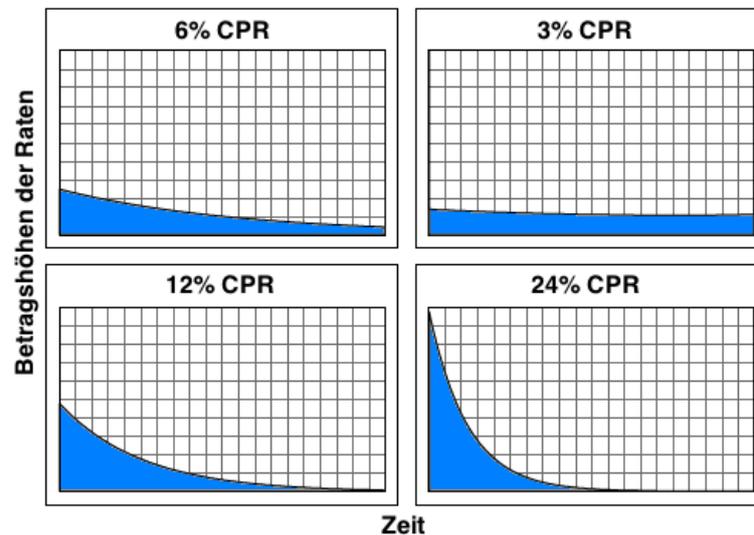


Abbildung 4.4: Rückzahlungsverhalten in einem Pool gemäß dem CPR Modell, nach [3]

Beispielsweise beschreibt ein 10% CPR eine jährliche Tilgung von 10% der ausstehenden Beträge in einem Pool von Krediten. Vergleicht man beispielsweise unterschiedliche Raten, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, in einem zugrundeliegenden homogenen Pool mit gleichbleibenden Eigenschaften hinsichtlich Laufzeiten und Zinsraten der Kredite, sowie der totalen Kreditsumme des Pools, so fällt auf, dass die Gesamtsumme an Tilgungen über die Laufzeit im Pool in jedem Fall dieselbe ist (eingefärbte Fläche ist überall gleich groß).

Anders verhält sich hier jedoch der Kurvenverlauf der Tilgungen je nach Rückzahlungsrate. Nachdem bei höheren Raten ein wesentlich größerer Anteil in den ersten Jahren getilgt wird, verschiebt sich ein Großteil der Zahlungen in den vorderen Zeitbereich, während für niedrige Raten eine eher ausgeglichene Zahlungsintensität über den gesamten Zeitbereich des Pools vorliegt. Mit dieser Erkenntnis lässt sich die gewichtete, durchschnittliche Lebensdauer (WAL - weighted average life) eines Pools definieren. Für geringe Raten ergibt sich eine lange WAL und umgekehrt. Die WAL entspricht dem Zeitwert, in dem die Hälfte der gesamten Kreditsumme in einem Pool getilgt wurde.

Eine Erweiterung des CPR Modells stellt das PSA⁴ Modell dar. Es basiert wiederum auf der Idee von, relativ zur ausstehenden Kreditsumme, konstanten Rückzahlungen, nur dass die Tilgungen besser an den Seasoning Effekt angepasst sind. Anfangs bestehen geringere Rückzahlungsraten, welche bis zu einem Zeitpunkt hin (üblicherweise 30 Monaten) rasch ansteigen und danach mehr oder weniger wieder abfallen. Geht man von einem 6% CPR aus (Abbildung 4.5 links oben), so steigen in den ersten 30 Monaten die Raten um jeweils 0,2% an und erreichen danach die 6%. Dies würde dem Basismodell entsprechen, 100% PSA. Andere darauf aufbauende Modelle wie beispielsweise 200% PSA entsprechen dem Vielfachen des Basismodells.

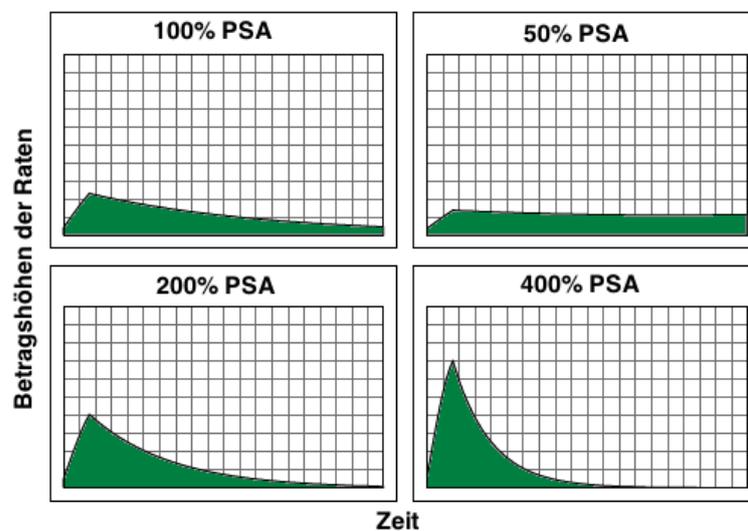


Abbildung 4.5: Rückzahlungsverhalten in einem Pool anhand dem PSA Modell, nach[3]

Diese Modelle können natürlich ebenso an bestehende Daten angepasst werden. Doch sie spiegeln das reale Rückzahlungsverhalten in einem Pool von Krediten nur bedingt wider. Das Hauptproblem ist dabei das fehlende Anpassungsverhalten an gegebene Umstände, wie sie bereits vorhin erwähnt wurden. Während das CPR Modell kaum den wahren Tilgungsverhalten entspricht, kann das PSA Modell wenigstens durch die Überlegungen hinsichtlich anfänglich niedrigen und ansteigenden Tilgungsraten den realen Verlauf besser wiedergeben. Doch insgesamt verhalten sich beide Modell sehr statisch und können auf äußere Gegebenheiten, die Tilgungsanreize verändern, nicht reagieren, weshalb sie nur bedingt brauchbar sind und nur einen groben Überblick sowie eine theoretische Rolle spielen.

Eine ähnliche Idee wird auch in [15, Jönsson *et al.* 2009] aufgegriffen und entsprechend kann eine Prepaymentfunktion formuliert werden:

⁴benannt nach der Pubic Securities Association

$$\pi_{CPR}(t; \alpha) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t \leq t_c \\ \alpha t_c, & t_c \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.33)$$

Daraus lässt sich die Verteilungsfunktion durch

$$\mathbb{P}_{CPR}(t; \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha t^2}{2}, & 0 \leq t \leq t_c \\ -\frac{\alpha t_c^2}{2} + \alpha t_c t, & t_c \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.34)$$

darstellen. Die Funktionen spiegeln somit folgenden Sachverhalt in allgemeiner Art und Weise wider: Die Prepaymentfunktion startet bei 0 und steigt je Zeitintervall (Monat) um die Rate α an. Wird der Zeitpunkt t_c erreicht, bleibt die Funktion bis zum Ende der Laufzeit T konstant. Folglich steigt die Prepaymentwahrscheinlichkeit anfangs quadratisch und nach dem Zeitpunkt t_c linear. Werden der Zeitpunkte t_c und die Prepaymentrate \mathbb{P}_{CPR} zum Zeitpunkt T fixiert, so kann man daraus die Rate α bestimmen.

$$\alpha = \frac{\mathbb{P}_{CPR}(T)}{Tt_c - \frac{t_c^2}{2}} \quad (4.35)$$

Dieser Zusammenhang wird vor allem als Referenz für die nachfolgenden, stochastischen Modelle verwendet.

4.5 Stochastische Modelle

Die zuvor genannten deterministischen Modelle weisen, wie schon kurz erwähnt, einige Nachteile und Schwächen auf. Nach [15, S.2] können deterministische Modelle nur die erwarteten Rückzahlungswahrscheinlichkeiten modellieren, das reale Rückzahlungsverhalten aber nicht vollends ausreichend beschreiben. Der reale Markt zeigt, dass Rückzahlungsanreize durch eine Vielzahl an Faktoren (siehe Einflussfaktoren) beeinflusst werden. Diese Einflüsse wirken oft spontan sowie meist auch unerwartet und verursachen somit Sprünge in den Rückzahlungswahrscheinlichkeiten. Diese Erkenntnis führt zur Überlegung, stochastische Modelle für die Prepaymentverteilung heranzuziehen.

Wie aus [15, S.3 ff] ersichtlich, können Modelle für Prepaymentraten ebenso für die Betrachtung von Defaultwahrscheinlichkeiten herangezogen werden und umgekehrt, da nur ein kleiner Unterschied in der Betrachtungsweise vorliegt. Im Nachfolgenden sollen zwei dieser stochastischen Modelle näher dargestellt werden.

4.5.1 Normales-Einfaktor-Prepayment Modell

Das Normale-Einfaktor-Prepayment Modell ist ein stochastisches Modell, das durch eine geometrische Brown'sche Bewegung W_t vorangetrieben wird. Die Basis dieses Modells stellt die Modellierung des Vermögens $V^{(i)}$ eines Kreditnehmers i in einem Pool von N Krediten dar. Betrachtet wird der Zeitraum zwischen Vertragsabschluss und Zeitpunkt T , an dem das Prepayment veranlasst wird. Dieser Vermögensverlauf wird durch

$$V_T^{(i)} = V_0^{(i)} \exp [a(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)}) + b(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})W_T^{(i)}] \quad (4.36)$$

$$\stackrel{d}{=} V_0^{(i)} \exp [a(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)}) + b(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})Z_i] \quad (4.37)$$

modelliert, wobei $\stackrel{d}{=}$ die "Gleichheit in Verteilung" bedeutet und $Z_i \sim N(0, 1)$ ist. Durch diese Vereinfachung genügt es anstelle der Brown'schen Bewegung W_t normalverteilte Zufallsvariablen zu betrachten. Die Faktoren $a(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})$ und $b(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})$ stellen Skalierungsparameter dar, wobei $a(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})$ den deterministischen Teil rund um den deterministischen Drift μ , und $b(\mu_T^{(i)}, \sigma_T^{(i)})$ die Volatilität hauptsächlich über den Volatilitätsparameter σ , des Prozesses steuert. Des Weiteren sind die einzelnen Z_i durch

$$Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1 - \rho}X_i \quad (4.38)$$

definiert mit $X, X_1, \dots, X_N \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$. Aus diesem Grund entspricht der Parameter $\rho = \text{Corr}(Z_i, Z_j)$ für alle $i \neq j$.

Wie in [15] erläutert, kann dieses Modell auch zur Betrachtung von Kreditausfällen herangezogen werden. Dabei erreicht oder erleidet ein Kreditnehmer i einen Default (Zahlungsunfähigkeit), wenn sich seine finanziellen Möglichkeiten $V_T^{(i)}$ bis zu einem Zeitpunkt

t auf eine vordefinierte Schwelle B_t^d verschlechtert haben, oder äquivalent, Z_i unterschreitet eine Schwelle H_t^d . Wird das Modell zur Betrachtung von Prepayments herangezogen, wird ein Kreditnehmer seinen Kredit vorzeitig zum Zeitpunkt t tilgen, falls sich seine finanziellen Umstände V_T^i bis dahin dermaßen verbessert haben, dass eine vordefinierte Schwelle B_t^p überschritten wird. Äquivalent gilt, dass die Zufallsvariable Z_i die Grenze H_t^p überschreitet. Die Schwelle H_t^p wird so gewählt, dass die erwartete Prepaymentwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t der aus den historischen Daten kalibrierten Prepaymentwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_{CPR}(t)$ aus Gleichung 4.34 entspricht. Das bedeutet

$$\mathbb{P}[Z_i \geq H_t^p] = 1 - \Phi[H_t^p] = \mathbb{P}_{CPR}(t) \quad (4.39)$$

und folglich

$$H_t^p = \Phi^{-1}[1 - \mathbb{P}_{CPR}(t)], \quad (4.40)$$

mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ .

Um nun solche Prepaymentverteilungen simulieren zu können, muss man sich zu jedem (diskreten) Zeitpunkt t eine Stichprobe von N standardnormalverteilten Zufallsvariablen $\mathbf{Z}_t = Z_t^1, \dots, Z_t^N$ generieren, die die Gleichung 4.38 erfüllen, und dann jeweils die Anzahl an Zufallsvariablen ermitteln, die gleich oder größer der Schwelle H_t^p sind. Der simulierte Wahrscheinlichkeitsverlauf von vorzeitigen Rückzahlungen zu den Zeitpunkten t $\mathbb{P}_P(t; \mathbf{Z}_t)$ ist dann gegeben durch

$$\mathbb{P}_P(t; \mathbf{Z}) = \frac{\#\{Z_t^i \geq H_t^p : i = 1, \dots, N\}}{N}, \quad t \geq 0. \quad (4.41)$$

Die Kurven dieses Modells entspringen wie gewünscht im Ursprung und besitzen einen stochastischen Verlauf, wodurch sich am Markt beobachtbare spontane Änderungen besser erklären lassen als durch deterministische Modelle. Nichtsdestotrotz kann dieses Modell

nicht mit den eingangs geforderten Sprüngen dienen. Dies führt, im Vergleich zu anderen sprungdynamischen Modellen, zu Überschätzung und in weiterer Folge zu höheren (unsicheren) Bewertungen.

4.5.2 Levy-Portfolio-Prepayment Modell

Dieses Modell kompensiert die Schwächen der deterministischen Modelle und enthält auch die zuvor fehlenden Sprünge. Das Hauptaugenmerk dieses Modells liegt an einem Levy-Prozess, der nach [10, Fachausschuss Finanzmathematik 2011, S.208] durch folgende charakteristische Eigenschaften gekennzeichnet ist.

Definition 3 Levy-Prozess

Ein Levy-Prozess L_t ist ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit t , mit den Eigenschaften

- $L_0 = 0$,
- L_t besitzt homogene Zuwächse, das heißt die Verteilung von $L_t - L_s$ hängt nur von $t - s$ ab,
- L_t hat unabhängige Zuwächse, was bedeutet, dass für $r \leq s \leq t \leq u$ die Differenzen $L_s - L_r$ und $L_u - L_t$ unabhängig voneinander sind,
- die Pfade von L_t sind rechtsstetig und besitzen einen linksseitigen Grenzwert⁵.

Oft wird bei der Definition eines Levy Prozesses auch von stochastischer Stetigkeit

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|L_s - L_t| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

gesprochen, um den bedeutenden Unterschied zur Brown'schen Bewegung zu verdeutlichen. Bei Pfaden einer Brown'sche Bewegung handelt es sich um stetige Trajektorien mit homogenen, unabhängigen und normalverteilten Zuwächsen. Somit sind für Levy-Prozesse auch Sprünge zulässig, die für die Modellierung in der Finanzmathematik sehr nützlich sind.

⁵Solche Pfade von Prozessen werden üblicherweise mit cadlag (continu a droite, limite a gauche) bezeichnet

Der zeitliche Verlauf der Prepaymentwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_p(t)$ wird über folgende Prozessstruktur definiert:

$$\mathbb{P}_p = \{\mathbb{P}_p(t) = 1 - e^{-\lambda_t^p}, t \geq 0\}, \quad (4.42)$$

wobei $\lambda_t^p = \{\lambda_t^p : t \geq 0\}$ einen strikt anwachsenden Levy-Prozess darstellt. Dieser Levy-Prozess gewährleistet, dass die Prepaymentkurve \mathbb{P}_p stochastisch und mit Sprüngen ausgestattet ist, also selbst wiederum eine Zufallsvariable ist.

Um nun einen solchen Wahrscheinlichkeitsverkauf zu simulieren, muss man zunächst den Prozess λ_t^p näher definieren und bestimmen, um daraus eine Stichprobe ziehen zu können. Eine notwendige Bedingung an den Prozess selbst, und zwar $\mathbb{P}_p(0) = 0$, wird per Definition eines Levy-Prozess $\lambda_0^p = 0$ für jeden dieser Sprungprozesse erfüllt.

Eine konkrete Realisierung und Implementierung für λ^p wäre der in [15, S.5] angeführte Gamma-Prozess $G = \{G_t : t \geq 0\}$ mit seinen beiden Parametern: a, dem Formparameter und b, dem Skalierungsparameter. Somit gilt zu jedem Zeitpunkt t, an dem der Prozess λ^p als Zufallsvariable betrachtet werden kann, $\lambda_t^p \sim \text{Gamma}(at, b)$. Zum Zeitpunkt T, an dem eine vorzeitige Tilgung eintritt, kann die Prepayment - Wahrscheinlichkeit gemäß

$$\mathbb{P}_p(T) = 1 - e^{-\lambda_T^p} \quad (4.43)$$

bestimmt werden mit $\lambda_T^p \sim \text{Gamma}(aT, b)$. Daraus können unter Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbb{E}[1 - e^{-\lambda_T^p}] = \mu_p \quad (4.44)$$

$$\text{Var}[1 - e^{-\lambda_T^p}] = \sigma_p^2 \quad (4.45)$$

die Parameter a und b bestimmt werden. Zur Kalibrierung verwendet man dabei die Werte für den Mittelwert μ_p und Varianz σ_p^2 der historischen Verteilung der vorzeitigen Rückzahlungen $\hat{F}_{t,n}^{Pre}$, ausgewertet an bestimmten Zeitpunkten t. Diese kann über die binären Zufallsvariablen

$$Y_t^i = \begin{cases} 1, & \text{Kredit } i \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ zurückbezahlt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.46)$$

definiert werden, durch

$$\hat{F}_{t,n}^{Pre} = \frac{1}{n} \#\{i \in \{1, \dots, n\} : y_t^i = 1\} \quad (4.47)$$

Um das gegebene Gleichungssystem 4.45 effizient zu lösen, kann man sich in diesem Fall der Momenterzeugenden Funktion der Gamma Verteilung $\mathbb{E}[e^{s\lambda_t^p}] = \phi_{\lambda_t^p}(s) = (\frac{1}{1-bs})^{at}$ bedienen, wodurch der gegebene Erwartungswert und die Varianz folgendermaßen angegeben werden können.

$$\mathbb{E}[1 - e^{-\lambda_T^p}] = 1 - (\frac{1}{1+b})^{at} = \mu_p \quad (4.48)$$

$$Var[1 - e^{-\lambda_T^p}] = Var[e^{-\lambda_T^p}] = \mathbb{E}[(e^{-\lambda_T^p})^2] - \mathbb{E}[e^{-\lambda_T^p}]^2 \quad (4.49)$$

$$= (\frac{1}{1+2b})^{at} - (\frac{1}{1+b})^{2at} = \sigma_p^2 \quad (4.50)$$

Aus diesem Gleichungssystem kann man durch geeignete numerische Verfahren die Parameter a und b schätzen.

Durch die Verwendung von Sprüngen in der Prozessstruktur können die aus der Realität beobachteten, oft drastischen, ökonomischen Änderungen, die wiederum plötzliche und oft überraschende Auswirkungen auf Prepayment besitzen, wesentlich besser abgebildet werden. Dadurch ergibt sich aus der historischen Beobachtung dieser Modelle ein vernünftigeres und zufriedenstellenderes Bild für die daraus resultierenden Bewertungen und Risikomerkmale. Im Speziellen lässt sich sagen, dass das Verteilungsverhalten an den Tails für stochastische Modelle mit Sprüngen wesentlich besser ist.

4.5.3 Default Modelle

Wie in [15, S.3] beschrieben, können die zuvor genannten Modelle auch zur Betrachtung von Defaulttrisiken herangezogen werden.

Wird das Levy-Portfolio-Modell für Zahlungsausfälle verwendet, so kann man dies analog zum Fall von Prepayment tun. Einzig der Parameter wird in λ_D umbenannt und das Modell an die empirischen Defaultdaten angepasst.

Wird das Normal-Einfaktor-Modell verwendet, so erfolgt dies durch eine geringfügig andere Betrachtungsweise. Ein Kreditnehmer meldet sich zahlungsunfähig, wenn sein Vermögen V_T^i eine untere Schwelle B_t^d unterschreitet. Dabei muss die Schwelle bestimmt werden. Diese wird so gewählt, dass die erwartete Ausfallswahrscheinlichkeit den am Markt beobachteten Wahrscheinlichkeiten entspricht, unter der Annahme, dass diese einem homogenen Poisson-Prozess mit Intensität λ folgen. Daraus folgt

$$\mathbb{P}[Z_i \leq H_t^d] = \Phi[H_t^d] = \mathbb{P}[N_t > 0] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (4.51)$$

wobei λ durch $\mathbb{P}[Z_i \leq H_t^d] = \mu_d$ kalibriert wird. μ_d ist dabei der Mittelwert der empirischen, aufgrund der Beobachtungen ermittelten, Ausfallsverteilung. Daraus folgt für die Schwelle

$$H_t^d = \Phi^{-1}[1 - (1 - \mu_d)^{\frac{1}{t}}], \quad (4.52)$$

Für die Simulation der Ausfallswahrscheinlichkeit betrachtet man

$$\mathbb{P}_d(t; \mathbf{Z}) = \frac{\#\{Z_i \leq H_t^d : i = 1, \dots, N\}}{N}, \quad t \geq 0. \quad (4.53)$$

für das dafür generierte Stichprobensample $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$.

Somit können die genannten stochastischen Modelle sowohl für die Betrachtung von Prepayment- als auch für Defaulttrisiken verwendet werden.

Wie in diesem Kapitel beschrieben, gibt es nun zahlreiche Möglichkeiten, das hauptsächlich diskutierte Prepaymentrisiko zu erfassen und mathematisch zu modellieren. Angefangen von sehr einfach gehaltenen Modellen wie das CPR oder PSA Modell bis hin zur detaillierten Analyse von Einflussfaktoren im Zusammenhang mit Generalisierten Linearen Modellen können durch deterministische Modelle die erwarteten vorzeitigen Rückzahlungswahrscheinlichkeiten mehr oder weniger aufwendig beschrieben werden. Eine dem realen, von Sprüngen gekennzeichneten, Verlauf von Prepaymentfunktionen und -verteilungen sehr nahekommende Variante der Modellierung stellen stochastische Modelle dar.

In Kapitel 6 werden diese theoretisch beschriebenen Modelle anhand der empirischen Daten modelliert und untereinander verglichen.

5

Bewertung des Prepaymentrisikos

Nachdem nun einige Ansätze zur Modellierung der Wahrscheinlichkeit eines solchen Prepayments diskutiert wurden, sollen als nächstes Gesichtspunkte zu einer vernünftigen Bewertung dieses Risikos betrachtet werden. Aus Sicht eines Kreditinstitutes will man sich gegen Risiken jeglicher Art absichern, sowohl präventiv, in dem man generell Risiken vermeidet oder mildert, aber auch finanziell, wobei man sich das Risiko von einem potentiellen Verursacher vergelten lässt.

Entsprechend der fairen Prämie eines Versicherungsvertrages sucht man hier einen fairen Preis für die Möglichkeit den Kredit vorzeitig voll zu tilgen. Viele Autoren gehen dabei den Weg, diese vertragliche Rückzahlungsoption mit derivativen Mitteln zu beschreiben. Wie in [3] dargestellt, ergeben sich für den Kreditschuldner durch entsprechende Umstände Motive, die im vorherigen Kapitel 4 bereits näher dargestellt wurden, den Kredit durch einen neuen Kredit zu refinanzieren, der dem Kreditnehmer durch günstigere Konditionen billiger kommt. Als Beispiel verwendet auch dieser Autor wiederum die Veränderung von Zinsraten am Markt. Generell muss man jedoch vorsichtig sein, denn nicht nur fallende Zinssätze können Rückzahlungsanreize auslösen. Dies hängt stark vom Kredittyp ab, also ob man an fixe oder variable Zinsen gebunden ist.

Allgemein kann der Kreditnehmer im Fall von ihm günstig erscheinenden Umständen von

der Möglichkeit Gebrauch machen und den Kredit refinanzieren. In [3, S.3 ff] wird ein Hypothekarkredit durch einen Bond und durch eine Option dargestellt.

Der Bond soll gewissermaßen die Pflicht des Kreditnehmers, regelmäßige Tilgungszahlungen an das Kreditinstitut zu leisten, darstellen. Im Falle von fixen Zinsen bestehen die Forderungen des Kreditgebers aus über die jeweilige Laufzeit identischen und gleichmäßigen Cashflows. Zur Bewertung lässt sich der Barwert, also der Wert zum Vertragsursprung, des Bonds sehr leicht berechnen, in dem die Zahlungen entsprechend diskontiert werden. Für Kredite mit variablen Zinssätzen ergeben sich unter Umständen variierende Zahlungsströme, doch die Zeitpunkte bleiben trotzdem fix.

Die dazugehörige Option beschreibt das Recht des Kreditnehmers, den ausstehenden Restbetrag jederzeit zu tilgen. Er kann also einen Call ausüben, um den Bond zu kaufen und zwar um den Preis der ausstehenden Nominale (ungeachtet eventueller Strafzahlungen). Das Prepaymentrisiko liegt somit genau in der Betrachtung dieser Option. Zur Bewertung dieser Option bedarf es sehr vieler Informationen. So muss grob gesagt die Neigung des Kreditnehmers zugrunde liegen, dass er diese Möglichkeit unter gewissen Umständen wahrnimmt und den Restbetrag tilgt. Diese Neigung besteht aus einigen stochastischen Komponenten, wie zum Beispiel dem zukünftigen Zinskurvenverlauf oder die Entwicklung am Immobilienmarkt. Dies gestaltet die Bewertung dieser Option sehr schwierig. Diese angesprochene Neigung kann jedoch aus der im letzten Kapitel 4 diskutierten Prepaymentfunktion abgeleitet werden.

Wird ein Hypothekarkredit ausgestellt, so kauft der Kreditgeber (long position) zum Preis der Nominale einen Bond vom Kreditnehmer (short position) und erhält folglich die daraus abgeleiteten Ansprüche. Außerdem erwirbt der Kreditnehmer (long) die Option (Recht auf Tilgung der Restsumme) vom Kreditgeber (short). Insgesamt lässt sich die Bewertung des Hypothekarkredites aus der Bewertungsdifferenz aus Bond und der Option ermitteln. Aus Sicht des Kreditinstitutes ergibt sich durch den Wert des Bonds abzüglich dem Wert der Option die totale Valuierung des Kredites.

Wie in [3, S.8] weiters ausgeführt, gibt es statische und dynamische Methoden sich dem Bewertungsproblem anzunehmen. Außerdem kann die Lösung sowohl durch Vor- als auch durch Rückwärtsberechnung erfolgen, wobei letztere wesentlich weniger Probleme bereitet und deshalb häufiger angewandt wird.

5.1 Eigenschaften der Preisfunktion

Zahlreiche Analysen der Preisfunktion haben gezeigt, dass diese zwei interessante Eigenschaften besitzt, die das Verhalten stark beeinflussen:

- Duration
- Konvexität

Das Verhalten soll dabei exemplarisch anhand der folgenden Grafik illustriert werden. Ausschlaggebend für das Verhalten ist die Reaktion der Preisfunktion auf die Veränderungen der Zinsen, die für dasselbe Produkt im Laufe der Zeit angeboten werden. In Abbildung 5.1 sieht man die Preisfunktionen einer zehnjährigen Anleihe, eines 30-jährigen Bonds und die einer MBS, die im Grunde dieselben Einflüsse von Prepayment (oder auch Default) erfahren wie ein Pool von unverbrieften Hypothekarkrediten.

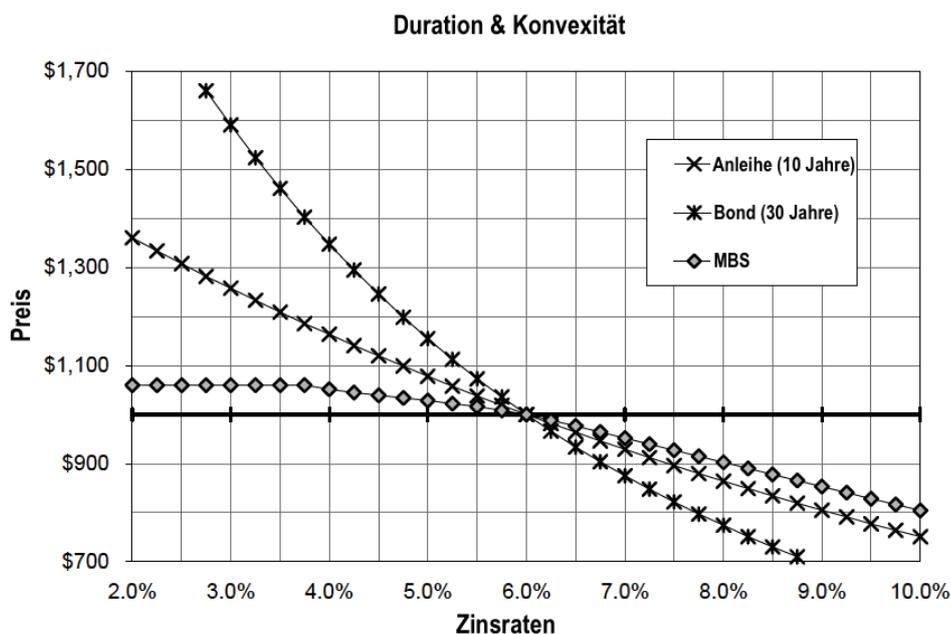


Abbildung 5.1: Die Eigenschaften Duration und Konvexität von Finanzprodukten, aus [3]

• Duration

Zunächst sieht man, dass der 30-jährige Bond am steilsten ist und somit am meisten Reaktion auf Zinsschwankungen zeigt. In der Fachsprache wurde diese Eigenschaft mit dem Begriff Duration gekennzeichnet. Mathematisch gesehen ist es das Negative

der ersten Ableitung der Preisfunktion in Abhängigkeit der Zinsen. Es drückt mehr oder minder die relative Änderung der Preisfunktion in Abhängigkeit des Marktzinssatzes aus. Obwohl diese Eigenschaft nichts mit dem Maß der Zeit zu tun hat, wird sie trotzdem in Jahren angegeben. Eine lange oder hohe Duration lässt dabei auf eine steile, sehr reaktionsfreudige Preisfunktion schließen. Wie in der Abbildung 5.1 ersichtlich, zeigt das Preisverhalten der MBS Preisfunktion ein sehr flaches Verhalten, was zu einer eher geringeren Duration führt. Daraus lässt sich vermuten, dass das Risiko von vorzeitigen Tilgungen zu dieser Erscheinung führt.

- **Konvexität**

Eine weitere Erkenntnis der Studien von Preisfunktionen geht auf das Krümmungsverhalten der Preisfunktion ein. Keine der Kurven ist schlichtweg gerade, sondern alle sind gekrümmt. Mathematisch gesehen ist dies die zweite Ableitung der Preisfunktion. Diese Konvexität der Kurven unterscheidet man in positive und negative Konvexität. Bei positiver Krümmung spricht man von der Eigenschaft, dass sich die Preise für Änderungen im niedrigeren Zinsbereich wesentlich stärker ändern als für gleiche Änderungen im höheren Zinsbereich. Sind umgekehrt die Preisänderungen im niedrigeren Zinsbereich träge und im höheren aktiver, dann spricht man von negativer Konvexität. Das involvierte Prepaymentrisiko in Preisfunktionen führt zwangsläufig zur letzteren Form dieser Eigenschaft. Aus Sicht eines Kreditnehmers wäre es günstig, dass sich bei schon geringfügig fallenden Zinsen eine große Preisänderung ergibt, sodass der Profit eines Prepayments so groß als möglich ist.

5.2 Bewertung von Hypotheken

Etwas Konkreter wird das Thema in [13, Hillard *et al.* 1998] behandelt. In diesem Zusammenhang wird eine Hypothek samt den üblichen Ansprüchen betrachtet, also nicht nur das Prepayment, sondern auch das Szenario eines Privatbankrotts. Einerseits wird somit die Möglichkeit einer vorzeitigen Rückzahlung über eine Call Option und andererseits das Vorkommen eines Privatbankrotts über eine Put Option beschrieben. Auch wenn die Hauptaufgabe dieser Arbeit in der Betrachtung von Prepayments liegt, soll auf das Default Szenario hier nicht total verzichtet werden. Da nach noch folgenden Annahmen die beiden Risiken ohnehin voneinander unabhängig in Modell implementiert werden, kann unter Umständen das Modell auch ohne Default konstruiert und bepreist werden.

Wie auch bei Optionen im Zusammenhang mit Aktien werden zur fairen Preisbestimmung dieselben Prinzipien angewandt. Der Preis der Optionen wird auch hier von der Preisentwicklung des zugrundeliegenden Underlying bestimmt. Hängen die Preise im derivativen Regelfall von einer Aktie oder einem Index ab, so kann man im Falle der beiden Optionen preistreibende, ökonomische Faktoren finden, deren Dynamik den zeitlichen Verlauf der Optionspreise diktiert, nämlich den Zinssatz und den Immobilienpreis. Unter Berücksichtigung aller möglichen Entwicklungen dieser Faktoren können die Preise der Optionen bestimmt werden. Obwohl eine Modellierung solcher Faktoren oft nicht einfach ist, kann unter gewissen Einschränkungen und Vereinfachungen ein Replik des tatsächlichen Verlaufes der Zinsen und des Immobilienpreises nachgebildet werden. Aus diesem Modell heraus lassen sich zur Maturität alle möglichen Zustände bestimmen und unter Annahme gewisser technischer Bedingungen, wie zum Beispiel Arbitragefreiheit oder Konstruktion einer Hedge, kann der faire Preis, also der Preis bei Vertragsabschluss, durch eine Rückwärtsrekursion bestimmt werden.

Wie schon öfters angesprochen kann ein Kreditnehmer die Hypothek auch vorzeitig beenden. Einerseits durch den Fall von vorzeitiger, vollständiger Tilgung der noch ausstehenden Nominalen, also dem Restbetrag, der noch nicht durch die zuvor vereinbarten Ratenzahlungen getilgt wurde. Andererseits ist der Privatkonkurs, wobei der Eigentumsbesitz der Immobilie vom Kreditnehmer auf den Kreditgeber übergeht. Wie bereits diskutiert, werden die Entwicklungen dieser Ereignisse von zugrundeliegenden ökonomischen Faktoren beeinflusst und gesteuert. Auf der einen Seite wird das Ausüben oder das Nicht-Ausüben der Prepayment Option sehr stark von der unsicheren zukünftigen Zinsentwicklung beeinflusst. Auf der anderen Seite kann man, wie in [13] beschrieben, die Wahrscheinlichkeit eines Privatbankrotts auf die unsichere zukünftige Wertentwicklung der Liegenschaft stützen. Wie einige Kapitel zuvor beschrieben, steuern genau genommen viele Faktoren diese Wahrscheinlichkeiten, doch im Zusammenhang dieser Bewertung soll, aus Gründen der Einfachheit, der Fokus auf die vermeintlich stärksten Faktoren gelegt werden.

5.3 Konstruktion der Optionen

Die zentralen Fragen in diesem Abschnitt sind einerseits, wie der Wert der Option zu einem beliebigen Zeitpunkt t bestimmt werden kann und andererseits, wann ist es optimal beziehungsweise unter welchen Umständen soll die Option genutzt werden.

Um die nachfolgenden Beziehungen zu verstehen, soll vorab eine erklärende Übersicht in Tabelle 5.1 gegeben werden.

Erklärung	Symbol
Zinsrate	r
Laufzeit bzw. Maturität der Hypothek	T
fortlaufende Zeit $0 \leq t \leq T$	t
Vermögenswert der Immobilie	H
Wert der Hypothek zum Zeitpunkt t bei gegebenen r und H	$V_{t,r,H}$
Wert der Call Option (Prepayment) zum Zeitpunkt t (r und H gegeben)	$C_{t,r,H}$
Wert der Put Option (Default) zum Zeitpunkt t (r und H gegeben)	$P_{t,r,H}$
Nichtgetilgte Hypothek zum Zeitpunkt t	UMB_t
Barwert der zukünftigen Tilgungen	$PV RP_{t,r}$

Tabelle 5.1: Bezeichnungen für die Optionsbepreisung von Hypotheken, nach [16, Kau *et al.* 1999]

Wie in [13, S.440 ff] beschrieben, wird der Wert der Hypothek $V_{t,r,H}$ aus dem Wert der zukünftigen Zahlungen $PV RP_{t,r}$ weniger den Werten der beiden Optionen $C_{t,r,H}$ und $P_{t,r,H}$ gebildet, also

$$V_{t,r,H} = PV RP_{t,r} - C_{t,r,H} - P_{t,r,H}. \quad (5.1)$$

Dem Kreditnehmer wird in diesem Zusammenhang unterstellt, dass er seine Position optimiert. Das bedeutet, er möchte $H - V_{t,r,H}$ mit Zuhilfenahme der ihm gegebenen Optionen maximieren. Der Wert der Hypothek soll somit so gering als möglich gehalten werden. Aus dieser Annahme heraus kann schon ein erster Kritikpunkt an diesem Vorgehen abgeleitet werden. Wie die Autoren [13] anmerken, entscheiden die wenigsten der Kreditnehmer optimal in deren Sinne.

Entscheidet nun der Schuldner die Prepayment Option auszuüben, verliert er automatisch die Option auf die Default Option. Somit würde gelten:

$$P_{t,r,H} = 0 \quad (5.2)$$

$$C_{t,r,H} = PV RP_{t,r} - UMB_t \quad (5.3)$$

Der Wert der Call Option setzt sich aus der Differenz der noch ausstehenden Zahlungen $PV RP_{t,r}$ und der noch nicht bezahlten Tilgungen UMB_t . Dies beschreibt genau die Höhe der unmittelbar folgenden Prepaymentzahlung. Umgekehrt gilt ähnliches. Wird die Option auf Default ausgeübt, so verliert die andere automatisch seinen Wert.

$$P_{t,r,H} = PV RP_{t,r} - H \quad (5.4)$$

$$C_{t,r,H} = 0 \quad (5.5)$$

Die Differenz $PV RP_{t,r} - H$ beschreibt exakt die Höhe des Zahlungsausfalls. Werden beide Optionen nicht ausgeübt, so behält der Inhaber beide Möglichkeiten zur Ausübung mit den Werten

$$P_{t,r,H} = P_{C_{t,r,H}} \quad (5.6)$$

$$C_{t,r,H} = C_{C_{t,r,H}}, \quad (5.7)$$

wobei $C_{C_{t,r,H}}$ und $P_{C_{t,r,H}}$ die gegenwärtigen Werte der beiden zukünftigen Optionswerte sind.

Wie nun in [13] beschrieben, möchte der Kreditnehmer seinen Nutzen maximieren, in dem er situationsgemäß von den Optionen Gebrauch macht. Somit kann der Wert der Hypothek zu jedem Zeitpunkt aus

$$V_{r,t,H} = \min(UMB_t, H_t, PV RP_{t,r} - C_{C_{t,r,H}} - P_{C_{t,r,H}}) \quad (5.8)$$

bestimmt werden. Die Hypothek nimmt den Wert des noch nicht amortisierten Restbetrags der Hypothek (UMB_t) an, falls die Hypothek durch Ausübung der Prepaymentoption zurückbezahlt wird. Wird andererseits vom Kreditschuldner Konkurs angemeldet und die Defaultoption ausgeübt, so nimmt die Hypothek den Wert der Immobilie H an. Tritt weder das eine noch das andere Szenario ein, so beläuft sich der Wert auf den Barwert der ausstehenden Hypothekenzahlungen ($PV RP_{t,r}$) weniger den beiden Optionswerten $C_{C_{t,r,H}}$ und $P_{C_{t,r,H}}$.

Berechnungsmethoden

Um nun aus den konstruierten Optionen den Wert, also die erwarteten diskontierten Zahlungen, zu ermitteln kann man sich Vor- oder Rückwärtsberechnungsmethoden bedienen. Eine der wichtigsten Vorwärtstechniken stellt die Monte Carlo Methode (MC) dar. Dabei werden über einen Zufallsgenerator verschiedenste Ausgänge für die Entwicklung der Immobilienpreise und der Zinssätze zufällig miteinander kombiniert. Durch eine ausreichend oft durchgeführte Wiederholung dieser Simulation orientiert sich der Mittelwert dieser Ausgänge am tatsächlichen Erwartungswert. In diesem Zusammenhang ergeben sich jedoch Probleme, da die Optionen den Wert der Hypothek direkt beeinflussen, umgekehrt jedoch auch das Optionsverhalten direkt von der Hypothek gesteuert wird. Dieses wechselseitige Beeinflussen führt dazu, dass die MC Methode zur Bewertung von Hypotheken nicht geeignet ist.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, stellen Techniken mit Rückwärtsrekursionen dar. Dabei wird die Berechnung vom Zeitpunkt der Maturität T begonnen. Somit kennt man die Werte der Hypothek beziehungsweise des Zinssatzes, um Entscheidungen zu einem vorangegangenen Zeitpunkt bezüglich Optionsausübung plausibel treffen zu können. Somit kann man Schritt für Schritt die Werte und Bewertungen für Hypothek und Optionen bis zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses berechnen. Dieser letzte Wert stellt dann den Preis der Hypothek samt seinen enthaltenen Optionen dar.

5.4 Modelle zur Bewertung

Wie auch in [24, Walder 2008] beschrieben, unterscheiden sich die im Laufe der Zeit entwickelten Modelle zur Bewertung hauptsächlich durch zwei Punkte. Einerseits durch die Verfahren, nach denen die Optionen bewertet werden und andererseits durch die Prozesse, mit denen der Immobilienpreis und der Zinssatz modelliert werden.

5.4.1 KKME Modell

Dieses Modell, benannt nach den Entwicklern Kau, Keenan, Muller, Epperson, wird als eines der bekanntesten im Zusammenhang mit der Bewertung von Hypotheken bezeichnet. Die beiden ökonomischen Faktoren werden dabei nach [13, S.433 ff] über folgende stochastische Prozesse beschrieben.

Der Immobilienpreis folgt einem lognormalen Prozess, der sich am Aktienpreisprozess aus dem Modell von Black and Scholes orientiert. Einzige Erweiterung dazu stellt ein Parameter s dar. Dieser soll die anfallenden Abnutzungserscheinungen in Form von Reparaturkosten beschreiben, die prozentuell am erwarteten Ertrag der Immobilie α anfallen. Zusammen mit der Varianz des Preises σ_H^2 und dem Wiener Prozess dz_H kann der Preis der Liegenschaft durch

$$\frac{dH}{H} = (\alpha - s)dt + \sigma_H dz_H \quad (5.9)$$

modelliert werden. In dieser Form resultiert eine geometrische Brown'sche Bewegung. Geht man von dieser Darstellung über zu einer risikoneutralen Darstellung, so erhält man für den Immobilienpreis folgende Darstellung:

$$\frac{d\hat{H}}{\hat{H}} = (r - s)dt + \sigma_H dz_H \quad (5.10)$$

Dies kommt vom Übergang aus $(\alpha - s)$ zu $\alpha - s - \lambda\sigma$, wobei λ das Marktrisiko für Immobilien enthält. Unter risikoneutraler Betrachtung muss $\alpha - \lambda\sigma$ dem risikolosen Marktzins r entsprechen.

Die Zinsrate r wird hier durch den Wurzel-Diffusionsprozess

$$dr = \gamma(\Theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (5.11)$$

modelliert. Dieser Prozess strebt in dieser Form gegen den Wert Θ , wobei die Anpassungsgeschwindigkeit vom Parameter γ diktiert wird. dz_r stellt wiederum einen Wiener Prozess dar und σ_r^2 die Varianz der Zinsrate. Für $\gamma \geq 0$ ist der Prozess selbst auch nie negativ, was insbesondere für Zinsraten sinnvoll ist.

Über die mehrdimensionale Formel von Ito (vgl. [17, Keller-Ressel 2012, S.55]) für einen n -dimensionalen Prozess X_t^i ($1 \leq i \leq n$) und f , eine zweimal stetig differenzierbare Funktion,

$$df(t, X_t) = \frac{df}{dt}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{df}{dx_i}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{d^2f}{dx_i dx_j}(t, X_t)d[X^i, X^j]_t \quad (5.12)$$

kann nun der Preis der Hypothek $V_{t,r,H}$ als zeitabhängiger Diffusionsprozess, wie in [13, S. 435] ersichtlich, durch die beiden stochastischen Prozesse für den Immobilienpreis H und die Zinsrate r zum Ausdruck gebracht werden.

$$\frac{dV}{dt} + (r - s)H \frac{dV}{dH} + \gamma(\Theta - r) \frac{dV}{dr} + \frac{1}{2} H^2 \sigma_H^2 \frac{d^2V}{dH^2} \quad (5.13)$$

$$+ \frac{1}{2} r \sigma_r^2 \frac{d^2V}{dr^2} + \rho H \sqrt{r} \sigma_H \sigma_r \frac{d^2V}{dH dr} = Vr \quad (5.14)$$

Die beiden Wiener Prozesse sind durch $dz_r dz_H = \rho dt$ verknüpft beziehungsweise korreliert.

Eine Lösungsvariante für diese partielle Differentialgleichung stellen numerische Verfahren dar. Dabei wird beispielsweise über die explizite Finite Differenzen Methode das Problem durch sehr hohen rechnerischen Aufwand gelöst.

5.4.2 Bivariates Binomialbaum Modell

Dieses Modell stellt eine Vereinfachung des zuvor definierten Modells dar. Es wurde von [13, S.436 ff] unter der Motivation von

- Verwendung von zwei Zustandsvariablen H und r ,
- die Prozesse sollen nicht auf lognormale Prozesse beschränkt sein,
- mögliche Korrelation zwischen den beiden Zustandsvariablen,
- Verwendung der Rückwärtsberechnung,
- risikoneutrale Bewertung und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten,

eingeführt. Das Modell wurde auch konzipiert, da das KKME Modell sehr komplex und langwierig zu berechnen ist, oft aber eine schnelle Lösung gefunden werden muss.

Nach [13] werden die zuvor definierten Prozesse folgendermaßen modifiziert, um das gewünschte Bivariate Binomialbaum Modell zu erhalten. Die beiden Prozesse werden zu

$$\frac{dH}{H} = mdt + \sigma_H dz_H \quad (5.15)$$

$$dr = a dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (5.16)$$

umgeschrieben, wobei $m = (\alpha - s)$ und $a = \gamma(\Theta - r)$.

Als Nächstes wird der Immobilienpreis durch $S = \ln(H)$ zu einem Gauss'schen Diffusionsprozess transformiert. Dabei löst man zunächst die stochastische Differentialgleichung und erhält

$$H = \exp\left(\left(m - \frac{\sigma_H^2}{2}\right)t + \sigma_H z_H\right), \quad (5.17)$$

worauf noch der Logarithmus angewandt wird und man erhält in Differentialschreibweise

$$dS = \left(m - \frac{\sigma_H^2}{2}\right)dt + \sigma_H dz_H \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Die Zinsrate wird entsprechend [16] durch die sogenannte erste NR-HST Transformation⁶ $\frac{dR}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r}}$ zu einem Prozess R transformiert. Die notwendige Transformation gewährleistet eine geschlossene Lösung des Wurzelprozesses mit konstanter Volatilität.

$$dR = \left(ar^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sigma_r^2 r^{-\frac{1}{2}}}{4}\right)dt + \sigma_r dz_r \quad (5.20)$$

⁶nach den Forschern Nelson, Ramaswamy-Hillard, Schwartz, Tucker

Jetzt werden diese beiden Prozesse, mit nun konstanter Volatilität, gemeinsam nach der zweiten HST - Transformation zu

$$dX_1 = \sigma_r dS + \sigma_H dR \quad (5.21)$$

$$dX_2 = \sigma_r dS - \sigma_H dR \quad (5.22)$$

transformiert, um Unabhängigkeit zwischen X_1 und X_2 zu erhalten. Dies ist nach

$$Cov(dX_1, dX_2) = \sigma_r^2 \sigma_H^2 - \sigma_H^2 \sigma_r^2 + \sigma_r^2 \sigma_H^2 - \sigma_H^2 \sigma_r^2 = 0 \quad (5.23)$$

tatsächlich gewährleistet.

Eine große Vereinfachung kommt nun zustande, in dem die beiden Prozesse nur mehr auf oder ab springen können und zwar - um Konvergenz zu garantieren - jeweils um $e^{\sqrt{\Delta t}}$ in jedem Zeitintervall Δt . Die Sprungwahrscheinlichkeiten werden separat für jeden der beide Prozesse X_i aus der Beziehung

$$p_i^u (2k_i + 1) \sigma_i \sqrt{\Delta t} + (1 - p_i^u) (2k_i - 1) \sigma_i \sqrt{\Delta t} = \mu_i \Delta t \quad (5.24)$$

bestimmt. Daraus folgt

$$p_i^d = 1 - p_i^u = \frac{(2k_i + 1) \sigma_i \sqrt{\Delta t} - \mu_i \Delta t}{2 \sigma_i \sqrt{\Delta t}}, \quad (5.25)$$

wobei u eine Sprung nach oben, d einen Sprung nach unten und i den jeweiligen Prozess X_i ($i = 1, 2$) symbolisiert. Die Parameter k_i , μ_i und σ_i beschreiben den Sprungmultiplikator, den Driftterm und die Volatilität für X_i . Des Weiteren muss k_i dermaßen gewählt werden, dass der Erwartungswert zwischen den beiden Knoten liegt.

$$(2k_i - 1)\sigma_i\sqrt{\Delta t} \leq \mu_i\Delta t \leq (2k_i + 1)\sigma_i\sqrt{\Delta t} \quad (5.26)$$

Allgemein sei noch angemerkt, dass μ_i nicht konstant über die Zeit sein muss, weshalb auch die Sprungwahrscheinlichkeiten nicht konstant sein müssen.

Durch die nun vorgenommene Modellierung können die Sprünge der beiden Zustandsvariablen in einem bivariaten Binomialbaum (Abb. 5.2) dargestellt werden. Daraus ergeben sich für jeden Zustand in einem Zeitintervall vier weitere nachfolgende Möglichkeiten.

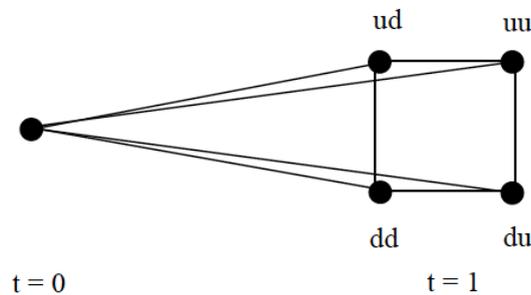


Abbildung 5.2: Bivariater Binomialbaum, aus [24]

Die Rückwärtsberechnung erfolgt nach folgendem Schema: Ausgehend von der Maturität T wird sukzessive der Wert der Hypothek sowie der Optionswerte zu vorangegangenen Zeitpunkten bis hin zum Vertragsabschluss bestimmt. Wie die Rückwärtsrekursion in diesem Fall konkret implementiert werden kann, wird in weiterer Folge im anschließenden praktischen Teil (Kapitel 6) gezeigt.

5.4.3 Allgemeine Bemerkungen

Wie in [13, S.442] beschrieben, zeigen empirische Tests, dass das Binomialmodell Ergebnisse liefert, die konsistent zu den Resultaten aus dem komplexeren KKME Modell sind und nur wenig voneinander abweichen. Aus diesem Grund wird das Binomialmodell gerne dazu verwendet, schnelle und vernünftige Werte zu erhalten, um rasch Schlüsse zur Bewertung zu erhalten.

Wie schon eingangs erwähnt, können die einzelnen Optionen auch isoliert voneinander betrachtet, oder auch Modellerweiterungen beispielsweise hinsichtlich Versicherungen, Zahlungsaufschübe getroffen werden können. In diesem Kapitel wurden nun Möglichkeiten

dargestellt, wie man über derivative Optionsbewertung den im Vertrag enthaltenen Optionen einen Wert zuweisen kann, um daraus beispielsweise einen fairen Preis für die Möglichkeit einer vorzeitigen Rückzahlung zu bestimmen.

6

Praktische Implementierung

6.1 Allgemeines

Anhand der theoretischen Beschreibungen in den vorangegangenen Kapiteln sollen nun diverse praktische Datensätze analysiert und dementsprechend modelliert werden.

Aufgrund von Problemen bei der Beschaffung von Echtdateien, die sich im Nachhinein als lückenhaft herausstellten, wurden zusätzlich Daten simuliert, die entsprechend den vorliegenden theoretischen Erkenntnissen, zusammen mit intuitiven Annahmen, Kreditdaten widerspiegeln. Mithilfe dieses fiktiven Datensatzes, dessen Generierung in weiterer Folge noch näher erläutert wird, sollen erste Aufschlüsse über die effektive Herangehensweise zur Analyse und Beurteilung von Prepaymentraten gewonnen werden. Gleichzeitig kann die Simulation, so wie im vorliegenden Fall geschehen, dazu dienen, Modelle zu testen und auf Plausibilität zu überprüfen, falls initial keine realen Daten vorliegen.

In weiterer Folge soll die Analyse der realen Kredite mithilfe der zuvor aus der Analyse der simulierten Daten gewonnenen Erkenntnisse durchgeführt werden. Anschließend wäre entsprechend den Ergebnissen und Informationen, die aus den realen Daten gezogen werden konnten, eine Adaptierung der Simulation möglich, um zukünftig realitätsnähere

Simulationsdaten für etwaige Anwendungsgebiete (zum Beispiel: Datenvervielfältigung) zur Verfügung zu stellen. Ein weiterer Vorteil dieser Daten liegt darin, dass viele notwendige Informationen und Attribute eines realen Datensatzes nur teilweise oder oft gar nicht vorliegen und so über Simulationen dementsprechend ergänzt und vervollständigt werden können. Manche der vorgestellten Modelle und Praktiken können genau aus diesem Grund nicht umgesetzt werden. So wäre für die vollständige Bewertung von Krediten beziehungsweise deren enthaltenes Prepaymentrisiko (Kapitel 5) eine Information über die Immobilienpreise notwendig, die in den Daten nicht enthalten ist und aufgrund von fehlendem Informationsstand auch nicht simuliert wurde. Das Hauptaugenmerk liegt in jedem Fall an einer möglichst guten deterministischen und stochastischen Modellierung der Prepaymentraten und -verteilungen (siehe auch Kapitel 4).

6.2 Datensimulation

Um auf die Datenanalyse der realen Daten besser vorbereitet zu sein und eventuell weitere Erkenntnisse über die in Kapitel 4 angeführten Modelle zu erhalten, wurden zusätzlich zu den realen auch simulierte Kreditdaten verwendet. Die Simulation dieser Kreditdaten erfolgte zu einem Zeitpunkt, an dem keinerlei reale Daten vorgelegen sind und basiert deshalb auf diversen Annahmen. Zum Einen resultieren diese aus anderen Forschungen (unter anderem [14]) und zum Anderen aus persönlichen Einschätzungen, wie sich gewisse Rückzahlungsinitiativen unter bestimmten Umständen ergeben könnten.

6.2.1 Simulation

Im Folgenden wird die Simulation und deren Aufbau etwas näher erläutert werden. Aus einer Menge an Basisdaten wird sukzessive ein Grundgerüst an notwendigen Attributen von Kreditdaten aufgebaut werden, das den Mindestansprüchen zur sinnvollen Verwendung der Modelle genügt. Darauf aufbauend wird aus den theoretisch bekannten Verhaltensweisen, sowie den persönlichen Annahmen für jeden Kredit ein eventueller Rückzahlungszeitpunkt simuliert. Diese simulierten Zeitpunkte stellen im Großen und Ganzen den Kern der Simulation dar.

Anforderungen

Ein solcher Datensatz an Krediten soll wie ein vergleichbar realer Datensatz eine Mindestmenge an Informationen enthalten. In vielerlei Hinsicht könnte man einen solchen Datensatz, im Rahmen einer Simulation, mit zusätzlichen Einflussfaktoren beziehungsweise Attributen ausstatten, um unter anderem Faktoranalysen zu betreiben. Dies würde jedoch den Datensatz aus Mangel an Kenntnissen über diese einzelne Einflussfaktoren (siehe 4.3) ad absurdum führen. Diese essentiellen, in der Simulation schlussendlich verwendeten, Größen sollen im Folgenden in Gruppen angeführt und beschrieben werden:

- Kredithöhe bzw. -nominale
- Kreditlaufzeit

Ein jeder Kredit wird grundsätzlich durch einen bestimmten Bedarf an Kapital definiert, der sogenannten Nominale, oft auch als Kreditrahmen bezeichnet. Daraus ergibt sich aus bestimmten subjektiven Gegebenheiten (z.B. Rückzahlungspotential) des Kreditnehmers die Kreditlaufzeit. Im Regelfall resultieren gewisse Analogien, sodass hohe Kreditsummen über einen längeren Zeitraum und Kleinkredite zumeist in kurzen Zeitperioden getilgt werden.

- Kreditqualität
- Beginn der Kreditlaufzeit
- Zinssatz

Jeder Kredit wird gemäß gewissen Vorschriften hinsichtlich ihrer Rückzahlungsfähigkeit qualitativ eingestuft. Um zumindest das eine oder andere Attribut in die Simulation aufzunehmen, soll eine Kreditqualitätskennzahl zu jedem Kredit simuliert werden. Die in der Simulation verwendete Loan to Value-Kennzahl macht primär nur für Hypothekarkredite Sinn, da nur für solche ein Gegenwert (Value) existiert. Deshalb wird in der Simulation angenommen, dass auch Kreditnominale im kleineren Wertebereich für Hypothekarkredite verwendet werden.

Da zur Ermittlung des vertraglich festgelegten Zinssatzes - im Speziellen werden hier ausschließlich Fixzinskredite betrachtet - ohnehin auf einen historisch aufgezeichneten Datensatz zurückgegriffen wird, wird ein Kreditbeginn, mitsamt dem damit verbundenen Zinssatz, aus der Bandbreite dieses Datensatzes zufällig herangezogen. Es wurde somit verzichtet, zusätzlich noch eine Zinskurve zu simulieren und stattdessen auf historische

Aufzeichnungen von [26, Freddie Mac 2014] zurückgegriffen. Der angesprochene Datensatz enthält die monatlichen Fixzinsraten für Hypothekarkredite in den U.S.A - Fixed Mortgage Rate - für Laufzeiten von 15 (FMR15) und 30 Jahren (FMR30), in den Jahren von 1991 beziehungsweise 1972 bis Ende 2013. Diese Zinsraten und deren Zeitreihen (Abbildung 6.1) dienen als Referenz für alle simulierten Kredite und in weiterer Folge deren Rückzahlungsanreize bezüglich Zinsänderungen.

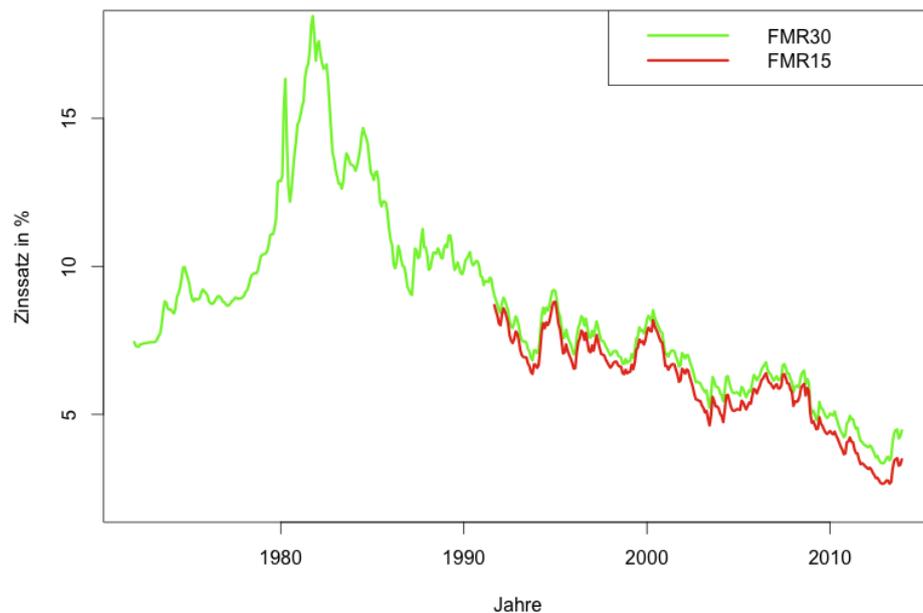


Abbildung 6.1: Entwicklung der Fixed Mortgage Rates zwischen 1.1.1972 und 31.12.2013

Aus diesen simulierten Basisdaten, die gleichermaßen Einflussfaktoren darstellen, sollen für jeden Kreditdatensatz Rückzahlungsanreize gefolgert werden.

- Alter des Kredites

Ein zusätzlicher Einflussfaktor, der sich nicht unmittelbar aus einer Krediteigenschaft ableiten lässt, ist das Alter des Kredites. Bisherige Analysen, wie in [20], haben gezeigt, dass Rückzahlungen bezüglich des Alters eines Kredites keineswegs gleichmäßig erfolgen. Wie unter Anderem auch schon in Abschnitt 4.4.1 angeführt, zeigen üblicherweise Kreditportfolios zu Beginn der Laufzeit kaum nennenswerte Rückzahlungsraten, während diese im Laufe der ersten drei bis sechs Jahre stark ansteigen, danach wieder sinken und über die restliche Laufzeit, ähnlich wie zu Beginn, geringer sind. Dieser Sachverhalt kann mit verschiedensten Funktionen beschrieben werden. Im Rahmen der Simulation soll dieser

zeitlich veränderbare Altersanreiz im Grunde über die Gleichung 4.19 zum Ausdruck gebracht werden.

Wie man erkennt, sind einige Rückzahlungsanreize über die Zeit gleichbleibend, da sie sich direkt aus bestimmten Krediteigenschaften ableiten lassen, die sich ja normalerweise nicht mehr verändern können. Andere hingegen sind über die Laufzeit nicht gleichbleibend, da sie von extern fluktuierenden Größen abhängig sind, wie dem zeitlichen Wandel der Zinsraten oder aber variabel sind, wie das Phänomen von altersabhängigen Anreizen. Aus all diesen aufgezählten Punkten soll für jeden Kredit ein aus genannten Gründen über die Laufzeit höchstwahrscheinlich schwankendes Anreizprofil erstellt und daraus ein eventueller Rückzahlungszeitpunkt simuliert werden. Aus praktikablen Gründen wird angenommen, dass der Kredit vollständig zurückbezahlt und nicht durch Teilzahlungen geschmälert wird.

Simulationsaufbau

Zu Beginn werden Werte für die Kreditlaufzeit und -nominale generiert. Diese sollen sinn gemäß eine deutlich positive Korrelation aufweisen, weshalb für die beiden normalverteilten Größen eine entsprechende Korrelationsmatrix gewählt wurde. Die zweidimensionalen standardnormalverteilten Zufallsvariablen werden separat mit einem Mittelwert und einer Varianz modifiziert. Für die Laufzeit wurde ein Mittelwert von $\mu_{Mat} = 25$ und eine Standardabweichung von $\sigma_{Mat} = 10$ gewählt. Analog wurde die standardnormalverteilte Zufallsvariable der Nominale mit einem Erwartungswert $\mu_{Nom} = 200.000$ und einer Standardabweichung $\sigma_{Nom} = 100.000$ modifiziert. Um möglichst sinnvolle Werte zu erhalten, wurde auf die simulierten Laufzeiten ein Modulo-Operator angewandt der Laufzeiten mit Werten zwischen 1 und 40 gewährleistet. Abschließend wurden beide Größen gerundet. Dazu wird zu jedem Kredit ein unabhängiger, im Wertebereich $[0, 1]$ gleichverteilter Loan to Value-Wert simuliert.

```
1 > R <- matrix(c(1, 0.85, 0.85, 1), nrow=2, ncol=2)
2 > kred <- (mvrnorm(n=10000, c(0, 0), R))
3 > Mat <- modulo(round(abs(kred[, 1] * 10 + 25), digits=0), 41)
4 > Nom <- round(abs(kred[, 2] * 100000 + 200000), digits=-4)
5 > ltv <- round(ltv(10000, 0.5, 0.1, 0.5, 1), digits=2)
```

Listing 6.1: Simulation von Kreditdaten in R

Aus der Laufzeit `Mat` wird anschließend ein Beginn für die Kreditlaufzeit (Jahr und Monat) simuliert. Der Grund liegt darin, dass nur abgeschlossene Kredite im vorliegenden

Zeitbereich der Zinsdaten (FMR) zwischen 1972 und 2013 betrachtet werden sollen und so keine Kreditdaten simuliert werden sollen, deren Endfälligkeit nach 2013 liegt. In Verbindung mit dem Datensatz zu den FMR, wird daraus ein Fixzinssatz ermittelt. Detailliertere Erläuterungen zu allen Funktionen können in Kapitel A nachgeschlagen werden.

```
1 > begin <- begin(Mat)
2 > fr <- fix.rate(b.y, b.m, Mat, X30y)
```

Listing 6.2: Simulation eines Kreditbeginns und einer Fixzinsrate

Den bisher simulierten Werten zur Laufzeit, der Nominale und dem LTV werden nun Rückzahlungsanreize zugeordnet, die ohne Wissen, ob eine solche unterschiedliche Zuordnung berechtigt ist, willkürlich getroffen wurden. So werden Krediten mit unterschiedlichen Laufzeiten leicht unterschiedliche Rückzahlungsanreize unterstellt.

```
1 > mat.int <- function(mat){
2 + if(mat < 10){mat.int <- 0.8}
3 + if(mat < 20){mat.int <- 0.7}
4 + if(mat < 30){mat.int <- 0.65}
5 + else{mat.int <- 0.7}
6 + return(mat.int)
7 + }
```

Listing 6.3: Anpassung der Rückzahlungsintensitäten, die aus den simulierten Laufzeiten resultieren: Den Laufzeiten aus bestimmten Intervallen werden bestimmte Rückzahlungsintensitäten zugeordnet.

Analog werden Krediten mit gewissen Nominalen und LTV unterschiedliche Rückzahlungspotentiale zugeordnet.

```
1 > alter <- function(max, Mat){
2 + p<-4
3 + g<-3^(1/4)*12/max
4 + t <- seq(0, Mat, 1/12)
5 + a.t <- abs(g*p*(g*t)^(p-1)/(1+(g*t)^p) + rnorm(length(t), 0, abs(jitter(0))))
6 + return(a.t)
7 + }
```

Listing 6.4: Simulation der Rückzahlungsintensität, die aus dem Alter des simulierten Kredites nach Gleichung 4.19 abgeleitet wird

Wie in Abbildung 6.2 ersichtlich, fließen zu den genannten Einflüssen noch die zeitlich veränderlichen Anreizstrukturen des Kreditalters und der Zinsänderungen ein. Der Alterseinfluss unterliegt dabei der bereits zuvor erwähnten Funktion aus Gleichung 4.19.

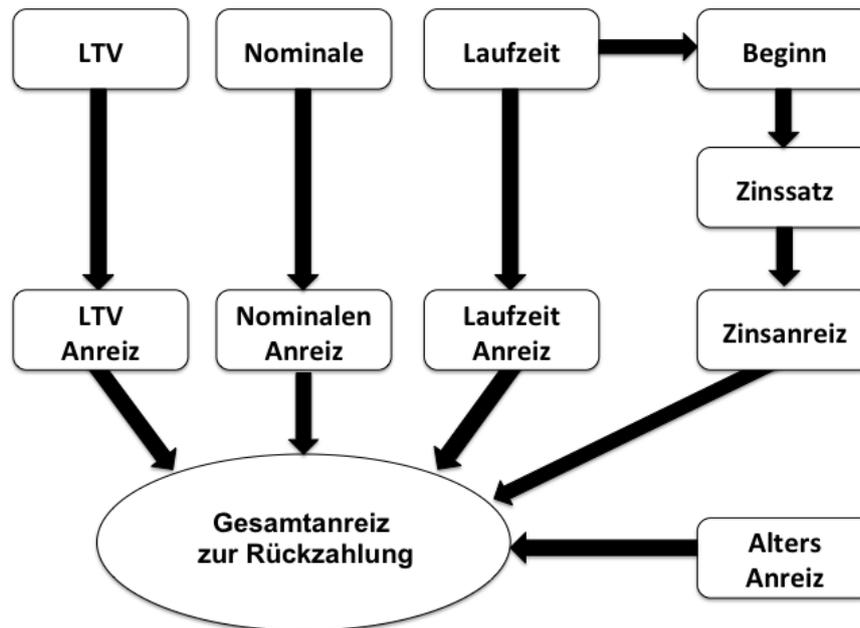


Abbildung 6.2: Prinzip des Simulationsaufbaus

Die Funktion in Listing 6.4 besitzt grundsätzlich zwei Parameter, durch welche die Funktion kalibriert werden kann. Einerseits kann das Alter der maximalen Intensität und die Grundintensität `max` gesteuert werden. Für die Simulation wurde immer die maximale Grundintensität ($p = 4$) verwendet. Um ein wenig der Vorhersehbarkeit der simulierten Daten entgegenzuwirken, wurde die Funktion zusätzlich mit einem normalverteilten Störterm kombiniert. Andererseits wird über `Mat` die Laufzeit beziehungsweise die Anzahl an simulierten Punkten vorgegeben.

Als letzter Einfluss wurde für jeden simulierten Kredit anhand der Zinsdaten (`zins` - siehe Abb. 6.1) ein Anreizprofil über die Laufzeit ermittelt, das sich aus der Differenz zwischen dem Marktzins und dem zuvor festgelegten Fixzins (`fr`) ergibt.

```

1 + for(i in 2:(mat*12)){
2 +   zins.int[i] <- max(0.001, fr - zins[((b.y-1972)*12+b.m+i)])
3 + }
  
```

Listing 6.5: Simulation der Zinsintensität, die sich aus der Differenz zwischen dem vertraglichen Zinssatz `fr` und dem am Markt beobachteten Zins `zins` ergibt

Sinngemäß wird die Differenz zwischen vertraglichem Fixzins und dem monatlich beobachteten Marktzins betrachtet. Fällt der Zinssatz am Markt unter jenen festgelegten, mit dem

Kredit gekoppelten Fixzins, ergibt sich ein positiver Anreiz den Kredit zurückzubezahlen und sich somit, zu besseren Konditionen, einen neuen Kredit aufzunehmen.

Über das Produkt all dieser einzelnen simulierten Motivationen den Kredit vorzeitig zu tilgen, wird ein Gesamtanreiz berechnet. Das Produkt stellt nun für jedes Monat der Kreditlaufzeit den Anreiz des Kreditnehmers dar, seinen Kredit vorzeitig zu tilgen. Diese Zeitreihe schwankt aufgrund der zeitlich veränderlichen Einflüsse. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die entsprechenden Zahlen, welche die Anreize zum Ausdruck bringen sollen, dermaßen gewählt wurden, sodass sich Zahlen im Wertebereich zwischen $[0, 1]$ ergeben. Die Abbildung 6.3 zeigt ein solches simuliertes Anreizprofil, aus dem in weiterer Folge ein Prepaymentzeitpunkt simuliert wird. Der Plot zeigt die Rückzahlungsinitiative eines Kreditnehmers, mit den folgenden Informationen:

- Beginn: Oktober 1990
- Laufzeit: 17 Jahre
- Nominale: 180.000 EUR
- LTV: 0,57
- Fixzinssatz: 10,4 %

Mithilfe dieser Werte wurden Bernoulli-Zufallsvariablen generiert. Für jeden Monat wurde, resultierend aus dem entsprechenden Gesamtanreiz, eine dichotome Zufallsvariable erzeugt. Sobald aus der Zeitreihe der Anreize eines einzelnen Kredites eine 1 simuliert wird, gilt der Kredit als zurückgezahlt. Der Zeitpunkt, sprich das Jahr und der Monat der Rückzahlung, kennzeichnen das Prepayment des jeweiligen Kredites. Der Kredit aus Abbildung 6.3 wurde, entsprechend der Simulation, nach einer Laufzeit von 82 Monaten, im Juli 1997 zurückbezahlt (siehe vertikale Markierung).

Natürlich könnte man durch zahlreiche plausible Erweiterungen die Simulation noch realitätsnäher gestalten. Beispielsweise wären gewisse Zusätze, wie Einflüsse des LTV auf den letztendlichen Fixzinssatz, oder die Berechnung des schlussendlich zu bezahlenden Tilgungseinmalbetrags möglich. Wie in der Einleitung dieses Kapitels jedoch schon erläutert, soll die Simulation mit einem Mindestmaß an Anforderungen auskommen, um einen möglichst realitätsnahen, aber auch möglichst einfachen Datensatz für die testweise Kalibrierung der Modelle zu erhalten.

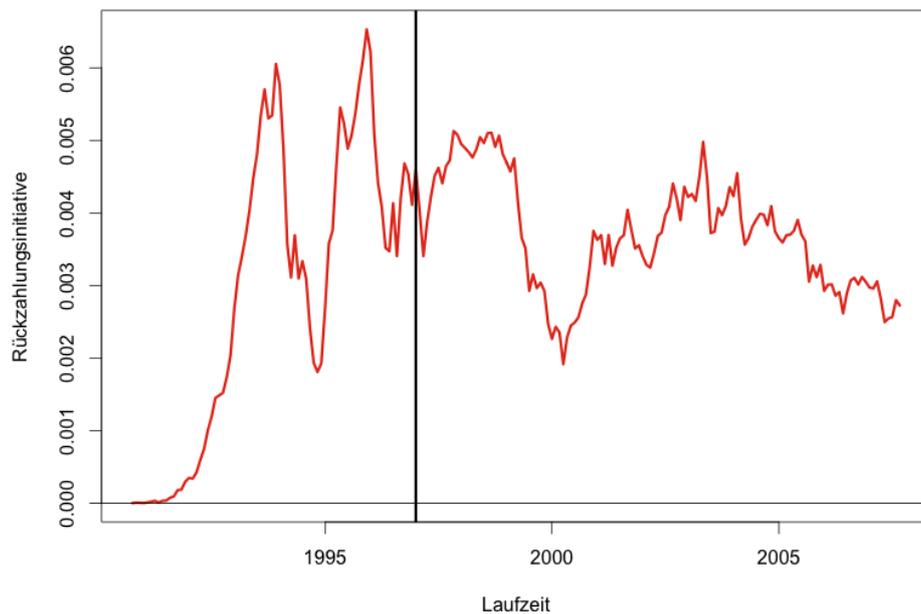


Abbildung 6.3: Simulierter historischer Rückzahlungsanreiz eines fiktiven Kreditnehmers: Die vertikale Schwelle zeigt dabei den simulierten Rückzahlungszeitpunkt an.

6.2.2 Datenanalyse

Der aus der Simulation gewonnene Datensatz, wie er als Auszug in Abbildung 6.4 dargestellt ist, soll im Folgenden näher untersucht werden. Dabei sollen im Wesentlichen die grundlegendsten Analysen durchgeführt werden und anschließend die in Kapitel 4 angeführten Modelle kalibriert werden. Aus diesen Erkenntnissen soll vor allem die Funktionalität der Modelle beurteilt werden. Im Anschluss wird sich die Analyse, sowie die Kalibrierung der Modelle, anhand der realen Daten leichter gestalten.

Aus den folgenden Erkenntnissen einer explorativen Datenanalyse werden erste Schlüsse zur Signifikanz der potentiellen Einflussfaktoren gezogen. Die statistische Untersuchung der simulierten Daten soll Hinweise bringen, aus welchen Einflüssen sich ein Prepaymentverhalten ableiten lässt und welche Informationen vermutlich in das Prognosemodell einfließen. Zunächst wird aus den vorhandenen Daten das Alter (in Monaten) eines jeden Kredites berechnet, an dem eine vorzeitige (vollständige) Tilgung vorgenommen wurde. Gleichzeitig kann ermittelt werden, wie viele der Kredite überhaupt vorzeitig zurückbezahlt wurden. Demnach wurden 34,99% der simulierten Kredite vorzeitig ge-

No	BegYe	BegMo	fr	Mat	Nom	LTV	PrepYe	PrepMo
1	1980	2	12,6	16	130000	1	kein	Prep
2	1978	5	11	23	190000	0,63	kein	Prep
3	1975	9	11,9	38	270000	0,67	kein	Prep
4	1989	4	10,8	9	160000	0,67	kein	Prep
5	1983	2	13,4	29	200000	0,83	1985	9
6	1974	9	10,4	25	150000	0,88	1995	11
7	1973	9	9	32	240000	0,68	kein	Prep
8	1988	2	11,2	22	220000	0,51	kein	Prep
9	1972	5	8,6	38	320000	0,5	kein	Prep
10	1976	5	9,2	25	190000	0,75	kein	Prep
11	1976	5	9,4	29	250000	0,64	2000	10
12	1976	8	8,8	26	150000	0,84	kein	Prep
13	1991	8	9,4	20	120000	0,74	kein	Prep
14	1980	9	12,9	24	230000	0,72	2001	10
15	2000	9	6,9	12	90000	0,98	kein	Prep

Abbildung 6.4: Datenauszug der simulierten Kreditdaten: Darauf ersichtlich sind der Kreditbeginn in Jahr und Monat (**BegYe** und **BegMo**), der vertragliche Fixzins **fr**, Laufzeit (**Mat**), Nominale (**Nom**), die Loan to Value-Kennzahl (**LTV**) und der eventuelle Rückzahlungszeitpunkt in Jahr und Monat (**PrepYe** und **PrepMo**).

tilgt. Um nun Aufschlüsse über diese getilgten Kredite und deren eventuelle Ursachen und Hintergründe zu erhalten, sollen die Merkmale der Daten zunächst anhand grafischer Analysen in R untersucht werden.

Für die Merkmale Laufzeit und Nominale sind, wie man in Abbildung 6.5 und 6.6 sieht, deutliche Verteilungsgipfel erkennbar. Insgesamt zeigt sich, dass es übermäßig viele Kredite mit Laufzeiten zwischen 20 und 30 Jahren gibt und solche auch eine verhältnismäßig höhere Rückzahlungsneigung aufweisen. Ebenso scheint es unter den simulierten Daten anteilsmäßig weitaus mehr Kredite mit Kreditsummen zwischen 100.000 und 300.000 zu geben. Die relative Häufigkeit der Rückzahlungen verteilt sich dabei gleichermaßen, wie man in 6.6 erkennen kann.

```

1 > shapiro.test(Nom[3000:7000])
2     Shapiro-Wilk normality test
3 data:  Nom[3000:7000]
4 W = 0.9923, p-value = 6.487e-14
5
6 > ks.test(Nom[2000:5000], "pnorm")
7     One-sample Kolmogorov-Smirnov test
8 data:  Nom[2000:5000]
9 D = 0.9973, p-value < 2.2e-16
10 alternative hypothesis: two-sided

```

Listing 6.6: Hypothesentest der Nominalen für Test auf Normalverteilung: Shapiro-Wilk Test und Kolmogorov-Smirnov Test

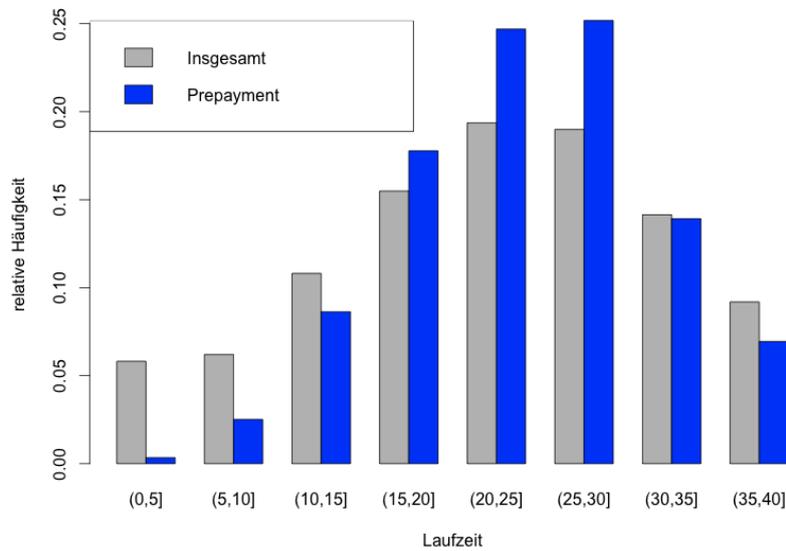


Abbildung 6.5: Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditlaufzeiten in Monaten: Die Laufzeiten wurden dazu im Histogramm in Intervalle (a,b] zu je fünf Jahren zusammengefasst. Wie auch in den nachfolgenden Grafiken wurde eine Unterscheidung der relativen Häufigkeiten zwischen allen (Insgesamt) und den zurückgezahlten Krediten (Prepayment) unternommen.

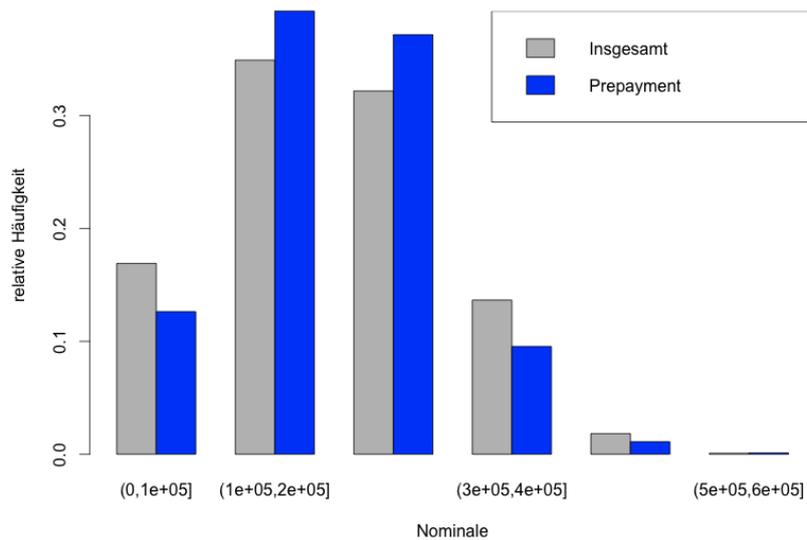


Abbildung 6.6: Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditnominalen: Dazu wurden die Nominalen in Intervalle (a,b] mit Länge von jeweils 100.000 zusammengefasst. Mehr als 60% der Daten entfallen dabei zusammen auf die beiden Intervalle mit Beträgen zwischen (100.000,200.000] und (200.000,300.000].

Die beiden Hypothesentests (Shapiro-Wilk Test und Kolmogorov-Smirnov Test) in Listing 6.6 verwerfen die Normalverteilungsannahme für die Nominalen. Dies erfolgt nicht vollkommen überraschend, da an den Rändern die Daten bei der Simulation künstlich abgeschnitten wurden. Trotzdem ist in beiden Fällen eine Normalverteilungsannahme gerechtfertigt, da die Daten, gemäß den QQ-Plots (Abb. 6.7), abgesehen von den Rändern, deutlich der Normalverteilung folgen.

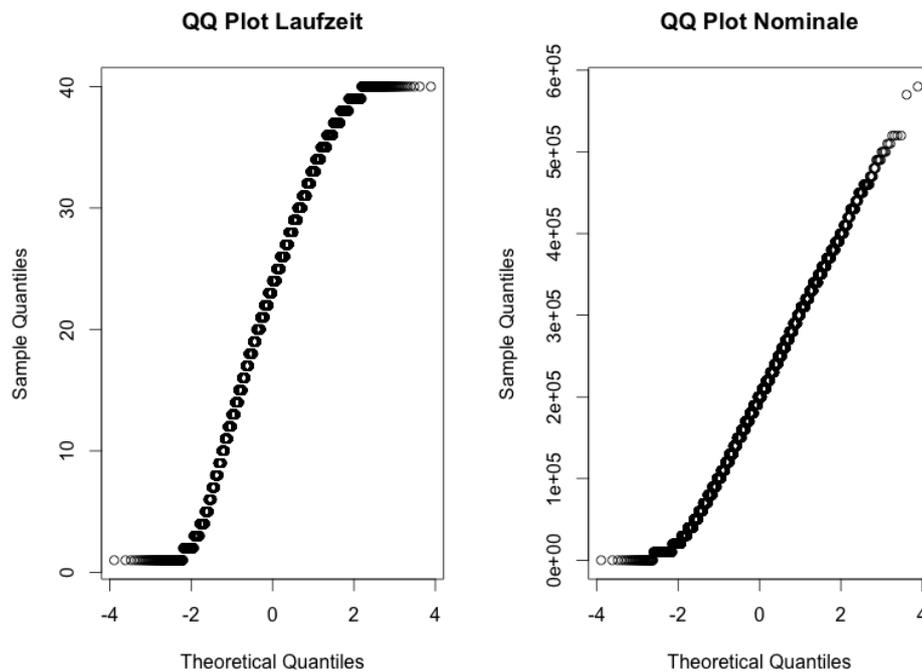


Abbildung 6.7: QQ-Plot der Nominalen und Laufzeiten

Die Loan to Value-Kennzahlen (siehe Abbildung 6.8) verteilen sich, sowohl hinsichtlich allen simulierten, als auch bezüglich den davon vorzeitig getilgten Krediten, sehr gleichmäßig über das Spektrum zwischen 0,5 und 1.

Die Grafik aus Abbildung 6.9 zeigt sehr deutlich, dass beinahe die Hälfte der Kredite mit einem Zinssatz zwischen 8% und 10% abgeschlossen wurden. Während die Kredite insgesamt nur leicht rechtslastig verteilt sind, zeigt das Diagramm, dass die, durch ein Prepayment gezeichneten Kredite, stark rechtslastig verteilt sind. Dies bedeutet, dass Kredite mit hoher initialen Zinsrate deutlich eher zurückgezahlt werden, als solche mit kleiner vertraglichen Zinsrate.

Die Abbildung 6.10 zeigt, dass gemäß der Simulation wesentlich mehr Kredite in früheren Jahren abgeschlossen wurden als in jüngeren Jahren. Dies entspringt dem Vorhaben, aus-

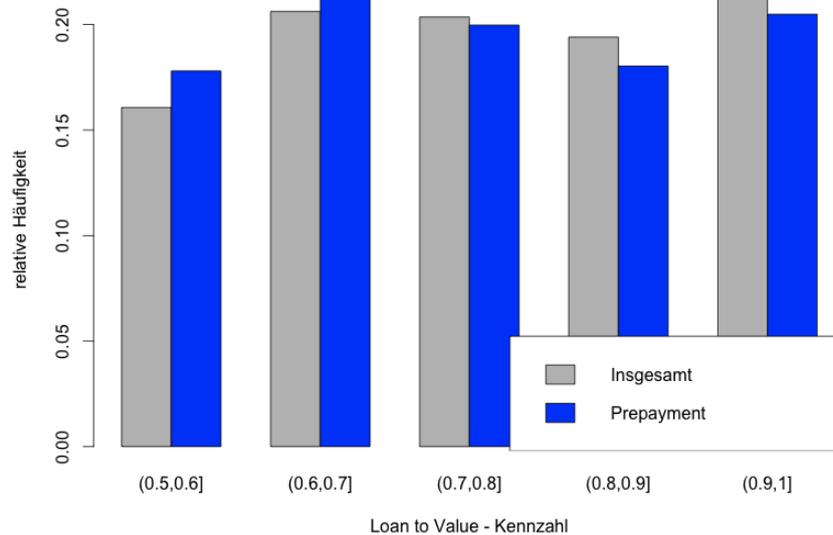


Abbildung 6.8: Relative Häufigkeiten der simulierten Loan-to-Value Kennzahlen: Hier wurden die simulierten LTV-Kennzahlen zur Darstellung im Histogramm in Intervalle (a,b] mit Breite von jeweils 0,1 unterteilt.

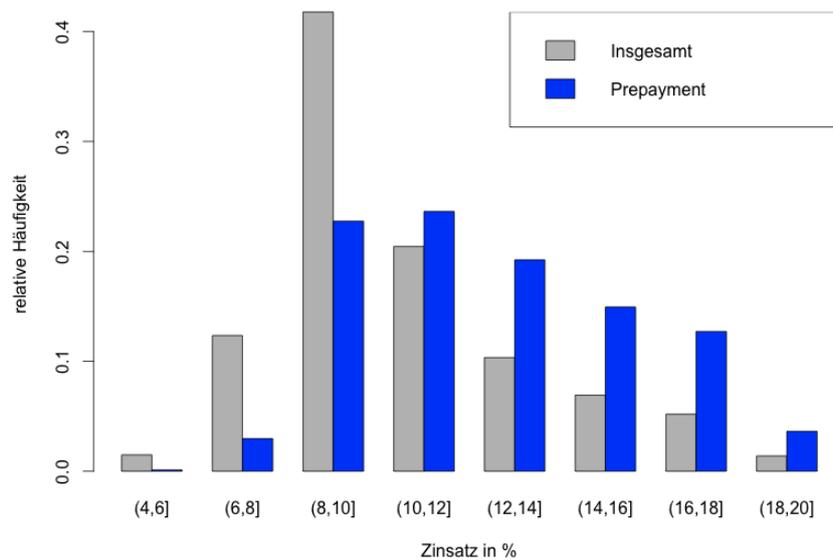


Abbildung 6.9: Relative Häufigkeiten der simulierten Kreditzinssätze: Dieses Histogramm zeigt die Gruppierung der Zinssätze in Intervalle (a,b] der Länge von 2%.

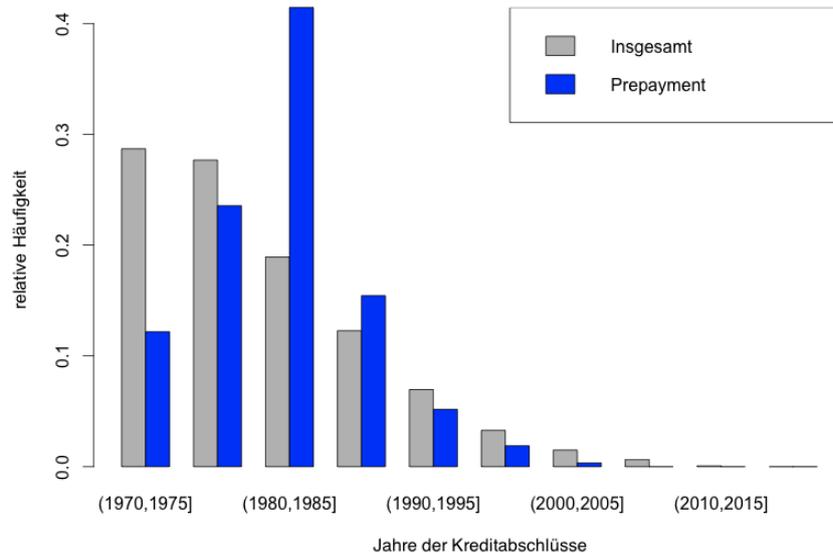


Abbildung 6.10: Relative Häufigkeiten der simulierten, jährlichen Kreditabschlüsse: Das Histogramm zeigt die Verteilung der Kreditabschlüsse zwischen 1970 und 2015 in Gruppen (a,b] mit Intervallbreite von jeweils 5 Jahren.

schließlich Kredite zu simulieren, deren komplette Laufzeit im Zeitfenster zwischen 1972 und 2013 abgebildet ist. Diese Schiefe Lage scheint etwas realitätsfremd zu sein und könnte unter Umständen geändert werden. Nichtsdestotrotz zeigt sich, dass Kredite, die zu Beginn der 80er abgeschlossen wurden, übermäßig oft vorzeitig getilgt wurden, als solche anderer Perioden. Ursache dürfte hierbei die damit verbundene Zinslage sein.

Ein zusätzliches Augenmerk soll auch auf die Altersverteilung der vorzeitig getilgten Kredite gelegt werden. Betrachtet man nur die vorzeitig getilgten Kredite, so zeigen die beiden Abbildungen 6.11, dass die Rückzahlungsrate in den ersten Jahren stark ansteigt und dann danach wieder abfällt. Vergleicht man, wie in der Abbildung 6.11 rechts ersichtlich, die normierten theoretischen und empirischen Rückzahlungsraten bezüglich dem Alter, so lässt sich eine gewisse Similarität herausstreichen. Aufgrund sämtlicher Störterme liegen zwar abschnittsweise stärkere Abweichungen vor, die Grundstruktur ist jedoch deutlich erkennbar und für eine Modellierung, vor allem gemäß den diskutierten Überlebensmodellen (Kapitel 4.4.1), maßgeblich relevant.

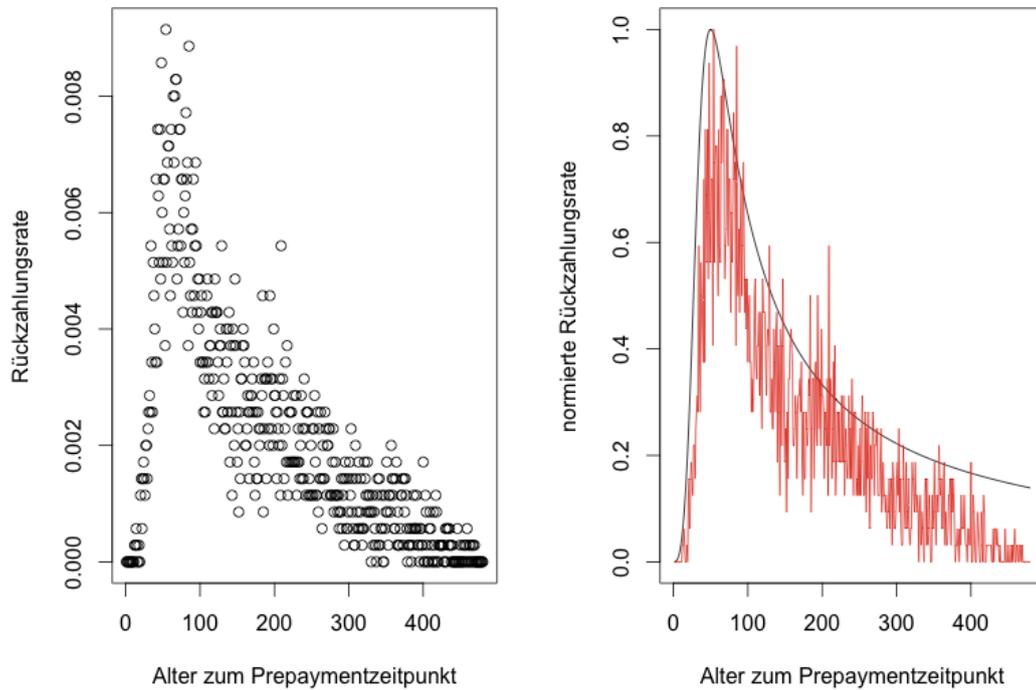


Abbildung 6.11: Rückzahlungsrate je Kreditalter zum Tilgungszeitpunkt (links) und normierter Vergleich zwischen theoretischer und empirischer Altersfunktion (rechts)

6.2.3 Modellauswahl und -kalibrierung

Anhand der simulierten Daten sollen einige der in Kapitel 4 dargestellten Modelle parametrisiert werden, um so zur besseren Beschreibung und Beurteilung von Prepayment beizutragen. Es empfiehlt sich eventuell den gesamten Datensatz bezüglich einigen Merkmalen zu kategorisieren und darauf die Modellierung anzuwenden.

Proportionales-Hazard Modell

Mit dem Package `Survival` können in R, wie auch in [11] erläutert, Überlebensmodelle zu entsprechenden Daten entwickelt werden. Die nachfolgende Gleichung 6.1 zeigt nochmals das zu kalibrierende Modell:

$$\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) \exp(\beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_k \nu_k). \quad (6.1)$$

Den gravierenden Unterschied zu linearen Regressionsmodellen oder generalisierten linearen Modellen stellt, wegen ihrer zeitabhängigen Struktur, die Basisfunktion $\pi_0(t; \gamma, p)$ dar. Dies ist auch der Grund, warum eine Modellierung über eben gewöhnliche lineare oder generalisierte lineare Modelle nicht direkt zielführend ist.

Zunächst müssen binäre Variablen erzeugt werden, die Kredite mit einem Prepayment (=1) und solche ohne vorzeitige Tilgung (=0) kennzeichnen. Aus dieser Kennzeichnung ist die Typisierung eines Survival Modells so zu verstehen, dass all jene Kredite überleben, die nicht vorzeitig, also vor Ende ihrer geplanten Laufzeit, zurückgezahlt werden. Diese Variablen bilden die Basis für das nachfolgende Survival Modell. Aus dieser Variable (`prep.yon`) und der zeitabhängigen Größe des Kreditalters (`prep.alt`), die den eventuellen Zeitpunkt der Rückzahlung kennzeichnet, wird in erster Instanz ein Survival-Objekt kreiert. Zusätzlich wird eine Variable `fr.cm` eingefügt, die die Differenz zwischen dem vertraglich vereinbarten Zinssatz r_C und dem, zum Zeitpunkt der eventuellen Rückzahlung beobachteten, Zinssatz r_M^{30FMR} beschreibt.

```

1 > dat[1:10,]
2 No BegYe BegMo fr Mat Nom LTV PrepYe PrepMo prep.alt prep.yon fr.cm
3 1 1977 3 8.95 23 180000 0.92 kein Prep -1 0 0.00
4 2 1973 6 7.51 12 80000 0.77 kein Prep -1 0 0.00
5 3 1992 3 9.15 10 120000 0.53 1999 11 86 1 2.36
6 4 1983 12 14.06 9 70000 0.77 kein Prep -1 0 0.00
7 5 1979 7 11.17 33 290000 0.72 2000 5 254 1 2.96
8 6 1979 11 12.98 8 20000 0.54 kein Prep -1 0 0.00
9 7 1977 11 7.49 2 360000 0.72 kein Prep -1 0 0.00
10 8 1999 4 7.02 13 130000 0.53 2009 2 122 1 1.97
11 9 1975 4 9.92 35 310000 0.88 kein Prep -1 0 0.00
12 10 1975 11 9.68 35 260000 0.82 2009 1 400 1 3.71

```

Listing 6.7: Auszug aus dem ergänzten, simulierten Datensatz: Zusätzlich sind hier das eventuelle Alter zum Zeitpunkt der vorzeitigen Rückzahlung (`prep.alt`), der Rückzahlungsindikator (`prep.yon`) und die Differenz zwischen Fixzinssatz und Marktzinssatz zum Prepaymentzeitpunkt (`fr.cm`) aufgelistet

In ähnlicher Art und Weise, wie bei linearen Regressionsmodellen beziehungsweise bei generalisierten linearen Modellen, wird hier nun das Survival-Objekt über das Cox-Regressionsmodell mit allen vorhandenen, eventuell beschreibenden, Variablen (ausgenommen das Abschlussmonat `BegMo`) aus dem gesamten Datensatz verknüpft.

```

1 > prep.surv <- Surv(prepare.alt, prepare.yon)
2 > mod.prep <- coxph(prepare.surv ~ BegYe + fr + fr.cm + Mat + Nom + LTV, data=dat)

```

Listing 6.8: Modellierung des Proportionalen-Hazard Modells

Eine statistische Zusammenfassung dieses Modells liefert folgende Ausgabe:

```

1 > summary(mod.prep)
2 Call:
3 coxph(formula = prepare.surv ~ BegYe + fr + fr.cm + Mat + Nom + LTV, data = dat)
4
5     n= 10000, number of events= 3499
6
7           coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
8 BegYe  2.866e-01  1.332e+00  5.927e-03  48.362 <2e-16 ***
9 fr      1.065e+00  2.901e+00  1.543e-02  69.034 <2e-16 ***
10 fr.cm -1.000e+00  3.679e-01  1.417e-02 -70.602 <2e-16 ***
11 Mat   -3.828e-02  9.624e-01  4.124e-03  -9.282 <2e-16 ***
12 Nom    3.042e-07  1.000e+00  2.644e-07   1.150  0.250
13 LTV    1.543e-01  1.167e+00  1.118e-01   1.380  0.167
14 ---
15 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
16
17           exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
18 BegYe    1.3319      0.7508   1.3165   1.3475
19 fr       2.9012      0.3447   2.8148   2.9903
20 fr.cm    0.3679      2.7185   0.3578   0.3782
21 Mat      0.9624      1.0390   0.9547   0.9703
22 Nom      1.0000      1.0000   1.0000   1.0000
23 LTV      1.1669      0.8570   0.9373   1.4527
24
25 Rsquare= 0.499 (max possible= 0.993 )
26 Likelihood ratio test= 6902 on 6 df,  p=0
27 Wald test              = 5306 on 6 df,  p=0
28 Score (logrank) test = 5329 on 6 df,  p=0

```

Listing 6.9: Signifikanzanalyse der Faktoren im zuvor definierten Modell

Zunächst wurden die geschätzten Koeffizienten `coef`, die exponentiellen, geschätzten Koeffizienten `exp(coef)`, die Standardabweichung der Koeffizienten `se(coef)`, der Quotient aus Koeffizient und Standardabweichung `z` sowie das Ergebnis des auf `z` aufgebauten Hypothesentests aufgelistet. Die Teststatistik von Wald ist unter Annahme der Nullhypothese $H_0 : \beta_i = 0$ für $i = 1, \dots, k$ asymptotisch normal verteilt. Dies zeigt in erster Instanz, dass die Variablen `BegYe`, `fr`, `fr.cm` und `Mat` einen hochsignifikanten Einfluss besitzen, während in diesem Zusammenhang `Nom` und `LTV` keine erklärende Bedeutung für das Modell besitzen. Die zweite Kolonne beschäftigt sich noch etwas näher mit den exponentiellen

Koeffizienten und deren Quantile. Abschließend widerlegen drei verschiedene Tests die allumfassende Hypothese, dass alle Koeffizienten gleichzeitig 0 sind ($H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$). Die vier signifikanten exponentiellen Koeffizienten lassen sich fürs Erste folgendermaßen interpretieren:

- BegYe** Je neuer die Kredite sind, desto größer ist das Risiko, dass diese vorzeitig getilgt werden. So steigt die Wahrscheinlichkeit pro Jahr des Kreditabschlusses um 6,47%. Ob dies tatsächlich eine sinnvolle Interpretation der Daten ist, sollen die nachfolgend angeführten Modelldiagnosen zeigen. Diese Behauptung ist intuitiv insofern nur schwer haltbar, da die Wahrscheinlichkeit mit der Jahreszahl nicht fortlaufend ansteigen kann. Dies würde kein zufriedenstellendes Modell für Prognosen in die Zukunft gewähren, da die Wahrscheinlichkeit im Laufe der Zeit ins Unermessliche führen würde.
- fr** Bezüglich den vertraglich festgelegten Zinssätzen r_C liegt, je Prozentpunkt des Zinssatzes, eine Zunahme des Rückzahlungsrisikos um 17,15% vor. Diese Aussage stimmt mit den bisherigen Überlegungen insofern überein, als dass Kredite mit höheren Zinsen eher refinanziert werden als solche mit geringeren.
- fr.cm** Der Differenz zwischen vertraglich vereinbartem Zinssatz und dem beobachteten Marktzinssatz zum Zeitpunkt der Rückzahlung wird ein exponentieller Koeffizient von 0,37 zugeordnet. Dies würde bedeuten, dass je Prozentpunkt der Spanne die Neigung der Rückzahlung um knapp 63% abnimmt. Dies ist eine etwas überraschende und nicht plausible Erkenntnis, da die Neigung mit steigender Spanne zunehmen sollte. Aus diesem Grund gilt es die Sinnhaftigkeit dieses zusätzlichen Faktors anzuzweifeln, auch wenn die Tests eine deutliche Signifikanz zeigen. Der Grund liegt vermutlich in der Strukturierung der Daten, da eine solche Information nur für zurückgezahlte Kredite vorliegt. Aus dem Fehlen dieser Referenz für nicht vorzeitig getilgte Kredite kommt es vermutlich zu einer solchen irreführenden Einschätzung des Modells.
- Mat** Der Koeffizient hinsichtlich der Kreditlaufzeit zeigt, dass Kredite mit kürzerer Laufzeit eher vorzeitig getilgt werden. Pro Jahr der Laufzeit nimmt die Wahrscheinlichkeit um 7,88% ab. Bezugnehmend auf die Analyse der simulierten Daten ist es plausibel, soll jedoch auch noch weiter untersucht werden.

Eine interessante Veranschaulichung dieses ersten allgemeinen und allumfassenden Modells, ist die empirische Überlebensfunktion über die Laufzeit (in Monaten), wie in Ab-

bildung 6.12 ersichtlich. Zusätzlich wurden hierbei das punktweise obere und untere 95% Quantil abgebildet.

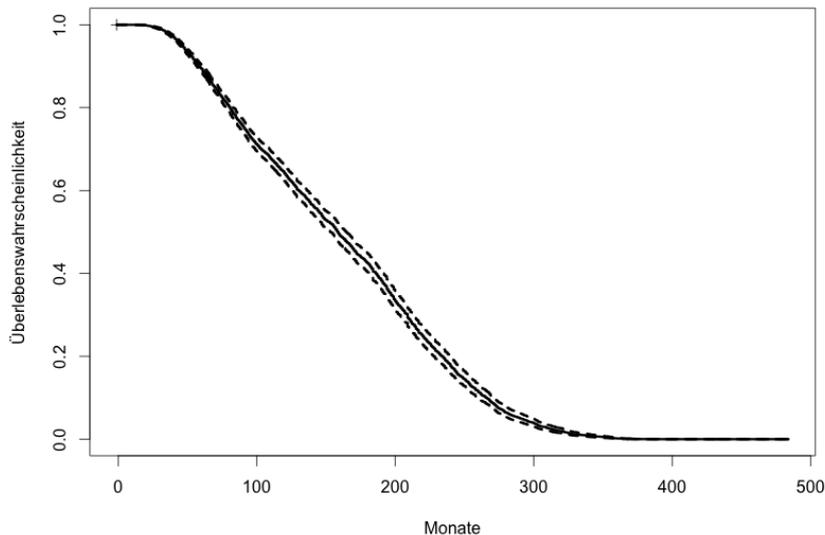


Abbildung 6.12: Empirische Überlebensfunktion der Kredite

Die zuvor als signifikant geltenden Variablen müssen nach [11] noch weiteren Diagnosen unterzogen werden, ob sie für das Proportionale-Hazard Modell geeignet sind. Unter anderem sollen sie folgende, vorwiegend grafische, Modelldiagnose überstehen:

- Proportionale-Hazard Faktoren: Test ob sich die Einflüsse mit der Zeit verändern
- Beeinflussende Beobachtungen: Suche nach beeinflussenden Beobachtungen
- Linearität: Einflüsse sollen linear in den parametrisierten Exponenten eingehen

Einen Test, ob die Variablen tatsächlich proportional sind, bietet die Funktion `cox.zph`, die im Wesentlichen einzeln die zeitliche Unabhängigkeit der Koeffizienten β_i testet. Für $\beta(t) = \beta + \theta g(t)$ wird die Hypothese $H_0 : \theta = 0$ getestet.

```

1 > cox.zph(mod.prep.1, transform="km")
2           rho chisq      p
3 BegYe  -0.0831  20.0 7.55e-06
4 fr      0.1131  35.3 2.86e-09
5 Mat    -0.0964  35.2 3.02e-09
6 fr.cm  -0.1872  74.8 0.00e+00
7 GLOBAL      NA 259.2 0.00e+00

```

Listing 6.10: Diagnose der Faktoren auf Eignung für das Proportionale-Hazard Modell

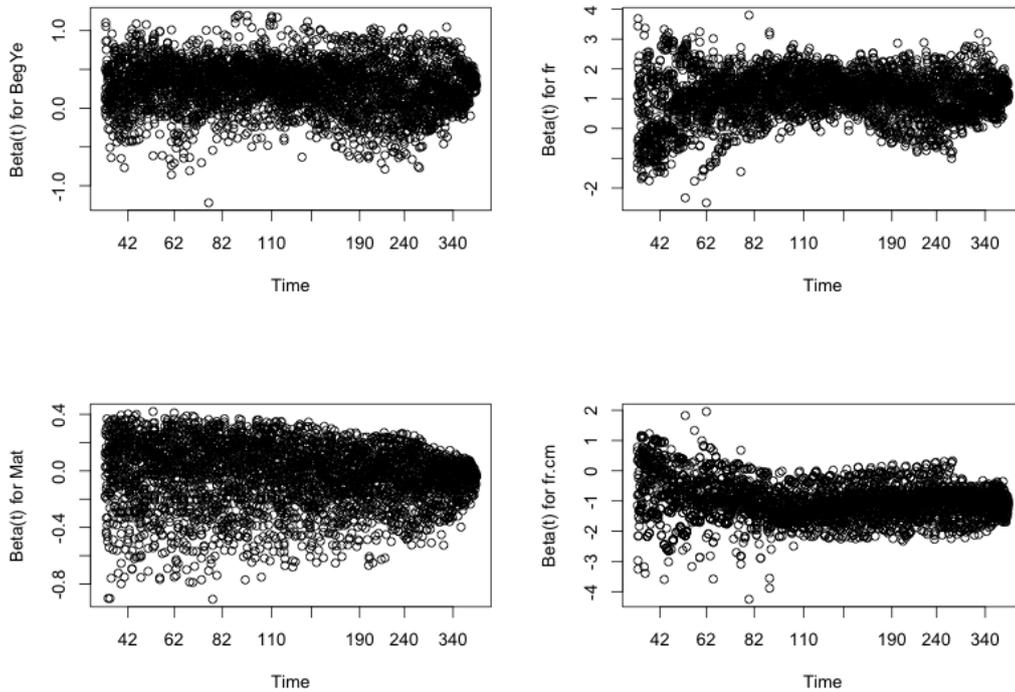


Abbildung 6.13: Plot zur Erfassung zeitlicher Veränderungen der Parameter β

Die angeführte Ausgabe in Listing 6.10 liefert einerseits den Korrelationskoeffizienten ρ zwischen den sogenannten skalierten Schoenfeld Residuen und $g(t)$, einer geschätzten Verteilungsfunktion der Überlebenszeit. Zusätzlich wird die Chiquadratstatistik und der dazugehörige p-Wert angegeben. Die Ausgabe liefert die Aussage, dass die Nullhypothesen jeweils deutlich verworfen werden und alle Koeffizienten einen zeitabhängigen Einfluss enthalten und daher nicht den erforderlichen Kriterien entsprechen. Der dazugehörige Plot in Abbildung 6.13 zeigt folgendes Bild. Die Betrachtung des gesamten simulierten Datensatzes lässt zumindest in diesem Punkt keine vernünftige Aussage zu, da eindeutig zu viele Datenpunkte vorliegen. Aus diesem Grund sollen in diesem Zusammenhang keine weiteren Untersuchungen angestellt werden. Stattdessen soll der gesamte Datensatz, anhand von bestimmten Merkmalen, exemplarisch unterteilt und näher untersucht werden. Eventuell zeigt sich für die unterteilten Daten eine zufriedenstellendere Diagnose. Eine naheliegende Herangehensweise ist es, wie schon in Abschnitt 3.2.2 angedeutet, Kredite mit gleichartigen Spezifikationen zusammenzufassen. Aufgrund dessen werden die Merkmale Laufzeit, Nominale und LTV wie in Tabelle 6.1 zu Faktoren zusammengefasst:

Laufzeit	[0, 5]	short
	(5, 19]	medium
	(19, 40]	long
Nominale	[0, 50.000]	low
	(50.000, 150.000]	medium
	(150.000, 400.000]	high
LTV	(0, 0.9]	bad
	(0.9, 1]	good

Tabelle 6.1: Kategorisierung von Laufzeit, Nominale und LTV

Dementsprechend werden nun die Kreditdaten gemäß den drei Laufzeitmerkmalen kategorisiert. Diese Subdatensätze werden nochmals einzeln betrachtet und gemäß den ersten Erkenntnissen, über Sinnhaftigkeit einzelner Faktoren, untersucht. Über die Cox-Regression in R kann nur der parametrische Teil $\pi_1(\beta, \vec{v})$ analysiert werden, nicht jedoch jener der Basisfunktion. Zunächst sollen somit die Basisfunktionen $\pi_0(t; \gamma, p)$ der Modelle betrachtet werden. Die Plotserie in Abbildung 6.14 zeigt die empirischen Prepaymentraten bezüglich der kategorisierten Kreditdaten.

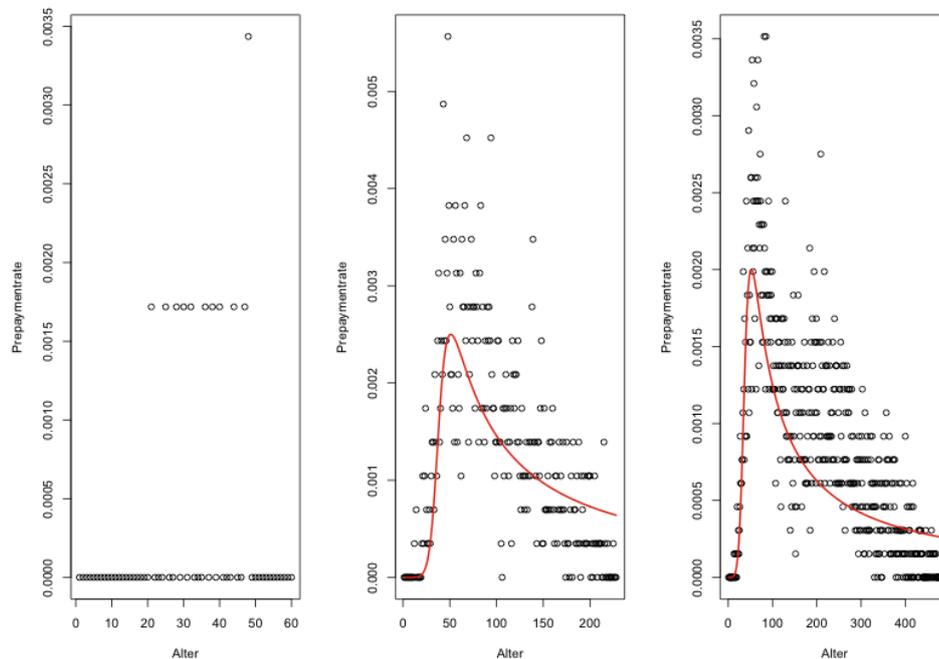


Abbildung 6.14: Empirische Prepaymentraten der Kredite mit Laufzeitmerkmalen “short”, “medium” und “long”

Für die Kredite der Kategorie “short” konnte aus Mangel an Daten keine Struktur erkannt werden. Für die beiden anderen Merkmale wurden Basisfunktionen nach Gleichung 4.19 verwendet. Dabei wurde jeweils für $\gamma = 0.3$ und $p = 8$ beziehungsweise $p = 6$ mit einem zusätzlichen externen Skalierungsparameter $c = 0.0025$ und $c = 0.002$ verwendet. Nicht überraschend ist, dass diese Struktur aus den simulierten Daten zu erkennen ist.

Nachdem die Basisfunktionen untersucht wurden, sollen die parametrischen Anteile analysiert werden. Die Kreditdaten mit den kürzeren Laufzeiten zeigen folgendes Ergebnis (Listing 6.11).

```

1 > summary(mod.prep.3)
2 Call:
3 coxph(formula = prep.surv.mats ~ dat.mats$fr + dat.mats$Nom.fac +
4       dat.mats$LTV.fac, data = dat.mats)
5
6     n= 1052, number of events= 66
7
8               coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
9 dat.mats$fr      0.10355   1.10910  0.03613  2.866  0.00416 **
10 dat.mats$Nom.faclow -0.15625   0.85535  0.31845 -0.491  0.62366
11 dat.mats$Nom.facmedium -0.38052   0.68350  0.33550 -1.134  0.25671
12 dat.mats$LTV.facgood -0.37770   0.68544  0.32424 -1.165  0.24407
13 ---
14 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
15
16               exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
17 dat.mats$fr      1.1091     0.9016   1.0333   1.190
18 dat.mats$Nom.faclow  0.8553     1.1691   0.4582   1.597
19 dat.mats$Nom.facmedium 0.6835     1.4630   0.3541   1.319
20 dat.mats$LTV.facgood 0.6854     1.4589   0.3631   1.294
21
22 Rsquare= 0.012 (max possible= 0.334 )
23 Likelihood ratio test= 12.55 on 4 df, p=0.01368
24 Wald test = 12.08 on 4 df, p=0.01680
25 Score (logrank) test = 12.33 on 4 df, p=0.01503

```

Listing 6.11: Signifikanzanalyse der Faktoren aus den Daten mit kurzer Laufzeit

Der einzig signifikante Einfluss, entsprechend den statistischen Hypothesentests, für die kurzfristigen Kredite scheint der Zinssatz `fr` (r_C) zu sein. Je Prozentpunkt des Zinssatzes steigt die Basiswahrscheinlichkeit einer vorzeitigen Tilgung um 10.9%. Der nachfolgende Test, ob der Zinssatz ein geeigneter Faktor für ein Proportionales-Hazard Modell ist, kann bei weitem nicht mit demselben Urteil wie bei der zuvor erfolgten Gesamtbetrachtung bedacht werden.

```

1           rho chisq    p
2 dat.mats$fr 0.189  2.01 0.156

```

Listing 6.12: Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit kurzer Laufzeit

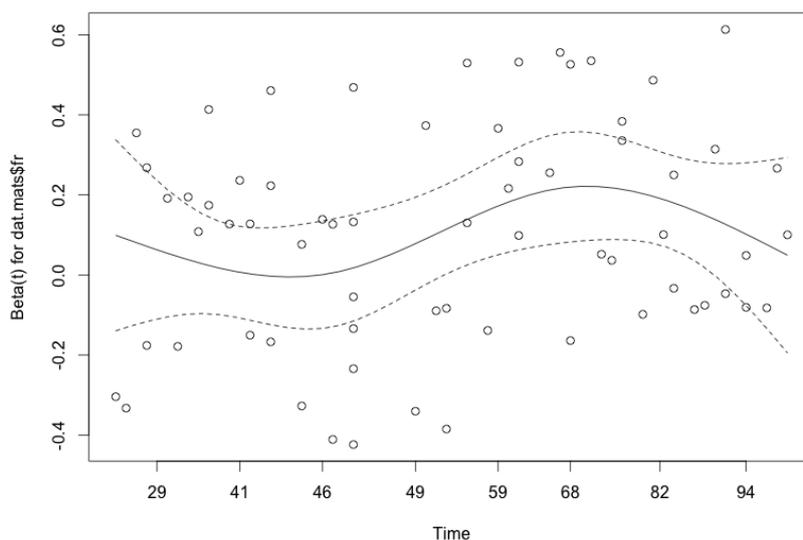


Abbildung 6.15: Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit kurzer Laufzeit: Es ist kein eindeutiger Trend erkennbar.

Der in Abbildung 6.15 ersichtliche Residuenplot zeigt zwar eine zeitlich erkennbare Fluktuation, es ist jedoch kein signifikanter Trend enthalten, weshalb der Einfluss des Zinssatzes als bedingt geeignet beurteilt werden kann.

Für Kredite mit Laufzeiten zwischen sechs und 19 Jahren zeigt Listing 6.13, dass zusätzlich zum Zinssatz, auch die Nominalen einen Einfluss auf die Tilgungswahrscheinlichkeit zu haben scheint. Dabei werden Kredite mit geringeren Kreditbeträgen, entsprechend den exponentiellen Koeffizienten, eher zurückgezahlt, als jene mit höheren Beträgen. Im Rahmen der Analyse entspricht der Zinssatz wie auch der Faktor für geringe Nominalen den Anforderungen eines Proportionalen-Hazard Modells. Der Faktor für mittlere Nominalen besteht diesen Test nicht, woraus eine zeitliche Veränderung im Rahmen der Überlebenszeit abzuleiten ist (siehe Listing 6.14).

```

1 > summary(mod.prep.4)
2 Call:
3 coxph(formula = prep.surv.matm ~ dat.matm$fr + dat.matm$Nom.fac +
4       dat.matm$LTV.fac, data = dat.matm)
5
6 n= 2405, number of events= 802
7
8              coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
9 dat.matm$fr      0.07185   1.07449  0.01182  6.079 1.21e-09 ***
10 dat.matm$Nom.faclow  0.43661   1.54745  0.12007  3.636 0.000277 ***
11 dat.matm$Nom.facmedium 0.22371   1.25071  0.08158  2.742 0.006103 **
12 dat.matm$LTV.facgood  0.01513   1.01524  0.08913  0.170 0.865209
13 ---
14 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
15
16              exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
17 dat.matm$fr      1.074      0.9307   1.0499   1.100
18 dat.matm$Nom.faclow  1.547      0.6462   1.2230   1.958
19 dat.matm$Nom.facmedium 1.251      0.7995   1.0659   1.468
20 dat.matm$LTV.facgood  1.015      0.9850   0.8525   1.209
21
22 Rsquare= 0.021 (max possible= 0.978 )
23 Likelihood ratio test= 50.84 on 4 df, p=2.408e-10
24 Wald test = 52.32 on 4 df, p=1.181e-10
25 Score (logrank) test = 52.62 on 4 df, p=1.023e-10

```

Listing 6.13: Signifikanzanalyse der Faktoren für Daten mit mittlerer Laufzeit

```

1 > cox.zph(mod.prep.4, transform="km")
2              rho  chisq      p
3 dat.matm$fr      -0.00906  0.0667  0.79627
4 dat.matm$Nom.faclow  0.05522  2.4617  0.11665
5 dat.matm$Nom.facmedium 0.10670  9.3977  0.00217
6 GLOBAL              NA  9.4823  0.02352

```

Listing 6.14: Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit mittlerer Laufzeit

Die drei Residuen Plots aus Abbildung 6.16 bestätigen die zuvor getroffene Vermutung. Während die ersten beiden Größen ein eher unkritisches Verhalten zeigen, zeigt der Plot für mittelhohe Nominalenbeträge einen zeitlich eindeutig positiven Trend. Dies bedeutet, dass der Koeffizient zwar signifikant, aber nicht als bedenkenlos gleichbleibend zu betrachten ist.

Abbildung 6.17 zeigt hier exemplarisch die Einflussnahme einzelner Datenpunkte auf den jeweiligen Koeffizienten. Die Darstellung zeigt wie sich der Schätzer für den Parameter β_i im Verhältnis zu seinem Standardfehler verändert, wenn ein Datenpunkt nach dem anderen aus dem Sample weggenommen wird. Diese Änderungen zeigen kaum

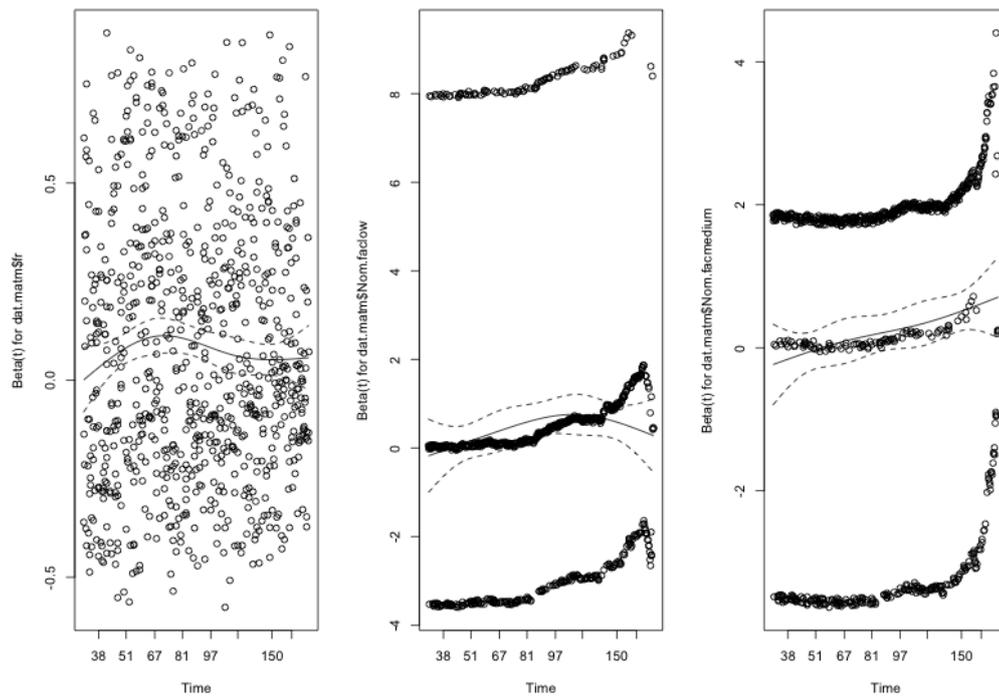


Abbildung 6.16: Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit mittlerer Laufzeit: Während der linke Residuenplot für den Zinssatz und der mittlere für die kleinen Nominalen keinen klaren durchgehenden Trend erkennen lassen, zeigt der Indikator für mittlere Nominalen einen zeitlichen Trend.

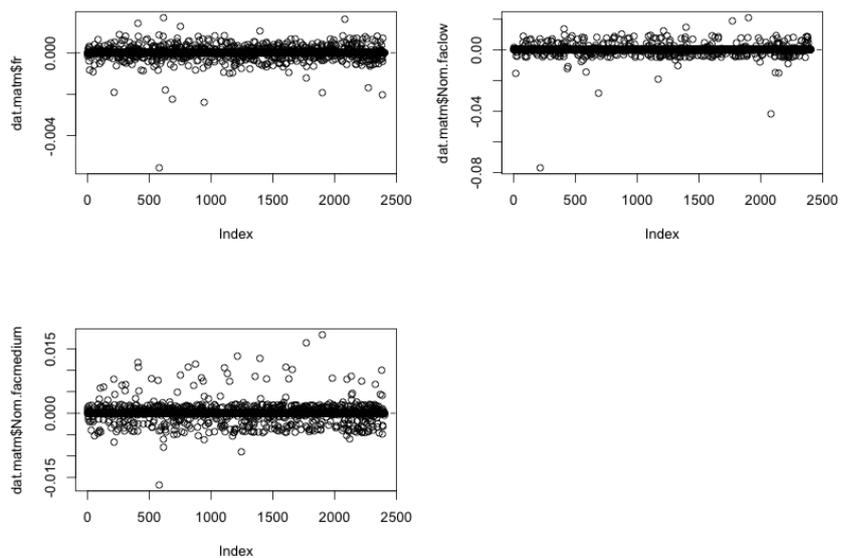


Abbildung 6.17: Einflussnahme der Beobachtungen zur Findung von Hebelpunkten

übermäßig auffällige Punkte, die einen markanten Datenpunkt mit Hebeleffekt kennzeichnen würden.

Ein weiteres angesprochenes Diagnosekriterium wird in Abbildung 6.18 dargestellt. Dieser zeigt, wie in [11] erläutert, einen Plot zwischen Martingalresiduen⁷ und den rohen Einflussgrößen. Dieses Streudiagramm, beziehungsweise die daraus entstehende geglättete Ausgleichsgerade, soll ein möglichst konstantes Verhalten zeigen, wie es beispielsweise für den genannten Plot vorliegt. Daraus kann man ableiten, dass der lineare Ansatz $\beta_i x_i$ gerechtfertigt ist. Für dichotome Merkmale ist diese Analyse sinngemäß nicht durchführbar.

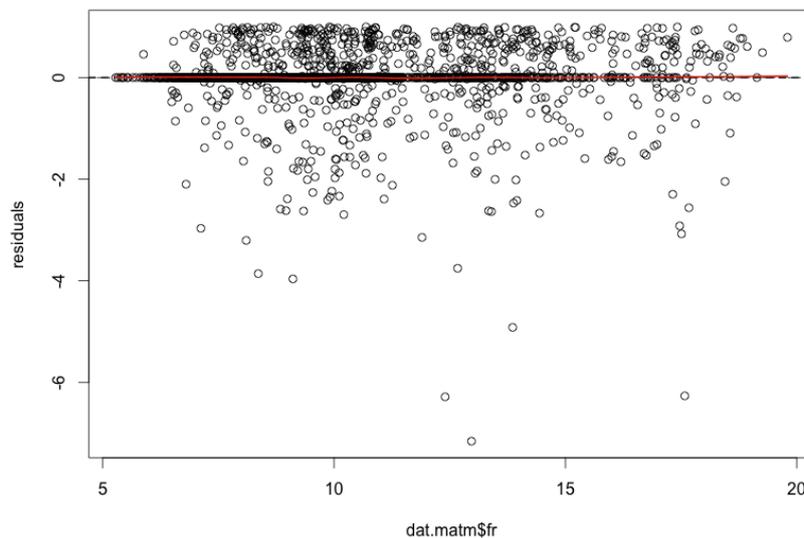


Abbildung 6.18: Diagnoseplot zur Überprüfung auf Linearität des Faktors

Abschließend wird noch der Pool mit den langfristigen Krediten betrachtet.

Die Hypothesentests der potentiellen Einflussgrößen zeigen, dass hier ebenso der Zinssatz und der Faktor für das Merkmal der mittelhohen Nominalen einen signifikanten Einfluss haben. Auf den ersten Blick überraschend scheint die Ablehnung gegenüber dem Faktor der Kredite mit niedrigem Kreditrahmen. Dies könnte jedoch an der Tatsache liegen, dass langfristige Kredite kaum in Zusammenhang mit niedrigen Nominalen abgeschlossen werden, weshalb das Modell diese Konstellation als irrelevant einstuft.

⁷Martingalresiduen sind, wie in [11] beschrieben, durch die Differenz aus beobachteter Anzahl und der erwarteten Anzahl bedingt auf Modell, Zeit und Verlauf definiert

```

1 > summary(mod.prep.5)
2 Call:
3 coxph(formula = prep.surv.matl ~ dat.matl$fr + dat.matl$Nom.fac +
4       dat.matl$LTV.fac, data = dat.matl)
5
6 n= 6543, number of events= 2631
7
8              coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
9 dat.matl$fr      0.210485  1.234277  0.006993 30.099 < 2e-16 ***
10 dat.matl$Nom.faclow  0.410206  1.507129  0.302786  1.355  0.175
11 dat.matl$Nom.facmedium 0.374318  1.453999  0.055121  6.791 1.11e-11 ***
12 dat.matl$LTV.facgood -0.021841  0.978395  0.048595 -0.449  0.653
13 ---
14 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
15
16              exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
17 dat.matl$fr      1.2343      0.8102      1.2175      1.251
18 dat.matl$Nom.faclow  1.5071      0.6635      0.8326      2.728
19 dat.matl$Nom.facmedium 1.4540      0.6878      1.3051      1.620
20 dat.matl$LTV.facgood  0.9784      1.0221      0.8895      1.076
21
22 Rsquare= 0.13 (max possible= 0.996 )
23 Likelihood ratio test= 913.2 on 4 df, p=0
24 Wald test = 976.8 on 4 df, p=0
25 Score (logrank) test = 1039 on 4 df, p=0

```

Listing 6.15: Signifikanzanalyse der Faktoren für Daten mit mittlerer Laufzeit

```

1 > cox.zph(mod.prep.5, transform="km")
2              rho  chisq      p
3 dat.matl$Nom.faclow  0.0061  0.0982 0.753964
4 dat.matl$Nom.facmedium 0.0555  8.2798 0.004009
5 dat.matl$fr      -0.0752 11.5520 0.000677
6 GLOBAL          NA 19.0445 0.000268

```

Listing 6.16: Diagnose zur Eignung der Faktoren für das Proportionale-Hazard Modell der Subdaten mit langer Laufzeit

Der Test auf Adäquanz der Größen zeigt ein nicht zufriedenstellendes Ergebnis. Die beiden signifikanten Größen zeigen jeweils ein zeitabhängiges Verhalten. Der dazugehörige Plot in Abbildung 6.19 bestätigt dieses numerische Ergebnis nur bedingt, da zwar in beiden betreffenden Plots eine Schwankung erkennbar ist, jedoch kein eindeutig ersichtlicher durchgehender Trend.

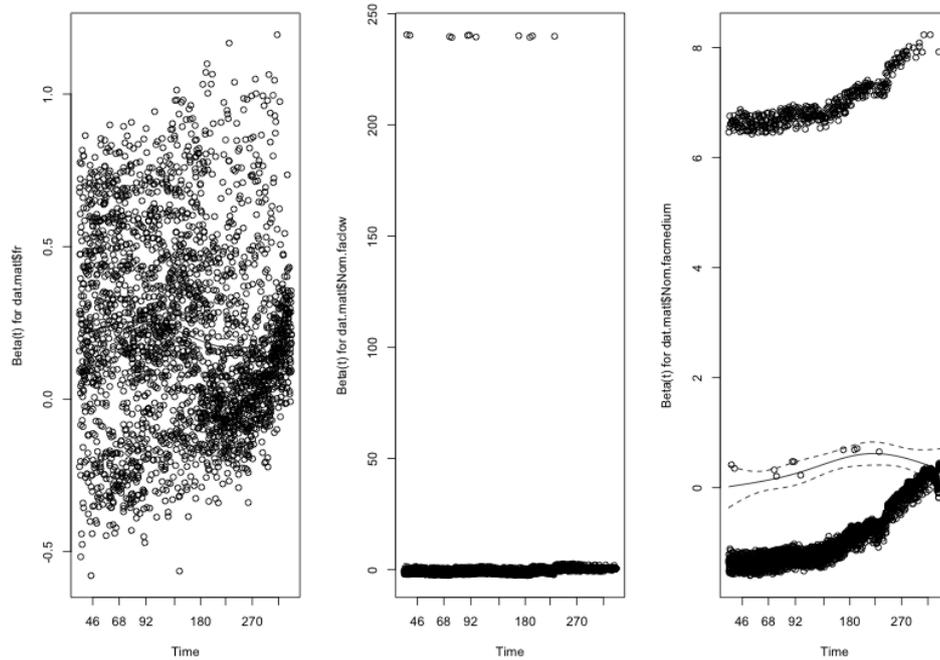


Abbildung 6.19: Residuenplot gegen transformierte Zeit für Daten mit langer Laufzeit: Der unerwünschte Trend ist sowohl für den Zinssatz (links) als auch für den Indikator der mittleren Nominalen (rechts) erkennbar. Lediglich der Indikator für kleine Nominalen (Mitte) ist ohne Trend.

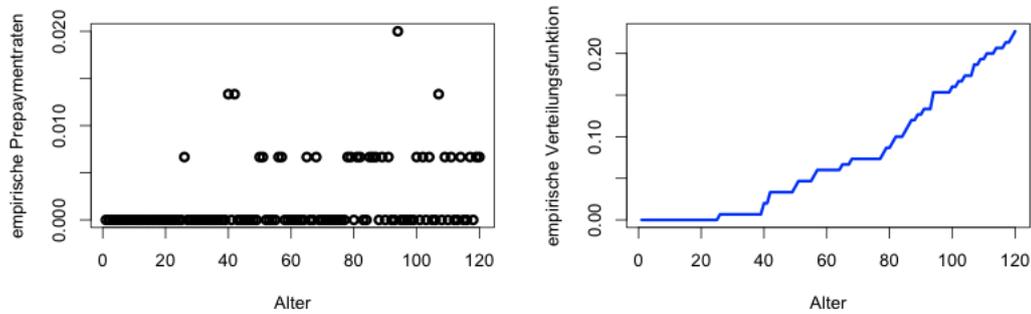
Levy Modell

In diesem Unterabschnitt soll die Verteilung der Rückzahlungswahrscheinlichkeit über die in Abschnitt 4.5.2 erläuterten Levy-Prozesse modelliert werden. Dabei sollen als Beispiel für eventuell noch folgende Modellierungen mit realen Daten zunächst die Datensatzausschnitte für Laufzeiten mit $T = 10$ Jahren und $T = 30$ Jahren betrachtet werden.

Aus den empirischen Daten werden zunächst die monatlichen Rückzahlungsraten betreffend Prozesszeit (nicht Kalenderzeit) ermittelt und aufbauend auf diesen anschließend zu einer empirischen Verteilungsfunktion ergänzt. In Abbildung 6.20 sind nun links die monatlichen Rückzahlungsraten entsprechend dem Alter der Kredite und rechts die darauf aufbauenden empirische Verteilungsfunktionen, für die beiden Laufzeiten von 10 Jahren (oben) und 30 Jahren (unten), abgebildet. Da für eine Verteilungsfunktion am rechten Verteilungsrand $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ gelten sollte, scheint eine gewisse Diskrepanz in den ersichtlichen empirischen Verteilungsfunktionen zu liegen. Dies lässt sich inso-

fern entschärft, da zum Ende der Laufzeit alle Kredite, auch jene, die nicht vorzeitig zurückgezahlt wurden, vollständig getilgt werden.

10-jährige Kredite



30-jährige Kredite

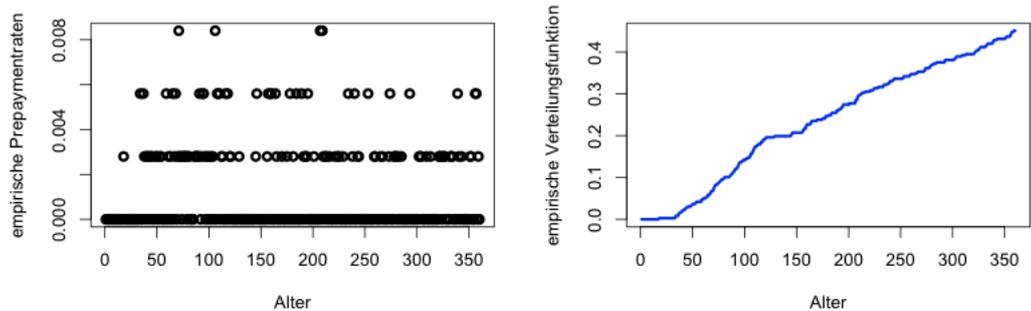


Abbildung 6.20: Monatliche Rückzahlungsraten und empirische Verteilungsfunktion der simulierten Kredite mit Laufzeiten von 10 Jahren (oben) und 30 Jahren (unten)

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.5.2 gilt es den Gamma-Prozess zu parametrisieren. Dazu werden aus den empirischen Verteilungsfunktionen Werte für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 geschätzt. Darauf aufbauend wird das Gleichungssystem 4.50 nach den beiden Parametern a und b gelöst. Wie schon im dazugehörigen theoretischen Abschnitt erläutert, wird dieses Gleichungssystem mit numerischen Methoden gelöst. Tabelle 6.2 zeigt die geschätzten Werte für die jeweiligen Mittelwerte und Varianzen:

Die numerische Lösung des Gleichungssystems wurde schlussendlich mithilfe der Computersoftware *Mathematica* durchgeführt. Wie nachfolgend angeführt, wird mit dem Befehl `Findroot` nach iterativen Methoden eine Lösung für das Gleichungssystem gesucht. Die Laufzeit wird dabei in Monaten mit $T = 120$ angegeben. Für das numerische Verfah-

Laufzeit	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
10 Jahre	0,074	0,004952
30 Jahre	0,235	0,019359

Tabelle 6.2: Mittelwert und Varianz aus empirischer Verteilung der Daten mit 10 bzw. 30 Jahren Laufzeit

ren werden außerdem Startwerte verwendet, die in diesem Fall aus Werten von ähnlichen Berechnungen in [15] herangezogen wurden.

```

1 m := 0.074
2 s := 0.004952
3 FindRoot[{1 - (1 + 1/b)^(-a*120) == m,
4 (1 + 2/b)^(-a*120) - (1 + 1/b)^(-2*a*120) == s},{a, 0.1}, {b, 10}]
5
6 {a -> 0.00791693, b -> 11.8639}

```

Listing 6.17: Parameterschätzung der Levy-Prozesse in Mathematica

Laufzeit	a	b
10	0.00792	11.86
30	0.00539	6.75

Tabelle 6.3: Parameterschätzer der Levy-Prozesse für die Daten mit 10 bzw. 30 Jahren Laufzeit

Somit sind die beiden Gamma-Prozesse durch die beiden Parameter a und b definiert (siehe Tabelle 6.3). In der Abbildung 6.21 sind einige simulierte Trajektorien der beiden Prozesse dargestellt. Betrachtet man in diesem Zusammenhang nochmals die monatlichen empirischen Rückzahlungsraten aus Abbildung 6.20, so fällt auf, dass die Raten während der Laufzeit kaum große Sprünge aufweisen und eigentlich recht ausgeglichen verteilt wirken. Vergleicht man die daraus entstandene empirische Verteilung mit den simulierten Trajektorien in Abbildung 6.21, so erscheint die 100%ige Adäquatheit des Gamma Prozesses in Frage zu stehen.

Die Charakteristik der Pfade dieser Prozesse sind die Sprünge, die rasante Entwicklungen in der Rückzahlungswahrscheinlichkeit, beispielsweise durch Zinsveränderungen am Markt oder sonstige potentielle Einflüsse, die das Rückzahlungsverhalten eines Kreditnehmers beeinflussen, widerspiegeln. Im Falle der simulierten Daten scheinen solch extreme Verhaltensänderungen nicht vorzuliegen. Die Abbildung 6.22 zeigt den Vergleich der gammaverteilten und jener der empirisch ermittelten Prepaymentraten. Dieser Vergleich der

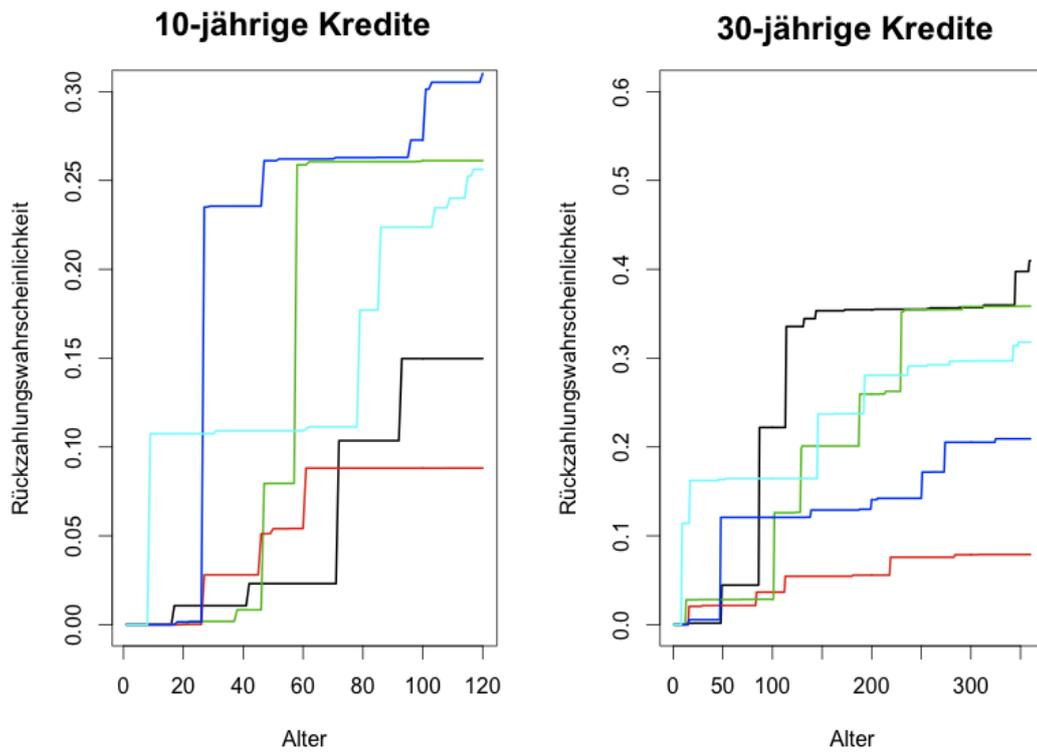


Abbildung 6.21: Mehrere simulierte Pfade für die Verteilungsfunktion der Kredite mit Laufzeiten von 10 Jahren (links) und 30 Jahren (rechts)

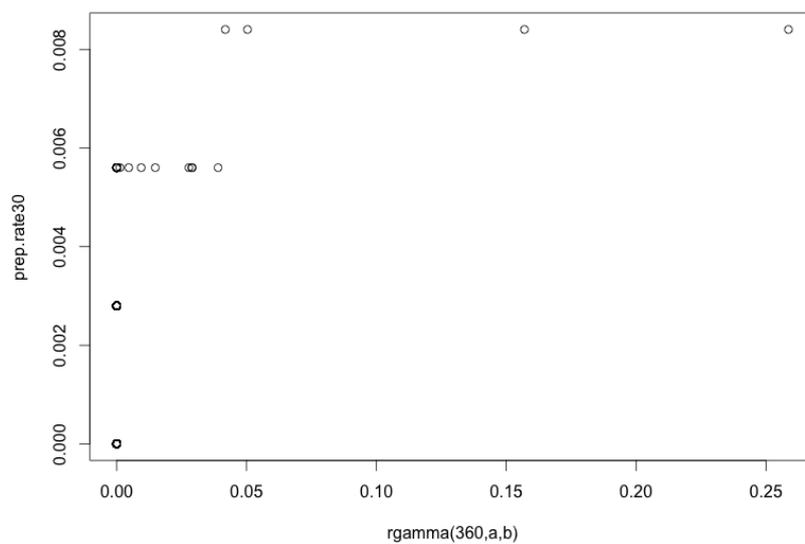


Abbildung 6.22: Vergleich der über den Levy-Prozess simulierten Prepaymentraten und der empirischen Prepaymentraten

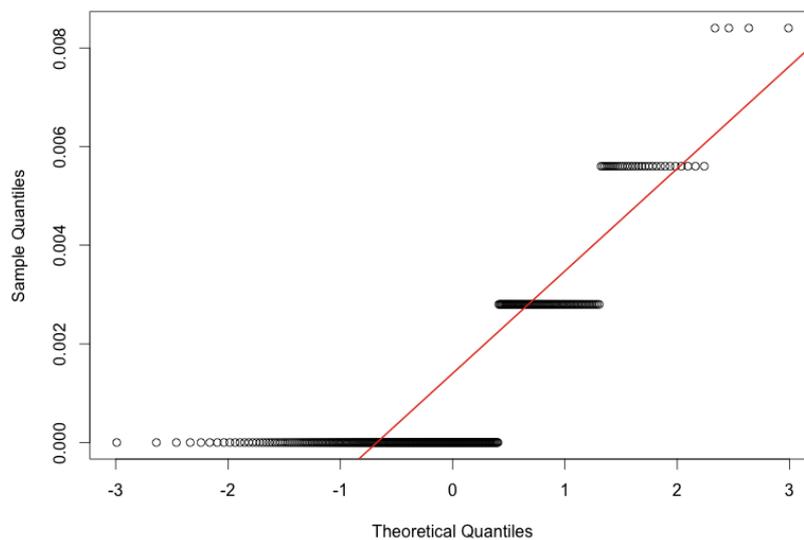


Abbildung 6.23: QQ-Plot zwischen den empirischen Prepaymentraten und normalverteilten Samples

sortierten Samples veranschaulicht recht deutlich, dass die simulierten Daten nicht unbedingt eine Modellierung über das Levy Modell zulassen. Als Ergänzung dazu bildet der Plot in Abbildung 6.23 den Vergleich der monatlichen empirischen Prepaymentraten mit einem normalverteilten Sample ab. Da die Dichte der Daten nur sehr diskret und stufenweise erscheint, kann keine endgültig präzise Aussage getroffen werden. Nichtsdestotrotz lässt die Ausgleichsgerade den Verdacht zu, dass die empirischen Raten eher einer Verteilung gehorchen, deren Tails dünner sind, beispielsweise normalverteilt, das wiederum die Konstruktion der Daten im Rahmen der Simulation widerspiegelt.

Normal-Einfaktor Modell

Ein weiteres stochastisches Modell um die Verteilung von Rückzahlungswahrscheinlichkeiten darzustellen ist das Normal-Einfaktor Modell. Entsprechend dem Simulationsverfahren, wie es in Abschnitt 4.5.1 dargestellt wird, wird als Referenz das $\mathbb{P}_{CPR}(t; \alpha)$ (siehe Gleichung 4.34) verwendet. Da die empirische Verteilungsfunktion aus Voruntersuchungen bereits ermittelt wurde und diese gegenüber dem $\mathbb{P}_{CPR}(t; \alpha)$ etwas exakter den Verlauf wiedergibt, soll diese für die entsprechende Simulation verwendet werden. Im Codeausschnitt 6.18 wird die Programmierung der Simulation in R wiedergegeben.

```

1 > H.t <- rep(0,360)
2 > for(i in 1:360){H.t[i] <- qnorm(1-Prep.Rate30[i])}
3 > P.N1 <- rep(0,360)
4 > N<-10000
5 > Z<-rep(0,N)
6 > rho <- 0.1
7 > X<-rnorm(N+1)
8 > for(i in 1:N){
9 + Z[i]<-sqrt(rho)*X[1]+sqrt(1-rho)*X[i+1]}
10 > for(j in 1:360){P.N1[j] <- length(Z[Z>=H.t[j]])/N}

```

Listing 6.18: Simulation der Prepaymentverteilung über Normales-Einfaktor Modell

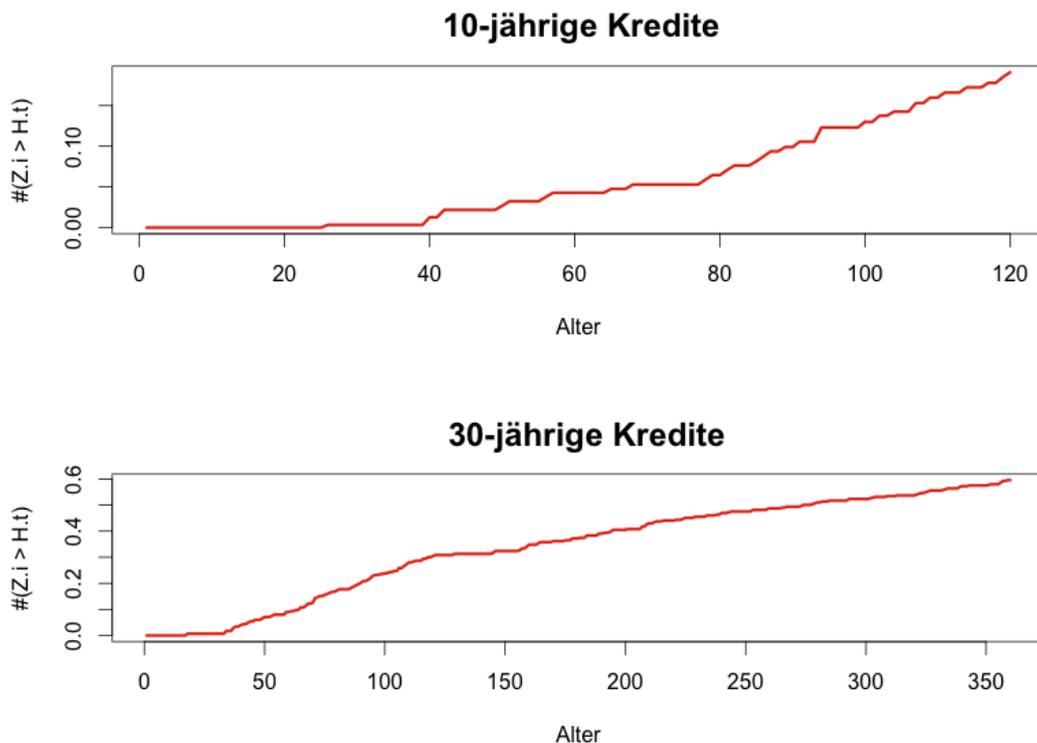


Abbildung 6.24: Simulierte Verteilungsfunktion vom Normal-Einfaktor Modell der simulierten Kreditdaten mit Laufzeiten von 10 Jahren (oben) und 30 Jahren (unten)

Die beiden Plots aus Abbildung 6.24 zeigen jeweils einen Pfad der simulierten Verteilungsfunktion. In der oberen Abbildung wurden Verteilungen von Krediten mit Laufzeiten von 10 Jahren, im unteren Plot solche mit 30 Jahren Laufzeit simuliert.

6.2.4 Ergebnisse

Die simulierten Daten wurden einerseits durch Proportionales-Hazard Modelle und andererseits durch Levy-Prozesse und Normale-Einfaktor Modelle an die Daten angepasst. Entsprechend den Parametrisierungen in R wurden, wie in 6.2.3 angeführt, folgende Parameter für die exemplarische Modelle der Prepaymentraten gefunden:

- Kredite mit kurzen Laufzeiten

$$\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) 1,11^{r_C} \quad (6.2)$$

- Kredite mit mittleren Laufzeiten

$$\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) 1,075^{r_C} 1,55^{I_{NomLow}} 1,25^{I_{NomMed}} \quad (6.3)$$

- Kredite mit langen Laufzeiten

$$\pi(t; \vec{\nu}, \vec{\theta}) = \pi_0(t; \gamma, p) 1,23^{r_C} 1,45^{I_{NomLow}} \quad (6.4)$$

Die Basisfunktion $\pi_0(t; \gamma, p)$ wird aus den Erkenntnissen parametrisiert, die über das altersmäßige Rückzahlungsverhalten in Abschnitt 6.2.2 gezogen wurden. Wie schon in Abschnitt 6.2.3 erläutert, wurden die Basisfunktionen anhand der Funktionsgleichung 4.19 bestimmt und mit zuvor angeführten Parametern verwendet.

Wie auch schon bei der Diagnose in Abschnitt 6.2.3 eruiert, müssen einige der Parameter vorsichtig betrachtet werden, da sie zumindest einer leichten zeitlichen Variabilität unterliegen. Die in den Modellen mit r_C gekennzeichneten Größen beschreiben, wie schon in 4.3 definiert, den vertraglich vereinbarten Zinssatz. Somit steigt die Intensität einer Rückzahlung je Prozentpunkt des Zinssatzes um 11%, 7,5% und 23%. Die beiden Indikatorvariablen I_{NomLow} und I_{NomMed} besitzen nur Einfluss, falls der Kredit die entsprechenden Rahmengröße trifft, zum Beispiel:

$$I_{NomLow} = \begin{cases} 1, & \text{Nominale des Kredites bis EUR 50000.-} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.5)$$

Diese Variablen heben die Rückzahlungsbereitschaft der Kreditnehmer nochmals an. Die Erkenntnis dazu ist, dass Kredite niedrigeren Rahmens eher vorzeitig getilgt werden, als solche mit höheren Kreditrahmen.

Die stochastischen Modelle folgen der Erkenntnis, dass die simulierten Daten bezüglich den monatlichen Rückzahlungsraten keiner Verteilung gehorchen, deren Tails stark ausgeprägt sind. Wie jedoch in [15] nachzuvollziehen, unterliegen die Rückzahlungsraten in ihrer zeitlichen Dynamik Sprüngen, weshalb sie zunächst nur im Speziellen bei dieser Anwendung als nicht adäquat geltend gemacht werden sollten. Bei den simulierten Daten kommt der oftmals verwendete Normalverteilungsansatz stark zum Vorschein, weshalb sich die Modellierung über das diskutierte Levy Modell als nicht tragbar erweist.

Das Normale-Einfaktor Modell weist mit Zuhilfenahme der empirischen Rückzahlungsraten ein besseres Bild auf, was aus zuvor erläuterten Gründen sinnvoll erscheint.

6.3 Reale Daten

Die realen Daten wurden von der Raiffeisen Landesbank Steiermark in anonymisierter Form zur Verfügung gestellt. Der Datensatz beschreibt einerseits Kredite, die zu einem Zeitpunkt vollständig getilgt wurden (Prepayment) und andererseits jene Kredite, welche nur teilweise getilgt wurden (Schmälerungen). Zunächst waren folgende Informationen zu den Krediten vorhanden:

- Währung (WHG)
- Kreditart: Darlehen oder Einmalkredit
- Letzte Änderung (LastChange)
- Kreditende (Ende)
- Kreditbeginn (Beginn)
- Rating: bankinternes Beurteilungsschema für Kreditnehmer

- Zins
- Kreditnominale (Rahmen)
- Tilgungsannuität (Rate)
- Ratenplan: monatlich, quartalsweise oder halbjährlich
- Tilgungsbetrag (Tilgung): außerordentliche Tilgungs- bzw. Teiltilgungssumme
- Restkredit (Rest): Restbetrag des Kredites nach Tilgung

Aus diesen Informationen wurden zunächst die Laufzeit und das Alter des Kredites zum Zeitpunkt der Rückzahlung (PrepAlter) ermittelt, woraus der Datensatz in der Form, wie er in Auszügen in der Abbildung 6.25 gezeigt wird, entstanden ist. Wie sich eventuell schon aus den Auszügen vermuten lässt, werden in den Datensätzen ausschließlich Kredite abgebildet, die einem Prepayment oder einer Schmälerung unterliegen. Aus diesem Grund fehlt als Referenz die Menge an Krediten, die nicht durch Sonderzahlungen getilgt oder geschmälert wurden. Dies verhindert zum Beispiel eine Betrachtung der Daten gemäß dem Überlebensmodell, wie es anhand der simulierten Daten in 6.2.3 gezeigt wurde.

WHG	Art	LastChange	Ende	Beginn	Laufzeit	PrepAlter	Rating	Zins	Rahmen	Rate	Ratenplan	Tilgung	Rest
EUR	Einmalkredite	18.07.13	01.05.15	27.04.05	121	99	1,5	2	-18000	174,27	111111111111	4995,09	0
EUR	Einmalkredite	04.07.13	01.07.14	02.07.09	60	48	1,5	2	-1000	17,96	111111111111	1583,47	0
EUR	Einmalkredite	19.02.13	01.07.36	29.06.11	301	20	2	0,63	-97500	352,35	111111111111	41682,31	0
EUR	Einmalkredite	23.07.13	01.02.14	13.02.09	60	53	1,5	NaN	-7300	121,67	111111111111	703,18	0
...
EUR	Einmalkredite	12.02.13	01.01.27	19.12.11	181	14	3	0,875	-75000	253,39	111111111111	32588,42	-35902,22
EUR	Einmalkredite	11.07.13	01.06.16	17.05.11	61	26	2,5	0,875	-25000	246,05	111111111111	10000	-6645,6
EUR	Einmalkredite	13.06.13	05.05.28	26.04.13	181	2	2,5	2	-35000	181,52	111111111111	5860	-27824,14
EUR	Einmalkredite	13.11.13	15.08.37	16.08.12	300	15	2,5	2	-102000	398,64	111111111111	6397,08	-94733,68

Abbildung 6.25: Datensatzauszug von vollständig getilgten oder geschmälerten Krediten: Die Werte für den Kreditrahmen und Kreditrest sind negativ, da sie aus Sicht der Bank eine ausstehende Forderung darstellen.

Trotz der fehlenden Information, in welcher Relation sämtliche geschmälerten Kredite zur Gesamtmenge aller Kredite stehen, werden Rückzahlungsmerkmale aus den Prepaymentdaten untersucht. Daraus wird eine Prognostizierbarkeit abgeleitet und eine Risikoeinschätzung betreffend der entgangenen Zinszahlungen getroffen.

6.3.1 Datenanalyse

Zuallererst wurden die Datensätze als Gesamtes, mithilfe explorativer statistischer Methoden auf Merkmale und Auffälligkeiten, untersucht.

Ein erster Blick wird auf die Kreditrahmen und die dazugehörigen Laufzeiten geworfen. Wie in Abbildung 6.26 dargestellt, enthält der Datensatz übermäßig viele Kleinkredite mit Nominalen unter 100.000 EUR, beziehungsweise auch deutlich mehr Kredite mit kürzeren und mittleren Laufzeiten. Außerdem bestätigt der geschätzte Korrelationskoeffizient zwischen beiden Größen - $\rho_{Mat,Nom} = 0,54$ - die in der Simulation getätigte Annahme, dass Laufzeiten in einem deutlichen Zusammenhang zu den jeweiligen Nominalen stehen. Auffallend bei der Betrachtung der Laufzeit sind die vielen unterjährigen Kreditlaufzeiten. Zwar gibt es markante Häufungspunkte bei diversen ganzjährigen Laufzeiten, doch die Menge solcher unterjährigen Kredite wirft die Frage auf, ob diese aus Eingabefehlern resultieren, oder ob tatsächlich Kredite mit solchen Laufzeiten abgeschlossen werden. Für kurzfristige Kredite erscheinen unterjährige Laufzeiten durchaus nachvollziehbar, während die Menge an langfristigen unterjährigen Krediten durch Fehler in der Eingabe oder Berechnung zu erklären sein könnten.

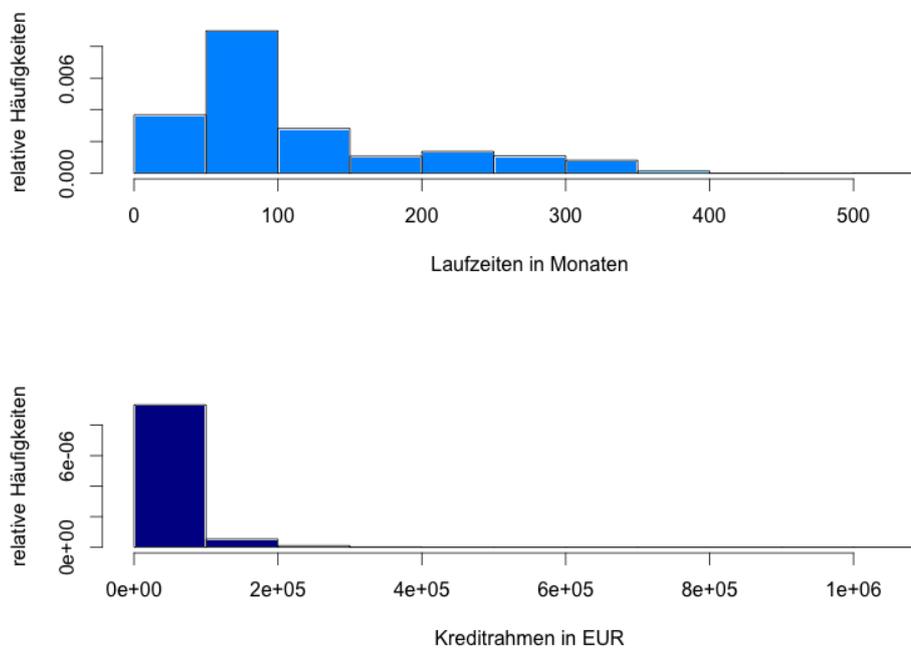


Abbildung 6.26: Relative Häufigkeiten der aufgezeichneten Laufzeiten und Kreditbeträge der realen Daten

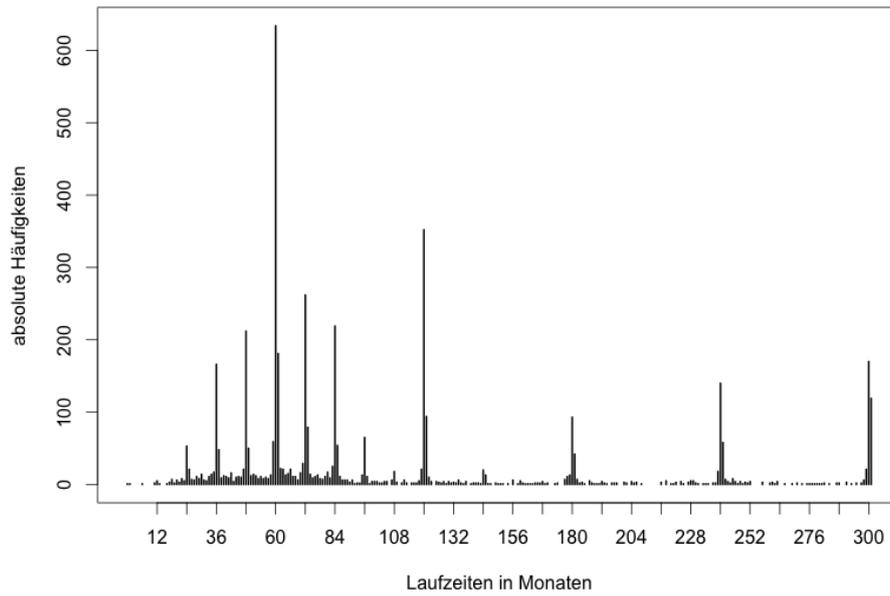


Abbildung 6.27: Häufigkeiten der aufgezeichneten Laufzeiten der realen Kredite

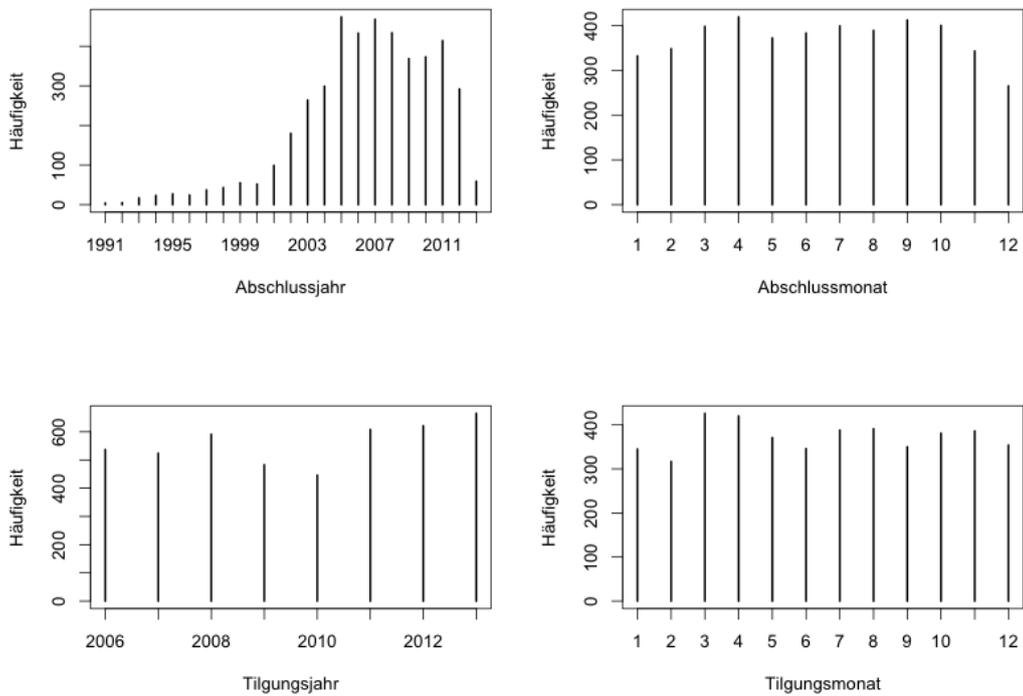


Abbildung 6.28: Häufigkeiten von Abschlussjahr und -monat beziehungsweise Tilgungsjahr und -monat

Wie die Abbildung 6.27 zeigt, sind speziell Laufzeiten von 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 120, 180, 240 und 300 Monaten besonders häufig. Auffallend hierbei sind auch die damit verbundenen Nebenhäufungspunkte jeweils einen Monat später.

Die Betrachtung der absoluten Abschlusszeitpunkte sowie der Rückzahlungszeitpunkte in Jahren und Monaten (Abbildung 6.28) zeigt keine besonderen Auffälligkeiten, dass auf keinerlei Saisonalität schließen lässt. Bezüglich den Schmälerungen (vorzeitige Teiltilgungen) ist aus den Daten nicht ersichtlich, ob zu einem Kredit mehrere Schmälerungen stattfanden. Deshalb wurden ausschließlich einmalige Teiltilgungen angenommen. In diesem Zusammenhang ist eine gemeinsame Betrachtung mit Prepayments (vorzeitige vollständige Tilgung) zulässig, da es bei dieser Betrachtung um die bloßen Zeitpunkte von außerordentlichen Tilgungen geht. Ein Großteil der vorliegenden Kredite wurde entsprechend der Abbildung 6.28 im Laufe des letzten Jahrzehntes abgeschlossen.

Die Tilgungspläne werden in binärer Form dargestellt. Durch eine 1 wird angezeigt, an welchen Monaten im Jahr eine Annuitätenzahlung vereinbart wurde. Hauptsächlich werden die Kredite in monatlichen Raten zurückbezahlt.

Die gewöhnlichen Tilgungsraten sind, gemäß den unten angeführten Quantilen (Listing 6.19), zu einem überwiegenden Teil unter 1.100 EUR, das in etwa dem Tilgungsniveau von üblichen Hausbaukrediten entspricht.

```
1 > quantile(Rate, probs=c(0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99), na.rm=TRUE)
2   50%   75%   90%   95%   99%
3 199.0550 303.5375 459.8860 616.6665 1132.1802
```

Listing 6.19: Quantile der Annuitäten (in EUR)

Ein weiterer Blick auf die Annuitäten (Abbildung 6.29 links) zeigt, weist ein großer Anteil der Daten sehr geringe Rückzahlungsannuitäten von unter 200 EUR bis 300 EUR auf.

Das Rating der Kredite folgt in etwa einer Normalverteilung. Die meisten Ratings beziehen sich auf einen Bereich rund um Werte von 2 und 3 (Abbildung 6.29 rechts).

Die statistische Zusammenfassung der außerordentlichen Tilgungszahlungen zeigt, dass im Mittel knapp 18.000 EUR für Kredittilgungen beziehungsweise -schmälerungen aufgewendet werden. Ein betragsmäßiger Vergleich zwischen kompletten Tilgungen und Schmälerungen, wie in Abbildung 6.30 dargestellt, zeigt, dass häufiger höhere Beträge eingesetzt werden um den Restkredit zu schmälern, während komplette Tilgungen überwiegend mit kleineren Beträgen durchgeführt werden.

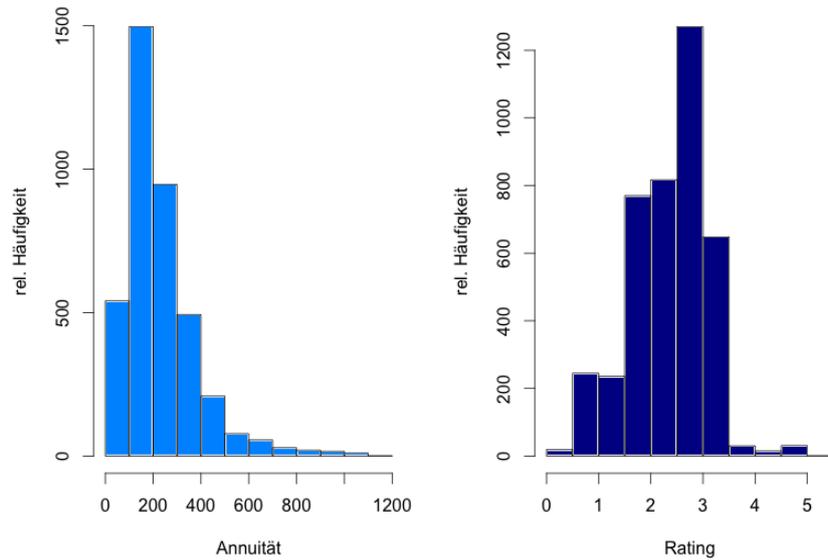


Abbildung 6.29: Relative Häufigkeiten von Annuitätenhöhe und Kreditratings

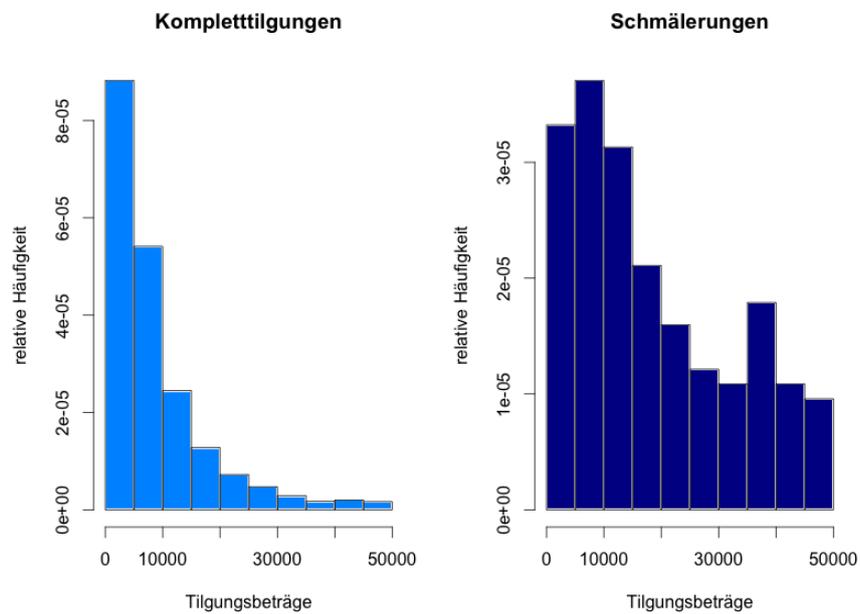


Abbildung 6.30: Relative Häufigkeiten der Tilgungsbeträge von Kompletttilgungen bzw. Schmälerungen: Links wurden die Beträge im Zusammenhang mit Prepayments abgebildet und rechts zeigt das Histogramm die außerordentlichen Tilgungsbeträge bezüglich den Schmälerungen.

Insgesamt lässt sich behaupten, dass dieser Datensatz nur sehr wenige typische Hypothekarkredite enthält und sehr viele Kleinkredite.

6.3.2 Rückzahlungsmotive

Da durch die gegebene Datenstruktur keine Modelle bezüglich der Rückzahlungsmotive kalibriert werden können, ist es schwierig eine Aussage über die bestimmenden Faktoren zu treffen. Trotzdem wurden einige der charakteristischen Merkmale betrachtet. Ein Blick (Abbildung 6.31) auf die empirischen Rückzahlungszeitpunkte der Kredite zeigt tatsächlich, dass die Prepaymentraten nach zwei bis drei Jahren auf ein Maximum ansteigen und danach wieder sukzessive abfallen.

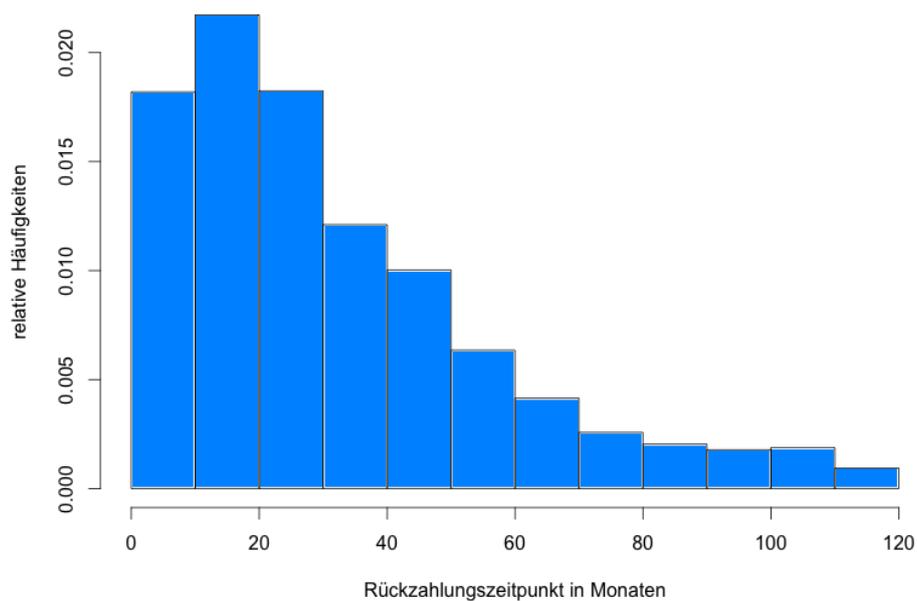


Abbildung 6.31: Rückzahlungszeitpunkte der realen Kredite bei Kompletttilgung oder Schmälerung

Ein weiterer Rückzahlungsanreiz ist zweifelsohne die Änderung der Zinsraten. Sehr auffällig ist, dass die Differenz zwischen dem Referenzzinssatz (3 Monats-EURIBOR aus [27]) zu Vertragsbeginn und zum Tilgungszeitpunkt in den letzten Jahren deutlich angestiegen ist (siehe Abb. 6.32). Dies ist ein starkes Motiv für Tilgungsanreize in diesen Jahren. Dementsprechend sind die Zinssätze zu den Tilgungszeitpunkten sukzessive gefallen.

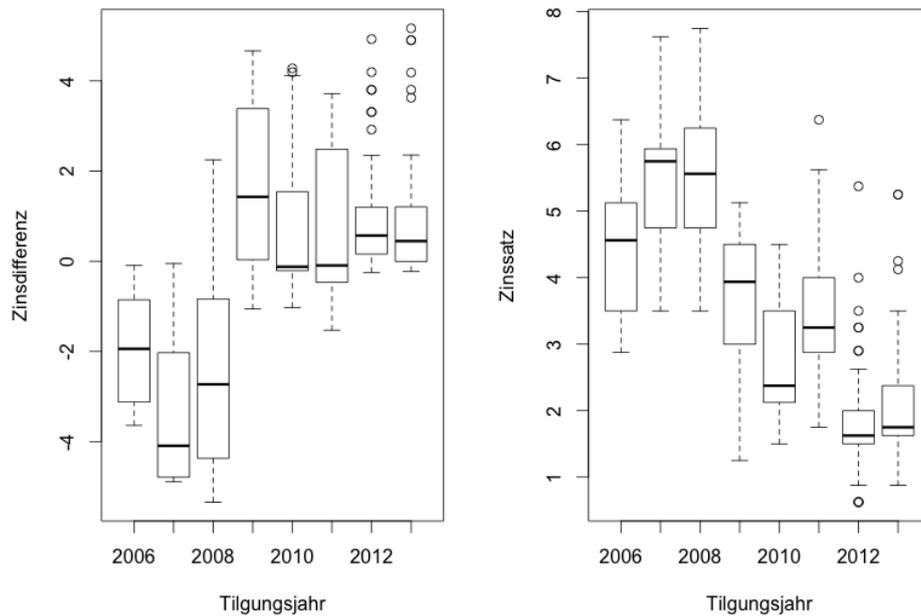


Abbildung 6.32: Boxplotserie der EURIBOR-Differenz (zwischen Kreditbeginn und Tilgungszeitpunkt) unterteilt nach Tilgungsjahren (links), Boxplotserie der vertraglichen Zinssätze unterteilt nach Tilgungsjahren (rechts)

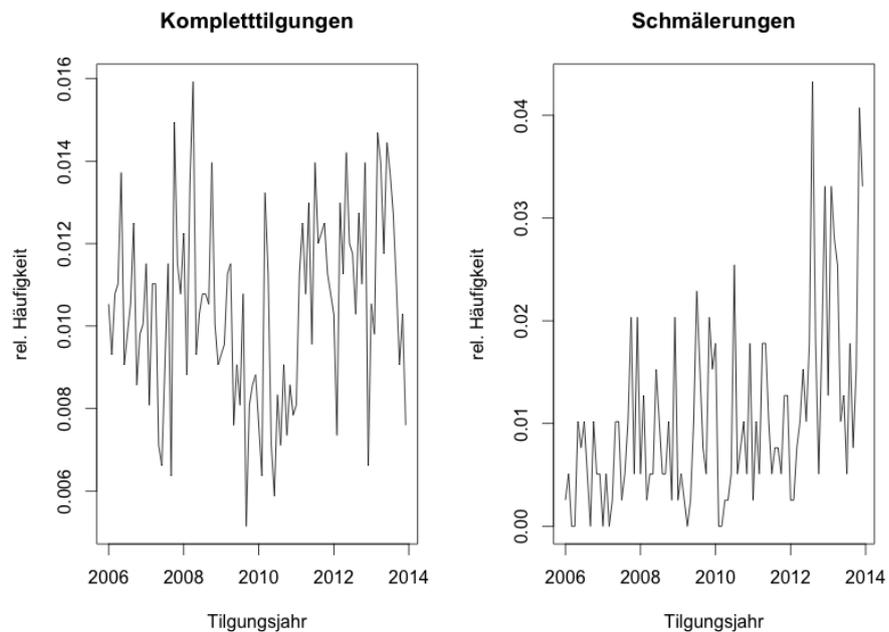


Abbildung 6.33: Zeitreihen der relativen Häufigkeiten getilgter Kredite von Kompletttilgungen und Schmälerungen

Betrachtet man die relativen Häufigkeiten der getilgten Kredite im Zeitverlauf (Abbildung 6.33), so kann man jeweils in solchen Jahren eine stärkere Tendenz erkennen, in denen auch die Zinssätze fallen. Dies bestätigt die Vermutung, dass Kredite in niedrigeren Zinsphasen, und speziell in solchen Phasen, in denen der einzelne Kreditnehmer einen Zinsvorteil genießen kann, eher getilgt werden als in höheren Zinsphasen.

6.3.3 Modellauswahl und -kalibrierung

Wie in Abbildung 6.34 dargestellt, sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Kredit nicht vorzeitig getilgt wird, in den ersten paar Monaten drastisch. Nach zirka 100 Monaten beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kredit noch nicht getilgt wurde, nur mehr in etwa 10%.

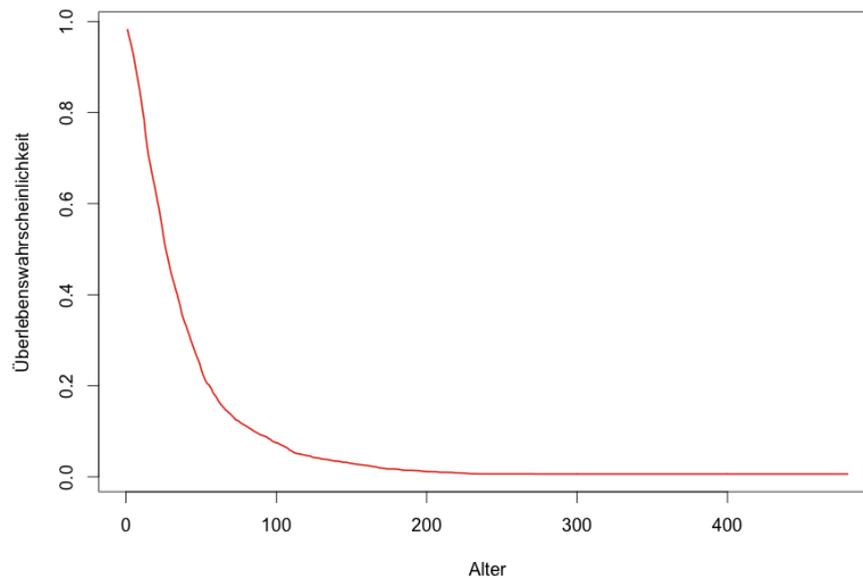


Abbildung 6.34: Überlebensfunktion der realen Kreditdaten

Der Mittelwert der empirischen Verteilung beträgt $\mu = 0,9175$ und die Standardabweichung $\sigma = 0,1835$. Diese Werte werden in weiterer Folge für die Parametrisierung der Levy-Prozesse benötigt.

Pooling der Daten

Um den gesamten Datensatz vor einer Modellierung etwas zu strukturieren, wird in diesem Abschnitt versucht, die Daten gemäß Abschnitt 3.2.2 in einige Gruppen zusammenzufassen. Dabei können beispielsweise die Daten gemäß den markanten Laufzeiten (siehe Abb. 6.27) gruppiert werden. Die Dichte der Daten lässt im Allgemeinen keine weitere Unterteilung der Daten zu, da dabei die Aussagekraft verloren gehen könnte. Im Speziellen hingegen könnte für einige wenige nach Laufzeit gruppierten Pools eine weitere Unterteilung bezüglich der Ratings oder der jeweiligen Zinssätze getroffen werden.

Exemplarisch wurden die Kreditdaten mit Laufzeiten von 60, 120 und 300 Monaten herangezogen. Die Abbildung 6.35 zeigt, dass das Rückzahlungsverhalten von kurzfristigeren Krediten deutlich ausgeglichener über die Laufzeit ist, als jenes von langfristigen Krediten. Letztere verhalten sich tatsächlich gemäß dem diskutierten Schema, dass Rückzahlungsraten zunächst stark ansteigen und danach sukzessive bis zum Ende der Laufzeit langsam abfallen.

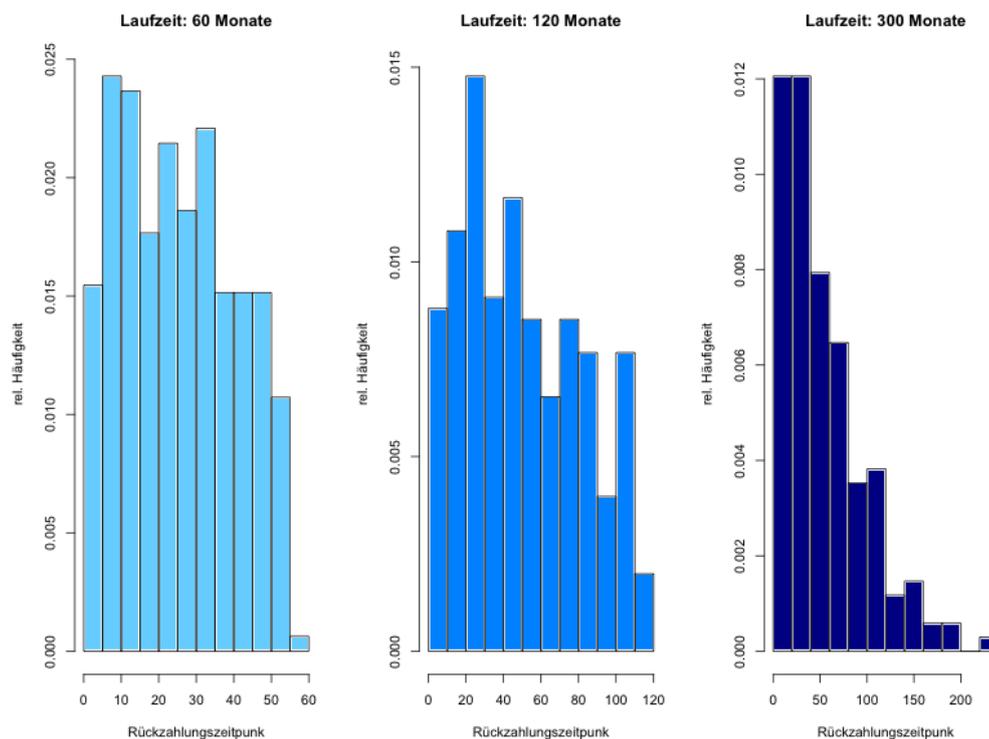


Abbildung 6.35: Relative Häufigkeiten der Prepaymentzeitpunkte für die drei definierten Kreditpools

Die dazugehörigen empirischen Survivalfunktionen sind in Abbildung 6.36 ersichtlich. Aus den empirischen Verteilungen der drei Kreditpools wurden Mittelwerte und Standardabweichungen, wie in Tabelle 6.4 aufgelistet, berechnet.

Laufzeit	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
60	0.571	0.312
120	0.560	0.293
300	0.740	0.238

Tabelle 6.4: Erwartungswert und Standardabweichung der empirischen Verteilungen aus den Laufzeitkategorien

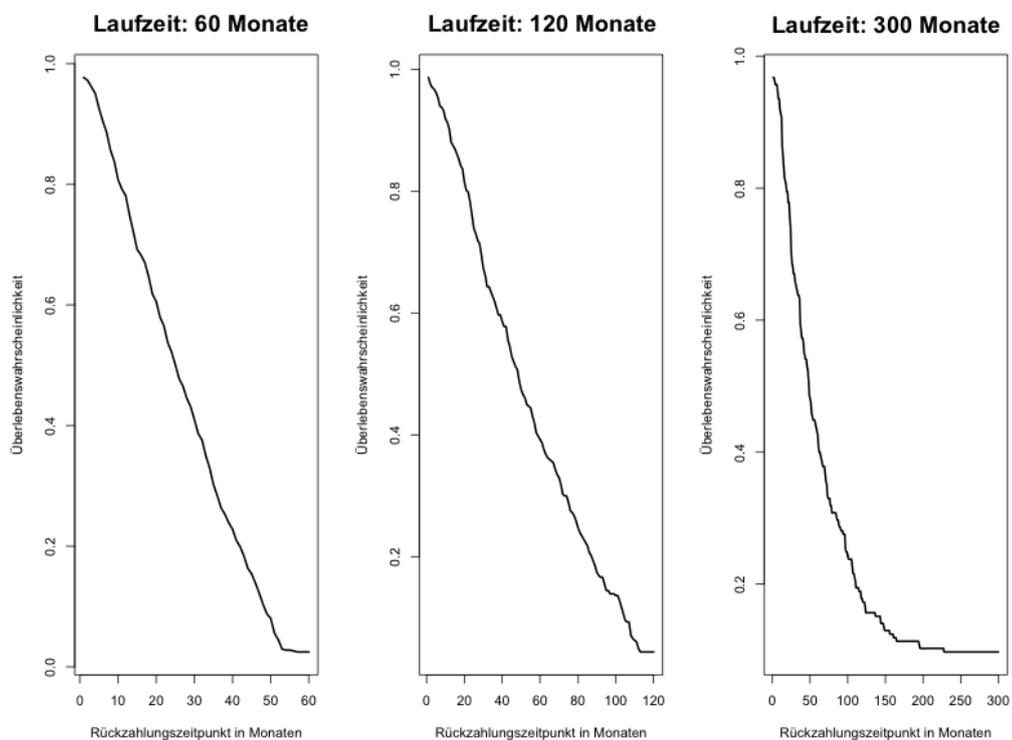


Abbildung 6.36: Survivalfunktionen der drei Kreditpools

Levy Modell

Für die Kalibrierung der Levy Prozesse sollen die zuvor, anhand der neu definierten Pools, gruppierten Daten entsprechend Abschnitt 4.5.2 modelliert werden. Die numerische Berechnung der beiden charakteristischen Parameter des Gamma-Prozesses mit `Mathematica` liefert folgendes Resultat, welches in Tabelle 6.5 aufgelistet ist.

Laufzeit	a	b
60	0.0145631	0.611956
120	0.008705	0.83721
300	0.00560883	0.815127

Tabelle 6.5: Parameter der Levy-Prozesse für verschiedene Laufzeitkategorien

Aus diesen Parameterschätzungen können folgende Levy-Prozesse für die jeweiligen Kreditdaten simuliert werden. Abbildung 6.37 zeigt jeweils einen simulierten Pfad je Gruppierung.

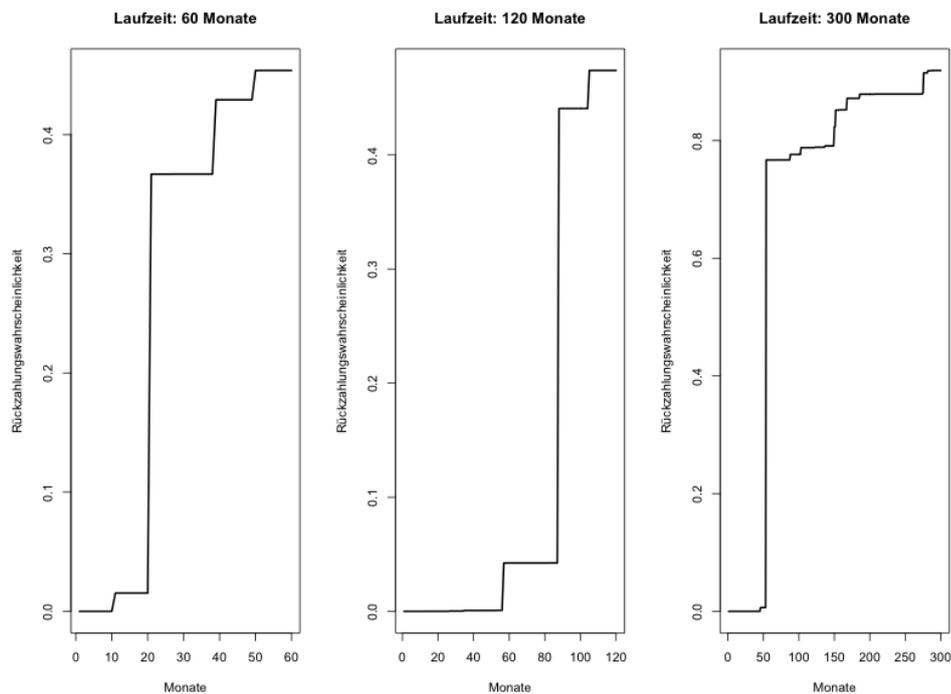


Abbildung 6.37: Über Levy-Prozesse simulierte Verteilungen der Rückzahlungszeitpunkte für die drei Laufzeitpools

Betrachtet man im Speziellen den zufällig simulierten Pfad für die Kreditdaten mit Laufzeit von 300 Monaten, und vergleicht man diesen mit der empirischen Verteilung der historischen Daten (Abbildung 6.38 links), so ist eine gewisse Übereinstimmung erkennbar. In der dazugehörigen rechten Abbildung wird eine Gegenüberstellung der theoretischen und empirischen Quantile der Prepaymentraten gezeigt. Dieser QQ-Plot zeigt zwar keine vollkommene Übereinstimmung, doch die Struktur weist ein wesentlich besseres Bild auf, als bei den vergleichbaren Modellierungen der simulierten Daten in Abschnitt 6.2.3.

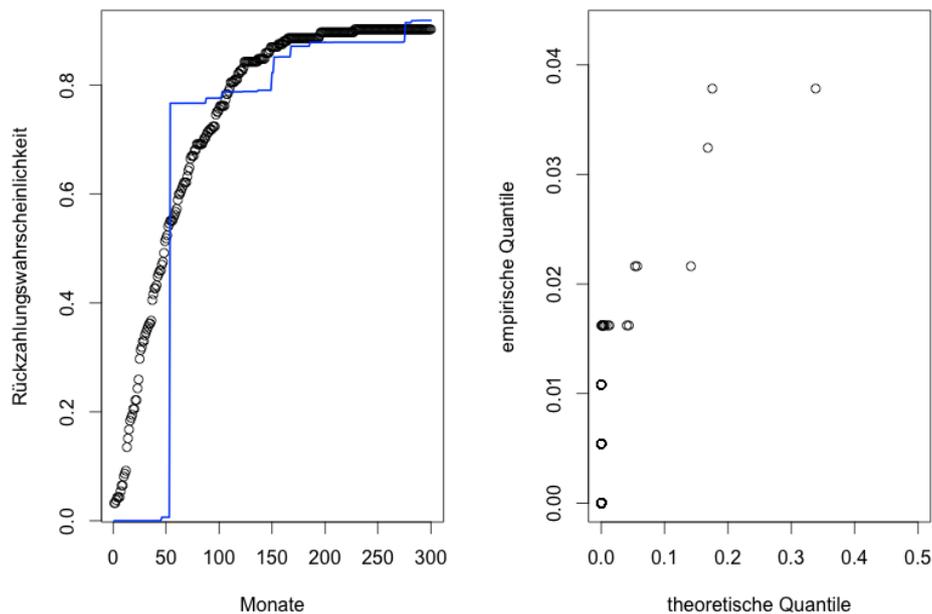


Abbildung 6.38: Gegenüberstellung der über den Levy-Prozess simulierten (durchgezogener Verlauf) und der empirischen Verteilung (gepunkteter Verlauf) für den Pool der Kredite mit Laufzeit von 300 Monaten (links) und Quantilplot der empirischen und theoretischen Samples (rechts)

Für Echtdata ist eine Modellierung der Verteilung über den vorgeschlagenen Levy-Prozess deutlich sinnvoller und effektiver als für die simulierten Daten, da reale Daten, wie so oft in finanzmathematischen Zusammenhängen, von normalverteilten Gegebenheiten abweichen.

Normal-Einfaktor-Modell

Neben dem stochastischen Levy Modell, das durch Sprünge gekennzeichnet ist, wird auch das ebenfalls stochastische Normale-Einfaktor Modell an die realen Daten angepasst, um daraus eine Verteilungsfunktion für die Rückzahlungszeitpunkte zu simulieren.

Zusätzlich soll dabei auch eine für diese Simulation notwendige, deterministische Prepaymentrate angepasst werden. In Gleichung 4.33 aus 4.4.3 wird der Ansatz verfolgt, dass die Prepaymentraten anfangs linear ansteigen und danach konstant bleiben. Der bereits vielfach angesprochene Ansatz aus dem Hazard Modell (Gleichung 4.19) ist eine weitere alternative Darstellung. Beide deterministischen Varianten der Prepaymentraten müssen

heuristisch an die Daten angepasst werden. In Abbildung 6.39 werden beide Varianten mit den empirischen Prepaymentraten verglichen.

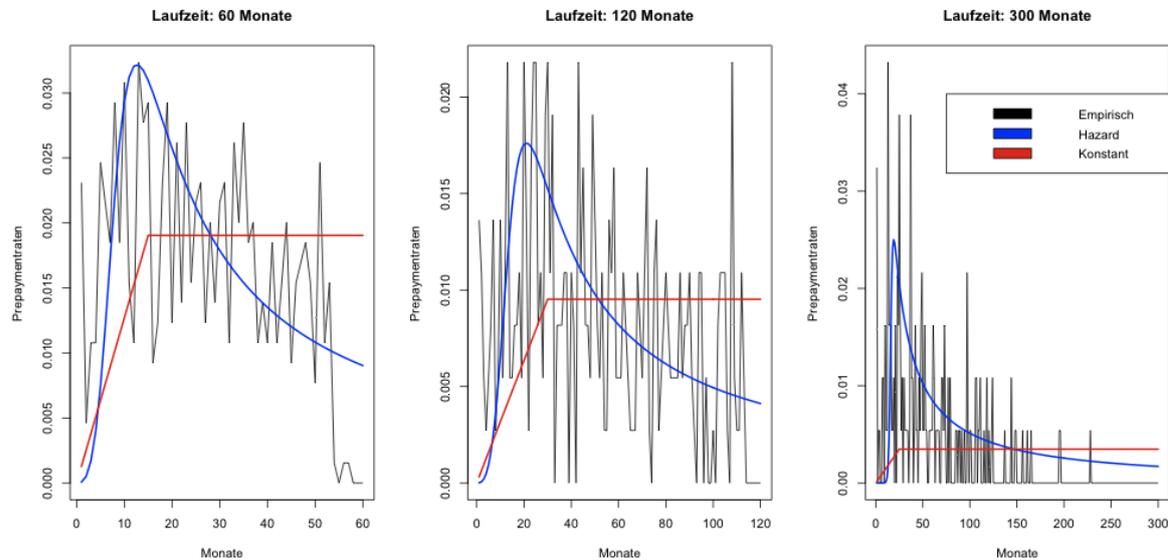


Abbildung 6.39: Gegenüberstellung der deterministisch modellierten und der empirischen Prepaymentraten

Beide Modelle beschreiben, da entsprechend genormt, eine korrekt spezifizierte Dichtefunktion für die darauf aufbauende Verteilungsfunktion. Die Anpassung über den homogenen Hazard-Ansatz ist angemessener, da diese die unweigerlich vorhandene Ausprägung verstärkter Tilgungen zu Beginn der Laufzeiten deutlich besser zum Ausdruck bringt, als der CPR-Ansatz. Für die Daten mit 120 Monaten Laufzeit sind die beobachteten Prepaymentraten gleichverteilter, weshalb hierbei das CPR Modell Verwendung finden könnte.

Analog zur Simulation mit den künstlich generierten Daten (siehe Listing 6.18) wird hier, entsprechend der Simulation des Normal-Einfaktor Modells, je Datenpool eine Verteilungsfunktion simuliert. Da als Referenz jeweils zwei deterministische Modelle zur Verfügung stehen, sollen auch beide zur Simulation herangezogen und verglichen werden.

Wie in Abbildung 6.40 ersichtlich, liefern die simulierten Pfade beider deterministischen Modelle - als Input für den Datenpool mit 60 Monaten und 120 Monaten Laufzeit - ein ähnliches Bild und weichen in ihrem Verhalten nicht signifikant von der historischen Verteilung ab. Wie man in derselben Abbildung rechts erkennen kann, ist dies jedoch nicht pauschal gültig. Weder der Pfad mit dem homogenen Hazard-Ansatz noch jener

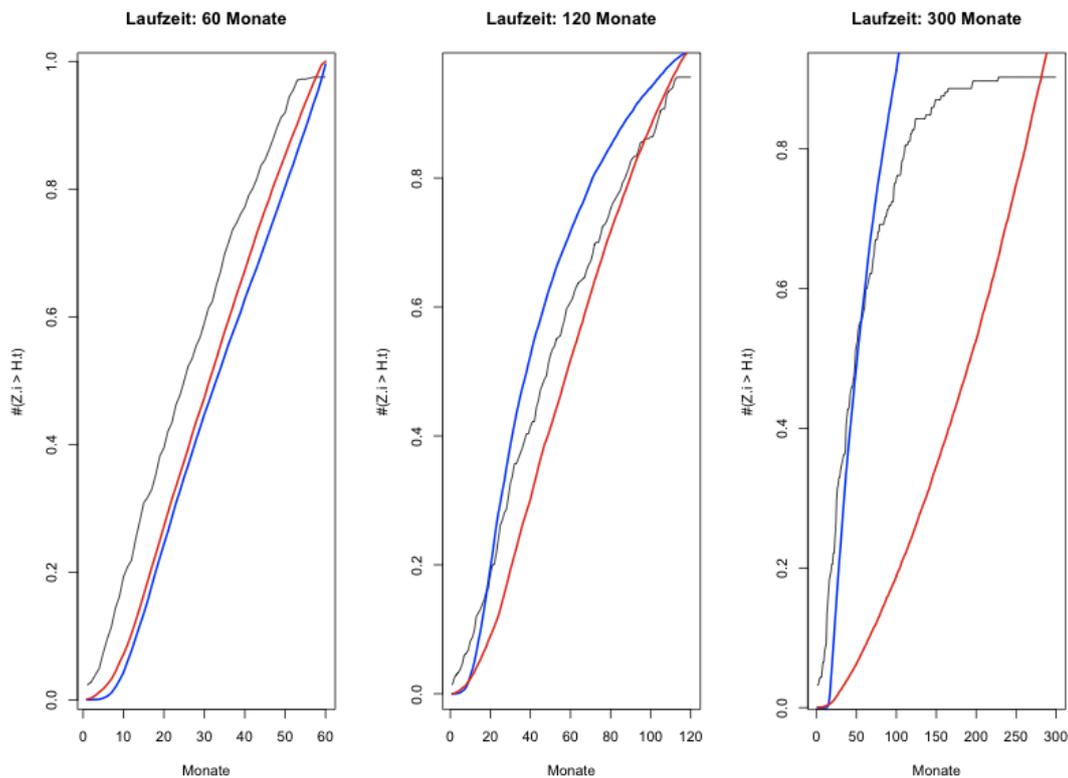


Abbildung 6.40: Vergleich der über das Normal-Einfaktor-Modell simulierten und der empirischen Verteilungen

mit dem CPR-Ansatz genügen einer Beschreibung dieser empirische Verteilung. Wie man zuvor bei der Modellierung über den Levy-Prozess gesehen hat, macht speziell hierbei die Stochastik der Sprünge den Unterschied aus.

6.3.4 Cashflow und Zinsverluste

Die bisherige Analyse bezieht sich auf die Motivation der Kreditnehmer, wann und auch warum ein Kredit vorzeitig getilgt wird. Ein in der Einleitung schon angeführtes Risiko, beziehungsweise eine Folge vorzeitiger Tilgungen oder Schmälerung von Krediten, ist das Entgehen geplanter Zinszahlungen. Aus diesem Grund enthält das Prepayment eine gewisse Planungsunsicherheit bezüglich künftiger (Zins-) Einnahmen. Diese entgangenen Zahlungen sollen im folgenden Abschnitt bezüglich der bereitgestellten Daten untersucht werden. Hierbei ist eine Differenzierung zwischen außerordentlichen kompletten Tilgungen (Prepayments) und Schmälerungen zu treffen. Während bei kompletten Tilgungen die

Schuld abgegolten wurde (Rest=0) und infolge dessen keine weiteren Zahlungen folgen, resultieren aus Schmälerungen trotzdem noch weitere Zahlungen. Schmälerungen können einerseits eine Verkürzung der Restlaufzeit bei gleichbleibenden Annuitätzahlungen, oder andererseits eine Reduktion der vereinbarten Annuitäten über die ursprüngliche Restlaufzeit zur Folge haben. Nach Information der Bank, welche die Daten zur Verfügung stellte, wird anhand des Restvolumens eine neue Annuität über die Restlaufzeit berechnet. Um etwas Transparenz in den Berechnungsformalismus der Bank bezüglich der Kreditdaten zu bringen, wurden einige der spezifischen Werte, wie Rate oder Tilgung, nochmals nachberechnet und mit den gelieferten Daten verglichen. Aus diesen Werten wurden nun einige Erkenntnisse gezogen, wie zum Beispiel der Fakt, welche Zinszahlungen verloren gehen, oder wie riskant die Planungshorizonte sind.

Aus den gegebenen Daten lässt sich die getätigte außerordentliche Tilgung zur vollständigen Tilgung beziehungsweise zur Schmälerung des Kredites mühelos isolieren. In den Daten spiegeln sich unter Tilgung sämtliche im letzten Tilgungsjahr getätigten Zahlungen wieder. Dieser Betrag muss um die regelmäßigen (monatlichen) Annuitätzahlungen reduziert werden, um zum gewünschten Prepaymentbetrag zu gelangen.

Wie in Abbildung 6.41 zu sehen ist, sind auch die Tails dieses Histogramms nicht zu vernachlässigen. Ein tieferer Blick in den Bereich der hohen Sonderzahlungsbeträge offenbart markante relative Anteile an Sonderzahlungen über 100.000 EUR. Wie sich dies in weiterer Folge auf die daraus entgangenen Zinszahlungen auswirkt, wird im Folgenden untersucht.

Aus jedem Kredit kann nach Vertragsabschluss anhand der gegebenen Informationen zumindest eine Prognose erstellt werden, wie viele Zinszahlungen für die Bank über die Laufzeit eingenommen werden. Diese lassen sich bei Annuitätentilgungsplänen aus der Summe aller Annuitäten weniger der Nominale errechnen. Durch die getätigten Sonderzahlungen reduziert sich dieser Zinsgewinn je Kredit. Bei kompletten Tilgungen reißt der Zahlungsstrom der Zinsen abrupt ab. Die Zinsverluste gegenüber dem Plan setzen sich somit aus den nicht mehr vorhandenen Zinszahlungen zusammen. Bei einer Schmälerung gestaltet sich die Kalkulation als etwas schwieriger. Nachdem der ausstehende Kreditbetrag geschmälert wurde, wird anhand des ausstehenden Kreditbetrags über die Restlaufzeit eine neue Annuität berechnet. Dies erfordert einerseits die Ermittlung der Zinsbeträge vor und andererseits jener nach den Schmälerungen zu den damals gültigen Konditionen. Dies bezieht sich vor allem auf die Zinsrate, da diese bei einer Neuberechnung aktualisiert wird. Im Normalfall würde bei drastischen Zinsveränderungen ebenfalls eine Anpassung

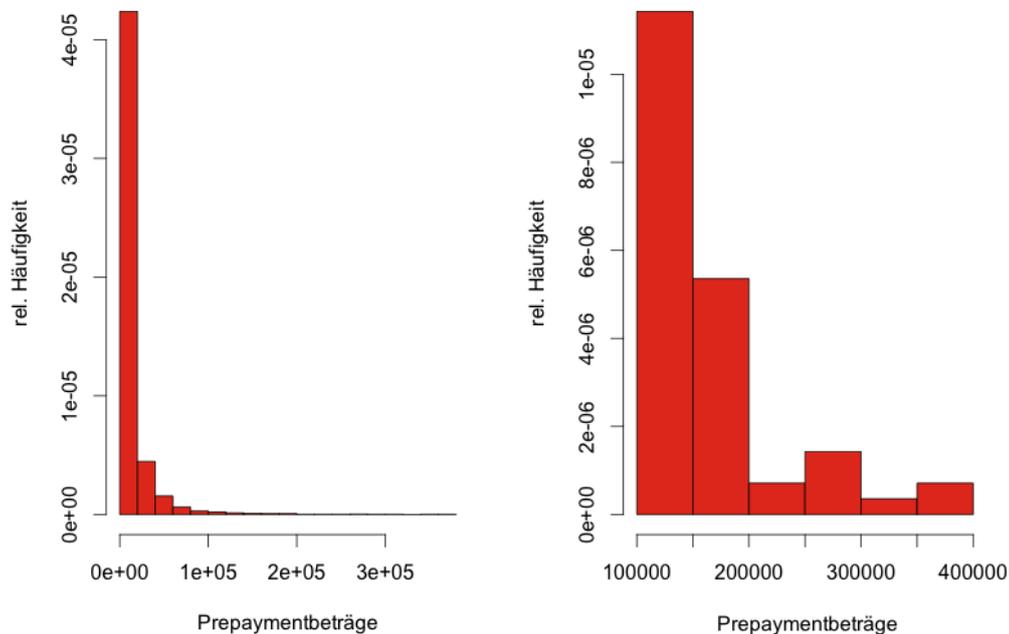


Abbildung 6.41: Relative Häufigkeit der außerordentlichen Tilgungsbeträge (links) und Auszug davon im Wertebereich $[100.000, 400.000]$ zur näheren Betrachtung der Tails (rechts)

erfolgen, aber dies soll in diesem Fall, aus Mangel an Informationskenntnis, ignoriert werden.

Im Folgenden werden mit Hilfe von R die verlorenen Zinszahlungen je Kredit ermittelt. Bei der Analyse der erwarteten Zinsgewinne bedarf es einer gesonderten Betrachtung von kompletten Tilgungen und Schmälerungen, da für Schmälerungen, nachdem eine außerordentliche Teiltilgung erfolgt, eine Neuberechnung der Annuität über die Restlaufzeit und den Restrahmen erfolgt. Aus diesem Grund sind nur die neu berechneten Informationen bekannt, die ursprünglichen Kreditinformationen (Zinssatz, Annuität) müssen, nach Auskunft der Bank, neu berechnet werden. Die Ermittlung eines verwendbaren Zinssatzes zu Kreditbeginn erfolgt aus der Zeitreihe des dreimonatigen EURIBORs (siehe Abbildung 4.2). Aus dieser Referenz wird, mit einem Aufschlag, ein näherungsweise Zinssatz für den Beginn der Kreditlaufzeit ermittelt, um daraus eine vernünftige Approximation für die monatlichen Annuitäten zu Kreditbeginn zu berechnen. Daraus kann ein ungefähres Rückzahlungsprofil über die gesamte Laufzeit abgebildet und die, aus der Kredit-schmälerung erlittenen, entgangenen Zinsgewinne ermittelt werden.

Kompletttilgungen (Prepayment)

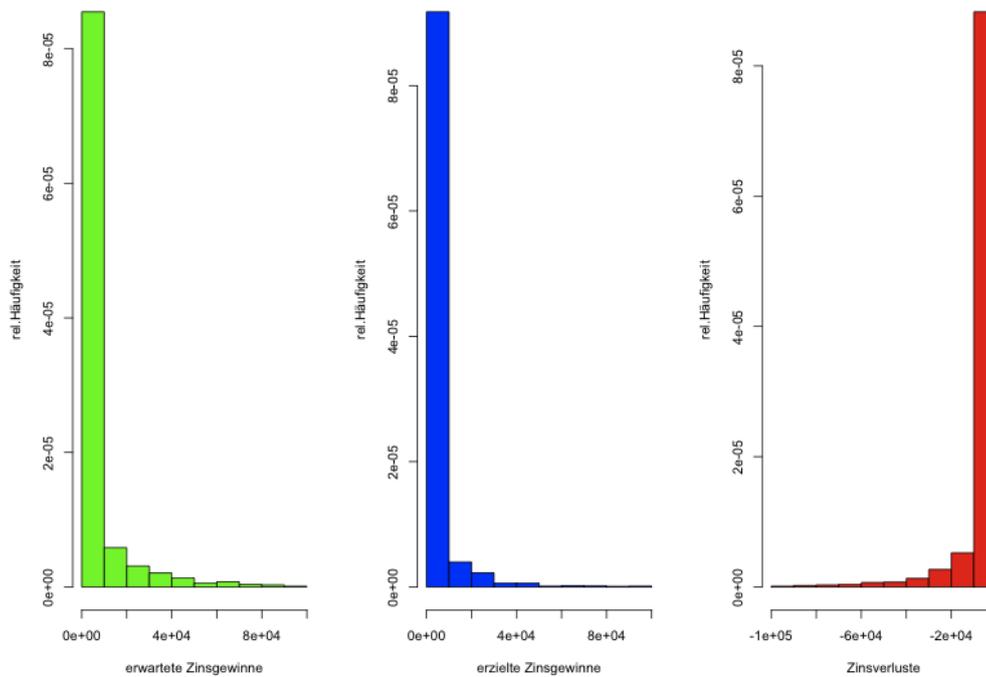


Abbildung 6.42: Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Kompletttilgungen

Für die kompletten Tilgungen stellt sich dieses Problem im Wesentlichen nicht, da während der aktiven Laufzeit bis zur Tilgung nur die zu Beginn ermittelte Annuität gültig war. Berechnet man nun nach bereits zuvor beschriebenem Schema die Verluste aus den vorzeitigen Tilgungen, so zeigt sich folgendes Bild: Die Abbildung 6.42 zeigt die erwarteten Zinsgewinne (links), die realisierten Zinsgewinne (Mitte) und die daraus erlittenen Zinsverluste (rechts). Aufgrund manch fehlerhafter oder unvollständiger Datensätze ergaben sich auch anormale Werte, welche jedoch schon raus gefiltert wurden. Diese Aufschlüsselung zeigt, dass vorwiegend betragsmäßig kleine Verluste zu erwarten sind.

Eine Aufspaltung dieser Gewinne und des Verlusts bezüglich der zuvor definierten Pools (Abb. 6.43) zeigt, dass für kürzere Laufzeiten auch eher kleinere Verluste zu erwarten sind. Für den Pool mit Laufzeit von 120 Monaten resultiert ein ähnliches Bild, wenngleich die Verluste an den Rändern schon deutlicher ausgeprägt sind. Das diesbezüglich größte Gefahrenpotential enthalten die Kredite mit langen Laufzeiten (300 Monate). Da-

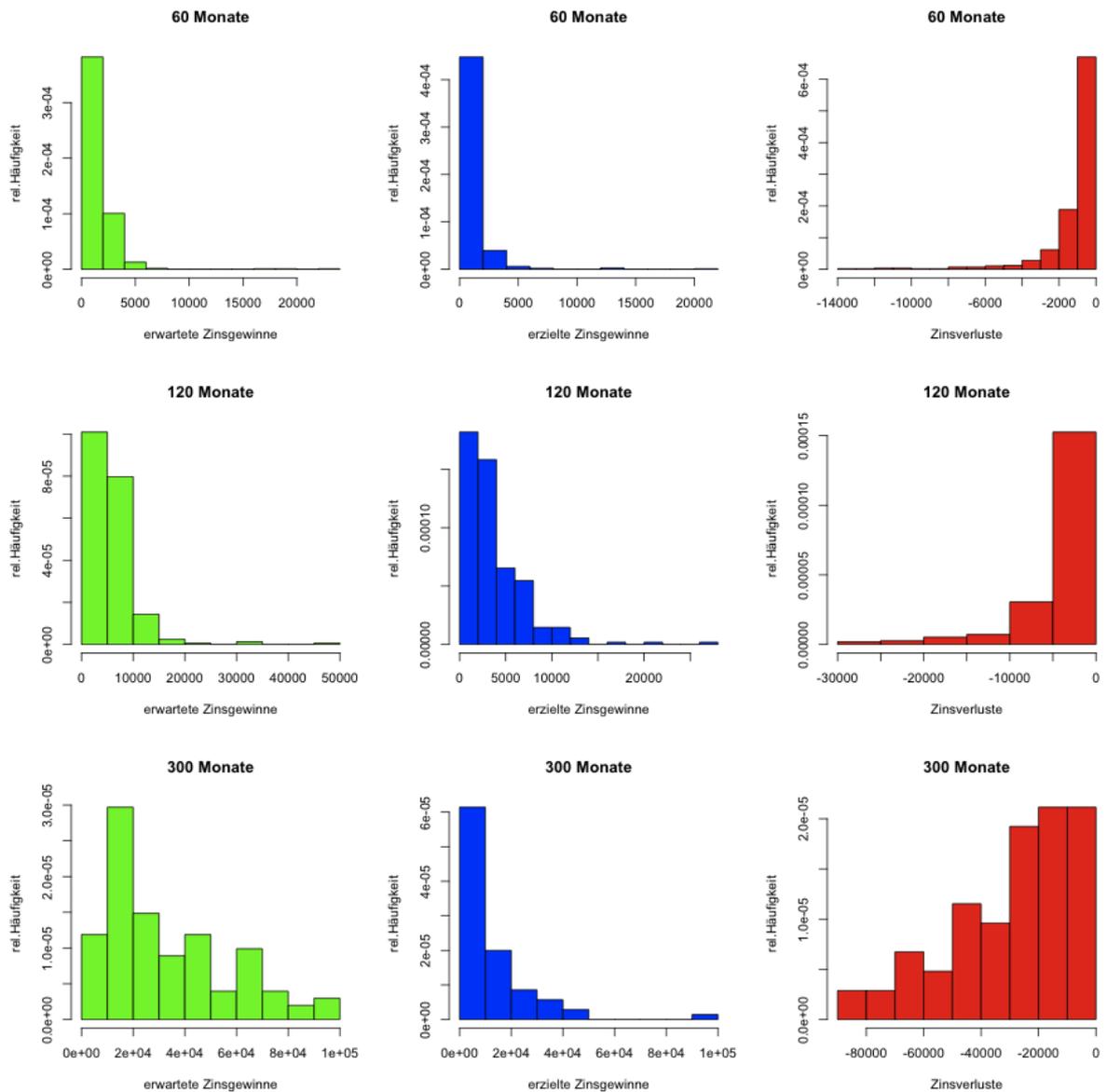


Abbildung 6.43: Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Kompletttilgungen je Laufzeitenpool

bei verteilt sich die Masse der Gewinne und speziell jene der Verluste deutlicher auf die Ränder.

Darauf aufbauend zeigt eine Zeitreihe (Abb. 6.44) der letzten Jahre die ermittelten kumulierten monatlichen Gesamtverluste resultierend aus außerordentlichen vollständigen Tilgungen.

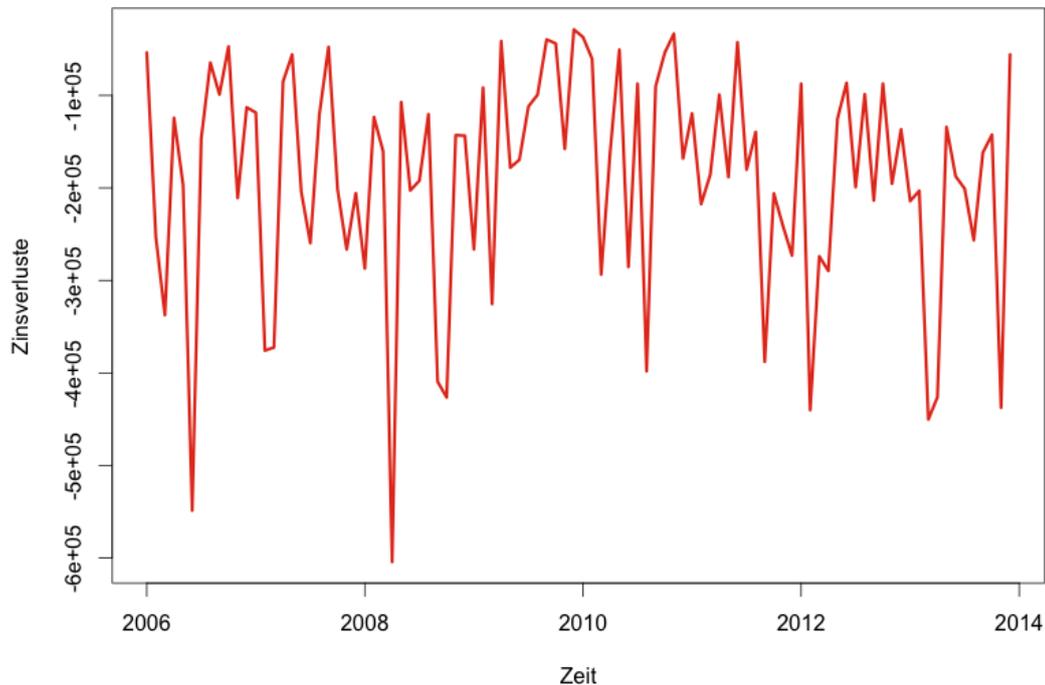


Abbildung 6.44: Zeitreihe der monatlichen Verluste, resultierend aus vorzeitigen, vollständigen Tilgungen zwischen 2006 und 2014

Die berechneten monatlichen Verluste schwanken zumeist zwischen knapp 40.000 EUR bis hin zu über 600.000 EUR, wobei hier nur die Verluste aus den totalen Tilgungen und solche eines vollständigen Datensatzes berücksichtigt wurden.

Teiltilgungen (Schmälerungen)

Nach demselben Prinzip, nur aufwendiger zu ermitteln, lassen sich die eventuellen Verluste aus den getätigten Schmälerungen näherungsweise berechnen. Dabei muss zunächst die Annuität zu Vertragsabschluss ermittelt werden. Der Aufwand besteht darin, dem Vertragsabschlussdatum den damals aktuellen dreimonatigen EURIBOR zuzuordnen und daraus den vertragmäßigen Zinssatz zu approximieren. Da dieser nicht unmittelbar vorliegt, muss aus der Näherung die ursprüngliche monatliche Annuität bestimmt werden. Die folgenden Funktionen in Listing 6.20 zeigen dieses Vorgehen in R:

```

1 Ann.Beg <- function(Nom,Mat,i,eur.alt,eur.neu){
2   diff <- i - eur.neu
3   zins.m <- (1+(eur.alt + diff)/100)^(1/12)
4   Rate <- Nom * (zins.m^Mat)*(zins.m-1)/(zins.m^Mat-1)
5   return(Rate)
6 }
7 Loss <- function(Nom,Mat,Prep,i,eur.alt,eur.neu,Tilg,Ann,Til.Mo){
8   Ann.alt <- -Ann.Beg(Nom,Mat,i,eur.alt,eur.neu)
9   Gew.plan <- Mat * Ann.alt + Nom
10  Gew.ist <- Prep*Ann.alt + (Mat - Prep) * Ann + Tilg - Til.Mo * Ann.alt + Nom
11  Lo <- Gew.ist - Gew.plan
12  return(Lo)
13 }
14 Loss.curt <- rep(0,length(Rahmen))
15 for(i in 1:length(Rahmen)){
16   Loss.curt[i] <- Loss(Rahmen[i],Laufzeit[i],PrepAlter[i],Zins[i],
17     EURIBOR.Beg[i],EURIBOR.Cu[i],Tilgung[i],Rate[i],CuMo[i])
18 }

```

Listing 6.20: Berechnung der Zinsverluste aus den Schmälerungen

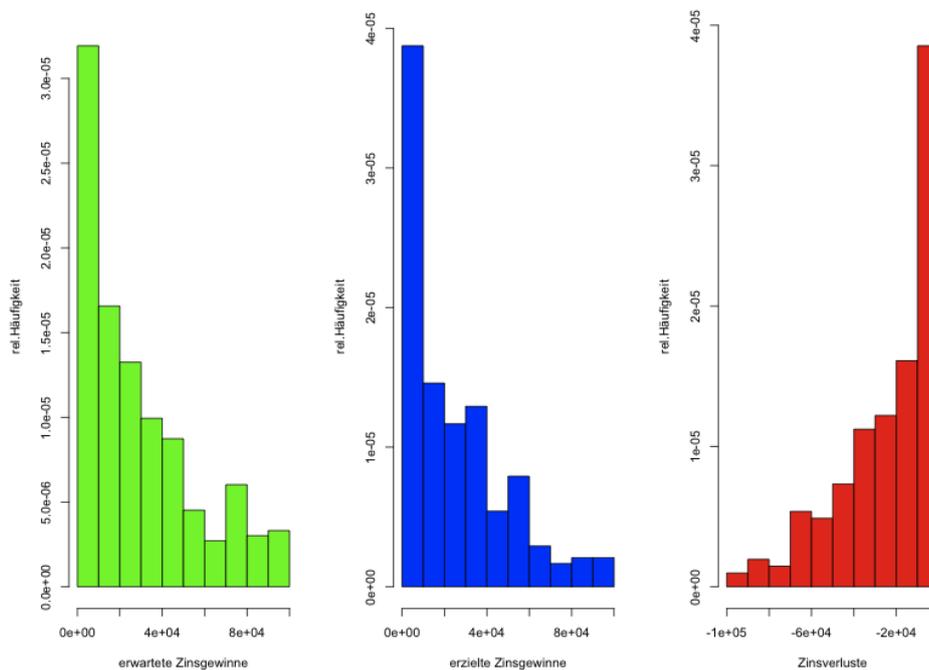


Abbildung 6.45: Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Schmälerungen

Aus der ursprünglichen Annuität kann der geplante Zinsgewinn bestimmt werden. Da nach der Schmälerung die Annuität an den restlichen Rahmen, die übrige Laufzeit sowie an den dann gültigen Zinssatz angepasst wird, lässt sich daraus der Zinsgewinn berechnen. Aus der Differenz lässt sich der daraus erlittene Verlust bestimmen. Unter Umständen

kommt es aber vor, dass der Zinsverlauf negativ auf die neu zu berechnende Annuität wirkt, weshalb natürlich auch Gewinn zwischen beiden Szenarien entsteht. Im Folgenden werden jedoch nur vollständige Datensätze mit verlustbehafteten Entwicklungen betrachtet. Wie schon zuvor, wird auch im Rahmen der Schmälerungen ein erster Blick (Abb. 6.45) auf die gesamten erwarteten und erzielten Gewinne sowie die daraus resultierenden Zinsverluste geworfen. Im Vergleich zu den Prepayments zeigen diese Histogramme weit

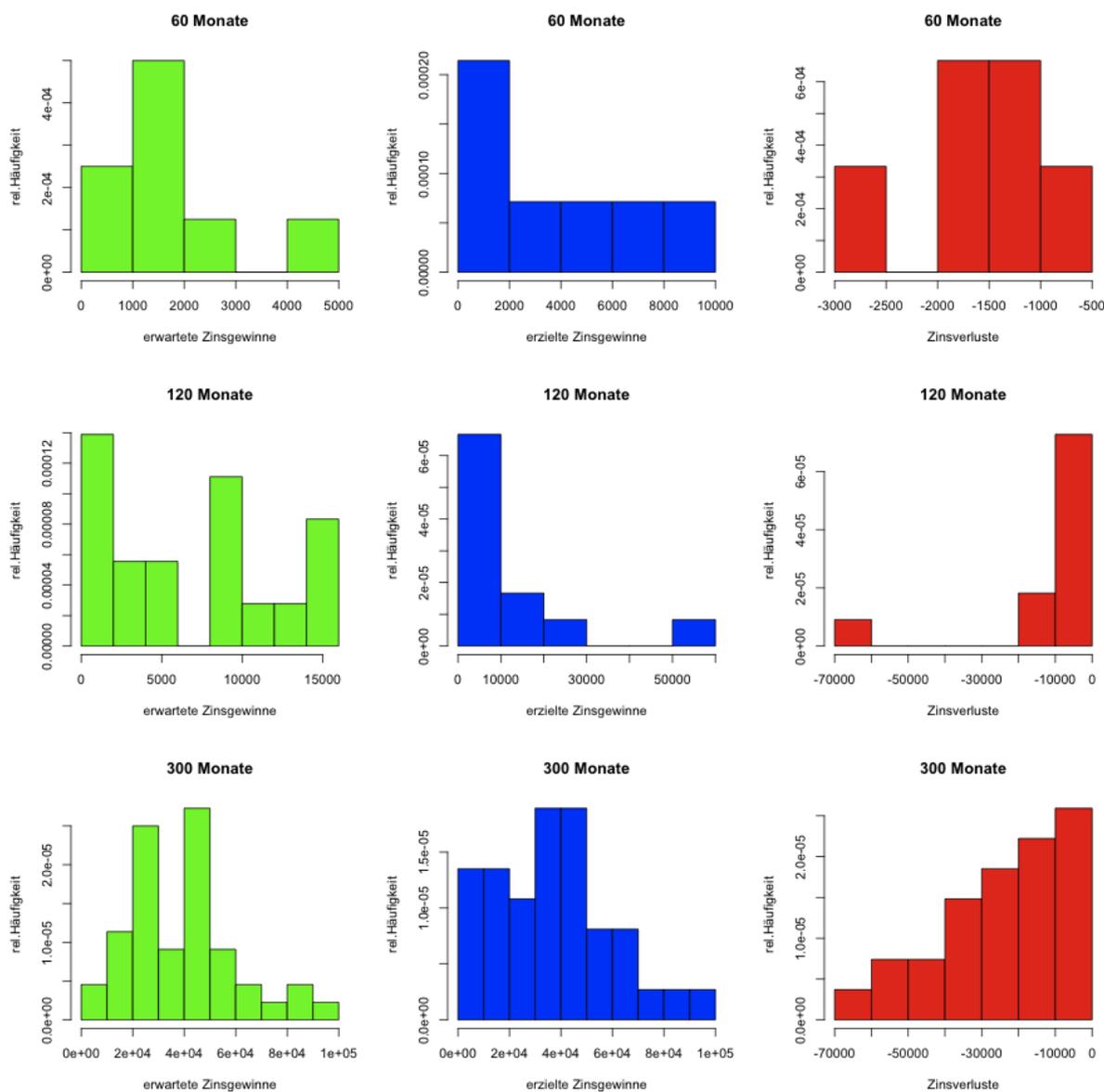


Abbildung 6.46: Erwartete und erzielte Zinsgewinne sowie Zinsverluste für Schmälerungen eingeteilt nach Pools

weniger Gewichtung für kleinere Beträge. Das bedeutet, dass verhältnismäßig ohnehin schon mittlere Verluste aber auch größere Verluste höhere Wahrscheinlichkeiten aufweisen.

Eine analoge Betrachtung der Daten, aufgesplittet in die vordefinierten Pools (Abb. 6.46), liefert diesmal ein weniger aussagekräftigeres Ergebnis, da die Dichte der Daten zu gering ist um die gegliederten Daten tatsächlich miteinander zu vergleichen. Die Plotserie für die Kredite mit Laufzeit von 300 Monaten offenbart hier in Ansätzen die relativ ausgeglichene Verteilung der Masse. Ein Verlust zwischen beispielsweise 0 EUR und 10.000 EUR ist nach diesem Histogramm nur fünfmal so wahrscheinlich, als ein Verlust zwischen 60.000 EUR und 70.000 EUR. Dies spiegelt das Gefahrenpotential der langfristigen Kredite wider.

Die Abbildung 6.47 zeigt die zeitliche Entwicklung der kumulierten Verluste durch Kreditschmälerungen. Klar erkennbar ist hierbei die deutliche Zunahme der monatlichen Verluste im Laufe des betrachteten Zeitfensters.

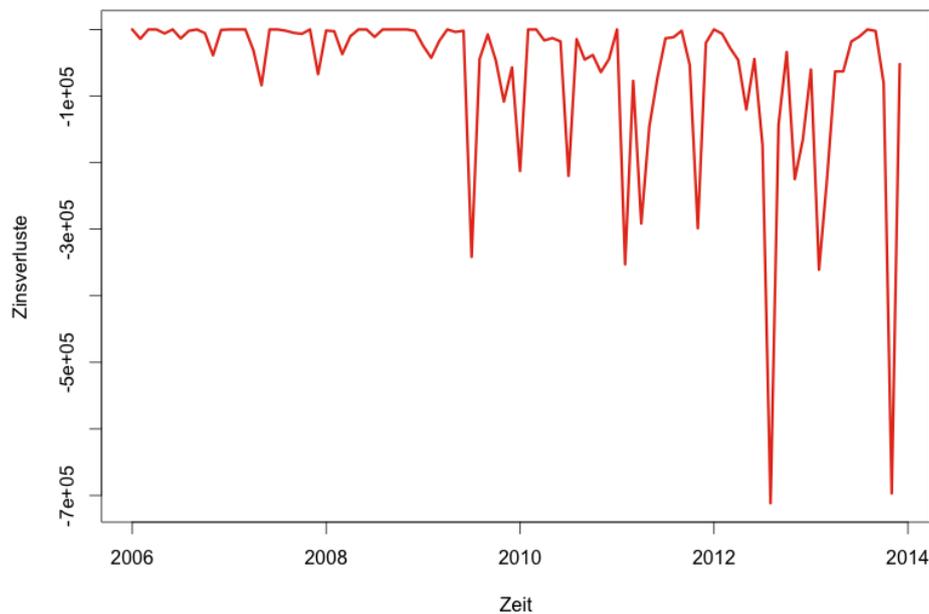


Abbildung 6.47: Zeitreihe der monatlichen Verluste, resultierend aus Kreditschmälerungen zwischen 2006 und 2014

Gesamtbetrachtung

Aus beiden Zeitreihen zusammen kann nun eine Verlustverteilung generiert, sowie die Verluste als Gesamtes etwas näher betrachtet werden.

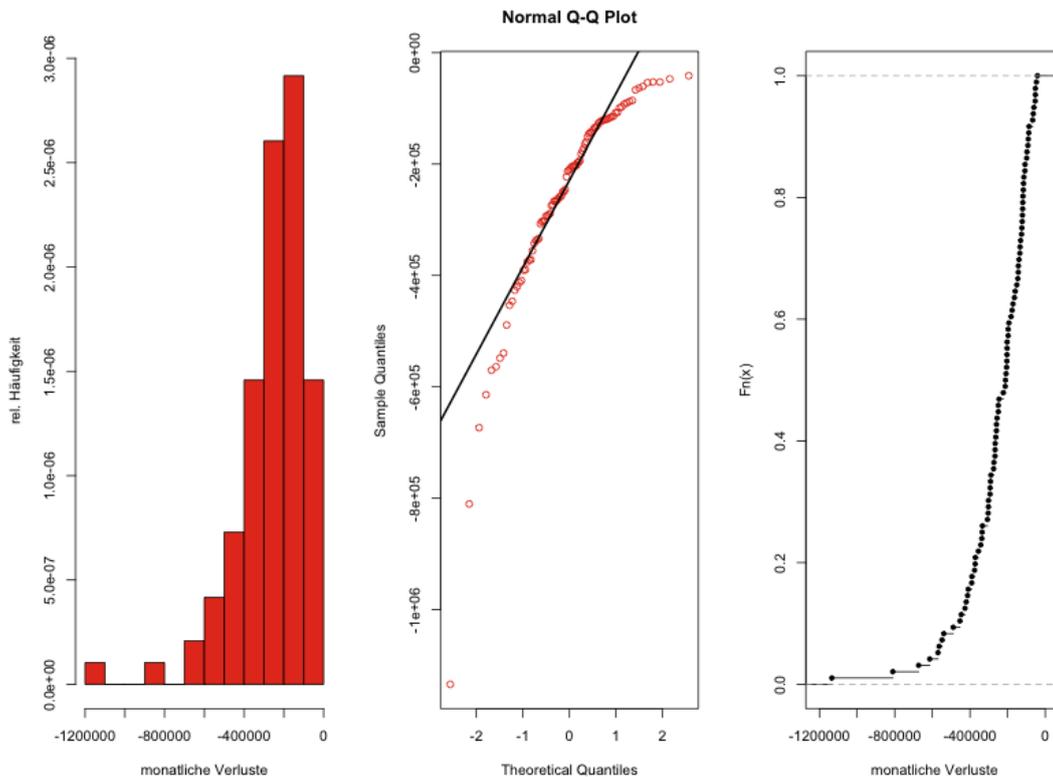


Abbildung 6.48: Histogramm, QQ-Plot und empirische Verteilung der monatlichen Gesamtzinsverluste

Die Abbildung 6.48 zeigt das Histogramm der gesamten monatlichen Zinsverluste. Dabei fällt auf, dass ein Großteil der Verluste, speziell in den jüngeren Jahren, um 200.000 EUR liegt. Der QQ-Plot unterstreicht diese Erkenntnis, indem eine Normalverteilung der Daten optisch auszuschließen ist. Der rechte Plot dieser Abbildungsreihe zeigt die empirische Verteilung der Verluste. Betrachtet man die Quantile der Verluste, so ergeben sich wie in Tabelle 6.6 folgende Schätzer für den VaR_α :

α	0.9	0.95	0.975	0.99
VaR_α	-449965.8	-565477.4	-651160.6	-826516.6

Tabelle 6.6: VaR_α für monatliche Gesamtzinsverluste

In Abbildung 6.49 sieht man die Zeitreihe der gesamten ermittelten Zinsverluste im monatlichen Verlauf. Dazu ist rechts der Hillplot (nach [7, Dragoti-Cela 2009]) abgebildet.

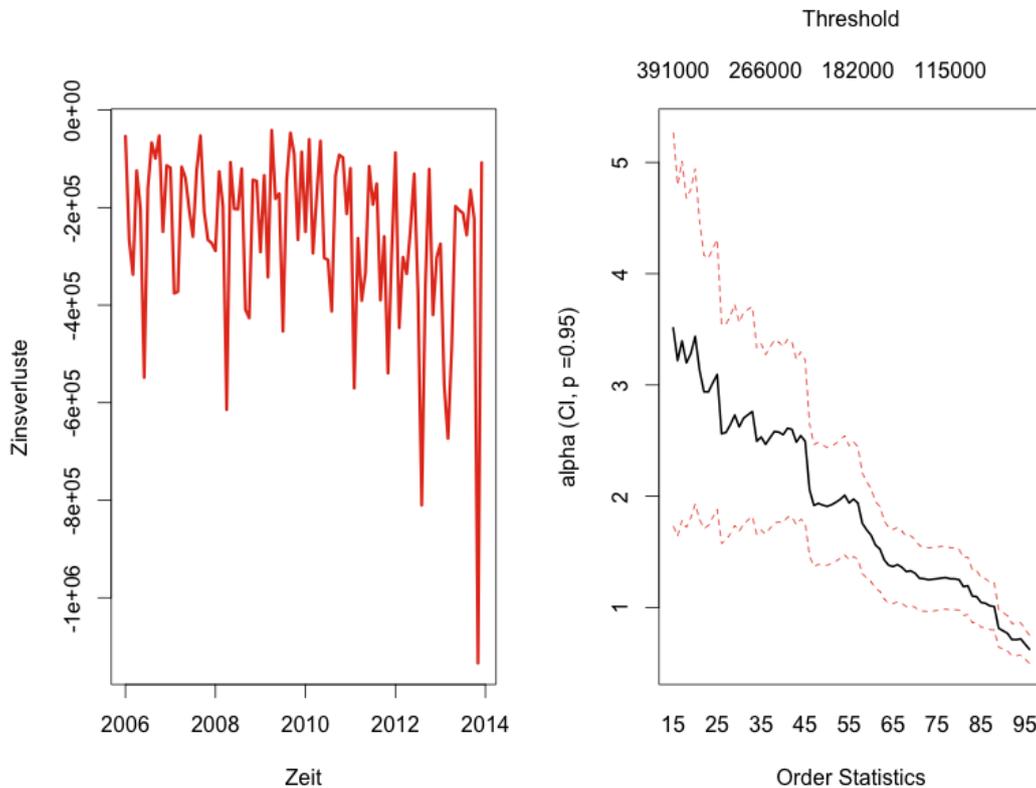


Abbildung 6.49: Zeitreihe sowie Hillplot der gesamten, monatlichen Zinsverluste

Der Hillplot zeigt durchwegs instabiles und fallendes Verhalten im Schätzer $\hat{\alpha}^{(H)}$. Erst ab einem Schwellwert von $x_k = 225000$, mit Index $k = 45$ und dem Schätzer für den Tailindex $\hat{\alpha}^{(H)} = 2$, scheinen zumindest keine großen Schwankungen mehr vorzuliegen. Dies führt nach [7] zu einer Tailverteilung von

$$\hat{F}_n(x) = \frac{k}{n} \left(\frac{x}{x_k}\right)^{-\hat{\alpha}^{(H)}} = \frac{45}{96} \left(\frac{x}{225.000}\right)^{-2}. \quad (6.6)$$

Um die Sinnhaftigkeit dieser Schätzung unter den gegebenen Umständen zu testen, wurden die Datenpunkte über dem Schwellwert von $x_k = 225.000$ kontrolliert. Diese weisen einen Anteil von 46,88% auf. Der Anteil liegt zwar über dem Regelwert von 30%, doch eine Verringerung von k und somit eine Vergrößerung von x_k würde den Schätzer in in-

stabile Bereiche des Hillplots führen, weshalb eine eventuelle Verzerrung des Schätzers in Kauf genommen wird.

6.3.5 Ergebnisse

Die realen Daten haben keine konkrete Analyse bezüglich der Tilgungsursachen zugelassen, da das dafür prädestinierte Hazard Modell nicht kalibriert werden konnte. Es konnten lediglich Datenanalysen durchgeführt werden, die die Vermutungen und Annahmen der simulierten Daten bestätigen konnten. So weisen reale Prepaymentdaten tatsächlich die typische Altersfunktion auf. In niedrigeren Zinsphasen konnte ebenfalls eine Zunahme des Rückzahlungspotential erkannt werden.

Mithilfe der stochastischen Modelle konnte zumindest die Struktur der Verteilungsfunktion analysiert werden. Dabei erwies sich das Levy Modell als geeignet. Durch die Sprünge und die dicken Tails der empirischen Daten sind solche Modelle besser geeignet als durch Normalverteilung gespeiste Modelle wie zum Beispiel das Normal-Einfaktor Modell.

Die Analyse der erlittenen Zinsverluste, als Folge von Tilgungen, ergab beachtliche monatliche Einbußen. Im Durchschnitt gehen monatlich zirka 254.900 EUR an Zinsen verloren. Als Beispiel weist der $VaR_{0,95}$ einen Wert von 449.965,8 EUR auf.

7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Aus dem Grundansatz dieser Arbeit, das Risiko von vorzeitigen und außerplanmäßigen Tilgungen von Hypothekarkrediten zu betrachten, entwickelten sich zahlreiche theoretische Betrachtungen. Schon bei der Analyse der vorliegenden Literatur zeigte sich, dass sehr viel über diese Thematik publiziert wurde, jedoch vorwiegend aus dem Blickwinkel des amerikanischen Finanzmarktes.

Zunächst wurde eine Übersicht über das österreichische Kredit- und Immobilienwesen gegeben, bevor Einzelheiten zu Hypothekarkrediten diskutiert wurden. Ein weiterer Punkt war die Behandlung der Refinanzierung von Krediten aus Sicht einer Bank. Auf dem amerikanischen Markt hat sich hierzu das Verbriefungskonzept etabliert, das in Europa jedoch kaum Anwendung findet.

Der Kern der theoretischen Betrachtung befasste sich mit der Modellierung der Prepaymentwahrscheinlichkeit. Dazu wurden zunächst markante Rückzahlungsmotive diskutiert und aufbauend darauf Modelle aus der Regressionsanalyse beschrieben, die solche Motive

in funktionalen Zusammenhang mit der Rückzahlungswahrscheinlichkeit bringen. Zudem wurden stochastische Prozesse besprochen, die es ermöglichen, die Verteilungsfunktion der Prepaymentwahrscheinlichkeit zu modellieren. Ein letzter Punkt in der theoretischen Analyse betraf die Interpretation von Hypothekarkrediten als derivatives Finanzgut. Die darin enthaltenen Rechte können als Optionen gehandhabt werden, woraus sich eine Bewertung und Bepreisung dieser Rechte ableiten lässt.

Die Beschaffung von realen Kreditdaten zur praktischen Analyse erwies sich als langwierig und schwierig. Die schlussendlich gelieferten Echtdateien wiesen bei der Erstanalyse einige Lücken auf, weshalb als Zusatz eine Simulation zur Generierung von Kreditdaten programmiert wurde. Diese Programmierung einer Simulation ergab interessante Einblicke in die Vielfältigkeit der Rückzahlungsmotive. Die dabei getroffenen Annahmen konnten zum Teil durch die Analyse der realen Daten bestätigt werden.

Der Schwerpunkt der praktischen Bearbeitung war die Modellierung der Prepaymentwahrscheinlichkeit über die beschriebenen mathematischen Modelle. Die Analyse der simulierten Daten hat ergeben, dass die Modelle, wie erwartet, die Daten und deren Eigenschaften widerspiegeln. Speziell die Modellwahl bezüglich der angepassten stochastischen Prepaymentverteilungen zeigte die Schwächen der simulierten Daten auf. Diese konnten durch die verwendete Normalverteilung nicht dem tatsächlichen, realen Verhalten genügen. Mithilfe des Proportionalen-Hazard Modells konnten die Ursachen für vorzeitige Tilgungen der simulierten Daten gefunden werden. Dieses Modell gewährleistet zudem eine Schätzung und Prognosen des Rückzahlungspotentials unter gewissen gegebenen Umständen.

Die realen Daten konnten leider nicht herangezogen werden, dieselben Analysen wie bei den simulierten Daten durchzuführen. Die Unvollständigkeit der Daten ließ keine Parametrisierung des Proportionalen-Hazard Modells zu. Trotzdem konnten die charakteristische Altersstruktur sowie die stochastischen Modelle analysiert und kalibriert werden. Zum Abschluss konnten noch die monatlichen Zinsverluste aus den gegebenen Daten angenähert, in einer Zeitreihe dargestellt und untersucht werden. Diese Untersuchung zeigt eine tendenzielle Zunahme von Verlusten, mit dem Gefahrenpotential, welches sich in den Rändern der Verlustverteilung verbirgt. Zudem sind nach aktuellem Kenntnisstand keinerlei Strafzahlungen vereinbart, die die Verluste aus den vorzeitigen Tilgungen ganz oder in Ansätzen kompensieren.

7.2 Ausblick und offene Fragen

Im Rahmen der Arbeit konnte die Vielfältigkeit des Prepaymentrisikos, sowohl bezüglich der theoretischen Betrachtung als auch aufgrund der zugrundeliegenden simulierten und echten Daten, analysiert und aufgezeigt werden. Leider konnten einige Punkte nicht untersucht werden, da dafür umfangreichere Datenattribute notwendig gewesen wären.

Ein offener Punkt bleibt die Findung der Rückzahlungsmotive der realen Daten. Dies ließe eine bessere Prognose für zukünftige Kredite zu. Außerdem konnten einige Modelle nicht kalibriert werden, da die Echtdateien viele Lücken enthielten und dementsprechend keine Analyse erlaubten. Ein weiterer, im praktischen Teil unbehandelter Punkt, ist die Bewertung des behandelten Risikos. Dafür wären ebenfalls detailliertere Informationen zu den Kreditnehmern notwendig gewesen, welche laut Bank aus Datenschutzgründen nicht zur Verfügung gestellt werden konnten.

Die Analyse der Zinsverluste zeigte das finanzielle Gefahrenpotential, das aus den Prepayments resultiert. Aus diesem Grund wäre es empfehlenswert die Merkmale näher zu untersuchen um das Risiko besser prognostizieren zu können. Dahingehend wären mit einer höheren Datendichte zahlreiche weitere in der Arbeit besprochene Analysen möglich gewesen. So könnten die Kredite gemäß ihren Merkmalen in Pools eingeteilt und separat analysiert werden. Daraus hätten eventuell auch besprochene Aspekte der Refinanzierung (Verbriefung) implementiert und in weiterer Folge auch eine Bewertung der Rückzahlungsoption durchgeführt werden können. Im Zuge dessen hätten beispielsweise faire Strafzahlungen bestimmt werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] (2002). *Europäische Verbriefung von Hypothekenforderungen: Ein Leitfaden für Gutachter*. The European Group of Valuer's Association. Dokumentation.
- [2] (2012). Nicht-finanzielle Sektorkonten. Datenbank.
- [3] Adelson, M. (2006). *MBS Basics*. Research, Nomura Securities International, Inc.
- [4] Amann, W., Springler, E., Wagner, K., et al. (2011). EU27 country reports: AUSTRIA. Technical report, European Mortgage Federation.
- [5] Davidson, A., Sanders, A., Wolff, L.-L., and Ching, A. (2003). *Securitization - Structuring and Investment Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [6] Donnelly, C. and Embrechts, P. (2010). The devil is in the tail: actuarial methematics and the subprime mortgage crisis. Technical report, RiskLab, ETH Zürich, Switzerland.
- [7] Dragoti-Cela, E. (2009). Risikotheorie und - management. Vorlesungsskriptum, Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik - Technische Universität Graz.
- [8] Erber, G. (2011). Verbriefungen sind tot - lang leben Verbriefungen? Wochenbericht 35, Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung.
- [9] Fabozzi, F. J., Bhattacharya, A. K., and Berliner, W. S. (2007). *Mortgage Backed Securities - Products, Structuring and Analytical Techniques*. John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Fachausschuss Finanzmathematik, editor (2002). *Investmentmodelle für das Asset Liability Modelling von Versicherungsunternehmen*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [11] Fox, J. (2002). *Cox Proportional-Hazard Regression für Survival Data - Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression*. Manual.

- [12] Friedl, H. (2010). Generalisierte Lineare Modelle. Vorlesungsskriptum, Institut für Statistik - Technische Universität Graz.
- [13] Hillard, J. E., Kau, J. B., and Slawson Jr, C. V. (1998). Valuing Prepayment and Default in a Fixed-Rate Mortgage: A Bivariate Binomial Option Pricing Technique. *Real Estate Economics*, 26(3):431–468.
- [14] Jacobs, J. P. A. M., Koning, R. H., and Sterken, E. (2005). Modelling Prepayment Risk. Technical report, Dept. Economics - University of Groningen, The Netherlands.
- [15] Jönsson, H., Schoutens, W., and Damme, G. V. (2009). Modelling Default and Prepayment using Levy Processes: an Application to Asset Backed Securities. *Radon Series Comp. Appl. Math*, 8:1–23.
- [16] Kau, J. B. and Slawson Jr, C. V. (1999). Friction and Mortgage Options. Technical report, Louisiana State University - Dept of Finance, University of Georgia.
- [17] Keller-Ressel, M. (2012). Stochastische Analysis. Vorlesungsskriptum, TU Berlin.
- [18] Montano, D., Dabholkar, R., Jha, P., et al. (2003). The JPMorgan Prepayment Model: It's all about economics. Technical report, J.P. Morgan Securities Inc., New York.
- [19] Mosslechner, P., Turner, J., Andreasch, M., et al. (2011). Kreditvergabe des österreichischen Bankensystems - unter besonderer Berücksichtigung der Kredite an den Unternehmenssektor. Kreditbericht der Österreichischen Nationalbank, Österreichische Nationalbank, Wien.
- [20] Schwartz, E. S. and Torous, W. N. (1989). Prepayment and the Valuation of MBS. *The Journal of Finance*, XLIV(2):375–392.
- [21] Sinn, H.-W. (2009). *Kasino Kapitalismus - Wie es zur Finanzkrise kam, und was jetzt zu tun ist*. Ullstein Buchverlag GmbH, Berlin.
- [22] Thonabauer, G. and Nösslinger, B. (2004). *Leitfaden zum Kreditrisiko: Best Practice im Risikomanagement von Verbriefungen*. Österreichische Nationalbank, Wien.
- [23] Vinar, J. (2011). Prepayment Modelling. Latex-Präsentation. University of Minnesota.
- [24] Walder, A. (2008). Bewertung von High-Yield Mortgages. Master's thesis, Institut für schweizerisches Bankwesen der Universität Zürich.

Internetquellen

- [25] European Banking Federation (2013). EURIBOR Rates. <http://www.euribor-ebf.eu/euribor-org/euribor-rates.html>. [Online, Letzer Aufruf am 20.April 2014].
- [26] Freddie Mac (2014). Historical Data - Monthly Data. http://www.freddiemac.com/pmms/pmms_archives.html. [Online, Letzer Aufruf am 10.April 2013].
- [27] Heinrich, G. (2013). Fannie Mae vor Auflösung? - Aktie bricht um 30 Prozent ein. http://www.finanzen100.de/finanznachrichten/wirtschaft/fannie-mae-vor-aufloesung-aktie-bricht-um-30-prozent-ein_H241625517_66467/. [Online, Letzer Aufruf am 15. März 2013].
- [28] Wally, J. (2012). Bauspardarlehen oder Hypothekarfinanzierung. <http://www.biallo.at/artikel/Finanzieren/eigenheimfinanzierung-bauspardarlehen-oder-hypothekarfinanzierung.php>. [Online, Letzer Aufruf am 20.August 2013].



R-Code

Alle im Folgenden angeführten Routinen wurden in R programmiert und ausgeführt.

- Altersintensität: Der in dieser Funktion definierte Intensitätenverlauf während der Kreditlaufzeit orientiert sich an der Gleichung 4.19. Es wird grundsätzlich mit der maximalen Grundintensität für $p = 4$ kalkuliert. Der zweite Parameter g wird entsprechend des gewünschten Zeitpunktes der Maximalintensität (**max**) berechnet. Zusätzlich wird die ermittelte Intensität mit einem normalverteilten Störterm versehen, um die Vorhersehbarkeit der Altersintensität während der Laufzeit etwas zu beeinträchtigen.

```
1 > alter <- function(max, Mat){  
2 + p <- 4  
3 + g <- 3^(1/p)*12/max  
4 + t <- seq(0, Mat, 1/12)  
5 + a.t <- abs(g*p*(g*t)^(p-1)/(1+(g*t)^p) + rnorm(length(t), 0, abs(jitter(0))))  
6 + return(a.t)  
7 + }
```

Listing A.1: Simulation der Rückzahlungsintensität, die sich aus dem Alter des Kredites nach Gleichung 4.19 ableitet

- Modulo: Die Modulo-Funktion wird benötigt, damit Laufzeiten nur in einem bestimmten Intervall $[1, a]$ auftreten. Dabei sollen die ursprünglich simulierten (normalverteilten) Daten für die Laufzeiten auf den gewünschten Wertebereich gestutzt werden.

```
1 > modulo <- function(x, a){
2 + for(i in 1:length(x)){
3 + while(x[i] >= a){
4 + x[i] <- x[i]-a
5 + }
6 + if(x[i] == 0){
7 + x[i] <- x[i] + round(runif(1,1,40), digits=0)
8 + }
9 + }
10 + return(x)
11 + }
```

Listing A.2: Modulo-Funktion für Laufzeitgenerierung: Dadurch werden Werte in einem vorgegebenen Intervall erzeugt.

- Laufzeitintensität: Generiert frei erdachte Zuordnungen von Intensitäten bezüglich den zuvor simulierten und modifizierten Laufzeiten.

```
1 > mat.int <- function(mat){
2 + if(mat < 10){mat.int <- 0.8}
3 + if(mat < 20){mat.int <- 0.7}
4 + if(mat < 30){mat.int <- 0.65}
5 + else{mat.int <- 0.7}
6 + return(mat.int)
7 + }
```

Listing A.3: Erzeugung einer aus der Laufzeit abgeleiteten Rückzahlungsintensität

- Nominalenintensität: Analog zu den Laufzeiten, sollen verschiedenen Gruppierungen von Kredithöhen unterschiedliche Intensitäten zugeteilt werden.

```
1 > nom.int <- function(nom){
2 + if(nom < 75000){nom.int <- 0.8}
3 + if(nom < 150000){nom.int <- 0.75}
4 + if(nom < 300000){nom.int <- 0.7}
5 + else{nom.int <- 0.75}
6 + return(nom.int)
7 + }
```

Listing A.4: Erzeugung einer aus der Nominale abgeleiteten Rückzahlungsintensität

- LTV - Kennzahlen: Simuliert zu jedem Einzeldatensatz eine zufällige Loan to Value - Kennzahl. Der Wertebereich kann dabei vorgegeben werden - zum Beispiel: [0.5, 1]. Der simulierte LTV entspringt einer Normalverteilung mit einem zufälligen gleichverteilten Mittelwert und einer Standardabweichung, die sich aus einem vorgegebenen Wert `sig` und einem zufälligen Wert zusammensetzt.

```

1 > ltv <- function(n, base, sig, a, b){
2 + l <- rep(0, n)
3 + for(i in 1:n){
4 + l[i] <- min(b, rnorm(1, base+runif(1, a-base, b-base), sig+jitter(0)))
5 + if(l[i] < a){l[i] <- l[i] + runif(1, a-base, b-base)}
6 + }
7 + return(l)
8 + }

```

Listing A.5: Simulation zur Generierung von LTV-Kennzahlen

- LTV - Intensität: Wie bereits für Laufzeiten und Nominalen, wird auch dem LTV eine Intensität zugeordnet, die später in die Gesamtintensität einfließt.

```

1 > ltv.int <- function(ltv){
2 + ltv.int <- rep(0, length(ltv))
3 + for(i in 1:length(ltv)){
4 + if(ltv[i] < 0.8){ltv.int[i] <- 0.8}
5 + if(ltv[i] < 0.9){ltv.int[i] <- 0.7}
6 + else{ltv.int[i] <- 0.75}
7 + }
8 + return(ltv.int)
9 + }

```

Listing A.6: Erzeugung einer aus der LTV-Kennzahl abgeleiteten Rückzahlungsintensität

- Kreditbeginn: Da nur Zinsdaten zwischen 1972 und 2013 vorhanden sind und die komplette simulierte Kreditlaufzeit für jeden Kredit in diesem Intervall liegen soll, wird aus der Kreditlaufzeit ein Intervall definiert, aus dem potentielle Jahre für den simulierten Kreditbeginn gezogen werden können. Daraus wird eine gleichverteilte Zufallsvariable gezogen. Ebenso wird für das Monat, in dem der Kredit beginnt, eine gleichverteilte Zufallszahl erzeugt.

```

1 > begin <- function(lz){
2 + begin.year <- rep(0,length(lz))
3 + begin.month <- rep(0,length(lz))
4 + for(i in 1:length(lz)){
5 + begin.year[i] <- round(runif(1,1972,2013-lz[i]), digits=0)
6 + begin.month[i] <- round(runif(1,1,12), digits=0)
7 + }
8 + return(list(begin.year, begin.month))
9 + }

```

Listing A.7: Simulation eines zulässigen Kreditbeginns: Aus den verfügbaren historischen Zinsdaten und der simulierten Laufzeit wird ein Kreditbeginn simuliert.

- **Fixzinsberechnung:** In Zusammenhang mit den verwendeten Zinsdaten wird aus dem simulierten Kreditbeginn und dem simulierten LTV ein entsprechender Fixzinssatz für den Kredit simuliert. Zunächst wird aus dem Referenzdatensatz für die Zinssätze dreißigjähriger amerikanischer Hypothekarkredite (FMR) über den Kreditbeginn der damals gültige Zinssatz ausgelesen. Danach wird er gemäß der jeweiligen Laufzeit korrigiert, da im Vergleich kürzere Laufzeiten entsprechend geringere Zinsraten zur Folge haben und umgekehrt. Da Kredite mit einem kleineren LTV, das gleichbedeutend mit einer geringeren Qualität ist, mit höheren Zinssätzen einhergehen sollen, wird der zuvor ermittelte Wert noch mit einer solchen Straffunktion versehen. Dieser Wert dient in weiterer Folge als Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariable, mit Standardabweichung von 0.5. Diese Zufallsvariable simulierten den Zinssatz des Kredites.

```

1 > fix.rate <- function(b.y,b.m,mat,zins,ltv){
2 + rate <- rep(0,length(b.y))
3 + fix.rate <- rep(0,length(b.y))
4 + for(i in 1:length(b.y)){
5 + rate[i] <- zins[(b.y[i]-1972)*12+b.m[i]] - (0.5*(30-mat[i])/15)
6 + fix.rate[i] <- round(rnorm(1,rate[i]+2*(1-ltv[i]),0.5), digits=1)
7 + }
8 + return(fix.rate)
9 + }

```

Listing A.8: Simulation einer Fixzinsrate: Aus den historisch vorliegenden Zinsdaten wird zum simulierten Kreditbeginn eine Zinsrate generiert.

- **Anreizprofil:** Aus den Basisdaten eines Kredites (Nominale, Laufzeit, LTV, Zinssatz, Kreditbeginn) wird zu jedem Kredit ein Anreizprofil erstellt, das die Rückzahlungsintensität während der Kreditlaufzeit darstellt. Aus den einzelnen Krediteigenschaften werden über die zuvor geschilderten Funktionen Intensitäten ermittelt. Über die

Differenz zwischen dem kreditspezifischen Zinssatz und dem monatlichen Zinsverlauf seit Kreditbeginn wird eine zeitabhängige Rückzahlungsbereitschaft zum Ausdruck gebracht. Aus dem Produkt aller statischen Intensitäten, den zeitabhängigen monatlichen Intensitäten, aus Alter und Zinsveränderung, einem Steuerparameter `offset` und einem Störterm wird eine Zeitreihe erzeugt, welche die Rückzahlungsbereitschaft des Kreditnehmers während der Laufzeit simuliert.

```

1 > prep.yon <- function(offset ,nom,mat,max,ltv ,zins ,b.y,b.m,fr){
2 + alter.int <- alter(max,mat)
3 + mat.int <- mat.int(mat)
4 + nom.int <- nom.int(nom)
5 + ltv.int <- ltv.int(ltv)
6 + zins.int <- rep(0.001,mat*12)
7 + for(i in 2:(mat*12)){
8 + zins.int[i] <- max(0.001,fr-zins[((b.y-1972)*12+b.m+i)])}
9 + p <- rep(0,mat*12)
10 + for(i in 1:(mat*12)){
11 + p[i] <- min(1,offset * abs(jitter(1)) * nom.int * mat.int
12 + * ltv.int * alter.int[i] * zins.int[i])
13 + }
14 + return(p)
15 + }

```

Listing A.9: Simulation der Gesamtrückzahlungsintensität: Aus allen einzelnen Rückzahlungsintensitäten wird ein Gesamtanreiz erzeugt.

- Rückzahlung: Auf Basis der Zeitreihe p , die den monatlichen Rückzahlungsintensitäten entspricht, werden binomialverteilte Zufallsvariablen generiert. Die erste Zufallsvariable, die eine 1 generiert, kennzeichnet den Prepaymentzeitpunkt. Dieser Zeitpunkt ist das relevante Charakteristikum der Simulation. Wird für ein gesamtes Profil keine Tilgungszeitpunkt simuliert, so gilt der Kredit als nicht vorzeitig zurückbezahlt und wird mit “kein Prep” gekennzeichnet.

```

1 > prep <- function(b.y,b.m,p){
2 + prep <- rep(0,length(p))
3 + for(i in 1:length(p)){
4 + prep[i] <- rbinom(1,1,p[i])
5 + if(prepare[i] == 1){
6 + return(list(floor(b.y+(b.m+i)/12),round(12*(b.y+(b.m+i)
7 + /12-floor(b.y+(b.m+i)/12)),digits=0))}
8 + }
9 + return(list("kein","Prep"))
10 + }

```

Listing A.10: Simulation eines eventuellen Rückzahlungszeitpunktes: Aus dem zeitlichen Intensitätenprofil des Kredites wird ein eventueller Rückzahlungszeitpunkt generiert.

- Kreditende: Hier werden sämtliche, zuvor beschriebene, Subfunktionen zusammengeführt, um aus den simulierten Basisdaten für jeden Kredit einen eventuellen Rückzahlungszeitpunkt zu simulieren.

```

1 > end <- function(offset, n, Nom, Mat, Max, ltv, X30y, b.y, b.m, fr) {
2 + kred.ende <- matrix(rep(0, 2 * length(Mat)), nrow=length(Mat), ncol=2)
3 + for(i in 1:n){
4 + p <- prep.yon(offset, Nom[i], Mat[i], Max, ltv[i], X30y, b.y[i], b.m[i], fr[i])
5 + a <- prep(b.y[i], b.m[i], p)
6 + kred.ende[i, 1] <- a[[1]]
7 + kred.ende[i, 2] <- a[[2]]
8 + }
9 + return(kred.ende[1:i, ])
10 + }

```

Listing A.11: Simulation von Tilgungszeitpunkten für den gesamten Datensatz

- Schlussendlich werden die Simulationen ausgeführt und ein Datensatz, von beispielsweise 10.000 Krediten, generiert. Dieser wird in eine Excel - Datei exportiert und steht zur Analyse bereit.

```

1 > library(MASS)
2 > Sigma <- matrix(c(1, 0.85, 0.85, 1), nrow=2, ncol=2)
3 > kred <- (mvrnorm(n=10000, c(0, 0), Sigma))
4 > Mat <- modulo(round(abs(kred[, 1] * 10 + 25), digits=0), 41)
5 > Nom <- round(abs(kred[, 2] * 100000 + 200000), digits=-4)
6 > ltv <- round(ltv(10000, 0.5, 0.1, 0.5, 1), digits=2)
7 > begin <- begin(Mat)
8 > b.y <- begin[[1]]
9 > b.m <- begin[[2]]
10 > Max <- 50
11 > ende <- end(0.2, length(Mat), Nom, Mat, Max, ltv, X30y, b.y, b.m, fr) #, 0.2, 6)
12 > data <- cbind(b.y, b.m, fr, Mat, Nom, ltv, ende[, 1], ende[, 2])
13 > write.table(data, "/.../ simtest3.csv", sep=";", dec=",")

```

Listing A.12: Hauptfunktion der Simulation

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature