

Masterarbeit

Modellbildung und Simulation eines Spurhalte-Assistenzsystems

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplomingenieurs.

Georg Nestlinger

Graz im Mai 2013

Betreut durch

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Horn
Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, TU Graz

Dipl.-Ing. Dr.techn. Univ.-Doz. Arno Eichberger
Institut für Fahrzeugtechnik, TU Graz

Dieses Dokument wurde auf Basis der KOMA-Script Dokument-
klasse `scrreprt` und dem `classicthesis`-Stil in Palatino gesetzt, und
mit pdfL^AT_EX₂ ϵ und `biber` kompiliert.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe. ¹

Graz, 23. Mai 2013

Georg Nestlinger

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, May 23, 2013

Georg Nestlinger

¹ Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008; Genehmigung des Senates am 1.12.2008

KURZFASSUNG

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit der Modellbildung, dem Reglerentwurf und der Simulation eines Fahrerassistenzsystems zur Querführungsunterstützung für PKW. Die Möglichkeit, die Funktionsweise bzw. Interaktion dieses so genannten aktiven Spurhalteassistenten mit dem Gesamtsystem in Simulationen zu untersuchen, erspart einen Teil des beträchtlichen Aufwands für die reale Erprobung. Das Ziel ist daher die Erweiterung einer bestehenden Simulationsumgebung um die Funktionalität dieses Fahrerassistenzsystems zur Querführungsunterstützung.

Die Modellbildung umfasst die für die Regelung benötigten Teilmodelle der Fahrzeugquerdynamik sowie der Relativposition von Fahrzeug zur gewünschten Position am Fahrstreifen. Für die Beschreibung der Fahrzeugquerdynamik greifen wir auf das lineare Einspurmodell zurück. In Veröffentlichungen zum Thema Spurhalteassistenten können verschiedene Möglichkeiten zur, meist näherungsweise, mathematischen Beschreibung der Dynamik der Fahrzeugrelativposition nachgelesen werden. Wir erarbeiten basierend auf einer Veröffentlichung von Košecká et al. eine ausführliche Herleitung dieser Gleichungen und werden dabei für die Dynamik des Relativwinkels die exakte Lösung erhalten. Außerdem berücksichtigen wir die Lenkdynamik in Form eines einfachen Lenkmodells.

Diese Teilmodelle fassen wir schließlich zu einem gemeinsamen linearen Zustandsraummodell zusammen, anhand dessen der Reglerentwurf erfolgt. Als Regelungsansatz verwenden wir einen Zustandsregler als Lösung des LQ-Problems. Um einen verschwindenden Querversatz von Fahrzeug zu dessen Sollposition zu erreichen, erweitern wir den Regler um zweifach integrierendes Verhalten.

Die Funktionsweise des entworfenen Reglers wird schließlich anhand von kreis- und klothoidenförmigen Fahrbahnverläufen überprüft. Die robuste Stabilität wird durch Variation wesentlicher Fahrzeugparameter nachgewiesen.

ABSTRACT

This master's thesis deals with the process of modeling, controller design and simulation of an active lane keeping assist system for passenger cars. The opportunity to investigate functioning and interaction of this active lane keeping assist with the overall system by means of simulations, saves a considerable part of the expense for real testing. The aim of this work is the extension of an existing simulation environment by the functionality of this driver assistance system for lateral guidance.

The modeling includes submodels of vehicle lateral dynamics and the relative vehicle position to its desired position on the driving lane. To model the vehicle lateral dynamics the linear single track model is used. In publications on lane keeping assistance usually approximate mathematical descriptions of the dynamics for vehicle relative position are presented. This work is based on the input of Košecká et al. to develop a detailed derivation of these equations, thereby the exact solution for the dynamics of the relative angle is obtained. A simple steering model is used to consider the dynamics of a steering system.

Finally these submodels are combined into a common linear state space model, which is used for the controller design. By solving the LQ problem a full state feedback controller is used as controller approach. In order to achieve a vanishing lateral offset of the vehicle to its desired position, the controller is extended by two integrators.

The function of the designed controller is verified based on circular and clothoidal road segments. The robust stability is demonstrated by variation of important vehicle parameters.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
1.1	Einsatzbereich und Systemgrenzen	1
1.2	Systemkomponenten	3
1.3	Anmerkungen zur Notation	4
2	MODELLBILDUNG DER REGELSTRECKE	5
2.1	Modell für die Spurhalterregelung	5
2.1.1	Fahrzeugquerdynamik: Lineares Einspurmodell	5
2.1.2	Relativposition zur Sollbahn	8
	Analyse der Gleichungen zur Sollbahnverfolgung	9
	Vergleich mit der tatsächlichen Relativposition .	14
	Zusammenfassung	14
	Linearisierung um eine Ruhelage	16
2.1.3	Gesamtmodell	17
2.2	Modell der Lenkung	18
2.3	Kombination von Fahrzeug- und Lenkungsmodell . . .	19
3	REGLERENTWURF	21
3.1	Spurhalterregelung ohne Lenkdynamik	21
3.2	Spurhalterregelung mit Lenkung	25
3.3	Alternativer Reglerentwurf	28
4	SIMULATION MIT DETAILLIERTEM FAHRZEUGMODELL	32
4.1	IPG CarMaker – Vorbereitungen	32
4.2	Simulationsergebnisse	33
4.2.1	Robustheit	35
5	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	39
A	ANHANG	40
A.1	Klothoide	40
A.2	Literaturbemerkung	40
A.3	Simulationsparameter	43
	Literatur	44

EINLEITUNG

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit dem Assistenzsystem „Lane Keeping Assist“ (LKA, dt. Spurhalteassistent) für PKW. Dabei handelt es sich um ein System, welches den Fahrer über Lenkeingriffe dabei unterstützt, das Fahrzeug innerhalb des Fahrstreifens zu halten. Damit lässt sich das LKA-System in die Kategorie der Assistenzsysteme auf Bahnführungsebene einteilen, die Assistenzsysteme ESP und ABS zählen hingegen zur Gruppe der Assistenzsysteme auf Stabilisierungsebene.

Die Bewertung und Analyse solcher Systeme erfolgt mit Testfahrzeugen anhand von real durchgeführten Fahrmanövern und stellt aufgrund der dafür benötigten Ressourcen (Teststrecke, Testfahrzeuge, Messeinrichtungen, ...) einen relativ großen Aufwand dar. Man ist daher daran interessiert, die Funktionsweise solcher Systeme bereits vorab in Simulationsstudien zu untersuchen.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher die Ermittlung eines mathematischen Modells der für die Spurhalteregelung relevanten Komponenten und der anschließende Reglerentwurf. Die Funktionsweise des Reglers wird abschließend an einem detaillierten Fahrzeugmodell verifiziert.

Die Bezeichnung „Spurhalteassistent“ wird in der Automobilindustrie nicht einheitlich verwendet. Bisweilen wird darunter auch lediglich eine Assistenzfunktion im Sinne eines Lane Departure Warning Systems (LDW, dt. Spurverlassenswarner) verstanden, die vor drohendem Verlassen des Fahrstreifens durch z. B. akustische oder haptische Signale warnt. Andere verwendete Bezeichnungen für einen aktiv eingreifenden Spurhalteassistenten sind z. B. „Lane Assist“, „Active Lane Assist“, „Lane Keep Assist“ oder auch „Lane Keeping Aid“.

1.1 EINSATZBEREICH UND SYSTEMGRENZEN

Der Inhalt dieses Abschnitts basiert weitestgehend auf [7], andernfalls sind die entsprechenden Verweise angegeben.

Der Einsatzbereich aktueller LKA-Systeme beschränkt sich auf autobahnähnliche Straßen die im Wesentlichen durch relativ große Kurvenradien charakterisiert sind. Viele Personen empfinden das Fahren auf solchen Strecken als monoton und lästig. Es entstehen viele Un-

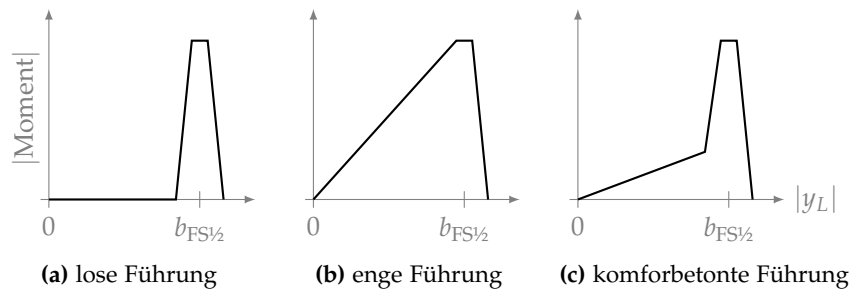


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Betrags des unterstützenden Lenkmoments in Abhängigkeit vom Betrag des Querversatzes y_L , wobei $b_{FS\frac{1}{2}}$ die halbe Fahrstreifenbreite bezeichnet. [7]

fälle durch unbeabsichtigtes Verlassen des Fahrstreifens. Ein LKA-System dient somit nicht nur als Komfortsystem sondern auch zur Erhöhung der Sicherheit. In [6] wurde das Potential zur Kollisionsverhinderung eines aktiv eingreifenden LKA-Systems aufgezeigt.

Der Unterstützungsgrad geht dabei nie über den eines Assistenzsystems hinaus. Maßnahmen wie eine Hands-Off-Erkennung sollen sogar sicherstellen, dass das System deaktiviert wird, sollte der Fahrer die Hände vom Lenkrad nehmen. Damit wird ein autonomer Betrieb aktiv verhindert.

Der Eingriff in die Fahrzeugquerführung erfolgt meist über das Lenksystem durch Aufbringen eines Unterstützungsmomentes. Anhand des Verlaufs dieses Moments in Abhängigkeit des Querversatzes von Fahrzeug zur Fahrstreifenmitte kann die Funktion eines LKA-Systems charakterisiert werden. Abbildung 1.1 zeigt drei schematische Verläufe. Links ist eine sicherheitsbetonte Abstimmung gezeigt, hier greift das System erst ein, wenn das Verlassen des Fahrstreifens droht. Eine Auslegung wie in der mittleren Abbildung gezeigt, bedeutet ein Eingreifen bereits bei geringen Querabweichungen wie man es sich bei einer autonomen Fahrzeugquerführung vorstellen könnte. Die Abbildung rechts zeigt eine Mischung der beiden vorhergehenden Varianten.

Der Einsatzbereich wird im Wesentlichen durch die Sensorik zur Fahrstreifenenerkennung begrenzt. Diese ermittelt anhand der Fahrbahnmarkierung die Relativposition des Fahrzeugs zur Sollbahn bzw. zum Fahrstreifen. Allerdings kann dieser Vorgang durch diverse Einflüsse wie Schnee, Reflexionen aufgrund von Sonneneinstrahlung, fehlerhafte Fahrbahnmarkierungen oder auch Baustellen beeinträchtigt werden.

Üblicherweise wird das LKA-System mit einem ACC-System (Adaptive Cruise Control, dt. Abstandsregeltempomat) kombiniert, womit sich auch die jeweiligen Systemgrenzen beeinflussen. Beispielsweise hängt die Maximalgeschwindigkeit bei einem LKA-System neben der begrenzten Reichweite der Fahrspurerkennung auch vom

Kenngröße	Typischer Wertebereich
Minimalgeschwindigkeit	65–70 km/h
Maximalgeschwindigkeit	170–180 km/h
Maximales Unterstützungsmoment	2–3 Nm
Spurbreite	3–4 m
Minimaler Kurvenradius	230 m
Maximale Querschleunigung	2 m/s ²

Tabelle 1.1: Typische Werte wichtiger Kenngrößen eines LKA-Systems. [7]

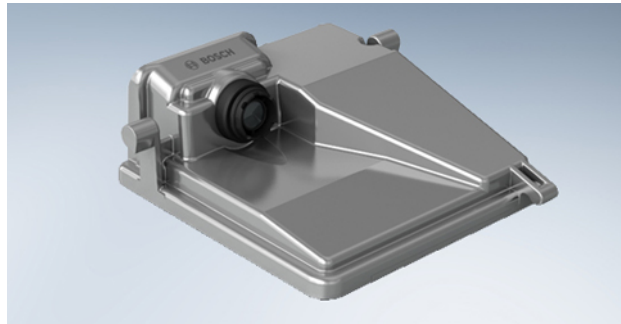


Abbildung 1.2: Multifunktionskamera von Bosch mit integrierter Auswertelektronik für Komfort- und Sicherheitsanwendungen wie z. B. Spurhalteassistent, Verkehrszeichenerkennung und Fahrermüdigkeitserkennung. [9]

ACC-System ab. Typische Werte wichtiger Kenngrößen eines LKA-Systems sind in Tabelle 1.1 angegeben.

1.2 SYSTEMKOMPONENTEN

Die Hauptkomponenten eines LKA-Systems sind

- die Sensorik zur Fahrstreifenenerkennung,
- der Spurhalteregler der aufgrund der Sensordaten ein Unterstützungsmoment berechnet,
- der Aktor um die gewünschte Lenkbewegung bzw. das Unterstützungsmoment aufzubringen sowie
- die Mensch-Maschine-Schnittelle zur Bedienung des Systems und Anzeige des aktuellen Systemzustands.

Die Fahrstreifenenerkennung erfolgt üblicherweise durch eine video-basierte Sensorik in Form einer Kameraeinheit mit integrierter Bildverarbeitung wie beispielhaft in Abbildung 1.2 gezeigt. Diese wird meist im Bereich des Innenrückspiegels angebracht und ist so vor Steinschlag und ähnlichen Beschädigungen bzw. Verschmutzungen der Linse geschützt. [7]

Als Aktor kommt häufig das Lenksystem des Fahrzeugs zum Einsatz. Im Fall einer elektrisch angetriebenen Servolenkung (EPS) kann

der Elektromotor für das Servomoment auch dazu genutzt werden, das Unterstützungsmoment des LKA-Systems aufzubringen. Bei hydraulischen bzw. elektrohydraulischen Lenksystemen kann das Unterstützungsmoment in Anlehnung an ein Lenksäulen-EPS z. B. über einen an der Lenksäule platzierten Elektromotor aufgebracht werden [16, S. 295]. Eine grundsätzlich andere Möglichkeit ist die indirekte Lenkung des Fahrzeugs über radselektive Bremseingriffe [7].

1.3 ANMERKUNGEN ZUR NOTATION

- Bei Größen die in Abbildungen mit Pfeilen eingezeichnet sind, gibt die Pfeilrichtung die positive Zählrichtung an.
- Vektoren bzw. Matrizen werden durch kleine bzw. große fettgedruckte Symbole x bzw. A dargestellt.
- Die Transponierte eines Vektors x bzw. einer Matrix A wird durch x^\top bzw. A^\top gekennzeichnet.
- Die Ableitung nach der Zeit t einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$ wird, wenn es der Übersichtlichkeit und Lesbarkeit dient, durch einen Punkt \dot{f} über der Funktion symbolisiert – andernfalls wird die Darstellungsform $\frac{df}{dt}$ verwendet.

2

MODELLBILDUNG DER REGELSTRECKE

Das Ziel dieses Kapitels ist es, ein für die Aufgabenstellung hinreichend genaues mathematisches Modell der Regelstrecke zu ermitteln. Die interessierenden Teilsysteme sind dabei in erster Linie die Fahrzeugquerbewegung und die Relativposition von Fahrzeug zu Sollbahn (Abschnitt 2.1). Um eine realitätsgetreue Simulation zu ermöglichen, wird außerdem ein einfaches Lenkmodell berücksichtigt (Abschnitt 2.2).

2.1 MODELL FÜR DIE SPURHALTEREGELUNG

Unabhängig vom Unterstützungsgrad des Spurhalteassistenten, hat der Spurhalteregele die Aufgabe, das Fahrzeug bei gegebener Längsgeschwindigkeit innerhalb des Fahrstreifens zu halten und beeinflusst damit im Wesentlichen die Querdynamik des Fahrzeugs. Für den späteren Reglerentwurf sind wir also an einem mathematischen Modell der Fahrzeugquerdynamik, sowie einem Modell, welches die Lage des Fahrzeugs relativ zu einer Sollposition bzw. Sollbahn beschreibt, interessiert. In den beiden folgenden Unterabschnitten werden wir diese Modelle herleiten.

2.1.1 Fahrzeugquerdynamik: Lineares Einspurmodell

Das Einspurmodell geht auf Arbeiten von Riekert und Schunck [17] zurück und dient – in unterschiedlichen Formen – in einer Vielzahl von Veröffentlichungen zum Themenbereich Spurhalteregelung als Grundlage für den Reglerentwurf (z. B. [1, 5, 12, 19, 21]).

Die hier angegebene Herleitung orientiert sich an [15, Kap. 2.3], wobei für die Modellbildung zunächst einige vereinfachende Annahmen [18, S. 243] getroffen werden:

- Die Vorder- und Hinterräder werden achsweise zu einem Rad zusammengefasst.
- Die Fahrzeugmasse m wird als im Schwerpunkt CG konzentriert angenommen.

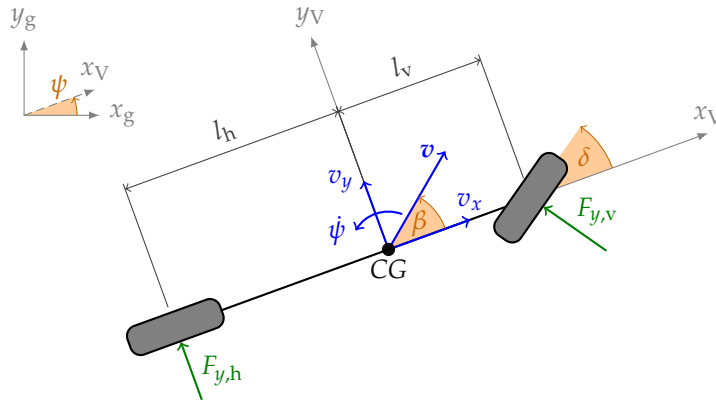


Abbildung 2.1: Einspurmodell zur Beschreibung der Querdynamik.

Parameter	Beschreibung	Einheit
CG	Schwerpunkt (Center of Gravity)	-
$c_{s,v}/c_{s,h}$	Reifenschräglaufigkeit vorne/hinten	Nm/rad
$F_{y,v}/F_{y,h}$	Reifenquerkraft vorne/hinten	N
I_{zz}	Trägheitsmoment um die Hochachse	kg m ²
l_v	Abstand Schwerpunkt zu Vorderachse	m
l_h	Abstand Schwerpunkt zu Hinterachse	m
m	Fahrzeugmasse	kg
v_x/v_y	Längs-/Quergeschwindigkeit	m/s
β	Schwimmwinkel	rad
δ	Radlenkwinkel	rad
ψ	Gierwinkel	rad

Tabelle 2.1: Parameter/Bezeichner des Einspurmodells nach Abbildung 2.1.

- Der Schwerpunkt liegt auf Höhe der Fahrbahn, d. h. sämtliche Nick- und Wankbewegungen werden vernachlässigt.
- Die Längsgeschwindigkeit v_x wird als konstant angenommen.

Für die Herleitung des Modells betrachten wir Abbildung 2.1. Die darin verwendeten Bezeichnungen bzw. Parameter sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Im ersten Schritt wenden wir das zweite Newtonsche Gesetz an und erhalten das Kräftegleichgewicht

$$ma_y = F_{y,v} \cos \delta + F_{y,h}, \quad (2.1)$$

wobei die Querbewegung a_y durch

$$a_y = \dot{v}_y + \dot{\psi}v_x \quad (2.2)$$

gegeben ist, bzw. das Momentengleichgewicht

$$I_{zz}\ddot{\psi} = F_{y,v}l_v \cos \delta - F_{y,h}l_h \quad (2.3)$$

bezogen auf den Schwerpunkt CG.

Im zweiten Schritt gilt es, den Kraftschluss von Fahrbahn zu Reifen, d. h. die Reifenquerkräfte, durch ein geeignetes Reifenmodell abzubilden. Im Allgemeinen hängt die Reifenquerkraft nichtlinear vom Schräglaufwinkel¹ ab, für kleine Werte des Schräglaufwinkels verhalten sich diese jedoch annähernd proportional zueinander. Die Reifenquerkräfte werden dementsprechend durch

$$\begin{aligned} F_{y,v} &= c_{s,v}\alpha_v \quad \text{bzw.} \\ F_{y,h} &= c_{s,h}\alpha_h \end{aligned} \quad (2.4)$$

modelliert, wobei $c_{s,v}$ bzw. $c_{s,h}$ die Schräglaufsteifigkeit des jeweiligen Reifenpaares bezeichnen. Für die Schräglaufwinkel des Vorder- bzw. Hinterrades können wir nach Abbildung 2.1

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \delta - \arctan\left(\frac{v_y + l_v\dot{\psi}}{v_x}\right) \quad \text{bzw.} \\ \alpha_h &= -\arctan\left(\frac{v_y - l_h\dot{\psi}}{v_x}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

angeben.

Im dritten Schritt werden die bisherigen Ergebnisse unter den Annahmen, dass

- die Argumente der Arkustangens-Funktion in Gleichung (2.5) betragsmäßig $\ll 1$ sind, d. h. für kleine Quer- bzw. Giergeschwindigkeiten v_y bzw. $\dot{\psi}$, sowie
- $\cos \delta \approx 1$ für $|\delta| \ll 1$

linearisiert, d. h. die Gleichungen (2.1), (2.3) und (2.5) vereinfachen sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.2) und (2.4) zu

$$m(\dot{v}_y + \dot{\psi}v_x) \approx c_{s,v}\alpha_v + c_{s,h}\alpha_h, \quad (2.6)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} \approx c_{s,v}\alpha_v l_v - c_{s,h}\alpha_h l_h \quad (2.7)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_v &\approx \delta - \frac{v_y + l_v\dot{\psi}}{v_x} \quad \text{bzw.} \\ \alpha_h &\approx -\frac{v_y - l_h\dot{\psi}}{v_x}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (2.8) in die Gleichungen (2.6) und (2.7) ein, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\dot{v}_y &\approx \left(-\frac{c_{s,v} + c_{s,h}}{v_x}\right)v_y + \left(\frac{-c_{s,v}l_v + c_{s,h}l_h}{v_x} - mv_x\right)\dot{\psi} + c_{s,v}\delta, \\ I_{zz}\ddot{\psi} &\approx \left(\frac{-c_{s,v}l_v + c_{s,h}l_h}{v_x}\right)v_y + \left(-\frac{c_{s,v}l_v^2 + c_{s,h}l_h^2}{v_x}\right)\dot{\psi} + c_{s,v}l_v\delta \end{aligned}$$

¹ Der Schräglaufwinkel eines Reifens ist definiert als der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor im Reifenaufstandspunkt und der Orientierung des Reifens [14, S. 30].

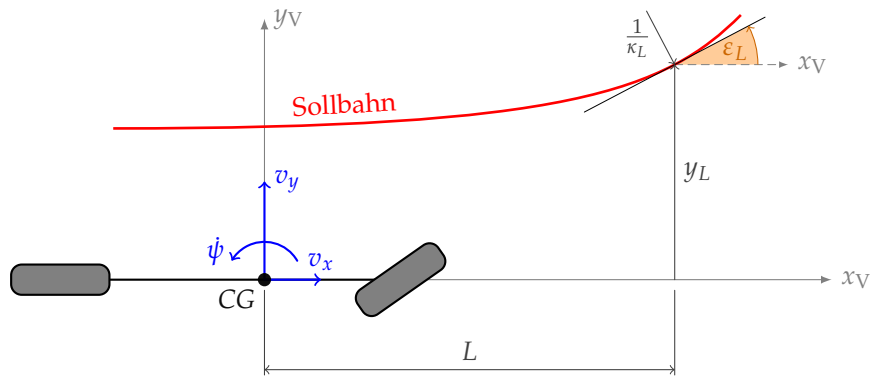


Abbildung 2.2: Beschreibung der Fahrzeugposition relativ zur Sollbahn.

der Querdynamik des Einspurmodells. Mit der Wahl des Zustandsvektors $\bar{x} := [v_y \ \psi]^\top$ können wir diese kompakt als Zustandsraummodell

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{s,v} + c_{s,h}}{m v_x} & -\frac{c_{s,v} l_v + c_{s,h} l_h}{m v_x} - v_x \\ -\frac{c_{s,v} l_v + c_{s,h} l_h}{I_{zz} v_x} & -\frac{c_{s,v} l_v^2 + c_{s,h} l_h^2}{I_{zz} v_x} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \frac{c_{s,v}}{m} \\ \frac{c_{s,v} l_v}{I_{zz}} \end{bmatrix} \delta \quad (2.9)$$

anschreiben, wobei wir der Einfachheit halber wieder das Gleichheitszeichen anstatt \approx verwenden.

Mit diesem, aus obigen Vereinfachungen resultierenden Modell, sind wir nun in der Lage, das querdynamische Verhalten für Querbeschleunigungen a_y im Bereich von $|a_y| \lesssim 4 \text{ m/s}^2$ näherungsweise zu beschreiben [18, S. 244].

2.1.2 Relativposition zur Sollbahn

Zur mathematischen Beschreibung der Fahrzeugposition relativ zu einer Sollbahn existieren in der Literatur verschiedene Ansätze (z. B. [2, 4, 20]).

Wir verwenden den in Abbildung 2.2 gezeigten Ansatz [11, 12]. Die Größen y_L , ε_L und κ_L , die beim realen Fahrzeug von einem entsprechenden Kamerasystem mit anschließender Bildverarbeitung ermittelt werden, beschreiben dabei

y_L den Abstand von Fahrzeuglängsachse zu Sollbahn normal auf die Fahrzeuglängsachse,

ε_L den Winkel zwischen Fahrzeuglängsachse und der Tangente an die Sollbahn sowie

κ_L die Kurvenkrümmung der Sollbahn, wobei eine Krümmung $\kappa > 0$ eine Linkskurve und $\kappa < 0$ eine Rechtskurve definiert.

Parameter	Bezeichnung	Wertebereich	Einheit
L	Vorausschaudistanz	$[0, \infty)$	m
y_L	Querversatz	$(-\infty, \infty)$	m
ε_L	Relativwinkel	$(-\pi, \pi]$	rad
κ_L	Kurvenkrümmung	$(-\infty, \infty)$	1/m

Tabelle 2.2: Größen zur Beschreibung der Relativposition von Fahrzeug zu Sollbahn.

Der Parameter L wird als Vorausschaudistanz (look-ahead distance) bezeichnet und beschreibt die Entfernung vor dem Fahrzeug (bzw. Fahrzeugschwerpunkt) entlang dessen Längsachse, in der die obigen Größen ermittelt werden. In Tabelle 2.2 sind die Parameter zur Beschreibung der Relativposition zusammengefasst. Die unbeschränkten Grenzen in den angegebenen Intervallen sind als theoretische Werte aufzufassen.

Die Dynamik von Querversatz y_L und Relativwinkel ε_L wird in [11, 12] durch die Gleichungen

$$\dot{y}_L = v_x \varepsilon_L - v_y - L\dot{\psi} \quad \text{und} \quad (2.10a)$$

$$\dot{\varepsilon}_L = v_x \kappa_L - \dot{\psi} \quad (2.10b)$$

beschrieben, wobei (wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden) streng genommen nur näherungsweise Gleichheit gilt.

Zum besseren Verständnis dieser Gleichungen wollen wir uns nun deren Zustandekommen überlegen.

Analyse der Gleichungen zur Sollbahnverfolgung

RELATIVWINKEL. Wir behandeln zunächst Gleichung (2.10b). Dazu betrachten wir die in Abbildung 2.3 gezeigte Situation einer Sollbahn mit variabler Krümmung $\kappa(s)$ und einer Fahrzeugbewegung vom Punkt CG_A in den Punkt CG_B mit den zugehörigen „Messpunkten“ A und B . Der Einfachheit halber betrachten wir hierbei den Fall $L = 0$ und verzichten auf die Angabe dieses Indizes. Stattdessen kennzeichnen wir dem Punkt A bzw. B zugehörige Größen mit der jeweiligen Punktbezeichnung als Indizes.

Für die Änderung des Relativwinkels ε aufgrund der Kurvenkrümmung $\kappa(s)$ betrachten wir die Winkeländerung $\Delta\varphi$ der Tangente an die Sollbahn beim Übergang von Punkt A nach B . Es gilt

$$\Delta\varphi = \psi_B + \varepsilon_B - (\psi_A + \varepsilon_A) \quad (2.11)$$

bzw. mit $\Delta\psi := \psi_B - \psi_A$ und $\Delta\varepsilon := \varepsilon_B - \varepsilon_A$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varphi - \Delta\psi. \quad (2.12)$$

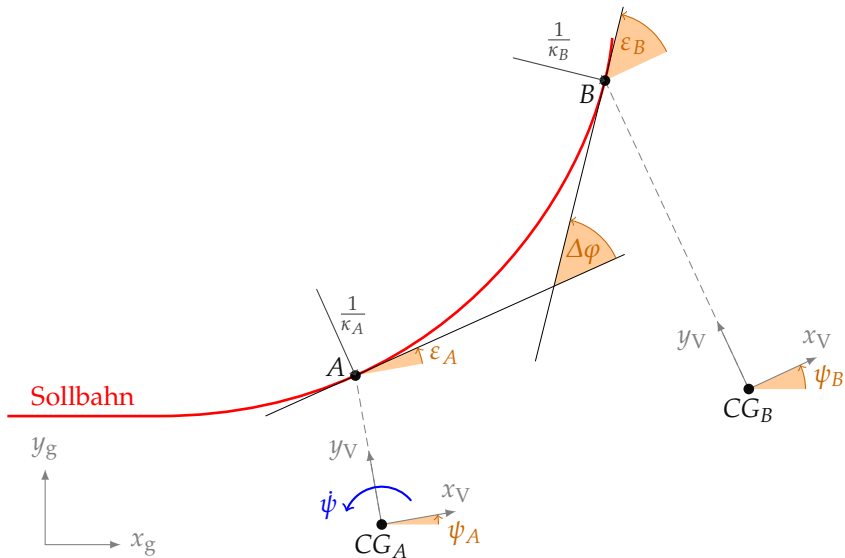


Abbildung 2.3: Zur Herleitung der Dynamik des Relativwinkels ε_L nach Gleichung (2.10b).

Der Winkel $\Delta\varphi$ ist dabei, für eine nach der Bogenlänge s parametrisierte Krümmung $\kappa(s)$, im Allgemeinen durch

$$\Delta\varphi = \int_A^B \kappa(s) ds \quad (2.13)$$

gegeben. Für den einfachen Fall einer konstanten Krümmung $\kappa(s) = \bar{\kappa}$ erhalten wir den bekannten Zusammenhang

$$\Delta\varphi = \bar{\kappa} s_{AB},$$

wobei s_{AB} die Bogenlänge der Kurve vom Punkt A zum Punkt B bezeichnet.

Betrachten wir die in Gleichung (2.12) auftretenden Größen nun als Funktionen der Zeit t und sei Δt das während der Bewegung vom Punkt A in den Punkt B durchlaufene Zeitintervall, so geht die Gleichung

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} - \frac{\Delta\psi}{\Delta t} \quad (2.14)$$

für $\Delta t \rightarrow 0$, d. h. $B \rightarrow A$, in die Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \quad (2.15)$$

über, wobei mit der Sollbahn in Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ und dem infinitesimalen Wegelement $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \kappa(s) ds = \tilde{\kappa}(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (2.16)$$

gilt. Der Term ds/dt entspricht dem Betrag des Tangentialvektors $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ an die Sollbahn zum Zeitpunkt t – physikalisch interpretiert also dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors tangential zur Sollbahn.

seine Orientierung um $\Delta\psi = \dot{\psi}\Delta t$. Die durch die so definierten Messpunkte A und B eingeschlossene Sollbahnstrecke s_{AB} wird durch die Strecke $|v_t|\Delta t$ angenähert bzw. für $\Delta t \rightarrow dt$ (also wieder $B \rightarrow A$) exakt beschrieben.

Für die Berechnung von $|v_t|$ betrachten wir zunächst den zu $v_{x,B}$ parallelen Zeiger $v'_{x,B}$. Dieser ist durch

$$v'_{x,B} = |v_A| \cos(\beta_A - \Delta\psi) \quad (2.19)$$

gegeben. Mittels des von v_t und $v'_{x,B}$ eingeschlossenen Winkels $\varepsilon_A - \Delta\psi$ können wir nun den Betrag

$$|v_t| + |v_{t\psi}| = \frac{v'_{x,B}}{\cos(\varepsilon_A - \Delta\psi)} = |v_A| \frac{\cos(\beta_A - \Delta\psi)}{\cos(\varepsilon_A - \Delta\psi)} \quad (2.20)$$

angeben. Da aufgrund der Annahme $\dot{\psi} \neq 0$ die Fahrzeugquergeschwindigkeiten $v_{y,A}$ und $v_{y,B}$ nicht parallel zueinander sind, tritt noch der zusätzliche Term $|v_{t\psi}|$ auf, um den obige Gleichung zu korrigieren ist. Dazu wenden wir den Sinussatz auf das Dreieck CG_AAC an und erhalten für die Strecke von C nach A

$$\overline{CA} = \frac{y_{L,A} \sin \Delta\psi}{\sin[\pi - (\frac{\pi}{2} - \varepsilon_A) - \Delta\psi]} = \frac{y_{L,A} \sin \Delta\psi}{\cos(\varepsilon_A - \Delta\psi)}. \quad (2.21)$$

Hierbei ist zu beachten, dass \overline{CA} eine Länge beschreibt, wir aber an einer Geschwindigkeit interessiert sind. Dazu dividieren wir Gleichung (2.21) durch Δt und bilden anschließend den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$. Dann gilt auch $\Delta\psi \rightarrow 0$ und $\overline{CA} \rightarrow 0$ und aus Gleichung (2.21) folgt formal angeschrieben

$$|v_{t\psi}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_{L,A} \sin(\dot{\psi}\Delta t)}{\cos(\varepsilon_A - \dot{\psi}\Delta t)} \frac{1}{\Delta t} = \frac{y_{L,A}}{\cos \varepsilon_A} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\psi}\Delta t}{\Delta t} = \frac{y_{L,A}\dot{\psi}}{\cos \varepsilon_A}. \quad (2.22)$$

Mit diesem Ergebnis können wir den gesuchten Wert $|v_t|$ für $\Delta\psi \rightarrow 0$ schließlich als

$$|v_t| = |v_A| \frac{\cos \beta_A}{\cos \varepsilon_A} - \frac{y_{L,A}\dot{\psi}}{\cos \varepsilon_A} \quad (2.23)$$

anschreiben. Die allgemein gültige Form von Gleichung (2.10b) ist damit durch

$$\dot{\varepsilon}_L = \left(|v| \frac{\cos \beta}{\cos \varepsilon_L} - \frac{y_L \dot{\psi}}{\cos \varepsilon_L} \right) \kappa_L - \dot{\psi} \quad (2.24)$$

gegeben.

QUERVERSATZ. Für die Herleitung von Gleichung (2.10a) gehen wir ähnlich zum vorherigen Abschnitt vor, wollen uns aber mit einer Näherung begnügen. Wir betrachten dazu Abbildung 2.5 und treffen die vereinfachende Annahme, dass für die Giergeschwindigkeit $\dot{\psi} \equiv 0$ gilt. Damit können wir für den Querversatz den Zusammenhang

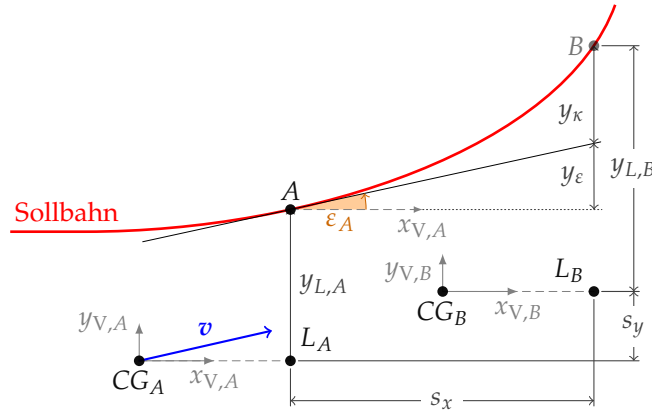


Abbildung 2.5: Zur Herleitung der Dynamik des Querversatzes y_L nach Gleichung (2.10a).

$$y_{L,B} + s_y - y_{L,A} = y_\varepsilon + y_\kappa \quad (2.25)$$

angeben, wobei wir mit y_ε den Querversatz aufgrund des Relativwinkels ε_A zur Sollbahntangente und mit y_κ den Querversatz aufgrund der Sollbahnkrümmung bezeichnen. Für Ersteren gilt

$$y_\varepsilon = s_x \tan \varepsilon_A. \quad (2.26)$$

Vernachlässigen wir nun den aus der Sollbahnkrümmung resultierenden Beitrag y_κ und verwenden die Abkürzung $\Delta y_L := y_{L,B} - y_{L,A}$, so gilt

$$\Delta y_L \approx s_x \tan \varepsilon_A - s_y \quad (2.27)$$

Analog zu vorhin bilden wir für

$$\frac{\Delta y_L}{\Delta t} \approx \frac{s_x \tan \varepsilon_A}{\Delta t} - \frac{s_y}{\Delta t} \quad (2.28)$$

den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ (und damit $B \rightarrow A$) und erhalten

$$\dot{y}_L \approx \dot{s}_x \tan \varepsilon_A - \dot{s}_y.$$

Die zeitlichen Ableitungen der Wegstrecken s_x und s_y entsprechen der Längs- und Quergeschwindigkeit v_x und v_y , womit wir kurz

$$\dot{y}_L \approx v_x \tan \varepsilon_A - v_y \quad (2.29)$$

schreiben können.

Wir wollen nun noch den Einfluss der (bei vorhandener Quergeschwindigkeit v_y immer auftretenden) Giergeschwindigkeit $\dot{\psi}$ über einen additiven Term berücksichtigen. Dazu bezeichne $\Delta\psi$ die Gierwinkeländerung während dem Zeitintervall Δt . Für diesen einfachen Fall können wir uns leicht überlegen, dass der aus der Giergeschwindigkeit $\dot{\psi}$ resultierende Querversatz y_ψ durch

$$y_\psi = L \sin \Delta\psi \quad (2.30)$$

gegeben ist. Für $\Delta t \rightarrow 0$ und konstantes L folgt wiederum

$$\dot{y}_\psi = L\dot{\psi}. \quad (2.31)$$

Damit lautet die Näherungsformel für die Änderung \dot{y}_L des Querversatzes

$$\dot{y}_L \approx v_x \tan \varepsilon_L - v_y - L\dot{\psi}, \quad (2.32)$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass der Beitrag von y_ψ negativ zu zählen ist. Mit $\tan \varepsilon_L \approx \varepsilon_L$ für $|\varepsilon_L| \ll 1$ stimmt auch dieses Ergebnis mit der Gleichung (2.10a) überein.

Vergleich mit der tatsächlichen Relativposition

Die Ergebnisse der vorgehenden Überlegungen wollen wir nun anhand einfacher Simulationen überprüfen. Dazu geben wir eine Sollbahn vor und lassen das Fahrzeug durch Vorgabe eines Lenkwinkelverlaufs eine Istbahn relativ dazu abfahren (Abbildung 2.6a).

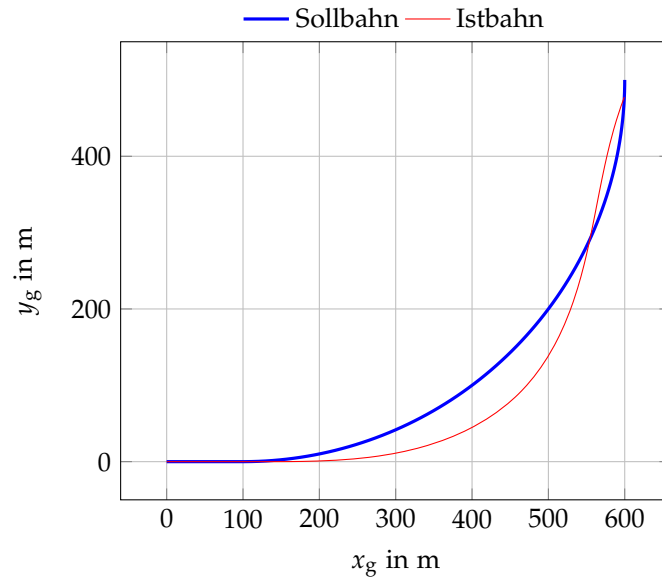
Abbildung 2.6b zeigt den Vergleich der exakten Verläufe von y_L und ε_L mit jenen Verläufen, die aus den Gleichungen (2.10) sowie (2.24) und (2.32) resultieren. Wie erwartet, weisen die linearisierten Gleichungen (2.10) wesentlich größere Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf auf als die nichtlinearen, wobei generell eine sehr gute Übereinstimmung bis ca. 5 s nach Einsetzen einer Relativbewegung bei $t = 3$ s feststellbar ist, was wiederum die Verwendung der linearisierten Gleichungen (2.10) für den Reglerentwurf motiviert.

Als Grundlage für die Simulation diente das Einspurmodell aus Gleichung (2.9) erweitert um die Gleichungen (2.10) bzw. (2.24) und (2.32) zur Beschreibung der Relativposition. Die Ermittlung der exakten Werte von Querversatz und Relativwinkel erfolgte mittels einer Matlab-Funktion, die diese anhand der vorgegebenen Sollbahn und der aktuellen Fahrzeugposition/-orientierung berechnete. Die verwendeten Simulationsparameter sind in Tabelle A.2 zusammengefasst.

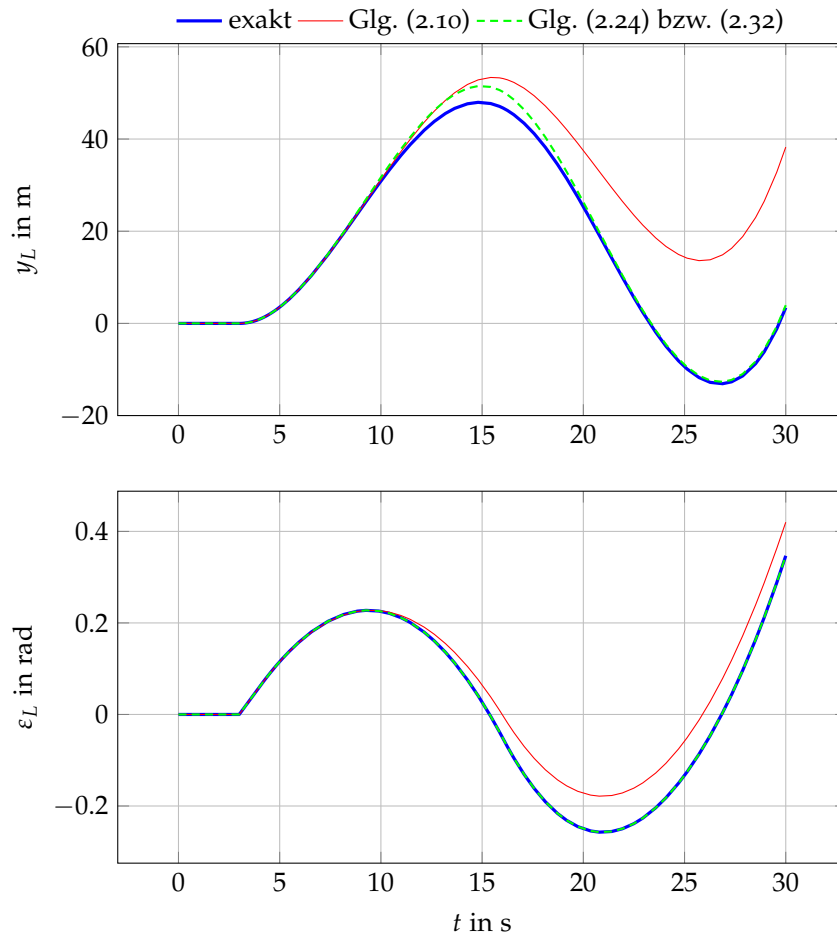
Zusammenfassung

Wie wir gesehen haben, beschreiben die Gleichungen (2.10) die Änderung der Relativposition von Fahrzeug zu Sollbahn lediglich näherungsweise. Exakt bzw. genauer wird diese durch die Gleichungen (2.24) bzw. (2.32) beschrieben. Diese sind allerdings für einen linearen Reglerentwurf zum einen aufgrund der Winkelfunktionen ungeeignet, zum anderen aufgrund der Nichtlinearitäten in Form der Produkte $|v| \kappa_L$ und $y_L \kappa_L \dot{\psi}$.

Für den typischen Einsatzbereich eines LKA-Systems stellt die lineare Gleichung (2.10b) dennoch eine gute Näherung für Gleichung (2.24) dar, denn dort gilt $\beta \approx 0$ bzw. $\dot{\psi} \approx 0$ und damit $|v| \approx v_x$ sowie



(a) Soll- und Istbahn.



(b) Querversatz y_L und Relativwinkel ε_L .

Abbildung 2.6: Vergleich der tatsächlichen Relativposition mit den Modellgleichungen.

$\cos \beta \approx 1$. Zusätzlich müssen der Querversatz y_L und der Relativwinkel ε_L zur Aktivierung des LKA-Systems hinreichend klein sein, d. h. $y_L(0) \approx 0$ und $\varepsilon_L(0) \approx 0$. Durch die Wahl einer geeigneten Regelung bleiben y_L und ε_L in einer hinreichend kleinen Umgebung dieser Ruhelage, womit die Verwendung der vereinfachten Gleichung (2.10b) gerechtfertigt ist.

Für Gleichung (2.32) ist der Aufwand zur Linearisierung geringer, denn hier setzen wir einfach $\tan \varepsilon_L \approx \varepsilon_L$ für $|\varepsilon_L| \ll 1$, was aufgrund obiger Überlegungen zulässig ist, um (2.10a) zu erhalten.

Linearisierung um eine Ruhelage

Als alternative Vorgehensweise, können wir die Gleichungen (2.10) auch durch Linearisierung von (2.32) und (2.24) um eine Ruhelage ermitteln. Denn zusammen mit dem Einspurmodell bilden diese ein nichtlineares Modell der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (2.33)$$

mit

$$f(x, \delta, \kappa_L) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{s,v} + c_{s,h}}{mv_x} x_1 + \left(\frac{-c_{s,v} l_v + c_{s,h} l_h}{mv_x} - v_x \right) x_2 + \frac{c_{s,v}}{m} \delta \\ \frac{-c_{s,v} l_v + c_{s,h} l_h}{I_{zz} v_x} x_1 - \frac{c_{s,v} l_v^2 + c_{s,h} l_h^2}{I_{zz} v_x} x_2 + \frac{c_{s,v} l_v}{I_{zz}} \delta \\ v_x \tan x_4 - x_1 - L x_2 \\ \left(|v| \frac{\cos \beta}{\cos x_4} - \frac{x_3 x_2}{\cos x_4} \right) \kappa_L - x_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

und $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top := [v_y \ \dot{\psi} \ y_L \ \varepsilon_L]^\top$, wobei das Einspurmodell (2.9) für $v_x \neq 0$ allgemein die Ruhelage²

$$\bar{x}_R = -A^{-1} b \delta_R \quad (2.35)$$

und demnach für $\delta_R = 0$ die Ruhelage

$$\bar{x}_R = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

besitzt. Damit können wir die Ruhelage von $f(x, 0, 0)$ unmittelbar zu

$$x_R = [0 \ 0 \ c \ 0] \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

angeben, denn aus

$$v_x \tan x_{4,R} - x_{1,R} - L x_{2,R} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{4,R} = 0 \quad (2.38)$$

und damit unter Beachtung von $|v| = \sqrt{v_x^2 + x_1^2}$ und $\beta = \arctan \frac{x_1}{v_x}$ schließlich

$$\left(v_x \frac{\cos \beta}{\cos x_{4,R}} - \frac{x_{3,R} x_{2,R}}{\cos x_{4,R}} \right) \kappa_{L,R} - x_{2,R} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3,R} = c \in \mathbb{R}. \quad (2.39)$$

² Die Ruhelage eines mathematischen Modells (2.33) erhält man durch lösen der Gleichung $f(x_R, u_R) = 0$.

Die Linearisierung um die Ruhelage x_R können wir nun mittels der Jacobi-Matrix von f ausgewertet an der Stelle $(x_R, \delta_R, \kappa_{L,R})$ ermitteln, wobei wir lediglich die beiden letzten Zeilen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \right|_{x_R, \delta_R, \kappa_{L,R}} = \begin{bmatrix} -1 & -L & 0 & v_x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: J_x \quad (2.40)$$

anschreiben. Analog berechnen wir

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa_L} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \right|_{x_R, \delta_R, \kappa_{L,R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_x \end{bmatrix} =: J_\kappa, \quad (2.41)$$

womit die Gleichheit von (2.10) und

$$J_x x + J_\kappa \kappa_L = \begin{bmatrix} -x_1 - Lx_2 + v_x x_4 \\ -x_2 + v_x \kappa_L \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

offensichtlich wird.

Diese Ergebnisse stimmen auch mit der physikalischen Interpretation überein, denn die Ruhelage (2.37) bedeutet, dass der Querversatz y_L bei Geradeausfahrt parallel zu einer geraden Fahrbahn konstant ist und seinen Anfangswert nicht verändert. Weist die Fahrbahn hingegen eine Krümmung $\kappa_L \neq 0$ auf, so variiert der Querversatz und es gibt keine Ruhelage.

2.1.3 Gesamtmodell

Wir wollen nun die beiden Teilmodelle (2.9) und (2.10) zu einem Gesamtmodell zusammenfassen. Dazu erweitern wir den Zustandsvektor $\bar{x} := [v_y \ \dot{\psi}]^\top$ des Einspurmodells um die charakteristischen Größen y_L und ε_L der „Sollbahnverfolgung“ zum neuen Zustandsvektor $x := [v_y \ \dot{\psi} \ y_L \ \varepsilon_L]^\top$. Damit lässt sich das Gesamtmodell als

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\delta + b_S \kappa_L \quad (2.43)$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c_{s,v} + c_{s,h}}{mv_x} & -\frac{c_{s,v}l_v + c_{s,h}l_h}{mv_x} - v_x & 0 & 0 \\ -\frac{c_{s,v}l_v + c_{s,h}l_h}{I_z v_x} & -\frac{c_{s,v}l_v^2 + c_{s,h}l_h^2}{I_z v_x} & 0 & 0 \\ -1 & -L & 0 & v_x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

und dem Eingangsvektor

$$b = \begin{bmatrix} \frac{c_{s,v}}{m} & \frac{c_{s,v}l_v}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (2.45)$$

anschreiben. Die Krümmung κ_L der Sollbahn in der Vorausschaulistanz L vor dem Fahrzeugschwerpunkt geht über den Störvektor

$$b_S = [0 \ 0 \ 0 \ v_x]^\top \quad (2.46)$$

als (messbare) Störgröße in das Modell ein.

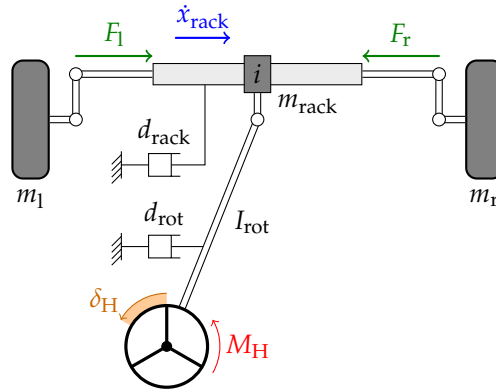


Abbildung 2.7: Lenksystem „Dynamic Steer Ratio“ [8, S. 140].

Parameter	Beschreibung	Einheit
d_{rack}	Dämpfung der Zahnstange	N s/m
d_{rot}	Dämpfung aller rotierenden Teile	Nm s/rad
F_l/F_r	Spurstangenkräfte in Richtung Zahnstange	N
i	Übersetzungsverhältnis δ_H/x_{rack}	rad/m
I_{rot}	Trägheitsmoment aller rotierenden Teile	kg m ²
m_l/m_r	Generalisierte Masse der Radaufhängung	kg
m_{rack}	Masse der Zahnstange	kg
M_H	Moment am Lenkrad	Nm
x_{rack}	Zahnstangenverschiebung	m/s
δ_H	Lenkradwinkel	rad

Tabelle 2.3: Parameter des Lenkmodells nach Abbildung 2.7.

2.2 MODELL DER LENKUNG

Die Lenkung ist als Stellglied ein wesentlicher Bestandteil eines LKA-Systems. Das Simulationspaket CarMaker von IPG stellt unterschiedlich detaillierte Lenkmodelle zur Verfügung. Da das Unterstützungsmoment eine wichtige Größe eines LKA-Systems ist und im realen Betrieb innerhalb gewisser Schranken bleiben muss, ist ein momentenbasiertes Lenkmodell zweckmäßig. Damit und im Hinblick auf einen geringen Parametrierungsaufwand fiel die Entscheidung auf das im Folgenden beschriebene Lenkmodell „Dynamic Steer Ratio“ nach Abbildung 2.7 [8, S. 140]. Die verwendeten Formelzeichen sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst. Es handelt sich dabei um ein System mit einem Freiheitsgrad, d. h. das Lenksystem wird als steif angenommen.

Die Dynamik der Zahnstange ist durch die Differentialgleichung

$$(m_l + m_r + m_H)\ddot{x}_{\text{rack}} = F_H - d_{\text{rack}}\dot{x}_{\text{rack}} + F_l - F_r \quad (2.47)$$

mit der Lenkmasse

$$m_H = I_{\text{rot}}i^2 + m_{\text{rack}}, \quad (2.48)$$

der Lenkkraft

$$F_H = (M_H V - d_{\text{rot}}\dot{\delta}_H)i \quad (2.49)$$

und dem Zusammenhang zwischen Zahnstangenverschiebung und Lenkradwinkel

$$\delta_H = i \cdot x_{\text{rack}} \quad (2.50)$$

gegeben. [8, S. 140]

Für den späteren Reglerentwurf ist die Beschreibung anhand des Lenkradwinkels δ_H vorteilhaft, weshalb wir die obige Differentialgleichung mittels der Gleichungen (2.48), (2.49) und (2.50) zu

$$\frac{\zeta}{i} \ddot{\delta}_H = (M_H V - d_{\text{rot}} \dot{\delta}_H) i - d_{\text{rack}} \frac{\dot{\delta}_H}{i} + F_l - F_r \quad (2.51)$$

umschreiben und dabei abkürzend

$$\zeta := m_l + m_r + I_{\text{rot}} i^2 + m_{\text{rack}}$$

verwenden. Mit der Wahl des Zustandsvektors $\check{x} := [\delta_H \quad \dot{\delta}_H]^\top$ erhalten wir schließlich das Zustandsraummodell

$$\frac{d\check{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\zeta}(d_{\text{rot}} i^2 + d_{\text{rack}}) \end{bmatrix} \check{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i^2 V}{\zeta} \end{bmatrix} M_H + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i}{\zeta} & -\frac{i}{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

mit der Eingangsgröße M_H und den beiden Seitenkräften F_l und F_r als Störgrößen.

2.3 KOMBINATION VON FAHRZEUG- UND LENKUNGSMODELL

Unter der Annahme, dass zwischen Lenkradwinkel δ_H und Radlenkwinkel δ ein linearer Zusammenhang mit dem festen Übersetzungsverhältnis

$$\alpha = \frac{\delta_H}{\delta} \quad (2.53)$$

vorliegt, können wir das Modell (2.43) der Fahrzeugquerdynamik inkl. Relativposition und das Modell (2.52) der Lenkung in einem gemeinsamen Zustandsraummodell zusammenfassen. Reale Lenkungen werden obige Annahme im Allgemeinen nicht erfüllen. In diesem Fall kann, passend zum Einsatzbereich des LKA-Systems, der Zusammenhang (2.53) für kleine Abweichungen des Radlenkwinkels aus der Ruhelage $\delta_R = 0$ linearisiert werden.

Da der Radlenkwinkel δ in der Realität nur sehr schwer messbar ist, sind wir an einer Darstellung mittels des Lenkradwinkels δ_H interessiert und drücken die betreffenden Gleichungen durch diesen entsprechend dem Zusammenhang (2.50) aus. Das Modell (2.43) geht damit in

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \frac{b}{\alpha} \delta_H + b_S \kappa_L \quad (2.54)$$

über. Mit dem neuen Zustandsvektor $\check{x} = [x^\top \quad \delta_H \quad \dot{\delta}_H]^\top$ können wir das gesuchte Zustandsraummodell dann unmittelbar in der Form

$$\frac{d\check{\mathbf{x}}}{dt} = \check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}M_H + \check{\mathbf{B}}_S \begin{bmatrix} \kappa_L \\ F_l \\ F_r \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mit der Systemmatrix

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}/\alpha & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & 0 & 1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & 0 & -\frac{1}{\xi}(d_{\text{rot}}i^2 + d_{\text{rack}}) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

und dem Eingangsvektor

$$\check{\mathbf{b}} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{i^2 V}{\xi} \right]^T \quad (2.57)$$

anschreiben. Die Störungen κ_L der Relativposition bzw. F_l und F_r des Lenkmodells gehen nun über die Störmatrix

$$\check{\mathbf{B}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_S & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\xi} & -\frac{i}{\xi} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

in das Modell ein. Der Zustandsvektor $\check{\mathbf{x}}$ enthält jetzt vollständig ausgeschrieben die Komponenten

$$\check{\mathbf{x}} = \left[v_y \ \psi \ y_L \ \varepsilon_L \ \delta_H \ \dot{\delta}_H \right]^T. \quad (2.59)$$

3

REGLERENTWURF

In diesem Kapitel wollen wir uns dem Entwurf des Spurhaltereglers widmen und dessen Funktionsweise anhand einfacher Simulation basierend auf dem Einspurmodell verifizieren. Dabei wollen wir, um erste Einblicke in das Verhalten des geregelten Systems zu erlangen, das Lenkmodell zunächst unberücksichtigt lassen (Abschnitt 3.1) und erst anschließend in den Reglerentwurf miteinbeziehen (Abschnitt 3.2).

3.1 SPURHALTEREGELUNG OHNE LENKDYNAMIK

Der Spurhalteregelung ohne Berücksichtigung der Lenkung liegt das mathematische Modell aus Gleichung (2.43) zugrunde. Da es sich dabei um ein lineares Modell handelt, steht uns eine Vielzahl an Reglerentwurfsverfahren zur Verfügung, wobei sich aufgrund der vorliegenden Zustandsraumdarstellung eine Zustandsregelung anbietet. Diese setzt natürlich die Verfügbarkeit der Zustandsvariablen v_y , ψ , y_L und ε_L voraus.

Wir wollen im Folgenden das Regelgesetz (d. h. die Rückführmatrix bzw. den Rückführvektor) durch Lösen des LQ-Problems ermitteln. Diese Methode bietet im Gegensatz zum Entwurf durch Eigenwertvorgabe eine relativ intuitive Möglichkeit, sich schrittweise durch Anpassen der Wichtungsmatrizen an die gewünschte Dynamik des geschlossenen Regelkreises heranzutasten bzw. Beschränkungen der Stellgröße zu berücksichtigen.

Im vorliegenden Fall gilt es für das lineare Modell aus Gleichung (2.43) mit dem Reglergesetz

$$\delta = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} \quad (3.1)$$

die Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_k J \quad (3.2)$$

mit dem quadratischen Funktional

$$J[\delta(t)] = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + R \delta^2(t) \right) dt \quad (3.3)$$

und den Wichtungsmatrizen $Q = Q^\top \geq 0$ und $R > 0$ zu berechnen¹.

Um die Lösbarkeit dieses Optimierungsproblems zu sichern, muss das Paar (A, \bar{Q}) mit $Q = \bar{Q}^\top \bar{Q}$ vollständig beobachtbar sein [13, Kap. 7.2], d. h. die Matrix

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q}A \\ \bar{Q}A^2 \\ \vdots \\ \bar{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

muss den Rang $n = \text{rg } A$ besitzen. Ist $Q > 0$, d. h. positiv definit, so ist diese Bedingung stets erfüllt, denn für $Q > 0$ sind alle Eigenwerte von Q größer null und damit hat Q vollen Rang, also $\text{rg } Q = n$. Entsprechend dem Zusammenhang

$$\text{rg } Q = \text{rg}(\bar{Q}^\top \bar{Q}) \leq \min\{\text{rg } \bar{Q}^\top, \text{rg } \bar{Q}\} \quad (3.5)$$

für den Rang von Produkten von Matrizen [3], gilt damit auch $\text{rg } \bar{Q} = n$ und die Matrix (3.4) hat für alle Matrizen A den Rang n . Gegebenenfalls kann ohne Einschränkung der Lösungsmöglichkeiten die Matrix \bar{Q} vorgegeben und $\bar{Q}^\top \bar{Q}$ für den Entwurf verwendet werden [13, Kap. 7.4].

Das Ziel des Spurhaltereglers ist es, das Fahrzeug der durch den Fahrstreifen gegebenen Sollbahn folgen zu lassen. Dementsprechend wünschen wir uns (zusätzlich zur Stabilität), dass der Querversatz auch unter Einwirkung von Störungen zu null ausgeregelt wird. Damit ergeben sich die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis wie folgt:

1. Stabilität: der Regler soll zu einem asymptotisch stabilen Verhalten der Ruhelage $x_R = [0 \ 0 \ c \ 0]$ mit $c = 0$ führen d. h. es soll

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

gelten. Mit der Lösbarkeit des LQR-Problems ist diese Forderung automatisch erfüllt.

2. Stationäres Verhalten: auch in Gegenwart von Störungen bzw. Parameterungenauigkeiten soll bezüglich dem Querversatz y_L die bleibende Regelabweichung gegen Null streben.

Wählen wir für die Wichtungsmatrizen z. B.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R = 10, \quad (3.6)$$

¹ In Matlab steht dafür der Befehl `lqr` zur Verfügung.

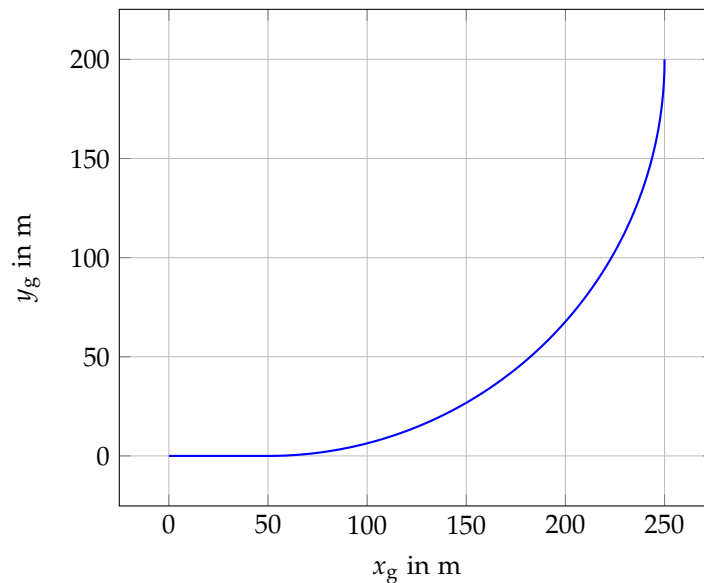


Abbildung 3.1: Sollbahn mit sprungförmigem Krümmungsverlauf.

so liefert der LQR-Entwurf für die Simulationsparameter aus Tabelle/Abschnitt A.3 den Rückführvektor

$$\mathbf{k} = [0.0273 \quad 0.1590 \quad -0.3162 \quad -0.6054]^\top, \quad (3.7)$$

womit sich die Eigenwerte

$$-13.59 \pm i10.53, \quad -2.18, \quad -7.97 \quad (3.8)$$

für den geschlossenen Regelkreis ergeben.

Das Verhalten des geregelten Systems wollen wir nun anhand einer Sollbahn mit sprungförmigem (Abbildung 3.1), sowie einer Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf (Abbildung 3.2) untersuchen. Abbildung 3.3 zeigt die Simulationsergebnisse für die Sollbahn mit sprungförmigem Krümmungsverlauf. Dabei wurden für y_L und ε_L nicht die Verläufe aus dem für den Reglerentwurf verwendeten Modell (2.43) verwendet, sondern für y_L wurde die bereits auf Seite 14 erwähnte Matlab-Funktion verwendet, für ε_L die Gleichung (2.24), d. h. für beide Größen wurden die exakten Werte verwendet.

Wie aufgrund des mathematischen Modells (2.43) zu erwarten war, stellt sich aufgrund der Krümmung der Sollbahn eine bleibende Regelabweichung (hier ca. 1 cm) ein – die Krümmung wirkt also als Störgröße. In diesem Fall weist die Sollbahn einen sprungförmigen Krümmungsverlauf auf, der in dieser Form auch beim Verlauf des Querversatzes y_L auftritt. Analog würde ein rampenförmiger Anstieg der Krümmung zu einem rampenförmigen Anstieg des Querversatzes y_L führen.

Offensichtlich sind also zur Erfüllung der Forderung nach der stationären Genauigkeit noch weitere Maßnahmen notwendig. Bei Stör-

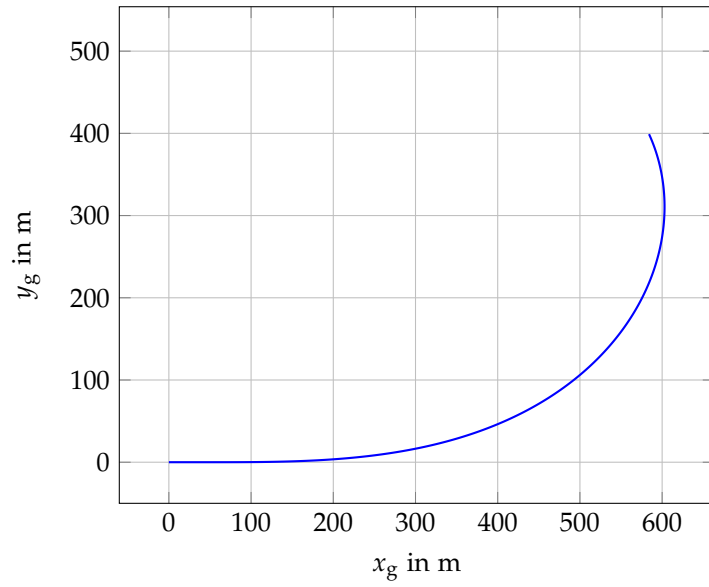


Abbildung 3.2: Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf.

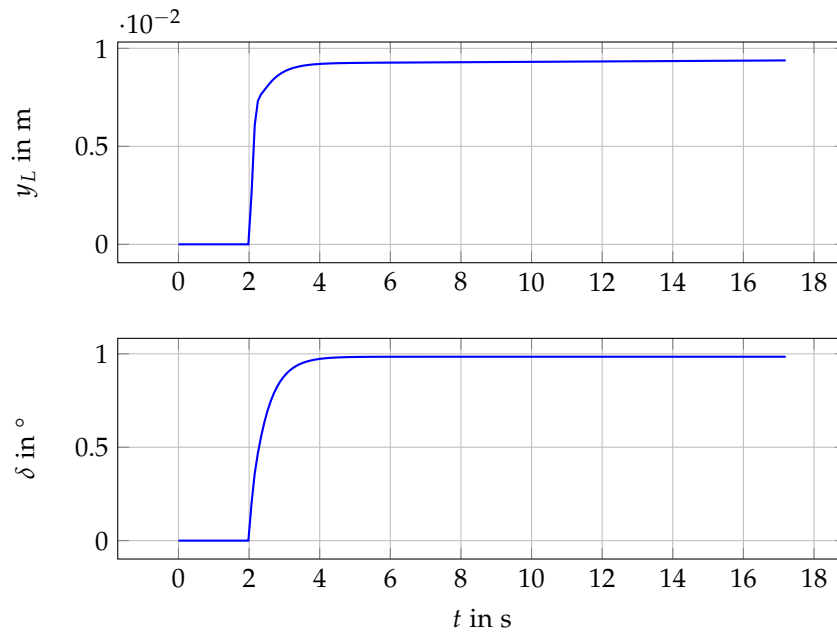


Abbildung 3.3: Spurhalteregelung ohne Lenkmodell bei sprungförmigem Krümmungsverlauf der Sollbahn.

größen mit sprungförmigem Verlauf ist diese Maßnahme klassischerweise ein integrierender Anteil im offenen Kreis. Im Straßenbau werden allerdings oft Klothoiden verwendet. Bei konstanter Fahrzeuggeschwindigkeit wirkt deren Krümmungsverlauf dann als rampenförmige Störgröße, womit es zweckmäßig ist, den offenen Kreis um einen zweifach integrierenden Anteil bezüglich y_L zu erweitern. Zur praktischen Umsetzung dieser Maßnahme, führen wir die beiden zusätzlichen Zustandsvariablen x_5 und x_6 mit dem Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_L \quad (3.9)$$

ein [2]. Mit diesen zusätzlichen Zustandsgrößen erweitern wir dann den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [v_y \ \dot{\psi} \ y_L \ \varepsilon_L]^\top$ zu $\mathbf{x}_{\text{erw}} := [\mathbf{x}^\top \ x_5 \ x_6]^\top$ und erhalten so das zu (2.43) erweiterte Modell

$$\frac{d\mathbf{x}_{\text{erw}}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{erw}} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \kappa_L. \quad (3.10)$$

Abbildung 3.4 zeigt das Resultat dieser Maßnahme für die Sollbahn mit sprungförmigem Krümmungsverlauf (Abbildung 3.1), wobei wir nun

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1) \quad \text{und} \quad R = 10 \quad (3.11)$$

gewählt haben. Dabei ist zu beachten, dass das Element q_{55} , d. h. jenes Diagonalelement von \mathbf{Q} , welches in der fünften Zeile und fünften Spalte steht, die Bedingung $q_{55} \neq 0$ erfüllen muss damit die Lösbarkeit des LQR-Problems gesichert ist und somit die Matrix (3.4) den Rang sechs besitzt.

Der Querversatz y_L wird nun wie gewünscht zu null ausgeregelt und auch der Maximalwert verringert sich von vorhin ca. 1×10^{-2} m auf ca. 6×10^{-3} m. Die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis sind damit erfüllt.

Abschließend können wir uns noch anhand von Abbildung 3.5 davon überzeugen, dass der Querversatz y_L auch für die Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf zu null ausgeregelt wird.

3.2 SPURHALTEREGELUNG MIT LENKUNG

Nachdem wir uns im vorigen Abschnitt die notwendigen Maßnahmen zur Erfüllung der Anforderungen an den Regelkreis erarbeitet haben, wollen wir nun das Modell (2.52) der Lenkung berücksichtigen, womit jetzt das mathematische Modell aus Gleichung (2.55) für den Reglerentwurf dient. Den Entwurfsansatz übernehmen wir aus dem vorherigen Abschnitt und führen die Erweiterung entsprechend Gleichung (3.9) analog durch. Damit erhalten wir nun den achtdimensionalen Zustandsvektor

$$\check{\mathbf{x}}_{\text{erw}} = [v_y \ \dot{\psi} \ y_L \ \varepsilon_L \ \delta_H \ \dot{\delta}_H \ x_5 \ x_6]^\top \quad (3.12)$$

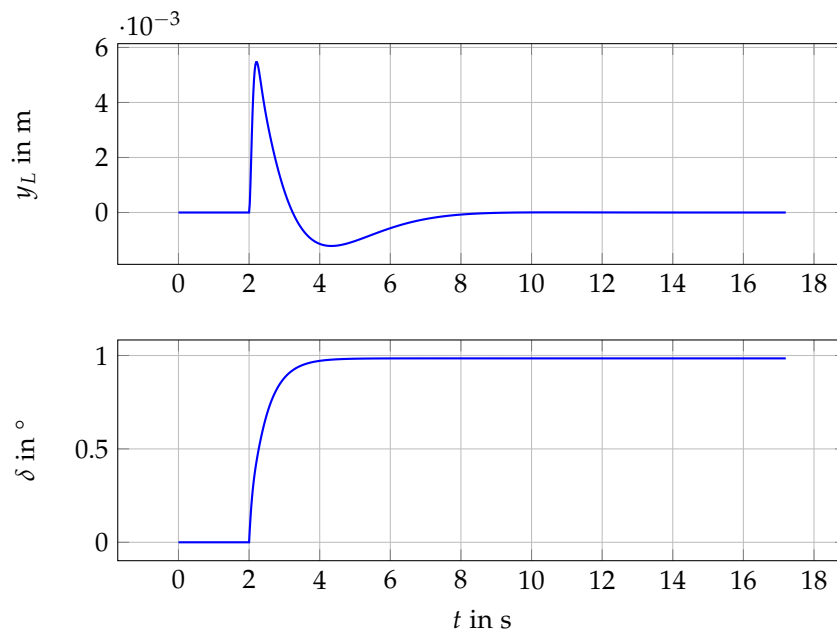


Abbildung 3.4: Spurhalteregelung ohne Lenkmodell für bezüglich y_L zweifach integrierendes Modell (3.10) bei einer Sollbahn mit sprungförmigem Krümmungsverlauf.

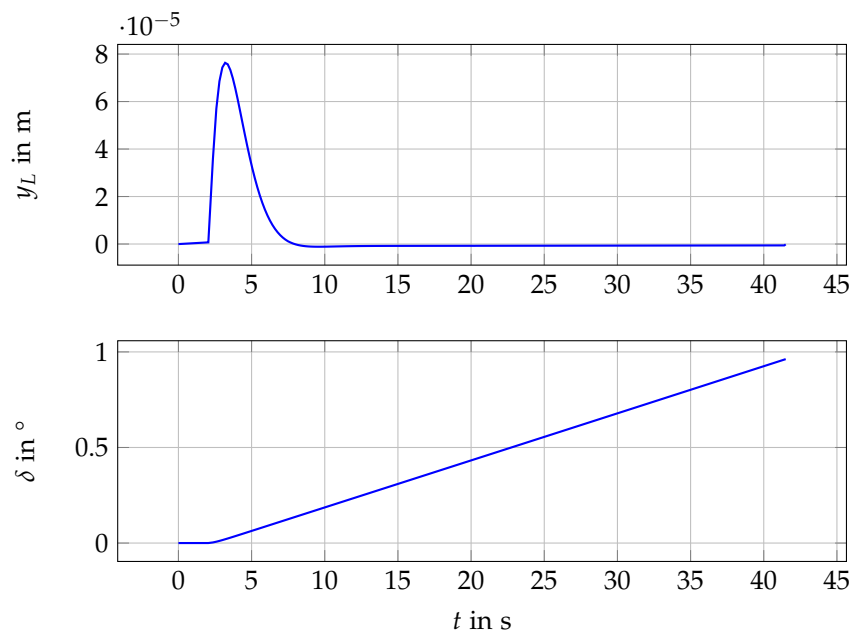


Abbildung 3.5: Spurhalteregelung ohne Lenkmodell für bezüglich y_L zweifach integrierendes Modell (3.10) bei einer Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf.

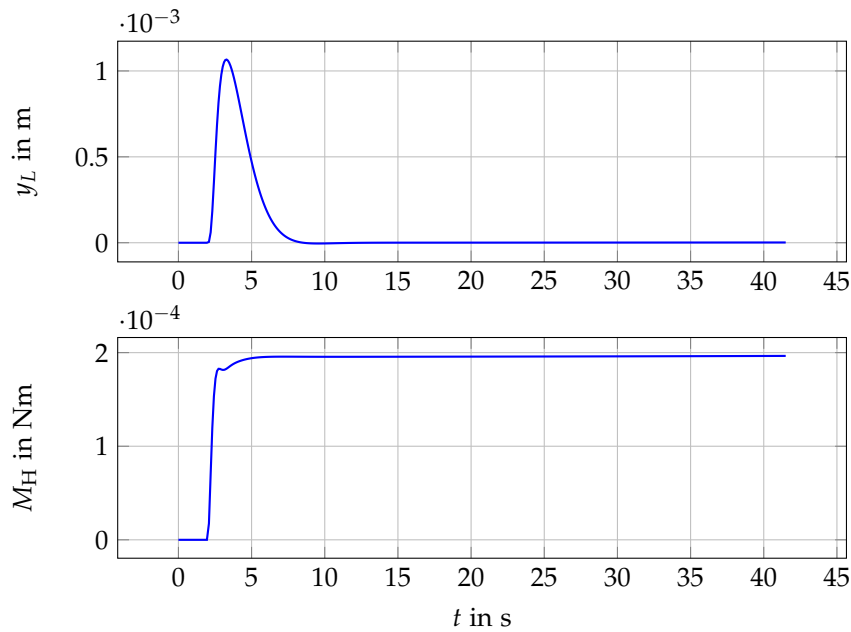


Abbildung 3.6: Spurhalteregelung mit Lenkmodell für bezüglich y_L zweifach integrierendes Modell (3.13) bei einer Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf.

mit dem Zustandsraummodell

$$\frac{d\check{x}_{\text{erw}}}{dt} = \check{A}_{\text{erw}}\check{x}_{\text{erw}} + \begin{bmatrix} \check{b} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix} M_H + \begin{bmatrix} \check{B} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_L \\ F_L \\ F_R \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

und der 8×8 Systemmatrix

$$\check{A}_{\text{erw}} = \begin{bmatrix} \check{A} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Damit erhöht sich klarerweise auch die Dimension der zu wählenden Wichtungsmatrix Q von sechs auf acht, wobei auch hier die Gewichtung des Querversatzes y_L in der Form

$$Q = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \quad \text{und} \quad R = 10 \quad (3.15)$$

ein zufriedenstellendes Ergebnis lieferte.

Abbildung 3.6 zeigt, dass auch hier die Erweiterung des Modell entsprechend Gleichung (3.9) die stationären Genauigkeit sicherstellt. Weitere Simulationsuntersuchungen mit der hier angeführten Konfiguration verschieben wir auf das Kapitel 4, wo wir dank eines detaillierten Fahrzeugmodells wesentlich aussagekräftigere Ergebnisse erwarten dürfen.

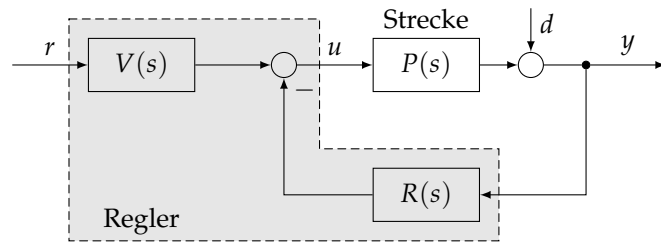


Abbildung 3.7: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

3.3 ALTERNATIVER REGLERENTWURF

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch kurz einen alternativen Reglerentwurf betrachten. Neben dem Entwurf eines Zustandsreglers ist auch der Entwurf eines Reglers im Frequenzbereich möglich. Hier sei die Methode der algebraischen Synthese [10, Kap. 18] erwähnt, die wir in groben Zügen umreißen wollen. Dabei wird der gesuchte Regler aus der gegebenen Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ und einer gewünschten Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ berechnet.

Wählen wir für den Regelkreis eine Struktur mit zwei Freiheitsgraden wie in Abbildung 3.7 gezeigt, so können wir jede beliebige Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ realisieren, sofern diese implementierbar ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn für $T(s) = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)}$ und $P(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$ die Bedingungen

1. Das Polynom $\nu_T(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom.
2. Nullstellen von $\mu(s)$ nichtnegativem Realteil sind ebenso Nullstellen von $\mu_T(s)$.
3. Der Polüberschuss von $T(s)$ ist größer oder gleich dem Polüberschuss von $P(s)$, also $\text{grad } \nu_T(s) - \text{grad } \mu_T(s) \geq \text{grad } \nu(s) - \text{grad } \mu(s)$.

erfüllt sind. Der Regler, bestehend aus den Übertragungsfunktionen $R(s)$ und $V(s)$, ist dabei als ein System mit den Eingangsgrößen r und y , sowie der Ausgangsgröße u zu realisieren. Dementsprechend besitzen $R(s)$ und $V(s)$ dasselbe Nennerpolynom. Für die eindeutige Lösbarkeit werden $R(s)$ und $V(s)$ außerdem als sprungfähige Übertragungsfunktionen vom Grad $\rho = \text{grad } \nu(s) - 1$ angesetzt.

Ein einfacher Ansatz zur Wahl von $T(s)$ besteht darin, das Systemverhalten durch eine Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.16)$$

mit dominantem Polpaar zu beschreiben, wobei sich die Parameter ζ und ω_n aufgrund der Spezifikationen Überschwingweite M_p und Anstiegszeit t_r der Sprungantwort ergeben [10, Kap. 18.7]. Da mit diesem

Ansatz das Zählerpolynom von $T(s)$ festgelegt ist, kann obige Bedingung (2) im Allgemeinen nicht erfüllt werden, dementsprechend darf die Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ nur Nullstellen negativem Realteil aufweisen.

BEISPIELHAFTER ENTWURF. Wir wollen nun einen Regler mit der Methode der algebraischen Synthese entwerfen und wählen $M_p = 1$ und $t_r = 2$ s. Für den konkret vorliegenden Fall, besitzt das Modell (2.55) mit der Ausgangsgröße

$$\ddot{y} = y_L = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \ddot{x} \quad (3.17)$$

die Übertragungsfunktion

$$M_H \rightarrow y_L : \check{P}(s) = \frac{\check{\mu}(s)}{\check{\nu}(s)} \quad (3.18)$$

mit $\text{grad } \check{\mu}(s) = 2$ und $\text{grad } \check{\nu}(s) = 6$. Offensichtlich ist hier die Bedingung (3) verletzt, denn der Polüberschuss von $P(s)$ beträgt vier. Um diesen Umstand zu beheben, ist $T(s)$ ohne wesentliche Beeinflussung seines Führungsverhaltens zu erweitern, d. h.

$$T(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \left(\frac{\eta}{s + \eta} \right)^2 \quad (3.19)$$

mit $\eta \gg \omega_n$. Insgesamt muss das Nennerpolynom von $T(s)$ vom Grad

$$\text{grad } \nu_T(s) = \text{grad } \nu + \rho - \text{grad } \mu = 2 \text{ grad } \mu - 1 - \text{grad } \mu \quad (3.20)$$

sein, für den gegebenen Fall also $\text{grad } \nu_T(s) = 9$. Dementsprechend müssen wir den Grad von $T(s)$ noch künstlich mit einem Hurwitz-Polynom $w(s)$ fünfter Ordnung in der Form

$$T(s) \rightarrow T(s) \frac{w(s)}{w(s)} \quad (3.21)$$

erhöhen. Dabei ist zu beachten ist, dass diese Erweiterung zwar das Führungsverhalten unbeeinflusst lässt, nicht aber das Störverhalten.

Um die Forderung nach der stationären Genauigkeit trotz Sollbahnkrümmung zu erfüllen, reicht es hier aus einfach integrierendes Verhalten für $R(s)$ bzw. $V(s)$ zu fordern. Denn mit $R(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ gilt für die Störübertragungsfunktion allgemein

$$d \rightarrow y : S(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} = \frac{a(s)\nu(s)}{a(s)\nu(s) + b(s)\mu(s)} \quad (3.22)$$

und damit unter Anwendung des Grenzwertsatzes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)d(s) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.23)$$

Ein rampenförmiger Krümmungsverlauf, also $\kappa_L(s) \sim \frac{1}{s^2}$ entspricht wegen der Übertragungsfunktion

$$\kappa_L \rightarrow \check{y}: \quad \check{P}_\kappa(s) = \frac{v_x^2}{s^2} \quad (3.24)$$

einer Störung

$$d(s) \sim \frac{v_x^2}{s^4}, \quad (3.25)$$

wofür die Bedingung 3.23 nun

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{a(s)v(s)}{s^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.26)$$

lautet und genau dann erfüllt ist, wenn die Nennerpolynome von $R(s)$ und $P(s)$ zusammen mindestens vier Pole bei $s = 0$ aufweisen. Da das Modell zur Beschreibung der Relativposition und das Lenkmodell bereits drei Pole bei $s = 0$ liefern, müssen wir für die Reglerübertragungsfunktionen lediglich einfach integrierendes Verhalten fordern.

Die Umsetzung dieser Forderung ist durch zusätzliche Entwurfsbedingungen möglich, die aber wiederum eine Graderhöhung der Reglerübertragungsfunktionen und der Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ erfordern, womit schließlich das Hurwitz-Polynom $w(s)$ von der Ordnung sechs sein muss.

Mit der Wahl von $\eta = 50$ sowie $w(s) = (s + 30)^6$ erhalten wir schließlich einen Regler, der für die Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf zu den in Abbildung 3.8 gezeigten Ergebnissen führt. Wie wir sehen, sind die gestellten Anforderungen erfüllt. Allerdings wurde diese Simulation unter idealisierte Rahmenbedingungen durchgeführt, da die bei einer Kurvenfahrt wirkenden Seitenkräfte F_l und F_r nicht berücksichtigt wurden, wie wir auch am Verlauf der Lenkmomente M_H erkennen können.

Zusammengefasst können wir feststellen, dass bei dieser Entwurfsmethode die Reglerparametrierung durch die notwendigen Erweiterungen von $T(s)$ erschwert wurde. Da es andererseits beim LQR-Entwurf ausreicht Diagonalmatrizen Q zu betrachten, und deren Elemente für eine grobe Abstimmung in Zehnerpotenzen zu variieren [13, Kap. 7.4], bedeutet der Entwurf mittels der algebraischen Synthese keinen wesentlichen Vorteil, weshalb schlussendlich der LQR-Ansatz für die Weiteren Reglerentwürfe verwendet wurde.

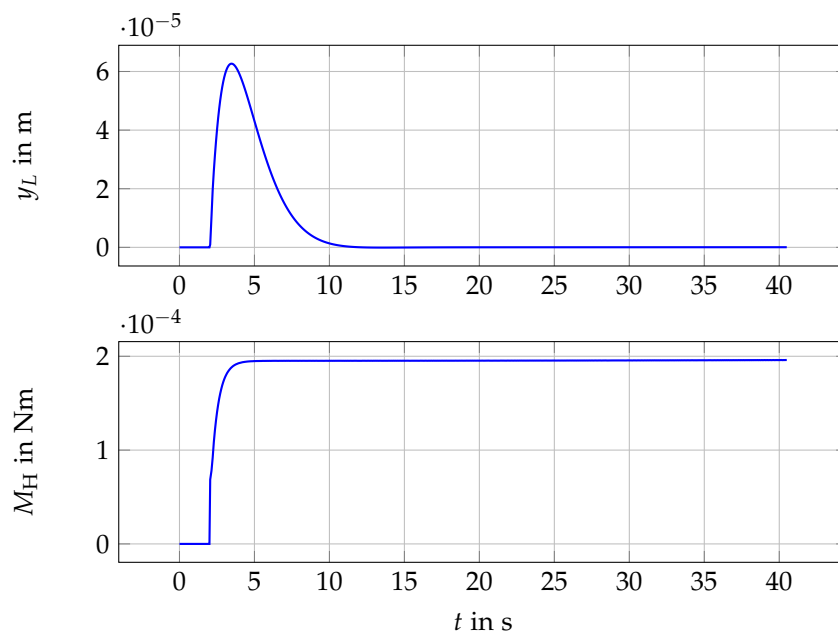


Abbildung 3.8: Spurhalteregeleung mittels algebraischer Synthese inkl. Lenkmodell bei einer Sollbahn mit rampenförmigem Krümmungsverlauf.

4

SIMULATION MIT DETAILLIERTEM FAHRZEUGMODELL

Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel einen Spurhalterregler entworfen und anhand von Simulationen basierend am linearen Einspurmodell verifiziert haben, wollen wir jetzt den Detailgrad der Simulation erhöhen um damit realistischere Ergebnisse zu erhalten. Dafür verwenden wir das Simulationspaket CarMaker der Firma IPG Automotive GmbH, womit wir virtuelle Fahrversuche von PKW unter Berücksichtigung von Komponenten wie Fahrzeug, Reifen, Umgebung, usw. durchführen können.

4.1 IPG CARMAKER – VORBEREITUNGEN

Zur Simulation des Spurhalterreglers, müssen zunächst die für die Regelung benötigten Größen der Relativposition, der Querversatz y_L und der Relativwinkel ε_L , zur Verfügung gestellt werden. Dazu wird ein „Road Preview Sensor“ wie in Abbildung 4.1 gezeigt definiert. Die sogenannte „Preview Distance“ entspricht dabei der Vorausschaudistanz L , wobei anzumerken ist, dass diese in CarMaker bei dem verwendeten „Preview Mode“ entlang der Fahrbahnmittellinie und nicht, wie im Abschnitt 2.1.2 beschrieben, entlang der Fahrzeuglängsachse gemessen wird. Aufgrund der geringen Krümmungen der gewählten Sollbahnen werden die daraus resultierenden Ungenauigkeiten vernachlässigt.

Als Lenkmodell verwenden wir das in Abschnitt 2.2 erwähnte Modell, wobei wir das Lenkmoment, welches vom in CarMaker integrierten Fahrermodell geliefert wird, durch das vom Spurhalterregler ermittelte ersetzen, d. h. für den Teilbereich Querdynamik simulieren wir autonomes Fahren.

Da die Simulationslösungen von CarMaker in Matlab/Simulink integriert sind, d. h. als Simulink-Koppelplan vorliegen und wie solche bearbeitet werden können, gehen wir auf die Integration des Reglers in CarMaker nicht weiter ein.

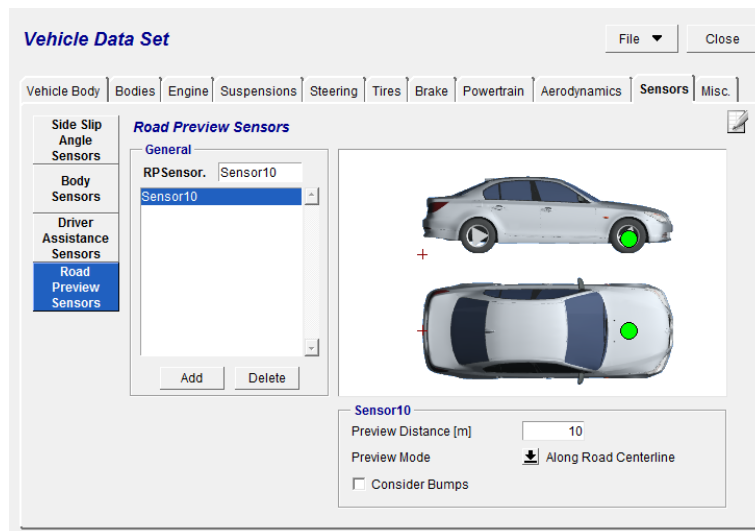


Abbildung 4.1: Definition des „Road Preview Sensors“ zur Ermittlung der Relativposition von Fahrzeug zu Sollbahn.

4.2 SIMULATIONSERGEBNISSE

Für die folgenden Simulationsergebnisse wird zur Reglerberechnung gleich vorgegangen wie in Kapitel 3.2, das Lenkmodell aus Abschnitt 2.2 also berücksichtigt.

Um die in den Abbildungen 4.2 und 4.3 gezeigten Simulationsergebnisse mit jenen aus Kapitel 3 vergleichen zu können, wurden die selben Sollbahnen (Abbildungen 3.1 und 3.2) vorgegeben.

Da die Quergeschwindigkeit v_y am realen Fahrzeug nur unzureichend genau bzw. mit großem Aufwand gemessen werden kann, zeigen beide Abbildungen den Vergleich der Simulation mit und ohne Verwendung der Zustandsgröße v_y . In der Simulation wird hierzu der Regler mit $v_y = 0$ beaufschlagt, was gleichwertig dazu ist, die entsprechende Komponente im Rückführvektor null zu setzen. Wie wir sehen ist der Einfluss des Zustands v_y vernachlässigbar und führt beim Verlauf der Stellgröße zu einem kaum wahrnehmbaren Unterschied.

Weiters fällt die leichte Welligkeit auf, die bei beiden Sollbahnen nach ca. 7 s und 13 s auftritt und deren Amplituden (unter Beachtung der Ordinatenkalierung) ungefähr gleich groß sind. Möglicherweise stammen diese Schwankungen von einem Eingriff des Fahrermodells in die Fahrzeuglängsdynamik.

Ansonsten können wir festhalten, dass auch hier die Forderung nach der stationären Genauigkeit erfüllt wird.

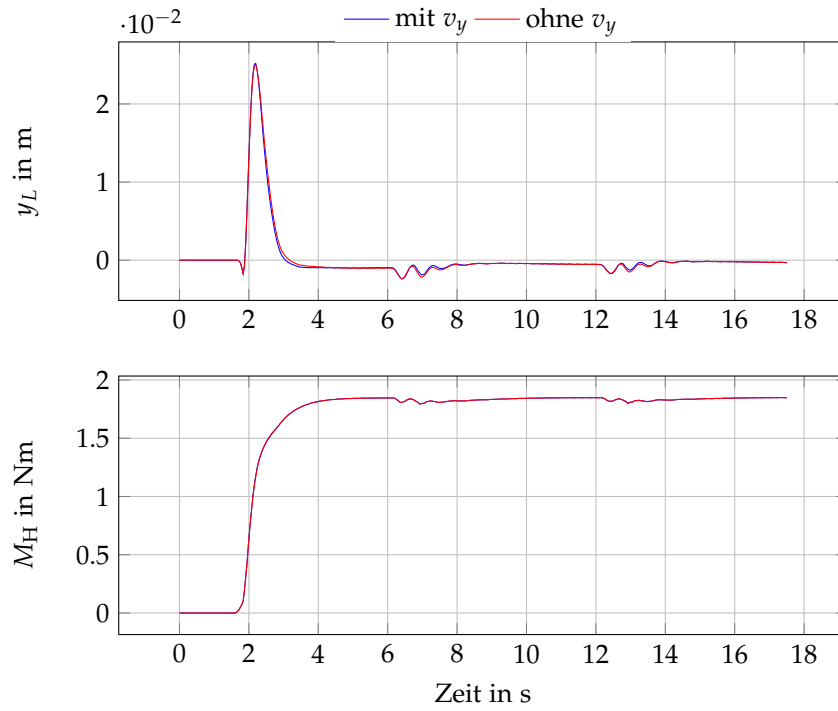


Abbildung 4.2: CarMaker-Simulation bei sprungförmigem Krümmungsverlauf der Sollbahn.

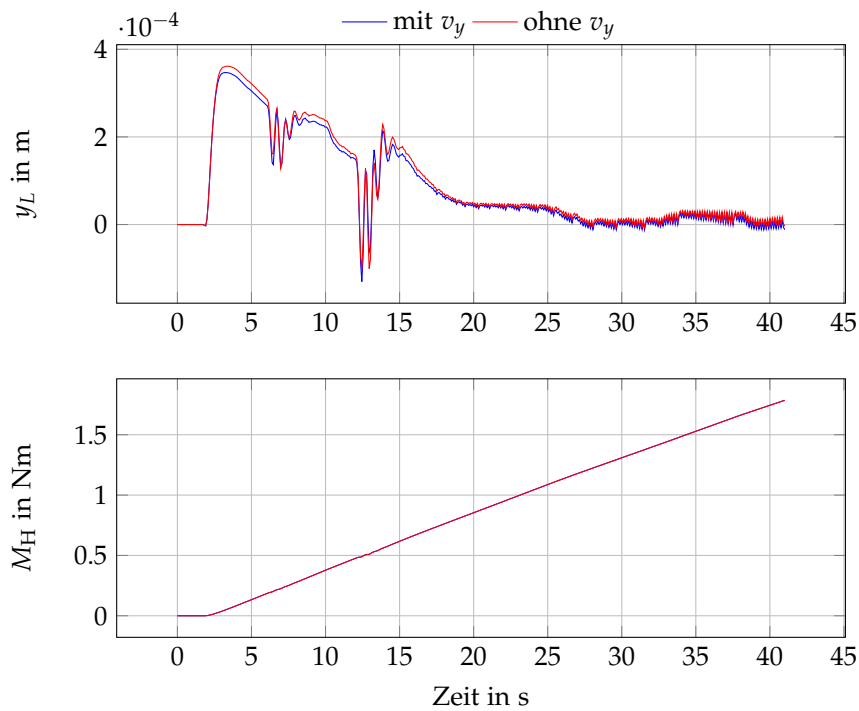


Abbildung 4.3: CarMaker-Simulation bei rampenförmigem Krümmungsverlauf der Sollbahn.

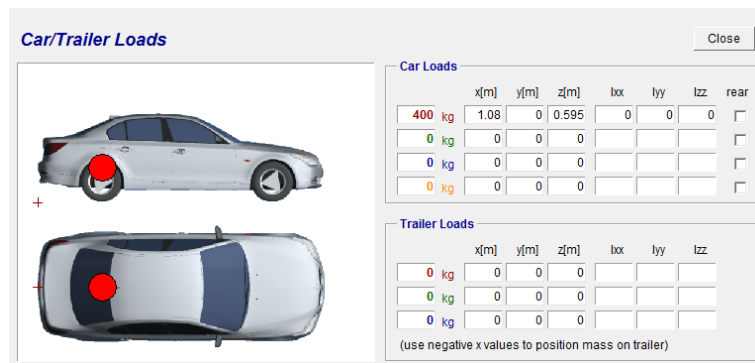


Abbildung 4.4: Definition einer Punktmasse über der Hinterachse.

4.2.1 Robustheit

Zur Beurteilung der Robustheit des ermittelten Regelgesetzes, führen wir die Simulation mit den in Tabelle A.1 angeführten Parametervariationen durch, wobei der Regler anhand der Standardparameter entworfen wird. Variante 1 beschreibt eine Zuladung mit einer Punktmasse von 400 kg über der Hinterachse auf Höhe des Fahrzeugschwerpunkts (vgl. Abbildung 4.4), Variante 2 eine Verringerung des Kraftschlussbeiwerts um den Faktor 0.4. Die Abbildungen 4.5 und 4.6 zeigen die zugehörigen Simulationsergebnisse, wiederum für sprung- und rampenförmigen Krümmungsverlauf der Sollbahn.

Auch hier stellen wir den Vergleich zwischen Verwendung und Vernachlässigung des Zustands v_y für die Regelung an, wobei sich wie im vorigen Abschnitt zeigt, dass der Einfluss von v_y gering ist, weshalb die Abbildungen lediglich die Ergebnisse bei Vernachlässigung der Quergeschwindigkeit v_y zeigen.

Bezüglich der bleibenden Regelabweichung zeigen die Abbildungen 4.5 und 4.6 keine Überraschungen. Unerwartet ist der minimal geringere Spitzenwert des Querversatzes bei Variante 2 gegenüber der Standardvariante. Allerdings können wir uns das geringere Moment M_H anhand des nichtlinearen Zusammenhangs von Schräglaufwinkel und Rückstellmoment bzw. über eine Änderung des Reifennachlaufs plausibel machen. Generell können wir auch hier feststellen, dass die gewählten Parametervariationen geringe Auswirkungen auf die Regelgröße haben.

Für den realen Betrieb eines LKA-Systems ist außerdem die Funktionsweise bei variabler Fahrzeuggeschwindigkeit interessant. Um diese Situation zu Beurteilen führen wir eine Simulation mit der in Abbildung 4.7 gezeigten Sollbahn durch. Diese besteht aus geraden, kreis- und klothoidenförmigen Abschnitten mit minimalen Kurvenradien bis 100 m. Abbildung 4.8 zeigt die zugehörigen Simulationsergebnisse, wobei wir für den Reglerentwurf eine Längsgeschwindigkeit von $v_x = 50 \text{ m/s}$ verwendet haben und die Komponente v_y wieder vernachlässigt wurde. Die Fahrzeuggeschwindigkeit wird nun vom Fah-

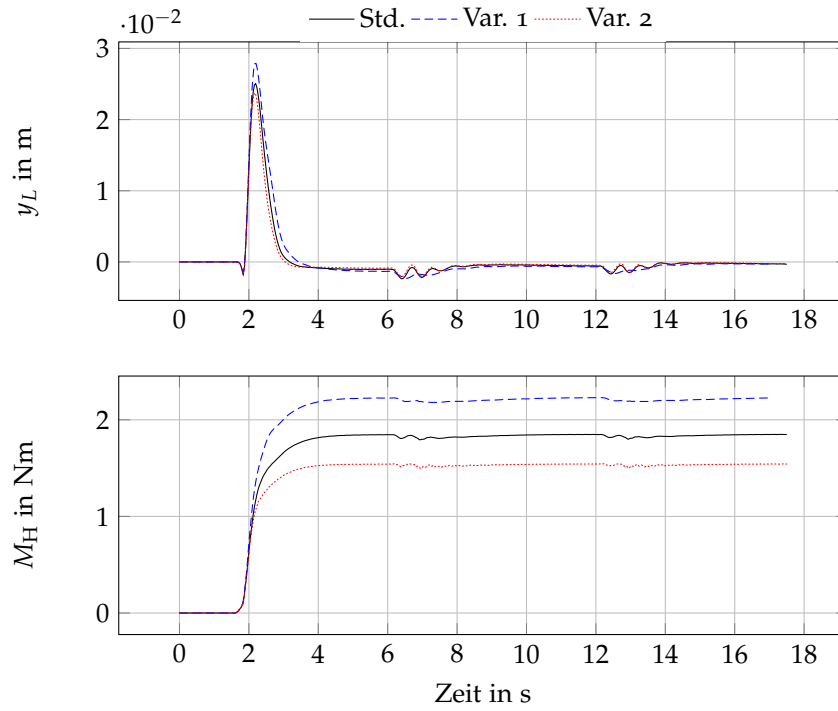


Abbildung 4.5: CarMaker-Simulation mit Parametervariationen bei sprungförmigem Krümmungsverlauf der Sollbahn und Vernachlässigung von v_y .

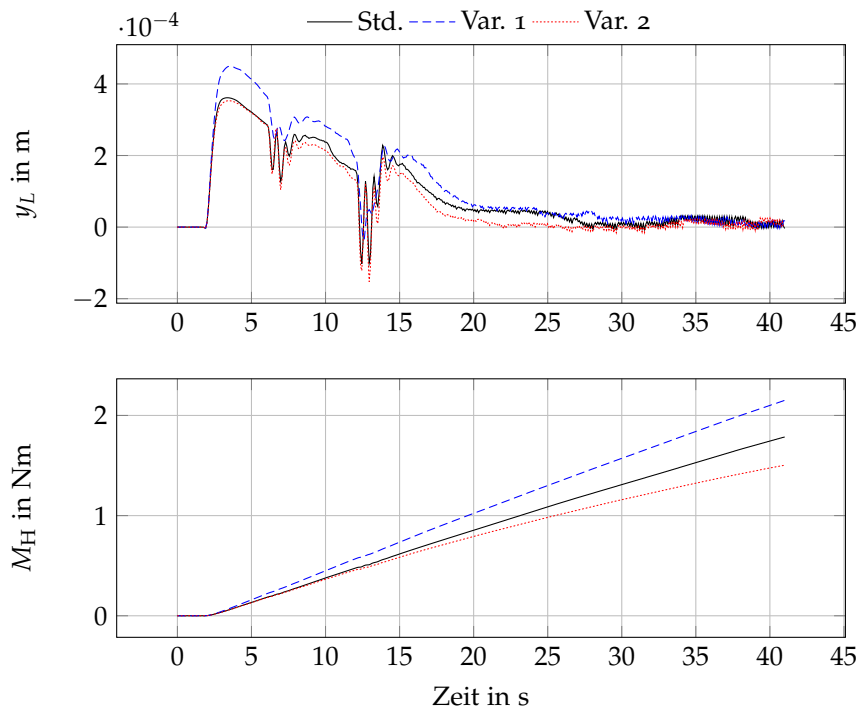


Abbildung 4.6: CarMaker-Simulation mit Parametervariationen bei rampenförmigem Krümmungsverlauf der Sollbahn und Vernachlässigung von v_y .

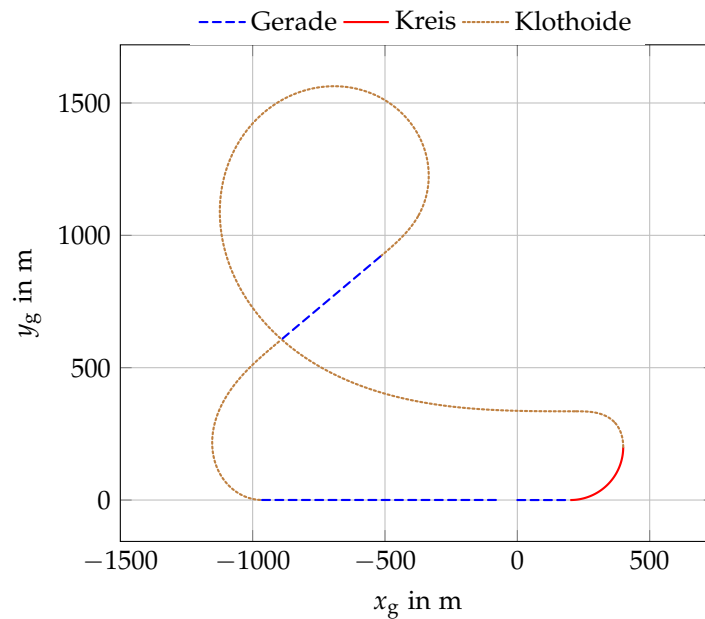


Abbildung 4.7: Sollbahn zum Nachweis der robusten Stabilität bei variabler Fahrzeuggeschwindigkeit.

rermodell abhängig von Quer- und Längsbeschleunigung vorgegeben und variiert in einem Bereich von 20 bis ca. 53 m/s. Dabei erreicht die Querbeschleunigung a_y die Grenzen des Gültigkeitsbereichs von ca. $\pm 4 \text{ m/s}^2$ des dem Regler zugrundeliegenden Einspurmodells. In der Simulation hat sich gezeigt, dass ein weiteres Anwachsen der Querbeschleunigung über ca. $\pm 4.5 \text{ m/s}^2$ hinaus zu einem schwingenden Verlauf des Lenkmoments führt. Dabei ist anzumerken, dass bereits mit Querbeschleunigungen von $\pm 4 \text{ m/s}^2$ der typische Wertebereich nach Tabelle 1.1 aktueller LKA-Systeme wesentlich überschritten ist.

Der Querversatz bleibt hier während der ganzen Simulationsdauer im Bereich von ca. $\pm 5 \text{ cm}$, wobei wir auch hier wieder feststellen können, dass sich sprunghafte Änderungen der Fahrbahnkrümmung besonders ungünstig auswirken. Betrachten wir lediglich die klothoidenförmigen Fahrbahnverläufe, so bleibt der Querversatz im Bereich von ca. $\pm 1.5 \text{ cm}$.

Auch hier betrachten wir wieder die Parametervariation nach Variante 1 mit der Zuladung von 400 kg. Auf Variante 2 wollen wir aufgrund des hier verwendeten, relativ aggressiv abgestimmten Fahrermodells, verzichten. Am Verlauf der Fahrzeuggeschwindigkeit können wir gut erkennen, dass sich nun das Längsbeschleunigungsverhalten verschlechtert. Bezüglich dem Verlauf des Querversatzes ergeben sich auch hier keine wesentlichen Änderungen.

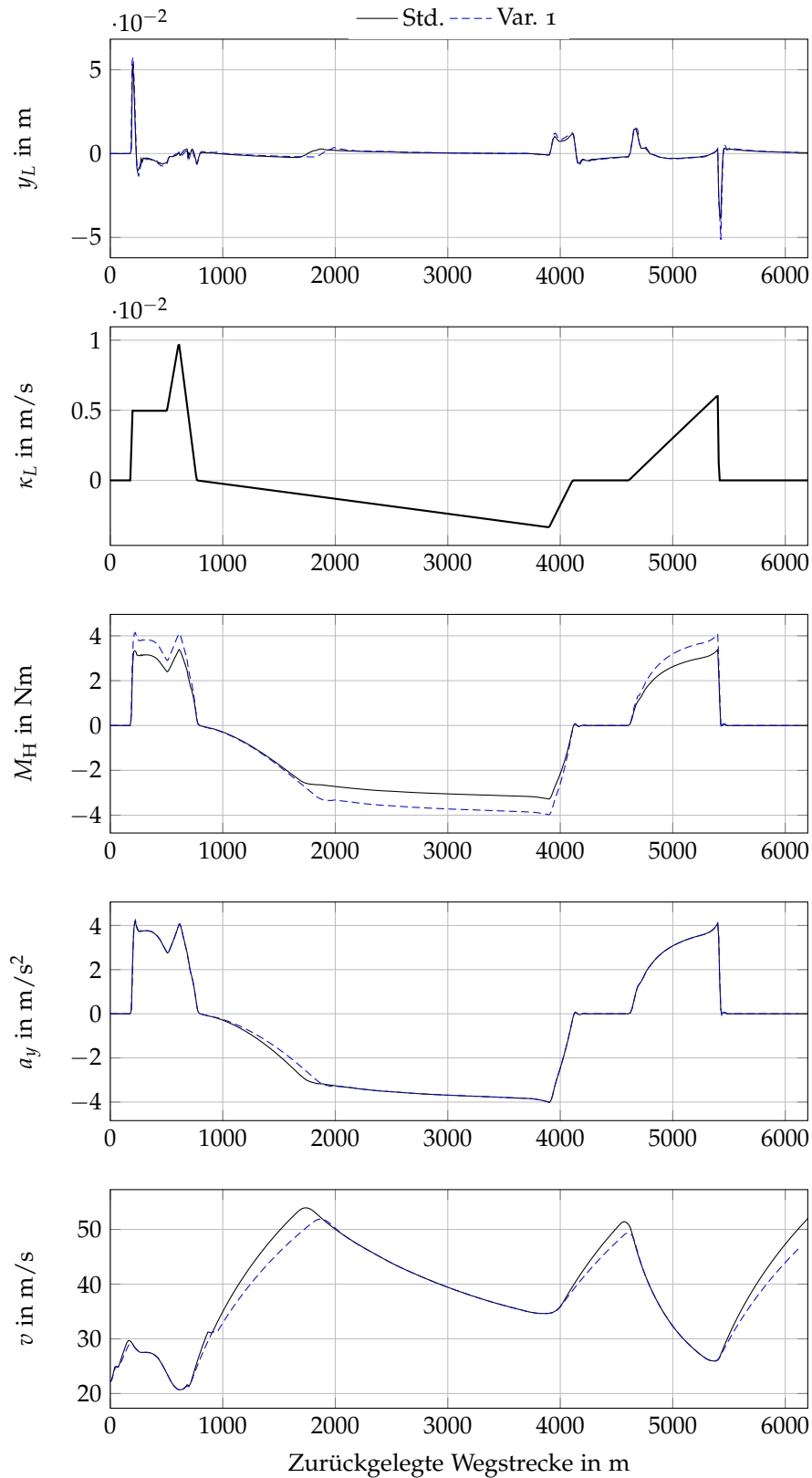


Abbildung 4.8: Simulationsergebnisse zur Sollbahn aus Abbildung 4.7 bei variabler Fahrzeuggeschwindigkeit v .

5

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Nach einer kurzen Einführung zum Thema Spurhalteassistenten, haben wir in Kapitel 2 die mathematischen Modelle der Fahrzeugquerdynamik, der Relativposition und des Lenksystems beschrieben. Beim Modell der Relativposition ist es uns gelungen, eine exakte Gleichung für die Dynamik des Relativwinkels anzugeben. Basierend auf diesen Ergebnissen haben wir anschließend einen LQ-Regler entworfen und dessen Funktionsweise anhand von grundlegenden Fahrbahnverläufen überprüft, wobei zunächst das lineare Einspurmodell die Simulationsgrundlage bildete. Abschließend haben wir diesen Regler in eine bestehende Simulationsumgebung integriert und in dieser anhand eines detaillierten Fahrzeugmodells verifiziert.

Mangels realer Messdaten, konnte die Funktionsweise des Reglers in dieser Arbeit nur anhand von Simulationen überprüft werden. Als nächster zukünftiger Schritt wäre somit ein Vergleich der Simulationsergebnisse mit realen Messdaten interessant. Dafür kann gegebenenfalls die Dynamik des Aktors, z. B. in Form eines Elektromotors wie er bei einer elektrisch unterstützten Servolenkung (EPS) zum Einsatz kommt, miteinbezogen werden. Damit steigt klarerweise der Aufwand für die Parametrierung, allerdings ist es dann auf sinnvolle Art möglich, Stellgrößenbeschränkungen beim Reglerentwurf und in der Simulation zu berücksichtigen.

Im Hinblick auf eine autonome Fahrzeugquerführung, könnte weiters der Versuch unternommen werden, eine nichtlineare Regelung basierend auf einem nichtlinearen Einspurmodell und gegebenenfalls der exakten (ebenfalls nichtlinearen) Beschreibung der Relativposition zu entwerfen. Damit könnte der Gültigkeitsbereich des Querdynamikmodells über die Grenze von ca. 4 m/s^2 im linearen Fall erweitert, und der Einsatzbereich eines LKA-Systems, eine entsprechende Sensorik vorausgesetzt, vergrößert werden.

A

ANHANG

A.1 KLOTHOIDE

Eine Klothoide ist eine ebene Kurven die dadurch charakterisiert ist, dass sich ihr Krümmungsradius R proportional zur Länge s ihres Bogens verhält:

$$R = \frac{a^2}{s} \quad (a > 0). \quad (\text{A.1})$$

Der Parameter $a > 0$ kann als Skalierungsparameter interpretiert werden und bestimmt die Lage der asymptotischen Punkte

$$\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

bzw. die Länge der Kurve für eine gegebene Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$. Abbildung A.1 zeigt beispielhaft Klothoiden für zwei verschiedene Werte von a . Die Klothoidengleichung $(x(l), y(l))$ ist in Parameterform durch

$$\begin{aligned} x(l) &= a\sqrt{\pi} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \\ y(l) &= a\sqrt{\pi} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

mit $l = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$ gegeben [3].

Klothoiden werden beispielsweise im Straßen- und Eisenbahnbau als sogenannte Übergangsbögen zwischen Geraden und Kreisbögen bzw. zwischen zwei Kreisbögen verwendet. Damit ist es möglich, sprunghafte Änderungen der Krümmung im Fahrbahnverlauf zu vermeiden und die beim Durchfahren der Kurve wirkenden Fliehkräfte kontinuierlich auf- bzw. abzubauen.

A.2 LITERATURBEMERKUNG

In [11] werden verschiedene Regelstrategien zur autonomen Querführung eines Fahrzeugs verglichen. Basierend auf dem linearen Modell (2.43) werden ein Lead-Lag Regler, eine Zustandsrückführung sowie eine Regelung mittels Eingangs-/Ausganglinearisierung entworfen.

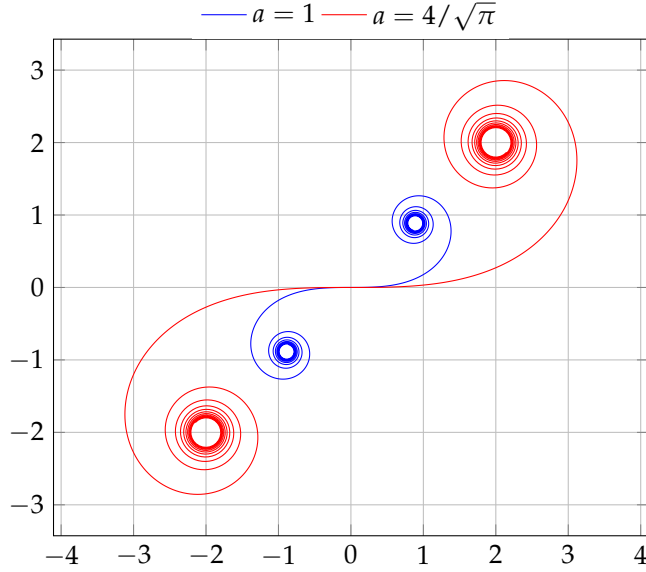


Abbildung A.1: Klothoiden für $a = 1$ (Einheitsklothoide) und $a = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Dabei merken die Autoren an, dass im Fall des vorliegenden linearen Modells, mittels der Eingangs-Ausgangslinearisierung das Modell unabhängig von der Längsgeschwindigkeit v_x dargestellt werden kann. Diese Aussage konnte vom Autor dieser Arbeit nicht nachvollzogen werden.

Die erreichbare Dynamik mittels der Kombination einer Zustandsrückführung mit einer E/A-Linearisierung, kann ebenso durch eine reine Zustandsrückführung erreicht werden. Dazu betrachten wir ein lineares Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

vom Systemgrad n . Dieses System besitzt den relativen Grad $r \leq n$, der sich an dessen Übertragungsfunktion als Graddifferenz von Nenner- und Zählerpolynom ablesen lässt. Für gegebenen relativen Grad r lautet die transformierende Stellgröße

$$u = \frac{1}{L_b L_{Ax}^{r-1} y} (-L_{Ax}^r y + u'), \quad (\text{A.4})$$

wobei wir mit u' die neue Stellgröße und mit $L_f^k g(x)$ die Lie-Ableitung

$$L_f^k g(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} g(x)}{\partial x} f(x) \quad \text{mit} \quad L_f^0 g(x) = g(x) \quad (\text{A.5})$$

von $g(x)$ entlang von $f(x)$ bezeichnen. Mit den Abkürzungen

$$\alpha(x) := \frac{1}{L_b L_{Ax}^{r-1} y} \quad \text{und} \quad \beta(x) := L_{Ax}^r y \quad (\text{A.6})$$

folgt für die Dynamik des Zustandsraummodells (A.3)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\alpha(x) (-\beta(x) + u'). \quad (\text{A.7})$$

Betrachten wir nun $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ genauer, so stellen wir fest, dass für $\beta(x) = L_{Ax}^r y$ aufgrund der Linearität des Zustandsraummodells

$$\begin{aligned} L_{Ax}^0 y &= c^\top A^0 x, \\ L_{Ax}^1 y &= c^\top A^1 x, \\ &\text{usw.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gilt und wir $\beta(x)$ als Skalarprodukt

$$\beta(x) = \beta^\top x \quad (\text{A.9})$$

mit $\beta = c^\top A^r$ darstellen können. Damit folgt, dass $\alpha(x)$ unabhängig vom Zustandsvektor x ist, d. h. $\alpha(x) = \alpha$, denn mit obigem Ergebnis gilt

$$L_b L_{Ax}^r y = c^\top A^r b. \quad (\text{A.10})$$

Weiters wählen wir nun als neue Stellgröße u' eine Zustandsrückführung der Form

$$u' = -k^\top z, \quad (\text{A.11})$$

wobei $z = \varphi(x)$ den Diffeomorphismus bezeichnet, welcher das System (A.3) in die neuen Zustandskoordinaten z überführt. Damit die externe Dynamik von der internen Dynamik unabhängig bleibt, hat der aus n Komponenten bestehende Rückführvektor die Form

$$k^\top = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_r \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (\text{A.12})$$

Die ersten r Zeilen des Diffeomorphismus $\varphi(x) = [\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_n]^\top$ sind aber linear in x , denn sie werden entsprechend

$$\varphi_i(x) = L_{Ax}^{i-1} y \quad \text{für } i = 1, \dots, r \quad (\text{A.13})$$

gebildet, d. h., die neue Stellgröße

$$u' = -k^\top \varphi(x) = -\tilde{k}^\top x \quad (\text{A.14})$$

lässt sich in den Originalkoordinaten x ausdrücken. Insgesamt vereinfacht sich Gleichung (A.7) also zu

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \alpha b \beta^\top x - \alpha b \tilde{k}^\top x, \quad (\text{A.15})$$

worin sich der Zustandsvektor x ausklammern lässt, und die neue Systemmatrix

$$\tilde{A} = A - \alpha b \beta^\top - \alpha b \tilde{k}^\top \quad (\text{A.16})$$

entsteht.

Diese Überlegungen zeigen, dass die erzielte Beeinflussung der Systemdynamik mittels der Methode der Eingangs-/Ausgangslinearisierung und Zustandsrückführung (A.11) im Fall eines linearen Systems (A.3) gleichermaßen durch Vorgabe der resultierenden Eigenwerte von \tilde{A} für das ursprüngliche Modell erreicht werden kann.

A.3 SIMULATIONSPARAMETER

In den Tabellen A.1 bis A.3 sind die in den Simulationen verwendeten Parameter zusammengefasst, wobei wir in Tabelle A.2 mit $\sigma(t)$ die Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

bezeichnen.

Parameter	Standard	Var. 1	Var. 2	Einheit
m	1564	1964	1564	kg
I_z	2230	3280	2230	kg m ²
l_v	1.268	1.598	1.268	m
l_h	1.620	1.290	1.620	m
$c_{s,v}$	140 000	140 000	140 000	Nm/rad
$c_{s,h}$	140 000	140 000	140 000	Nm/rad
μ	1	1	0.4	1

Tabelle A.1: Parameter des Einspurmodells inklusive Parametervariationen.

Parameter	Verwendeter Wert
Fahrzeugmodell	Einspurmodell (2.9)
Fahrzeug	Tabelle A.1 (Standard)
Längsgeschwindigkeit v_x	30 m/s
Vorausschaudistanz L	10 m
Lenkwinkelvorgabe $\delta(t)$	$+0.0015(t - t_0)\sigma(t - t_0)$ $-0.0035(t - t_1)\sigma(t - t_1)$ mit $t_0 = 4$ und $t_1 = 16$

Tabelle A.2: Verwendete Simulationsparameter für den Vergleich der Berechnung der Relativposition.

Parameter	Verwendeter Wert
Fahrzeugmodell	Einspurmodell (2.9)
Fahrzeug	Tabelle A.1 (Standard)
Längsgeschwindigkeit v_x	20 m/s
Vorausschaudistanz L	10 m

Tabelle A.3: Verwendete Simulationsparameter der Spurhalteregelung.

LITERATUR

- [1] J. Ackermann u. a. „Linear and nonlinear controller design for robust automatic steering“. In: *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 3.1 (März 1995), S. 132–143. ISSN: 1063-6536. DOI: 10.1109/87.370719.
- [2] A. Benine-Neto u. a. „Dynamic controller for lane keeping and obstacle avoidance assistance system“. In: *2010 13th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. Sep. 2010, S. 1363–1368. DOI: 10.1109/ITSC.2010.5625021.
- [3] I.N. Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. von G. Musiol und H. Mühlig. Verlag Harri Deutsch, 2008. ISBN: 978-3-8171-2007-9.
- [4] V. Cerone, M. Milanese und D. Regruto. „Combined Automatic Lane-Keeping and Driver’s Steering Through a 2-DOF Control Strategy“. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 17.1 (Jan. 2009), S. 135–142. ISSN: 1063-6536. DOI: 10.1109/TCST.2008.924558.
- [5] S. Chaib, M.S. Netto und S. Mammar. „ H_∞ , Adaptive, PID and fuzzy control: a comparison of controllers for vehicle lane keeping“. In: *2004 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. Juni 2004, S. 139–144. DOI: 10.1109/IVS.2004.1336370.
- [6] A. Eichberger und E. Tomasch. „Retrospektive Bewertung der Effektivität unterschiedlicher Fahrassistenzsysteme bei tödlichen Verkehrsunfällen“. In: *VDI/VW-Gemeinschaftstagung*. Hrsg. von VDI. Wolfsburg, Okt. 2008, S. 1–15.
- [7] Jens Gayko. „Lane Keeping Support“. German. In: *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*. Hrsg. von Hermann Winner, Stephan Hakuli und Gabriele Wolf. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. Kap. 35, S. 554–561. ISBN: 978-3-8348-1457-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-8619-4_36.
- [8] IPG Automotive GmbH. *CarMaker Reference Manual*. Version 4.0.
- [9] Robert Bosch GmbH. URL: http://www.bosch-automotivetechology.com/de/de/component/SF_PC_DA_Lane-Assist_SF_PC_Driver-Assistance-Systems_1858.html?compId=2880.
- [10] Martin Horn und Nicolaos Dourdoumas. *Regelungstechnik - Rechnerunterstützter Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise*. Pearson Studium, 2004. ISBN: 3-8273-7059-0.

- [11] J. Kosecka u. a. „A comparative study of vision-based lateral control strategies for autonomous highway driving“. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998*. Bd. 3. Mai 1998, 1903–1908 vol.3. DOI: 10.1109/ROBOT.1998.680590.
- [12] J. Kosecka u. a. „Vision-based lateral control of vehicles“. In: *IEEE Conference on Intelligent Transportation System, 1997. ITSC '97*. Nov. 1997, S. 900–905. DOI: 10.1109/ITSC.1997.660593.
- [13] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. German. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 978-3-642-10197-7. DOI: 10.1007/978-3-642-10198-4_7.
- [14] Manfred Mitschke und Henning Wallentowitz. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Hrsg. von Manfred Mitschke. Vierte, neubearbeitete Auflage. Springer-Verlag, 2004. ISBN: 3-540-42011-8.
- [15] Rajesh Rajamani. „Lateral Vehicle Dynamics“. English. In: *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series. Springer US, 2012. Kap. 2, S. 15–46. ISBN: 978-1-4614-1432-2. DOI: 10.1007/978-1-4614-1433-9_2.
- [16] Gerd Reimann, Peter Brenner und Hendrik Büring. „Lenkstellensysteme“. German. In: *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*. Hrsg. von Hermann Winner, Stephan Hakuli und Gabriele Wolf. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. Kap. 20, S. 287–312. ISBN: 978-3-8348-1457-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-8619-4_21.
- [17] P. Riekert und T.E. Schunck. „Zur Fahrmechanik des gummiereiften Kraftfahrzeugs“. German. In: *Ingenieur-Archiv* 11 (3 1940), S. 210–224. ISSN: 0020-1154. DOI: 10.1007/BF02086921.
- [18] Dieter Schramm, Manfred Hiller und Roberto Bardini. *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Hrsg. von Dieter Schramm. Springer-Verlag, 2010. ISBN: 978-3-540-89313-4. DOI: 10.1007/978-3-540-89315-8.
- [19] C. Sentouh u. a. „The H₂-optimal preview controller for a shared lateral control“. In: *2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. Okt. 2011, S. 1452–1458. DOI: 10.1109/ITSC.2011.6083151.
- [20] Masayasu Shimakage u. a. „Design of lane-keeping control with steering torque input“. In: *JSAE Review* 23.3 (2002), S. 317–323. ISSN: 0389-4304. DOI: 10.1016/S0389-4304(02)00194-7.
- [21] Michael Weilkes u. a. „Zukünftige Fahrzeugführungsassistenz - Kombinierte Längs- und Querregelung (Future Vehicle Guidance Assistance - Combined Longitudinal and Lateral Control)“. In: *Automatisierungstechnik* 53.1 (2005), S. 4–10. DOI: 10.1524/auto.53.1.4.56698.