

Masterarbeit

# Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für elliptische Randwertprobleme der Strömungsmechanik

vorgelegt der Fakultät für Technische Mathematik und Technische Physik  
der Technischen Universität Graz  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Ingenieur (Dipl.-Ing.)

von

**Matthias Taus**

Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik  
Technische Universität Graz

**2010**

**Masterarbeit:**

Titel: Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für elliptische Randwertprobleme der Strömungsmechanik  
Name, Vorname: Taus, Matthias  
Matrikelnummer: 0430071  
Lehrveranstaltung: Masterarbeit  
Institut: Institut für Numerische Mathematik  
Technische Universität Graz  
Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach

# Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. O. Steinbach dafür bedanken, dass ich an diesem interessanten Thema arbeiten durfte, und dafür, dass er trotz eines vollen Terminkalenders immer Zeit für mich gefunden hat. Außerdem möchte ich mich hiermit bei Dr. S. Zaglmayr bedanken, dass sie sich immer Zeit genommen hat, sich meine teilweise wilden Ideen anzuhören und möchte mich dafür entschuldigen, dass ich ihr mitunter viel Zeit und Nerven gekostet habe. Weiters gilt mein Dank der Robert Bosch GmbH in Stuttgart, vor allem aber meinem Betreuer Dr. A. Celic, die durch das Praktikum im Wintersemester 2007/08 diese Arbeit motiviert hat. Abschließend möchte ich mich bei Prof. O. Steinbach für die großartige Unterstützung nicht nur während des Studiums, die mir unter anderem das Praktikum in Stuttgart ermöglicht hat, sondern auch die Unterstützung in Bezug auf die Doktoratsstelle an der University of Texas at Austin, die an diese Arbeit anschließt, bedanken.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Vorbemerkungen zu gemischten Finite Elemente Methoden</b>	<b>11</b>
1.1 Sattelpunktprobleme . . . . .	11
1.2 Gestörte Sattelpunktprobleme . . . . .	13
<b>I Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Poisson-Gleichung</b>	<b>15</b>
<b>2 Kontinuierliche Variations- und Sattelpunktformulierungen</b>	<b>17</b>
2.1 Formulierung als Variationsproblem . . . . .	17
2.2 Eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung . . . . .	22
2.3 Formulierung als Sattelpunktproblem . . . . .	26
2.4 Eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems . . . . .	27
2.5 Äquivalenz des Sattelpunktproblems zur schwachen Formulierung . . . . .	29
2.6 Eine modifizierte Sattelpunktformulierung . . . . .	31
2.6.1 Eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Sattelpunktproblems . . . . .	32
2.6.2 Äquivalenz des modifizierten Sattelpunktproblems zum Randwertproblem . . . . .	36
<b>3 Diskretisierung der Sattelpunktformulierung</b>	<b>41</b>
3.1 Global konforme Diskretisierung . . . . .	41
3.1.1 Formulierung des diskreten Sattelpunktproblems . . . . .	41
3.1.2 Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems . . . . .	42
3.1.3 Konvergenz der diskreten Lösung . . . . .	43
3.2 Global teilkonforme Diskretisierung . . . . .	44
3.2.1 Formulierung des diskreten Sattelpunktproblems . . . . .	44
3.2.2 Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems . . . . .	45
3.2.3 Konvergenz der diskreten Lösung . . . . .	49
3.2.4 Bemerkungen zur Implementierung dieses Verfahrens . . . . .	50
3.3 Global nicht konforme Diskretisierung . . . . .	51
3.3.1 Formulierung als Sattelpunktproblem . . . . .	51
3.4 Ein global nicht konformer Zugang über ein modifiziertes Sattelpunktproblem	52
3.4.1 Eindeutige Lösbarkeit . . . . .	53

3.4.2	Konvergenz der Lösungen . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>59</b>
4.1	Einleitung . . . . .	59
4.2	Global konforme Diskretisierung . . . . .	59
4.3	Global teilkonforme Diskretisierung . . . . .	61
4.3.1	Interpolation . . . . .	61
4.3.2	Projektion . . . . .	63
4.4	Global nicht konforme Diskretisierung . . . . .	65
4.5	Ein global nicht konformer Zugang über ein modifiziertes Sattelpunktproblem	67
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>69</b>
<b>II</b>	<b>Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Stokes-Gleichungen</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>Kontinuierliche Variations- und Sattelpunktformulierungen</b>	<b>73</b>
6.1	Standard-Sattelpunktformulierung für die Stokes-Gleichungen . . . . .	73
6.2	Formulierung eines kontinuierlichen Sattelpunktproblems . . . . .	74
6.3	Eindeutige Lösbarkeit . . . . .	75
6.3.1	Äquivalenz zur schwachen Formulierung . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Diskretisierte Sattelpunktformulierungen</b>	<b>87</b>
7.1	Formulierung eines diskreten Sattelpunktproblems . . . . .	87
7.2	Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Problems . . . . .	87
7.3	Konvergenz der Lösungen . . . . .	90
7.4	Eine mögliche Wahl für konforme Ansatzräume . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Ein numerisches Beispiel</b>	<b>97</b>
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>99</b>

# Motivation und Einleitung

Gebietszerlegungsmethoden erfahren in den letzten Jahren immer größere Beliebtheit, nicht zuletzt deshalb, weil sie eine Vielzahl von Vorteilen gegenüber Zugängen über Standardmethoden mit sich bringen, für eine gute Einführung in Gebietszerlegungsmethoden kann zum Beispiel [12] oder [16] herangezogen werden.

Die Ursprünge von Gebietszerlegungsmethoden liegen schon in der Mitte des 19. Jahrhunderts, als H. Schwarz eine Methode vorschlug, um Randwertprobleme der Poisson-Gleichung in komplizierten Geometrien mit Hilfe der Zerlegung des Gebiets in sich überlappende Rechtecke und Kreise zu lösen. In der heutigen Zeit wird dieser Vorteil, Randwertprobleme auf komplizierten Geometrien mit Hilfe von überlappenden Gebietszerlegungsmethoden zu lösen, noch immer genutzt, jedoch hat sich die Problemstellung etwas geändert. Warum man auch in der heutigen Zeit noch einen Vorteil dadurch erhält, dass man komplizierte Geometrien in einfachere sich überlappende Geometrien aufteilt, ist die Triangulierung der Gebiete, da die Formregularität der Triangulierungen für einfachere Geometrien sehr viel einfacher zu erfüllen ist, als für kompliziertere.

Jedoch ist das nicht der einzige Grund, warum Gebietszerlegungsmethoden immer mehr in Mode kommen, sondern auch die Möglichkeit, neueste Rechnerarchitekturen effizienter nutzen zu können. Die Entwicklung, dass moderne Rechensysteme nicht nur einen Rechenkern, sondern mehrere Rechenkerne und Großrechner sogar bis zu mehreren tausend Rechenkerne zur Verfügung stellen, bietet dem Nutzer eine hervorragende Möglichkeit, Gebietszerlegungsmethoden anzuwenden, da die Aufteilung des betrachteten Gebiets in mehrere Teilgebiete eine natürliche Möglichkeit der Parallelisierung darstellt. Hierbei kann jedem Rechenkern ein oder mehrere Gebiete übergeben werden, die lokal gelöst und anschließend zu einer globalen Lösung zusammengefügt werden.

Ein weiteres Anwendungsgebiet von Gebietszerlegungsmethoden ist die Vorkonditionierung von Systemen. Es hat sich herausgestellt, dass das Lösen von Gebietszerlegungsmethoden auf mehreren Teilgebieten eine bessere Kondition aufweist, als wenn man das Problem auf dem gesamten Gebiet betrachtet. Aus diesem Grund werden Gebietszerlegungsmethoden auch oft dazu verwendet, um Vorkonditionierer für verschiedenste numerische Verfahren zu konstruieren.

In dieser Arbeit wollen wir uns jedoch auf überlappende Gebietszerlegungsmethoden in der Strömungsmechanik konzentrieren. In der Strömungsmechanik geht man von den Axiomen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung aus und kann daraus die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen herleiten. Unter den zusätzlichen Annahmen, dass die Dichte des Fluids konstant ist und auch während des Strömungsvorganges konstant bleibt, sich die Strömung zeitlich nicht ändert und dass ein Newtonsches Fluid vorliegt, erhält man die

stationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen:

$$-\nu \Delta \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla p = \underline{f}, \quad \operatorname{div} \underline{u} = 0,$$

wobei hier  $\nu$  die kinematische Viskosität,  $\underline{u}$  die Geschwindigkeit des Fluids,  $p$  den Druck und  $\underline{f}$  Massenkräfte, die auf das Fluid wirken, beschreiben. Für eine detaillierte Einführung dieser Gleichungen bzw. weiteren Informationen zur Modellierung von Strömungen siehe [19] oder [2].

Diese Gleichungen eignen sich, um Strömungen von Flüssigkeiten, wie zum Beispiel Wasser oder Benzin, zu berechnen, wodurch zum Beispiel Benzinpumpen für die Automobilindustrie simuliert werden können. Eine solche Simulation war auch Motivationsgeber für diese Arbeit.

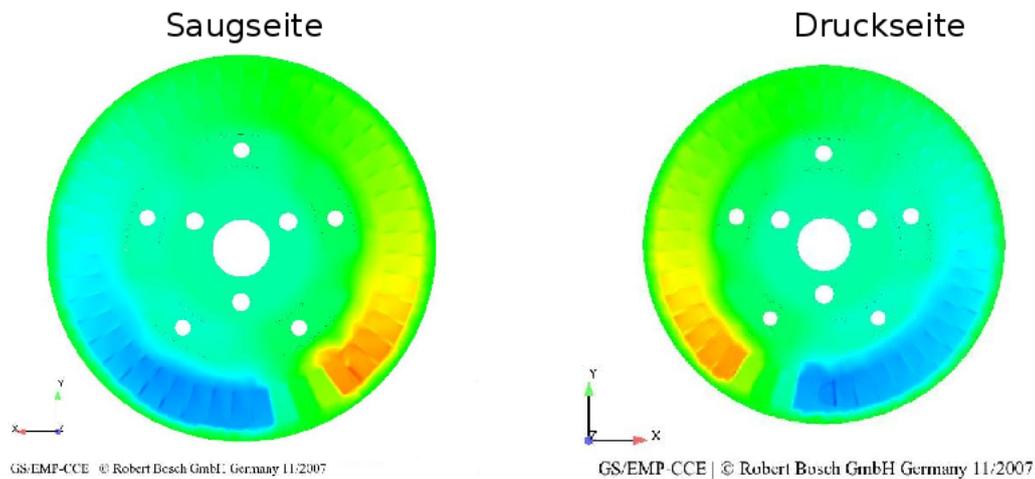


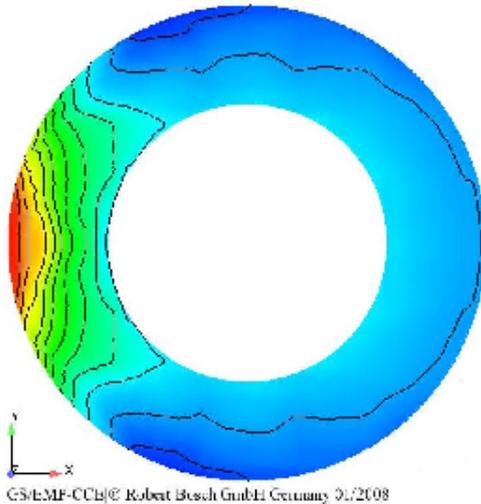
Abbildung 0.1: Druckverteilung in einem Bauteil einer Kraftstoffpumpe, simuliert mit CFD++

Für diese Simulationen ist es notwendig, das betrachtete Rechengebiet in Dreiecke oder Vierecke aufzuteilen, deren Winkel nicht zu klein werden dürfen, um eine gute Konvergenz der Näherungslösungen zu erhalten. Diese Aufteilung ist für komplizierte Geometrien jedoch oft schwierig. Aus diesem Grund stellen überlappende Gebietszerlegungsmethoden eine hervorragende Möglichkeit dar, diesem Problem auszuweichen, da man komplizierte Geometrien in mehrere einfache, sich überlappende Geometrien aufteilen kann, die leicht vernetzt werden können. Für die Umströmung eines Zylinders in einem Kanal kann man zum Beispiel ein kartesisches Gitter für den Kanal und ein Rotationsgitter um den Kreis, der den Zylinder modelliert, verwenden. Es stellt sich nun jedoch die Frage, wie man mit diesen überlappenden Gittern eine Lösung für das gesamte Gebiet erhält? Dieser Frage wollen wir in dieser Arbeit nachgehen.

Im Zuge eines Praktikums im Wintersemester 2007/08 bei der Robert Bosch GmbH in Stuttgart haben wir ein Ersatzmodell für Strömungen in engen Spalten mit Hilfe des

kommerziellen Softwarepakets CFD++, das das Rechnen mit überlappenden Gebieten ermöglicht, aufgestellt. Die Lösungen dieses Problems haben gezeigt, dass das in diesem Softwarepaket implementierte Verfahren für überlappende Gitter noch nicht optimal ist.

Überlappende  
Gitter:



Nicht-überlappende  
Gitter:

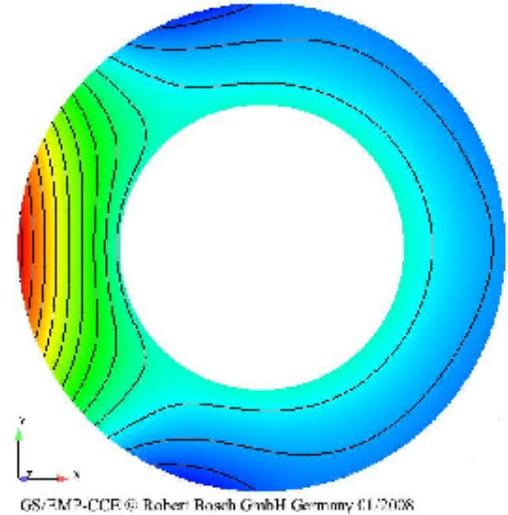


Abbildung 0.2: Vergleich einer Rechnung mit überlappenden und einer mit nicht überlappenden Gittern mit Hilfe von CFD++

Man kann in Abbildung 0.2 Oszillationen in der Lösung mit überlappenden Gittern erkennen. Dieser Umstand motiviert nun dazu, die Stabilität von überlappenden Gebietszerlegungsmethoden zu untersuchen. Wir wollen in dieser Arbeit jedoch nicht die Navier-Stokes-Gleichungen, sondern zwei Spezialfälle davon betrachten.

Für Strömungen mit niedrigen Reynoldszahlen

$$Re := \frac{UL}{\nu},$$

wobei  $U$  eine charakteristische Größeneinheit der Geschwindigkeit der betrachteten Strömung und  $L$  eine charakteristische Längeneinheit des betrachteten Rechengebiets beschreibt, lässt sich zeigen, dass sie über die Stokes-Gleichungen modelliert werden können:

$$-\nu \Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{f}, \quad \operatorname{div} \underline{u} = 0.$$

Der zweite Teil dieser Arbeit wird sich mit diesen Gleichungen befassen und eine überlappende Gebietszerlegungsmethode vorschlagen.

Für rotationsfreie Strömungen, das heißt die Geschwindigkeit  $\underline{u}$  erfüllt die Bedingung

$$\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{0},$$

existiert ein Potential  $\varphi$  mit  $\underline{u} = \nabla\varphi$  (vgl. [2]). Somit erhält man mit der Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0.$$

Um Geschwindigkeitsfelder solcher Strömungen berechnen zu können, ist es also lediglich notwendig, eine Laplace-Gleichung zu lösen. Dieser Umstand soll das Vorgehen im ersten Teil dieser Arbeit motivieren, in dem wir eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Poisson-Gleichung herleiten und analysieren werden.

Die hier betrachteten überlappenden Gebietszerlegungsmethoden basieren mathematisch auf der Theorie der gemischten Finite Elemente Methoden. Aus diesem Grund werden wir in Kapitel 1 die wichtigsten Grundlagen zu gemischten Finite Elemente Methoden anführen.

In Teil I werden wir diese Aussagen nutzen, um überlappende Gebietszerlegungsmethoden für die Poisson-Gleichung basierend auf der Arlequin Methode (vgl. [11], [6], [7]) herzuleiten. Dabei soll ein Randwertproblem für die Poisson-Gleichung in  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  mit  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  hergeleitet werden, wobei wir für die Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  voraussetzen, dass sie Lipschitz sind. Basierend auf dieser Zerlegung formulieren wir in Kapitel 2 die schwache Formulierung für das homogene Dirichlet-Randwertproblem der Poisson-Gleichung in eine schwache Formulierung in Funktionen  $u^1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u^2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  um. Dafür werden wir anschließend die eindeutige Lösbarkeit und die Äquivalenz zur schwachen Formulierung auf dem Gebiet  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  zeigen. Abschließend betrachten wir in Kapitel 2 eine Formulierung des Problems über gestörte Sattelpunktprobleme, für die wir ebenso die eindeutige Lösbarkeit und Äquivalenz zur schwachen Formulierung auf dem Gebiet  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  zeigen werden. In Kapitel 3 sollen die resultierenden Sattelpunktprobleme konform diskretisiert und für die entstandenen diskreten Sattelpunktprobleme die eindeutige Lösbarkeit untersucht werden. Darüberhinaus werden wir die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die eindeutig bestimmten Lösungen der kontinuierlichen Probleme analysieren und abschließend in Kapitel 4 durch numerische Beispiele belegen.

In Teil II werden wir in Kapitel 6 eine Formulierung aus Teil I auf die Stokes-Gleichungen erweitern und auch dafür die eindeutige Lösbarkeit und Äquivalenz zur schwachen Formulierung des Stokes-Problems im Gebiet  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  zeigen. In Kapitel 7 werden wir diese Formulierung konform diskretisieren und für die diskrete Formulierung die eindeutige Lösbarkeit sowie die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die eindeutig bestimmte kontinuierliche Lösung zeigen. Abschließend betrachten wir in Kapitel 8 ein numerisches Beispiel, motiviert durch das von S. Turek und M. Schäfer in [17] vorgeschlagene Benchmark-Problem, das die Umströmung eines Zylinders behandelt.

Am Ende dieser Arbeit sollen die wichtigsten Ergebnisse nochmals kurz zusammengefasst werden und mögliche weitere Punkte angeführt werden, um das hier betrachtete Verfahren zu verbessern bzw. zu erweitern.

# 1 Vorbemerkungen zu gemischten Finite Elemente Methoden

Die in dieser Arbeit hergeleiteten überlappenden Gebietszerlegungsmethoden basieren mathematisch auf gemischten Finite Elemente Methoden. Aus diesem Grund sollen in diesem Kapitel die grundlegenden Aussagen zur eindeutigen Lösbarkeit bzw. Konvergenz von gemischten Finite Elemente Methoden angeführt werden. Nähere Betrachtungen können in [5] oder [4] nachgelesen werden.

## 1.1 Sattelpunktprobleme

Für Hilberträume  $V$  und  $Q$  mit den Normen  $\|\cdot\|_V$  und  $\|\cdot\|_Q$  betrachten wir mit Bilinearformen  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  und Linearformen  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$  das folgende Variationsproblem.

Gesucht ist  $(u, p) \in V \times Q$ , sodass

$$a(u, v) + b(v, p) = F(v) \quad (1.1)$$

$$b(u, q) = G(q) \quad (1.2)$$

für alle  $(v, q) \in V \times Q$ .

Die eindeutige Lösbarkeit dieses Sattelpunktproblems lässt sich mit Hilfe des Satzes von Brezzi beweisen.

**Satz 1.1** (Satz von Brezzi). *Seien  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Bilinearformen. Für die Bilinearform  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  gelte die Stabilitätsbedingung*

$$\sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta_1 \|q\|_Q \quad (1.3)$$

für alle  $q \in Q$  mit einer Konstanten  $\beta_1 > 0$ . Die Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei invertierbar auf  $\ker B$ , d.h. für ein  $F \in (\ker B)^*$  existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $w \in \ker B$ , sodass

$$a(w, v) = F(v) \quad (1.4)$$

für alle  $v \in \ker B$ , wobei

$$\ker B := \{u \in V : b(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}.$$

Dann ist das Sattelpunktproblem (1.1)-(1.2) eindeutig lösbar. Gilt für die eindeutig bestimmte Lösung  $w$  des Problems (1.4) zusätzlich mit einer von der Elliptizitäts- und der Beschränktheitskonstanten der Bilinearform  $a$  abhängigen Konstanten  $c > 0$  die Abschätzung

$$\|w\|_V \leq c \|F\|_{V^*}, \quad (1.5)$$

dann erfüllt die eindeutig bestimmte Lösung  $(u, p) \in V \times Q$  des Sattelpunktproblems (1.1)-(1.2) zusätzlich die Stetigkeitsabschätzungen

$$\|u\|_V \leq c_1 \|F\|_{V^*} + c_2 \|G\|_{Q^*}, \quad (1.6)$$

$$\|p\|_Q \leq c_3 \|F\|_{V^*} + c_4 \|G\|_{Q^*} \quad (1.7)$$

mit Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$  abhängig von den Elliptizitätskonstanten der Bilinearform  $a$ , der Konstanten in der Stabilitätsbedingung und den Beschränktheitskonstanten.

**Beweis:** Siehe [4] und [5].

□

Wir werden meist auf diesen Satz zurückgreifen, um die eindeutige Lösbarkeit der hergeleiteten Verfahren zu zeigen.

Ebenso kann man diskretisierte Sattelpunktprobleme mit endlichdimensionalen und konformen Ansatzräumen  $V_h \subset V$  und  $Q_h \subset Q$  betrachten.

Gesucht ist  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ , sodass

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = F(v_h) \quad (1.8)$$

$$b(u_h, q_h) = G(q_h) \quad (1.9)$$

für alle  $(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h$ .

Die eindeutige Lösbarkeit dieser diskreten Sattelpunktprobleme lassen sich auch mit Hilfe des Satzes von Brezzi (vgl. Satz 1.1) beweisen. Dazu sei jedoch bemerkt, dass ein entscheidender Punkt für den Beweis der eindeutigen Lösbarkeit von diskreten Sattelpunktproblemen die diskrete Stabilitätsbedingung darstellt, das heißt es existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $\beta_1^h > 0$ , sodass

$$\sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} \geq \beta_1^h \|q_h\|_Q \quad (1.10)$$

für alle  $q_h \in Q_h$  gilt. Diese Bedingung ist in der Regel keine direkte Konsequenz der kontinuierlichen Stabilitätsbedingung (1.3). Die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die eindeutig bestimmte Lösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (1.1)-(1.2) lässt sich mit Hilfe des folgenden Satzes zeigen.

**Satz 1.2.** *Sei das kontinuierliche Sattelpunktproblem (1.1)-(1.2) eindeutig lösbar mit der Lösung  $(u, p) \in V \times Q$ . Weiters sei das diskrete Sattelpunktproblem (1.8)-(1.9) eindeutig lösbar mit der Lösung  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ . Dann existieren zwei Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  mit*

$$\|u - u_h\|_V \leq c_1 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + c_2 \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \quad (1.11)$$

*Gilt darüberhinaus  $\ker B_h \subset \ker B$ , so gilt die verbesserte Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_V \leq c_1 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (1.12)$$

*wobei die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  abhängig von den Elliptizitätskonstanten der Bilinearform  $a$ , der Konstanten in der Stabilitätsbedingung und den Beschränktheitskonstanten sind.*

**Beweis:** Siehe [5] und [4].

□

## 1.2 Gestörte Sattelpunktprobleme

Wir werden sehen, dass manche Verfahren, die wir in dieser Arbeit herleiten werden, nicht mit den oben eingeführten Sätzen analysiert werden können. Aus diesem Grund führen wir hier die Theorie von gestörten Sattelpunktproblemen ein.

Für eine Bilinearform  $c : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir anstelle von (1.1)-(1.2) das folgende Variationsproblem:

Gesucht ist  $(u, p) \in V \times Q$ , sodass

$$a(u, v) + b(v, p) = F(v) \quad (1.13)$$

$$b(u, q) - c(p, q) = G(q) \quad (1.14)$$

für alle  $(v, q) \in V \times Q$ .

Ebenso wie im vorhergehenden Abschnitt lässt sich auch für das gestörte Sattelpunktproblem (1.13)-(1.14) eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit treffen.

**Satz 1.3.** *Sei die Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $\ker B$ -elliptisch. Die Bilinearform  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  sei außerdem beschränkt und erfülle die Stabilitätsbedingung*

$$\sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta_1 \|q\|_Q \quad (1.15)$$

*für alle  $q \in Q$  für eine Konstante  $\beta_1 > 0$ .*

Darüberhinaus sei die Bilinearform  $c : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $Q$  beschränkt und es gelte

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq 0, \\ c(q, q) &\geq 0 \end{aligned}$$

für alle  $v \in V$ ,  $q \in Q$ . Dann besitzt das gestörte Sattelpunktproblem (1.13)-(1.14) eine eindeutig bestimmte Lösung  $(u, p) \in V \times Q$ , welche die Stetigkeitsabschätzung

$$\|(u, p)\|_{V \times Q} \leq c \|(F, G)\|_{V^* \times Q^*} \quad (1.16)$$

für eine Konstante  $c > 0$  abhängig von den Elliptizitätskonstanten der Bilinearform  $a$ , der Konstanten in der Stabilitätsbedingung und den Beschränktheitskonstanten erfüllt.

**Beweis:** Siehe [4] und [5].

□

Ebenso wie für Sattelpunktprobleme kann man auch diskretisierte gestörte Sattelpunktprobleme betrachten.

Gesucht ist  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ , sodass

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = F(v_h) \quad (1.17)$$

$$b(u_h, q_h) - c(p_h, q_h) = G(q_h) \quad (1.18)$$

für alle  $(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h$ .

Die eindeutige Lösbarkeit dieser diskreten gestörten Sattelpunktprobleme lässt sich mit Hilfe von Satz 1.3 beweisen. Auch in diesem Fall sei bemerkt, dass die diskrete Stabilitätsbedingung (1.10) nicht direkt aus der kontinuierlichen Stabilitätsbedingung (1.15) folgt. Für die Konvergenz der diskreten Lösungen  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  gegen die eindeutig bestimmte Lösung  $(u, p) \in V \times Q$  des kontinuierlichen gestörten Sattelpunktproblems (1.13)-(1.14) lässt sich ein ähnliches Ergebnis wie für Sattelpunktprobleme beweisen.

**Satz 1.4.** *Sei das kontinuierliche gestörte Sattelpunktproblem (1.13)-(1.14) eindeutig lösbar mit der Lösung  $(u, p) \in V \times Q$ . Weiters sei das diskrete gestörte Sattelpunktproblem (1.17)-(1.18) eindeutig lösbar und besitze die Lösung  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ . Dann existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$  abhängig von den Elliptizitätskonstanten der Bilinearform  $a$ , der Konstanten in der Stabilitätsbedingung und den Beschränktheitskonstanten, sodass*

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq c \inf_{(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h} \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_{V \times Q} \quad (1.19)$$

gilt.

**Beweis:** Siehe [4] und [5].

□

# Teil I

## Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Poisson-Gleichung



# 2 Kontinuierliche Variations- und Sattelpunktformulierungen

## 2.1 Formulierung als Variationsproblem

Für die Herleitung einer Variationsformulierung gehen wir von einer zweimal stetig differenzierbaren Lösung  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des homogenen Dirichlet-Randwertproblems der Poisson-Gleichung auf einem Lipschitz-Gebiet  $\Omega$  aus:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Betrachten wir nun für dieses Problem die schwache Formulierung.

Gesucht ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  sodass

$$a'(u, v) = F'(v) \quad (2.3)$$

für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit der Bilinearform

$$a'(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

und der Linearform

$$F'(v) := \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Aus der Theorie von elliptischen Randwertproblemen weiß man, dass dieses Variationsproblem für  $f \in L_2(\Omega)$  eindeutig lösbar ist. Außerdem ist jede klassische Lösung des Randwertproblems (2.1)-(2.2) eine Lösung des Variationsproblems (2.3) und jede zweimal stetig differenzierbare Lösung des Variationsproblems (2.3) ist eine Lösung des Randwertproblems (2.1)-(2.2). Für einen genauen Beweis dieser Aussagen siehe [15].

Die Funktion  $u$  wird hier im Sobolev-Raum  $H_0^1(\Omega)$  gesucht. Die Sobolev-Räume  $H^k(\Omega)$  sind Funktionenräume mit  $H^k(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ , deren  $k$ -te Ableitungen im schwachen Sinn existieren und wiederum in  $L_2(\Omega)$  sind. Der Sobolev-Raum  $H^1(\Omega)$  ist dann ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

und der Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)}}.$$

Außerdem lässt sich für  $u \in H^1(\Omega)$  ein Spuroperator

$$\gamma_0^{int} u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u(\tilde{x})$$

definieren, für den  $\gamma_0^{int} u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  gilt. Mit Hilfe dieser Spur lassen sich nun die Sobolev-Räume

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0^{int} u = 0\}, \\ H_{0,\bar{\Gamma}}^1(\Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0^{int} u|_{\bar{\Gamma}} = 0\} \end{aligned}$$

mit  $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$  definieren. Es können sehr viel mehr Aussagen über Sobolev-Räume getroffen werden, die wir hier jedoch nicht anführen wollen. Hier soll für eine weiterführende Lektüre nur auf [1] und auf [20] verwiesen werden.

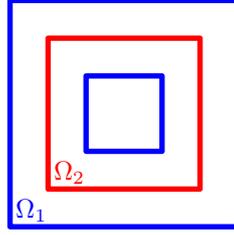
Zerlegen wir nun das Gebiet  $\Omega$  in zwei sich überlappende Lipschitz-Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset.$$

Außerdem fordern wir an die Zerlegung die zusätzliche Eigenschaft

$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Die im weiteren Verlauf betrachteten Beispiele sollen also diese Voraussetzung erfüllen, wie zum Beispiel das Einheitsquadrat  $\Omega$ , das folgendermaßen in zwei sich überlappende Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  aufgeteilt werden kann (vgl. Abbildung 2.1).

Abbildung 2.1: **Gebiet  $\Omega_1$**  und **Gebiet  $\Omega_2$** 

Mit Hilfe der eindeutig bestimmten Lösung  $u$  des Variationsproblems (2.3) können wir Funktionen  $u^1 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1)$  und  $u^2 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  mit

$$\begin{aligned} u^1 &:= u|_{\Omega_1}, \\ u^2 &:= u|_{\Omega_2} \end{aligned}$$

definieren. Für beliebige  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt mit den Definitionen

$$\begin{aligned} v^1 &:= v|_{\Omega_1}, \\ v^2 &:= v|_{\Omega_2}, \end{aligned}$$

$v^1 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1)$  und  $v^2 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  und für die Bilinearform  $a'$  folgt

$$\begin{aligned} a'(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &=: a(u^1, u^2; v^1, v^2) \end{aligned}$$

und für die Linearform  $F'$

$$\begin{aligned} F'(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x)v^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^2(x) dx \\ &=: F(v^1, v^2). \end{aligned}$$

Bisher wurden  $u^1$  und  $u^2$  als Einschränkung der Lösung  $u$  von (2.3) betrachtet. Im Allgemeinen ist die Bedingung

$$u^1 = u^2 \quad \text{in } \Omega_1 \cap \Omega_2$$

für Funktionen  $u^1 \in H^1(\Omega_1)$  und  $u^2 \in H^1(\Omega_2)$  jedoch nicht sinnvoll, da Funktionen in Sobolev-Räumen nur dann miteinander identifiziert werden, wenn sie fast überall übereinstimmen. Aus diesem Grund wollen wir für die schwache Formulierung der überlappenden Gebietszerlegungsmethode die Bedingung

$$\langle u^1 - u^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

fordern. Bauen wir diese Bedingung in den Funktionenraum  $H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  ein, so erhalten wir den Raum

$$V := \left\{ (u^1, u^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) : \langle u^1 - u^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2) \right\}.$$

Mit Hilfe dieses Funktionenraums können wir nun eine schwache Formulierung für eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für das homogene Dirichlet-Randwertproblem (2.1)-(2.2) aufstellen.

Gesucht ist  $(u^1, u^2) \in V$  sodass

$$a(u^1, u^2; v^1, v^2) = F(v^1, v^2) \tag{2.4}$$

für alle  $(v^1, v^2) \in V$ .

Aufgrund der Konstruktion des Variationsproblems (2.4) impliziert jede Lösung  $u$  des Variationsproblems (2.3) auch eine Lösung  $(u^1, u^2)$  des Variationsproblems (2.4). Der folgende Satz soll auch die Umkehrung beweisen.

**Satz 2.1.** *Sei  $u$  eine Lösung des Variationsproblems (2.3), dann ist  $(u^1, u^2)$  mit  $u^1 := u|_{\Omega_1}$  und  $u^2|_{\Omega_2} := u|_{\Omega_2}$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Ist umgekehrt  $(u^1, u^2)$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4), so ist die Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$u(x) = \begin{cases} u^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ u^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $H^1(\Omega)$  und  $u$  ist eine Lösung des Variationsproblems (2.3).

**Beweis:** Sei  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Dann gilt

$$\langle u^1 - u^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $w \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  und mit  $w := u^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - u^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  gilt

$$0 = \langle u^1 - u^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle u^1 - u^2, u^1 - u^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \|u^1 - u^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2.$$

Also gilt  $u^1 = u^2$  in  $H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Somit ist die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} u^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ u^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $H_0^1(\Omega)$  und für  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} a'(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v(x) dx. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} v^1 &:= v|_{\Omega_1}, \\ v^2 &:= v|_{\Omega_2} \end{aligned}$$

gilt jedoch  $(v^1, v^2) \in V$  und somit

$$\begin{aligned} a'(u, v) &= \int_{\Omega_1} \nabla u(x) \cdot \nabla v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla u(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u(x) \cdot \nabla v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &= a(u|_{\Omega_1}, u|_{\Omega_2}; v^1, v^2) \\ &= a(u^1, u^2; v^1, v^2). \end{aligned}$$

Da  $(u^1, u^2)$  jedoch eine Lösung des Variationsproblems (2.4) ist, gilt für diese  $(v^1, v^2) \in V$

$$\begin{aligned} a'(u, v) &= a(u^1, u^2; v^1, v^2) = F(v^1, v^2) \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x)v^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^1(x) dx + \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^2(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x)v(x) dx = F'(v). \end{aligned}$$

Also folgt

$$a'(u, v) = F'(v)$$

für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  und  $u$  ist eine Lösung des Variationsproblems (2.3).

□

## 2.2 Eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung

In Abschnitt 2.1 haben wir eine zur schwachen Formulierung (2.3) äquivalente Variationsformulierung hergeleitet, die nach Funktionen in zwei sich überlappenden Teilgebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  des Gebiets  $\Omega$  sucht. Nun stellt sich jedoch die Frage, ob dieses Problem auch eindeutig lösbar ist. Diese Frage soll in diesem Abschnitt beantwortet werden.

Die eindeutige Lösbarkeit des Problems wollen wir über das Lemma von Lax-Milgram (vgl. Satz 3.2 in [15]) beweisen. Dazu ist die  $V$ -Elliptizität und die Beschränktheit der Bilinearform  $a$  zu beweisen, das heißt, es existieren Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} a(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \alpha_1 \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2, \\ |a(u^1, u^2; v^1, v^2)| &\leq \alpha_2 \|(u^1, u^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

für alle  $(v^1, v^2), (u^1, u^2) \in V$  gilt. Außerdem muss die rechte Seite  $F$  die Bedingung  $F \in V^*$  erfüllen, wobei  $V^*$  den Dualraum von  $V$  bezeichnet. Nehmen wir nun jedoch  $f \in L_2(\Omega)$  an, so ist diese Bedingung auf jeden Fall erfüllt, denn es gilt mit der Dreiecksungleichung, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |F(v^1, v^2)| &= \left| \int_{\Omega_1} f(x)v^1(x)dx + \int_{\Omega_2} f(x)v^2(x)dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^1(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^2(x)dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_1} f(x)v^1(x)dx \right| + \left| \int_{\Omega_2} f(x)v^2(x)dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^1(x)dx \right| + \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^2(x)dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega_1)} \|v^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \|f\|_{L_2(\Omega_2)} \|v^2\|_{L_2(\Omega_2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^1\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \frac{3}{2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \frac{3}{2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v^2\|_{L_2(\Omega_2)} \\ &\leq \frac{3}{2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \sqrt{2} \sqrt{\|v^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2} \\ &\leq \frac{3}{2} \sqrt{2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \sqrt{\|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit der Bilinearform  $a$  soll folgendes Lemma beweisen.

**Lemma 2.2.** *Es existiert eine Konstante  $\alpha_2 > 0$ , sodass*

$$|a(u^1, u^2; v^1, v^2)| \leq \alpha_2 \|(u^1, u^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}$$

für alle  $(v^1, v^2), (u^1, u^2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für Funktionen

$$(v^1, v^2), (u^1, u^2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$$

gilt mit der Dreiecksungleichung für die Bilinearform  $a$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a(u^1, u^2; v^1, v^2)| &= \left| \int_{\Omega_1} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_1} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \right| \end{aligned}$$

und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a(u^1, u^2; v^1, v^2)| &\leq |u^1|_{H^1(\Omega_1)} |v^1|_{H^1(\Omega_1)} + |u^2|_{H^1(\Omega_2)} |v^2|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} |u^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} |v^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \frac{1}{2} |u^2|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} |v^2|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \|u^1\|_{H^1(\Omega_1)} \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|u^2\|_{H^1(\Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|u^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \frac{1}{2} \|u^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}. \end{aligned}$$

Für  $u^1 \in H^1(\Omega_1)$  und  $u^2 \in H^1(\Omega_2)$  gelten jedoch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|u^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq \|u^1\|_{H^1(\Omega_1)}, \\ \|u^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq \|u^2\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

und somit erhält man für die Bilinearform  $a$  die Abschätzung

$$|a(u^1, u^2; v^1, v^2)| \leq \frac{3}{2} [\|u^1\|_{H^1(\Omega_1)} \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|u^2\|_{H^1(\Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}]$$

und mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a(u^1, u^2; v^1, v^2)| &\leq \frac{3}{2} \left( \|u^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \|(u^1, u^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

für alle  $(v^1, v^2), (u^1, u^2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ .

□

Die  $V$ -Elliptizität der Bilinearform  $a$  soll das nächste Lemma zeigen.

**Lemma 2.3.** *Es existiert eine Konstante  $\alpha_1 > 0$ , sodass*

$$a(v^1, v^2; v^1, v^2) \geq \alpha_1 \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2$$

für alle  $(v^1, v^2) \in V$  gilt.

**Beweis:** Für die Bilinearform  $a$  gilt

$$\begin{aligned} a(v^1, v^2; v^1, v^2) &= \int_{\Omega_1} \nabla v^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla v^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla v^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla v^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ &= |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} |v^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} |v^2|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\partial\Omega_1 \cap \Gamma$  keine Nullmenge des Randes  $\partial\Omega_1$ , dann gilt für  $(v^1, v^2) \in V$  im Speziellen  $v^1 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1)$  und man erhält die Abschätzung

$$a(v^1, v^2; v^1, v^2) \geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v^1(x) ds_x \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right].$$

Mit dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) können wir nun folgern, dass eine Konstante  $c_1 > 0$  existiert, sodass

$$|v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v^1(x) ds_x \right)^2 \geq c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2.$$

Setzt man diese Ungleichung ein, ergibt das

$$a(v^1, v^2; v^1, v^2) \geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \quad (2.5)$$

Für  $(v^1, v^2) \in V$  gilt jedoch

$$\langle v^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle v^1, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $w \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Somit ist

$$v^1 = v^2 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Es gilt also

$$\|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \geq \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Für die  $L_2$ -Norm gilt jedoch mit einer weiteren Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &= \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} [v^2(x)]^2 dx \\ &\geq \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Setzt man diese Abschätzungen in die Ungleichung (2.5) ein, ergibt das

$$\begin{aligned} a(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \min \left( c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}, 1 \right) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit einer weiteren Anwendung des Normierungssatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) erhält man die Abschätzung

$$\left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \geq c_2 \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2$$

für eine Konstante  $c_2 > 0$  und man erhält für die Bilinearform  $a$  die Beziehung

$$\begin{aligned}
a(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{2} \min \left( c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}, 1 \right) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + c_2 \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \min \left( c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}, 1 \right) \min(1, c_2) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{4} \min \left( c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}, 1 \right) \min(1, c_2) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \min \left( c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}, 1 \right) \min(1, c_2) \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2
\end{aligned}$$

und die  $V$ -Elliptizität der Bilinearform  $a$  ist gezeigt.

□

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata können wir nun unter Zuhilfenahme des Lemmas von Lax-Milgram (vgl. Satz 3.2 in [15]) eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Variationsformulierung (2.4) treffen.

**Satz 2.4.** *Das Variationsproblem (2.4) ist eindeutig lösbar und die Lösung  $(u^1, u^2) \in V$  erfüllt die Stetigkeitsabschätzung*

$$\|(u^1, u^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq \frac{1}{\alpha_1} \frac{3}{2} \sqrt{2} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

wobei  $\alpha_1 > 0$  die Elliptizitätskonstante aus Lemma 2.3 bezeichnet.

## 2.3 Formulierung als Sattelpunktproblem

In Abschnitt 2.2 haben wir die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (2.4) gezeigt. Das weitere Vorgehen sieht eine näherungsweise Lösung der Variationsformulierung (2.4) vor. Im Hinblick darauf ist es von Vorteil, die zusätzliche Bedingung

$$\langle v^1 - v^2, w \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $w \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ , die bisher im Raum  $V$  eingebaut war, in die Variationsformulierung einzubinden. Das kann über Lagrange-Multiplikatoren geschehen, wodurch man ein Sattelpunktproblem erhält.

Gesucht ist  $(u^1, u^2; \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  sodass

$$a(u^1, u^2; v^1, v^2) + \langle v^1 - v^2, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = F(v^1, v^2), \quad (2.6)$$

$$\langle u^1 - u^2, \mu \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0 \quad (2.7)$$

für alle  $(v^1, v^2; \mu) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ .

## 2.4 Eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems

Die eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) soll mit Hilfe des Satzes von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) gezeigt werden. Definiert man die Bilinearform

$$b(v^1, v^2; \lambda) := \langle v^1 - v^2, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)},$$

so muss man, um den Satz von Brezzi anwenden zu können, die  $\ker B$ -Elliptizität und die Beschränktheit der Bilinearform  $a$  sowie die Beschränktheit der Bilinearform  $b$  beweisen. Außerdem ist für die Bilinearform  $b$  die Stabilitätsbedingung

$$\sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{b(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \geq \beta_1 \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \quad (2.8)$$

für eine Konstante  $\beta_1 > 0$  und alle  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  zu zeigen.

In Lemma 2.2 wurde jedoch schon die Beschränktheit der Bilinearform  $a$  gezeigt. Außerdem gilt

$$\ker B = V$$

und in Lemma 2.3 wurde bereits die  $V$ - und somit die  $\ker B$ -Elliptizität der Bilinearform  $a$  gezeigt. Die Beschränktheit der Bilinearform  $b$  soll das folgende Lemma behandeln.

**Lemma 2.5.** *Es existiert eine Konstante  $\beta_2 > 0$ , sodass*

$$|b(v^1, v^2; \lambda)| \leq \beta_2 \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $(v^1, v^2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$  und  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für die Bilinearform  $b$  und  $(v^1, v^2; \lambda) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt

$$|b(v^1, v^2; \lambda)| = |\langle v^1 - v^2, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}|$$

und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$|b(v^1, v^2; \lambda)| \leq \|v^1 - v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$|b(v^1, v^2; \lambda)| \leq (\|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}) \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Für  $(v^1, v^2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$  gelten jedoch die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}, \\ \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

und mit der Hölder-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
 |b(v^1, v^2; \lambda)| &\leq (\|v^1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|v^2\|_{\Omega_2}) \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\
 &\leq \sqrt{2} \left( \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\
 &= \sqrt{2} \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.
 \end{aligned}$$

□

Die letzte zu beweisende Voraussetzung, um den Satz von Brezzi anwenden zu können, ist die Stabilitätsbedingung für die Bilinearform  $b$ .

**Lemma 2.6.** *Es existiert eine Konstante  $\beta_1 > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{b(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \geq \beta_1 \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  ist  $\lambda|_{\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma})$ . Die Idee ist nun, diese Funktion  $\lambda$  auf das Gebiet  $\Omega_1$  fortzusetzen.

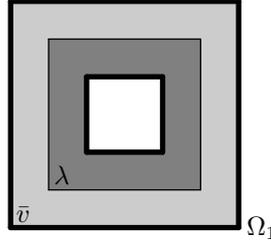


Abbildung 2.2: Fortsetzung von  $\lambda$  auf das Gebiet  $\Omega_1$

Das soll über die Lösung des folgenden Randwertproblems geschehen:

$$\begin{aligned}
 -\Delta \bar{v} &= 0 && \text{in } \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2 \\
 \bar{v} &= 0 && \text{auf } \Gamma \\
 \bar{v} &= \lambda && \text{auf } \partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}
 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass das dazugehörige Variationsproblem eindeutig lösbar ist.

Gesucht ist  $\bar{v} \in H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})$  mit  $\bar{v}|_{\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}} = \lambda|_{\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}}$  und  $\bar{v}|_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} = 0$ , sodass

$$\int_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \nabla \bar{v}(x) \cdot \nabla w(x) dx = 0$$

für alle  $w \in H_0^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})$ .

Die eindeutig bestimmte Lösung  $\bar{v}$  erfüllt außerdem die Stetigkeitsabschätzung

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})} \leq c \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma})}$$

für eine Konstante  $c > 0$ . Mit dem Spursatz (vgl. Satz 2.9 in [15]) gilt somit

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})} \leq c \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für eine Konstante  $c > 0$ . Definieren wir nun  $\bar{v}^1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\bar{v}^1 := \begin{cases} \bar{v}(x) & \text{in } \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}, \\ \lambda(x) & \text{in } \Omega_1 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

und  $\bar{v}^2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{v}^2 \equiv 0$ , so gilt  $(0, 0) \neq (\bar{v}^1, \bar{v}^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  und man erhält die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{b(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} &\geq \frac{b(\bar{v}^1, \bar{v}^2; \lambda)}{\|(\bar{v}^1, \bar{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \\ &= \frac{\|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\bar{v}^1\|_{H^1(\Omega_1)}} \geq \frac{1}{c} \frac{\|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} = \frac{1}{c} \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}. \end{aligned}$$

□

Somit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Brezzi erfüllt und man kann eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) treffen.

**Satz 2.7.** *Das Sattelpunktproblem (2.6)-(2.7) ist eindeutig lösbar und für die Lösung  $(u^1, u^2; \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gelten die Stetigkeitsabschätzungen*

$$\begin{aligned} \|(u^1, u^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

für Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ .

## 2.5 Äquivalenz des Sattelpunktproblems zur schwachen Formulierung

Aus Abschnitt 2.4 wissen wir, dass das Sattelpunktproblem (2.6)-(2.7) eindeutig lösbar ist. Es stellt sich nun jedoch die Frage, ob eine Lösung des Sattelpunktproblems auch eine

Lösung des Randwertproblems (2.1)-(2.2) ist. Wir wissen aber bereits aus Abschnitt 2.1, dass eine Lösung des Variationsproblems (2.4) auch eine Lösung von (2.3) impliziert. Die Lösung des Variationsproblems (2.3) ist jedoch äquivalent zur Lösung des Randwertproblems (2.1)-(2.2). Somit müssen wir hier nur die Äquivalenz der Sattelpunktformulierung (2.6)-(2.7) zur schwachen Formulierung (2.4) zeigen.

**Satz 2.8.** *Sei  $(u^1, u^2; \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  eine Lösung des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7), dann ist  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Sei umgekehrt  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Dann ist das folgende Variationsproblem eindeutig lösbar.*

*Gesucht ist  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ , sodass*

$$b(v^1, v^2; \lambda) = F(v^1, v^2) - a(u^1, u^2; v^1, v^2) \quad (2.9)$$

für alle  $(v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$ .

*Mit diesem eindeutig bestimmten  $\lambda$  ist  $(u^1, u^2, \lambda)$  eine Lösung der Sattelpunktformulierung (2.6)-(2.7).*

**Beweis:** Sei  $(u^1, u^2; \lambda)$  eine Lösung des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7), dann gilt mit Gleichung (2.7)

$$\langle u^1 - u^2, \mu \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $\mu \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  und somit ist  $(u^1, u^2) \in V$ . Außerdem gilt für  $(v^1, v^2) \in V$

$$\langle v^1 - v^2, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für jedes beliebige  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Also gilt mit Gleichung (2.6)

$$a(u^1, u^2; v^1, v^2) = F(v^1, v^2)$$

für alle  $(v^1, v^2) \in V$ . Da  $(u^1, u^2)$  im Funktionenraum  $V$  liegt, ist  $(u^1, u^2) \in V$  die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems (2.4).

Sei umgekehrt  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Dann ist mit Lemma 2.5 und Lemma 2.6 zusammen mit dem Satz von Babuška-Aziz (vgl. Hilfssatz 4.2 in [4]) das Variationsproblem (2.9) eindeutig lösbar und wir erhalten ein  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Somit ist Gleichung (2.6) wegen der Konstruktion von  $\lambda$  erfüllt und für  $(u^1, u^2) \in V$  gilt

$$0 = \langle u^1 - u^2, \mu \rangle = b(u^1, u^2; \mu)$$

für alle  $\mu \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Somit ist auch Gleichung (2.7) erfüllt und  $(u^1, u^2, \lambda)$  ist eine Lösung der Sattelpunktformulierung (2.6)-(2.7).

□

## 2.6 Eine modifizierte Sattelpunktformulierung

In Abschnitt 3.3 des Kapitels 3 werden wir an die Grenzen der Sattelpunktformulierung (2.6)-(2.7) stoßen, da wir in diesem Kapitel keine Einschränkungen an die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  fordern. Aus diesem Grund wird es an dieser Stelle von Vorteil sein, eine neue Formulierung des Problems zu betrachten, die wir in diesem Abschnitt einführen wollen. Anstelle des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) betrachten wir das folgende modifizierte Sattelpunktproblem.

Gesucht ist  $(u^1, u^2; \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ , sodass

$$\bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) + \bar{b}(v^1, v^2; \lambda) = F(v^1, v^2), \quad (2.10)$$

$$\bar{b}(u^1, u^2; \mu) - c(\lambda, \mu) = 0 \quad (2.11)$$

für alle  $(v^1, v^2; \mu) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} \bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) := & \int_{\Omega_1} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u^1(x) \cdot \nabla v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx \\ & + \frac{1}{2}(1-t) \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\bar{b}(u^1, u^2; \lambda) := \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla \lambda(x) dx + \langle u^2 - u^1, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \quad (2.13)$$

und

$$c(\lambda, \mu) := \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla \mu(x) dx \quad (2.14)$$

und der Linearform

$$\begin{aligned} F(v^1, v^2) := & \int_{\Omega_1} f(x)v^1(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x)v^2(x) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)v^2(x) dx, \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei  $t$  ein beliebiger aber fest zu wählender Parameter mit  $0 < t \leq 1$  ist und das Gebiet  $\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  ein beliebiges Gebiet mit

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \Omega_2$$

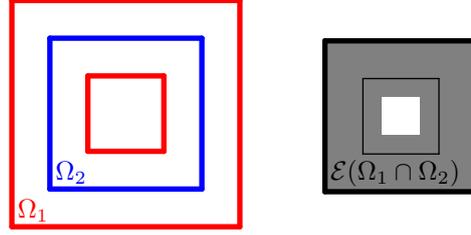
und

$$\partial \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \Gamma = \emptyset$$

ist, vgl. hierzu auch Abbildung 2.3. Außerdem wählen wir hier die Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  so, dass

$$\partial \Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$$

gilt.

Abbildung 2.3: Die Gebiete  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ 

Für diese Formulierung wollen wir in diesem Abschnitt die eindeutige Lösbarkeit und deren Äquivalenz zur Variationsformulierung (2.3) zeigen.

### 2.6.1 Eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Sattelpunktproblems

Das modifizierte Sattelpunktproblem (2.10)-(2.11) entspricht einem gestörten Sattelpunktproblem wie in Kapitel 1 eingeführt. Also werden wir auf Satz 1.3 zurückgreifen, um die eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11) zu zeigen. Dazu müssen wir die Beschränktheit der Bilinearformen  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  und  $c$  zeigen. Die Beweise dafür können jedoch auf ähnliche Weise wie die Beweise für die Lemmata 2.2 und 2.5 geführt werden und sollen daher hier nicht betrachtet werden. Für die Elliptizität betrachten wir das folgende Lemma.

**Lemma 2.9.** *Es existiert eine Konstante  $\bar{\alpha}_1 > 0$ , sodass*

$$\bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) \geq \bar{\alpha}_1 \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2$$

für alle  $(v^1, v^2) \in \ker \bar{B}$  gilt.

**Beweis:** Für die Bilinearform  $\bar{a}$  gilt

$$\begin{aligned} \bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &= |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2}|v^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \frac{1}{2}|v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-t)|v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung

$$\partial\Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$$

gilt somit zusammen mit  $v^1 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1)$

$$\begin{aligned} \bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v^1(x) ds_x \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \end{aligned}$$

und mit dem Normierungssatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) folgt, dass eine Konstante  $c_1 > 0$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} \bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ |v^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v^1(x) ds_x \right)^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Für  $(v^1, v^2) \in \ker \bar{B}$  gilt aber

$$\bar{b}(v^1, v^2; \mu) = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)).$$

Mit  $\mu = v^2|_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla v^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx + \langle v^2 - v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &= |v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \langle v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &= |v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \langle v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

und somit

$$|v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 = \langle v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt also

$$\begin{aligned} |v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &= \langle v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt

$$\|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \geq \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left[ \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right]^2$$

und mit dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) gilt

$$\begin{aligned} |v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \left[ |v^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v^2(x) dx \right)^2 \right] \\ &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) c_2 \|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \end{aligned}$$

für eine Konstante  $c_2 > 0$ . Insgesamt gilt also

$$\min\left(1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}\right) c_2 \|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \leq \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

und nach Division durch  $\|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$  erhält man zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &\geq \min\left(1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}\right)^2 c_2^2 \|v^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\geq \min\left(1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}\right)^2 c_2^2 \|v^2\|_{L_2(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\geq \underbrace{\min\left(1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}\right)^2 c_2^2 \frac{1}{|\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)|}}_{=:\bar{c}} \left[ \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} v^2(x) dx \right]^2 \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $\bar{c} > 0$ . Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c_1) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c_1) \min(1, \bar{c}) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left[ \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} v^2(x) dx \right]^2 + \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (Satz 2.2 in [15]) gilt also

$$\begin{aligned} 1\bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq \frac{1}{4} \min(1, c_1) \min(1, \bar{c}) \left[ \|v^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + c_3 \|v^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c_1) \min(1, \bar{c}) \min(1, c_3) \|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

für eine Konstante  $c_3 > 0$ .

□

Die Nichtnegativitäten

$$\begin{aligned} \bar{a}(v^1, v^2; v^1, v^2) &\geq 0, \\ c(\mu, \mu) &\geq 0 \end{aligned}$$

für alle  $(v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  und  $\mu \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  sind leicht zu beweisen und die Beweise sollen hier nicht betrachtet werden. Die letzte noch zu beweisende Voraussetzung, um Satz 1.3 anwenden zu können, ist die Stabilitätsbedingung für die Bilinearform  $\bar{b}$ .

**Lemma 2.10.** *Es existiert eine Konstante  $\beta_1 > 0$  abhängig von  $t$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{\bar{b}(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \geq \beta_1 \|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

für alle  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für  $\lambda \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  ist  $\lambda|_{\partial\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus \overline{\partial\Omega_2}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}) \setminus \overline{\partial\Omega_2})$  und somit gilt für die Funktion

$$g := \begin{cases} \lambda & \text{in } \partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}) \setminus \overline{\partial\Omega_2}, \\ 0 & \text{in } \partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}) \cap \partial\Omega_2 \end{cases}$$

$g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))$ . Mit dem inversen Spursatz (vgl. Satz 2.10 in [15]) gibt es eine Funktion  $u^g \in H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})$  mit  $u^g|_{\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} = g$  und

$$\|u^g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \leq c_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))}$$

mit einer Konstanten  $c_{IT} > 0$  und das folgende Variationsproblem ist eindeutig lösbar.

Gesucht ist  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})$ , sodass

$$\int_{\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \nabla \bar{v}(x) \cdot \nabla w(x) dx = - \int_{\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \nabla u^g(x) \cdot \nabla w(x) dx$$

für alle  $w \in H_0^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})$ .

Die eindeutig bestimmte Lösung  $\bar{v}$  erfüllt außerdem die Stetigkeitsabschätzung

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \leq c \|u^g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \leq cc_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))}$$

für eine Konstante  $c > 0$ . Mit dem Spursatz (vgl. Satz 2.9 in [15]) gilt somit

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \leq cc_{IT} c_T \|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

für eine Konstante  $c_T > 0$ . Definieren wir nun Funktionen  $\bar{v}^2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\bar{v}^2 := \begin{cases} \bar{v} & \text{in } \Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}, \\ \lambda & \text{in } \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \end{cases}$$

und  $\bar{v}^1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{v}^1 \equiv 0$ , so gilt  $(0, 0) \neq (\bar{v}^1, \bar{v}^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  und man erhält eine Abschätzung für das Supremum:

$$\begin{aligned} \sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{\bar{b}(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} &\geq \frac{\bar{b}(\bar{v}^1, \bar{v}^2; \lambda)}{\|(\bar{v}^1, \bar{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \\ &= \frac{\frac{t}{2} |\lambda|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus \overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})}^2 + \|\lambda\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\bar{v}^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \\ &\geq \frac{t}{2} \frac{|\lambda|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|\lambda\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\bar{v}^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) gilt

$$\begin{aligned}
& \sup_{(0,0) \neq (v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)} \frac{\bar{b}(v^1, v^2; \lambda)}{\|(v^1, v^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \\
& \geq \frac{t}{2} \frac{|\lambda|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \lambda(x) dx \right)^2}{\|\bar{v}^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \\
& \geq \frac{t}{2} \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \frac{|\lambda|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \lambda(x) dx \right)^2}{\|\bar{v}^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \\
& \geq \frac{t}{2} \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) c_1 \frac{\|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2}{\|\bar{v}^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \\
& \geq \frac{t}{2} \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \frac{c_1}{c_{CT} c_T} \frac{\|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2}{\|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}} \\
& = \frac{t}{2} \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \frac{c_1}{c_{CT} c_T} \|\lambda\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}
\end{aligned}$$

für eine Konstante  $c_1 > 0$ .

□

Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes 1.3 erfüllt und man kann eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11) treffen.

**Satz 2.11.** *Das modifizierte Sattelpunktproblem (2.10)-(2.11) ist eindeutig lösbar und für die Lösung  $(u^1, u^2; \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  gilt die Stetigkeitsabschätzung*

$$\|(u^1, u^2, \lambda)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad (2.16)$$

für eine Konstante  $c > 0$ .

## 2.6.2 Äquivalenz des modifizierten Sattelpunktproblems zum Randwertproblem

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die eindeutige Lösbarkeit des modifizierten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11) bewiesen. Es stellt sich nun jedoch auch die Frage, ob das Lösen des modifizierten Sattelpunktproblems äquivalent zur Lösung des ursprünglichen Randwertproblems ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass das modifizierte Sattelpunktproblem äquivalent zum Variationsproblem (2.4) ist, da wir die Äquivalenz des Variationsproblems (2.4) schon in Kapitel 2.1 gezeigt haben. Dieser Äquivalenz zum Variationsproblem (2.4) wollen wir uns in diesem Abschnitt widmen.

**Satz 2.12.** Sei  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Dann ist das folgende Variationsproblem eindeutig lösbar.

Gesucht ist  $\lambda \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ , sodass

$$\bar{b}(v^1, v^2; \lambda) = F(v^1, v^2) - \bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) \quad (2.17)$$

für alle  $(v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$ . Außerdem ist  $(u^1, u^2, \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  die eindeutig bestimmte Lösung des modifizierten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11).

Sei umgekehrt  $(u^1, u^2, \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  eine Lösung des modifizierten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11). Dann gilt

$$(u^1, u^2) \in V$$

und  $(u^1, u^2)$  ist eine Lösung des Variationsproblems (2.4).

**Beweis:** Sei  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung des Variationsproblems (2.4). Mit Lemma 2.10, der Beschränktheit der Bilinearform  $\bar{b}$  und dem Satz von Babuška-Aziz (vgl. Hilfssatz 4.2 in [4]) ist das Variationsproblem (2.17) eindeutig lösbar und wir erhalten ein  $\lambda \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Also erfüllt  $(u^1, u^2, \lambda)$  die Gleichung (2.10). Für dieses  $\lambda$  gilt

$$\bar{b}(v^1, v^2; \lambda) = \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx - a(u^1, u^2; v^1, v^2) + F(v^1, v^2)$$

für alle  $(v^1, v^2) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$ . Für  $(v^1, v^2) \in V$  gilt jedoch

$$a(u^1, u^2; v^1, v^2) = F(v^1, v^2),$$

weil  $(u^1, u^2) \in V$  eine Lösung der Variationsformulierung (2.4) ist und somit folgt

$$\bar{b}(v^1, v^2; \lambda) = \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx$$

für alle  $(v^1, v^2) \in V$ . Außerdem erhalten wir für  $(v^1, v^2) \in V$

$$\begin{aligned} \bar{b}(v^1, v^2; \lambda) &= \underbrace{\langle v^2 - v^1, \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}_{=0} + \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla v^2(x) \cdot \nabla \lambda(x) dx \\ &= \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla v^2(x) \cdot \nabla \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.17) gilt somit

$$\frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla v^2(x) \cdot \nabla \lambda(x) dx = \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx$$

für alle  $v^2 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  und somit für alle  $v^2 \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Also folgt

$$\begin{aligned} \bar{b}(u^1, u^2; \mu) - c(\lambda, \mu) &= \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla \mu(x) dx + \langle u^2 - u^1, \mu \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\quad - \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla \mu(x) dx \\ &= \underbrace{\langle u^2 - u^1, \mu \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

für alle  $\mu \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  und  $(u^1, u^2, \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  erfüllt auch Gleichung (2.11). Somit ist  $(u^1, u^2, \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  die eindeutig bestimmte Lösung des gestörten Variationsproblems (2.10)-(2.11).

Sei umgekehrt  $(u^1, u^2, \lambda) \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \times H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  eine Lösung des gestörten Variationsproblems (2.10)-(2.11). Mit  $\bar{\mu} \in H_0^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  und

$$\mu(x) := \begin{cases} \bar{\mu} & \text{in } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0 & \text{in } \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2) \end{cases}$$

ist  $\mu \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  und es gilt mit Gleichung (2.11)

$$0 = \bar{b}(u^1, u^2; \mu) - c(\mu, \lambda) = \langle u^2 - u^1, \bar{\mu} \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $\bar{\mu} \in H_0^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Also folgt

$$u^1 = u^2 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und somit auch

$$\langle u^1 - u^2, \mu \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $\mu \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Somit reduziert sich Gleichung (2.11) zu

$$\frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla \mu(x) dx - \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla \mu(x) dx = 0$$

für alle  $\mu \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Für  $v^2 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2)$  ist jedoch  $v^2|_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \in H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  und somit kann die Gleichung (2.10) umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} F(v^1, v^2) &= \bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) + \bar{b}(v^1, v^2; \lambda) \\ &= \bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) + \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla v^2(x) dx + b(v^1, v^2; \lambda) \\ &= \bar{a}(u^1, u^2; v^1, v^2) + \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla u^2(x) \cdot \nabla v^2(x) dx + b(v^1, v^2; \lambda) \\ &= a(u^1, u^2; v^1, v^2) + b(v^1, v^2; \lambda). \end{aligned}$$

Für  $(v^1, v^2) \in V$  gilt jedoch

$$a(u^1, u^2; v^1, v^2) = F(v^1, v^2)$$

und somit ist  $(u^1, u^2) \in V$  die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems (2.4).

□



# 3 Diskretisierung der Sattelpunktformulierung

In Kapitel 2 haben wir für das Randwertproblem (2.1)-(2.2) das Variationsproblem (2.4) formuliert und die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems sowie dessen Äquivalenz zum ursprünglichen Randwertproblem bewiesen. Weiters haben wir das Sattelpunktproblem (2.6)-(2.7) formuliert und auch dafür die Äquivalenz zum Randwertproblem (2.1)-(2.2) und die eindeutige Lösbarkeit bewiesen. Das Ziel dieser Arbeit soll jedoch die näherungsweise Lösung des Randwertproblems (2.1)-(2.2) sein. Aus diesem Grund werden wir in diesem Kapitel eine Methode zur näherungsweisen Lösung des Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) vorschlagen. Dazu benötigen wir Triangulierungen  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Jedoch werden wir vorerst gewisse Bedingungen an die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  stellen und uns dann schrittweise der allgemeinsten Form, dass die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  beliebig wählbar sind, annähern.

## 3.1 Global konforme Diskretisierung

### 3.1.1 Formulierung des diskreten Sattelpunktproblems

**Voraussetzung 3.1.** Seien  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  formreguläre Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Außerdem erfüllen die Triangulierungen der Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  die Bedingung, dass sie im Überlapp

$$\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2) := \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cap \mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$$

identisch sind (vgl. Abbildung 3.1).

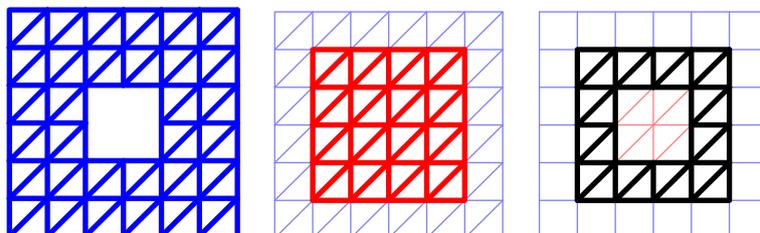


Abbildung 3.1: Die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und die Triangulierung des Überlapps  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

Somit kann man auf den Triangulierungen  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$ ,  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  und  $\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  stückweise lineare und stetige Funktionen definieren und erhält die Funktionenräume

$$\begin{aligned} S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) &\subset H^1(\Omega_1), \\ S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) &\subset H^1(\Omega_2), \\ S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) &\subset H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Funktionenräume können wir nun konforme Ansatzräume für die unendlich dimensionalen Funktionenräume, die in der Sattelpunktformulierung (2.6)-(2.7) auftreten, einführen:

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1), \quad (3.1)$$

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2), \quad (3.2)$$

$$S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \subset H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2). \quad (3.3)$$

Formuliert man das Sattelpunktproblem (2.6)-(2.7) in diesen endlich dimensionalen Unterräumen, so ergibt das das folgende Problem.

Gesucht ist  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  sodass

$$a(u_h^1, u_h^2; v_h^1, v_h^2) + \langle v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = F(v_h^1, v_h^2), \quad (3.4)$$

$$\langle u_h^1 - u_h^2, \mu_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0 \quad (3.5)$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2, \mu_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ .

### 3.1.2 Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems

In Abschnitt 3.1.1 haben wir das diskrete Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) hergeleitet. An dieser Stelle stellen sich nun zwei Fragen: Ist das diskrete Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) eindeutig lösbar? In welcher Beziehung steht eine Lösung  $(u_h^1, u_h^2, \lambda_h)$  des diskreten Sattelpunktproblems (3.4)-(3.5) zur Lösung  $(u^1, u^2, \lambda)$  des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7)? In diesem Abschnitt werden wir uns der ersten Frage widmen und zeigen, dass das diskrete Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) eindeutig lösbar ist.

Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (3.4)-(3.5) werden wir, wie auch für das kontinuierliche Sattelpunktproblem (2.6)-(2.7) mit Hilfe des Satzes von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) beweisen. Die diskrete Stabilitätsbedingung werden wir in Abschnitt 3.2 für einen allgemeineren Fall beweisen und verweisen hier nur auf Lemma 3.5. Neben der diskreten Stabilitätsbedingung lässt sich in diesem Fall auch das folgende Lemma beweisen.

**Lemma 3.2.** *Es existiert ein Operator  $\Phi_h : H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2) \rightarrow S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ , sodass für jedes  $\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt*

$$\langle v_h^1 - v_h^2, \lambda - \Phi_h \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$ .

**Beweis:** Mit Voraussetzung 3.1 ist  $w_h := v_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - v_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Wir definieren den Operator  $\Phi_h$  als die  $H^1$ -Projektion auf den Raum  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  durch

$$\langle w_h, \lambda - \Phi_h \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $w_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Somit gilt auch für alle  $(v_h^1, v_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$

$$\langle v_h^1 - v_h^2, \lambda - \Phi_h \lambda \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0.$$

□

Betrachten wir nun die Elliptizität der Bilinearform  $a$ , so haben wir in Abschnitt 2.4 die  $\ker B$ -Elliptizität gezeigt. Daraus folgt jedoch im allgemeinen nicht die  $\ker B_h$ -Elliptizität. Mit Lemma 3.2 und Proposition 2.3 in [5] kann man jedoch zeigen, dass

$$\ker B_h \subset \ker B$$

gilt und somit folgt die  $\ker B_h$ -Elliptizität direkt aus Lemma 2.3 in Kapitel 2. Auch die Beschränktheit der Bilinearformen  $a$  und  $b$  auf den diskreten Räumen ist eine direkte Konsequenz von Lemma 2.2 und Lemma 2.5 in Kapitel 2. Somit lässt sich nun auch im diskreten Fall eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Sattelpunktproblems (3.4)-(3.5) formulieren.

**Satz 3.3.** *Sei Voraussetzung 3.1 erfüllt, dann ist mit der Definition der Ansatzräume wie in (3.1)-(3.3) das Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) eindeutig lösbar und für die Lösung  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  gelten die Stetigkeitsabschätzungen*

$$\begin{aligned} \|(u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

für von  $h$  unabhängige Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ .

### 3.1.3 Konvergenz der diskreten Lösung

In Abschnitt 3.1.2 haben wir bewiesen, dass das diskrete Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) eine eindeutige Lösung besitzt. Jedoch wissen wir noch nicht, ob diese eindeutig bestimmte Lösung des diskreten Sattelpunktproblems (3.4)-(3.5) auch gegen die eindeutig bestimmte

Lösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) konvergiert. Diese Konvergenz soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

Nach Abschnitt 3.1.2 wissen wir, dass das diskrete Sattelpunktproblem (3.4)-(3.5) eindeutig lösbar ist und dass

$$\ker B_h \subset \ker B$$

gilt. Somit kann mit Satz 1.2 in Kapitel 1 eine quasi-optimale Fehlerabschätzung mit einer Konstanten  $c > 0$  bewiesen werden.

$$\begin{aligned} \|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \\ \leq c \inf_{(v_h^1, v_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))} \|(u^1, u^2) - (v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wenn man nun zusätzlich davon ausgeht, dass die eindeutig bestimmte Lösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (3.4)-(3.5) die Voraussetzung

$$(u^1, u^2) \in H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$$

erfüllt, so erhält man mit der Approximationseigenschaft der Räume  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$  und  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  (vgl. Satz 9.2 in [15]) die a-priori-Fehlerabschätzung

$$\|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq ch |(u^1, u^2)|_{H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)} \quad (3.7)$$

für eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$ .

**Bemerkung 3.1.** In Abschnitt 4.2 des Kapitels 4 werden wir ein numerisches Beispiel betrachten, das diese a-priori Fehlerabschätzung verifiziert.

## 3.2 Global teilkonforme Diskretisierung

### 3.2.1 Formulierung des diskreten Sattelpunktproblems

**Voraussetzung 3.4.** Das Gebiet  $\Omega_1$  erfüllt die Bedingung, dass

$$\partial\Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$$

gilt. Seien  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  formreguläre Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Außerdem erfüllt die Triangulierung des Gebiets  $\Omega_2$  die Bedingung, dass der Überlapp  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  mit Elementen des Gebiets  $\Omega_2$  trianguliert werden kann, d.h. es existiert eine Menge  $I$  von Indizes, sodass  $T_i \in \mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  und

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \bigcup_{i \in I} T_i.$$

Die Triangulierung für das Gebiet  $\Omega_1$  kann jedoch beliebig gewählt werden. Vergleiche dazu Abbildung 3.2.

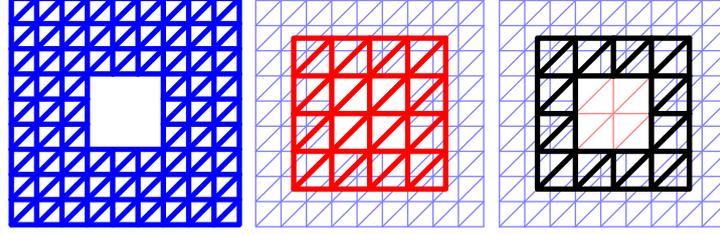


Abbildung 3.2: Die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und die Triangulierung des Überlapps  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

Dann kann man auch hier, ähnlich wie in Abschnitt 3.1 konforme Ansatzräume folgendermaßen wählen:

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1), \quad (3.8)$$

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2), \quad (3.9)$$

$$S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \subset H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2), \quad (3.10)$$

mit

$$\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2) := \bigcup_{i \in I} T_i.$$

Mit Hilfe dieser Räume kann nun ein diskretes Sattelpunktproblem formuliert werden.

Gesucht ist  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  sodass

$$a(u_h^1, u_h^2; v_h^1, v_h^2) + b(v_h^1, v_h^2; \lambda_h) = F(v_h^1, v_h^2), \quad (3.11)$$

$$b(u_h^1, u_h^2; \mu_h) = 0 \quad (3.12)$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2, \mu_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ .

### 3.2.2 Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems

Für die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (3.11)-(3.12) wollen wir auch hier den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) anwenden. Die Beschränktheit der Bilinearformen  $a$  und  $b$  sind eine direkte Konsequenz von Lemma 2.2 und Lemma 2.5. Für den Beweis der diskreten Stabilitätsbedingung (1.10) zeigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.5.** *Es existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $\beta_1^h > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (v_h^1, v_h^2) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))} \frac{b(v_h^1, v_h^2; \lambda_h)}{\|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \geq \beta_1^h \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \quad (3.13)$$

für alle  $\lambda_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  gilt.

**Beweis:** Für ein beliebiges aber festes  $\lambda_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  definieren wir

$$g(x) := \begin{cases} \lambda_h(x) & \text{für } x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0 & \text{für } x \in \partial\Omega_2 \cap \Gamma \end{cases}$$

und somit liegt die Funktion  $g : \partial(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}) \rightarrow \mathbb{R}$  wegen der Voraussetzung

$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \Gamma = \emptyset$$

im Funktionenraum  $H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}))$ . Also kann man mit dem inversen Spursatz (vgl. Satz 2.10 in [15]) folgern, dass eine Fortsetzung  $u_g \in H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})$  mit  $u_g|_{\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})} = g$  existiert und

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})} \leq c_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}))}$$

für eine Konstante  $c_{IT} > 0$  erfüllt. Betrachtet man nun die  $H^1$ -Projektion  $P_h^1 u_g$  der Funktion  $u_g$  auf den Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen im Gebiet  $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$ , so gilt für diese mit dem Spursatz (vgl. Satz 2.9 in [15])

$$\begin{aligned} \|P_h^1 u_g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})} &\leq \|u_g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})} \leq c_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}))} = c_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq c_{IT} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \leq c_{IT} c_T \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

für eine Konstante  $c_T > 0$ . Wir definieren nun eine Funktion  $\tilde{v}_h^2$  (vgl. Abbildung 3.3) mit

$$\tilde{v}_h^2 := \begin{cases} -\lambda_h & \text{für } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ -P_h^1 u_g & \text{für } x \in \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}, \end{cases}$$

die aufgrund der Konformität in  $S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  ist, und eine Funktion  $\tilde{v}_h^1 \equiv 0$ .

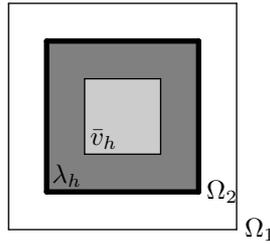


Abbildung 3.3: Fortsetzung von  $\lambda_h$  auf das Gebiet  $\Omega_2$

Für  $(\tilde{v}_h^1, \tilde{v}_h^2)$  gilt somit

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_2)} &= \sqrt{\|\tilde{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})}^2 + \|\tilde{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2} \\ &= \sqrt{\|P_h^1 u_g\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})}^2 + \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2} \leq \sqrt{1 + c_{IT}^2 c_T^2} \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

und

$$\langle \tilde{v}_h^1 - \tilde{v}_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle \lambda_h, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzungen erhält man für das Supremum

$$\begin{aligned} \sup_{(0,0) \neq (v_h^1, v_h^2) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))} \frac{b(v_h^1, v_h^2; \lambda_h)}{\|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} &\geq \frac{b(\tilde{v}_h^1, \tilde{v}_h^2; \lambda_h)}{\|(\tilde{v}_h^1, \tilde{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \\ &= \frac{\langle \tilde{v}_h^1 - \tilde{v}_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}{\|\tilde{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_1)}} \\ &\geq \frac{\|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\sqrt{1 + c_{IT}^2 c_T^2} \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + c_{IT}^2 c_T^2}} \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}. \end{aligned}$$

□

Für den Nachweis der  $\ker B_h$ -Elliptizität können wir jedoch keine ähnliche Aussage wie in Lemma 3.2 beweisen. Also müssen wir die  $\ker B_h$ -Elliptizität zusätzlich nachweisen, da diese im allgemeinen nicht aus der  $\ker B$ -Elliptizität, wie in Lemma 2.3 bewiesen, folgt. Um die  $\ker B_h$ -Elliptizität zeigen zu können, müssen wir jedoch annehmen, dass das Gebiet  $\Omega_1$  einen Anteil am Dirichlet-Rand  $\Gamma$  hat, wenn das Gebiet  $\Omega_2$  den Überlapp auflöst.

**Lemma 3.6.** *Sei Voraussetzung 3.4 erfüllt, dann existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $\alpha_1^h$ , sodass*

$$a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) \geq \alpha_1^h \|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2$$

für alle  $(v^1, v^2) \in V_h$  gilt, wobei hier

$$\begin{aligned} V_h := \{ &(v_h^1, v_h^2) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) : \\ &\langle v_h^1 - v_h^2, \mu_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0 \quad \forall \mu_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Für die Bilinearform  $a$  gilt für  $(v_h^1, v_h^2) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$

$$\begin{aligned} a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &= \int_{\Omega_1} \nabla v_h^1(x) \cdot \nabla v_h^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \nabla v_h^2(x) \cdot \nabla v_h^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla v_h^1(x) \cdot \nabla v_h^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla v_h^2(x) \cdot \nabla v_h^2(x) dx \\ &= |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} |v_h^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} |v_h^2|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit Voraussetzung 3.4 ist  $\partial\Omega_1 \cap \Gamma$  keine Nullmenge des Randes  $\partial\Omega_1$  und somit gilt wegen  $v_h^1 \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1)$

$$a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) \geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v_h^1(x) ds_x \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]$$

und mit dem Normierungssatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) folgt, dass eine Konstante  $c_1 > 0$  existiert mit

$$|v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v_h^1(x) ds_x \right)^2 \geq c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Für  $(v_h^1, v_h^2) \in V_h$  ist

$$\langle v_h^1 - v_h^2, \mu_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $\mu_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{1,2}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ . Wegen der Konformität

$$S_h^1(\mathcal{T}_h^{1,2}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) = S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$$

können wir jedoch  $\mu_h := v_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  setzen und es gilt somit

$$\langle v_h^2, v_h^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle v_h^1, v_h^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 = \langle v_h^2, v_h^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle v_h^1, v_h^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \leq \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Nach Division durch  $\|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$  erhält man die Abschätzung

$$\|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \leq \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Also erhält man für die Bilinearform  $a$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 |v_h^1|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + c_1 \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \geq \|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \geq \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2$$

und somit

$$\begin{aligned}
a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + c_1 \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \left[ c_1 \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right].
\end{aligned}$$

Mit einer weiteren Anwendung des Normierungssatzes von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) erhält man

$$|v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2 \geq c_2 \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2$$

für eine Konstante  $c_2 > 0$ . Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}
a(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + c_2 \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \min(1, c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}) \min(1, c_2) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})}^2 + \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{4} \min(1, c_1, \frac{c_1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|}) \min(1, c_2) \|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2.
\end{aligned}$$

□

Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Brezzi erfüllt und man kann eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (3.11)-(3.12) treffen.

**Satz 3.7.** *Sei Voraussetzung 3.4 erfüllt, dann ist mit der Definition der Ansatzräume wie in (3.8)-(3.10) das Sattelpunktproblem (3.11)-(3.12) eindeutig lösbar und für die Lösung  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  gelten die Stetigkeitsabschätzungen*

$$\begin{aligned}
\|(u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \\
\|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

für von  $h$  unabhängige Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ .

### 3.2.3 Konvergenz der diskreten Lösung

In Abschnitt 3.2.2 haben wir die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (3.11)-(3.12) gezeigt. Wie in Abschnitt 3.1.3 soll nun auch hier die Konvergenz der Lösungen des diskreten Sattelpunktproblems (3.11)-(3.12) gegen die Lösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (2.6)-(2.7) gezeigt werden.

Nach Abschnitt 3.2.2 ist das diskrete Sattelpunktproblem (3.11)-(3.12) eindeutig lösbar und somit gilt mit Satz 1.2 in Kapitel 1 die quasi-optimale Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} &\leq c_1 \inf_{(v_h^1, v_h^2) \in V_h} \|(u^1, u^2) - (v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \\ &\quad + c_2 \inf_{\mu_h \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \|\lambda - \mu_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

mit

$$V_h := S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2),$$

und mit von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ . Unter den zusätzlichen Voraussetzungen  $u^1 \in H^2(\Omega_1)$ ,  $u^2 \in H^2(\Omega_2)$  und  $\lambda \in H^2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  erhält man zusammen mit den Approximationseigenschaften der Räume  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$ ,  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  und  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  (vgl. Satz 9.2 in [15]) die a-priori Fehlerabschätzung

$$\|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq ch \left[ |(u^1, u^2)|_{H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)} + |\lambda|_{H^2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right] \quad (3.14)$$

für eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$ .

**Bemerkung 3.2.** Für ein numerisches Beispiel, das diese a-priori Fehlerabschätzung verifiziert, siehe Abschnitt 4.3.2.

### 3.2.4 Bemerkungen zur Implementierung dieses Verfahrens

In der Theorie lässt sich die Stabilität dieses Verfahrens beweisen, wie wir in den vorhergehenden Abschnitten gesehen haben, jedoch bei der Implementierung trifft man auf eine Schwierigkeit, die Auswertung des Skalarprodukts

$$\langle v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Die Schwierigkeit ist, die Funktion  $v_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - v_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  zu integrieren, die nicht mehr im selben Raum wie die Funktion  $\lambda_h$  liegt. Aus diesem Grund kann dieses Skalarprodukt nicht über Standardassemblierung berechnet werden und man muss sich überlegen, wie man es trotzdem effizient auswerten kann. Dazu werden wir hier zwei Zugänge betrachten. Einmal werden wir die Funktion  $v_h^1$  durch Interpolation auf den Funktionenraum von  $\lambda_h$  abbilden und einmal durch Projektion.

#### Interpolation

Der erste und auch am einfachsten zu implementierende Zugang ist, die Funktion  $v_h^1$  durch Interpolation in den Funktionenraum  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  zu bringen. Man berechnet also das Skalarprodukt

$$\langle I_h v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

mit dem Interpolationsoperator  $I_h : S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \rightarrow S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  anstelle des Skalarprodukts

$$\langle v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Dadurch erhält man eine neue gestörte Bilinearform

$$b_h^I(v_h^1, v_h^2, \lambda_h) := \langle I_h v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Durch diese Änderung der Bilinearform  $b$  kann man jedoch die diskrete Stabilitätsbedingung nicht mehr beweisen und erhält somit ein instabiles Verfahren. In Abschnitt 4.3 in Kapitel 4 werden wir an einem numerischen Beispiel sehen, dass dieser Zugang im allgemeinen nicht die Konvergenzordnung erhält und die Lösung Anzeichen aufweist, dass die diskrete Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Dieser Zugang ist also nicht zufriedenstellend.

### Projektion

Eine zweite Möglichkeit, die Funktion  $v_h^1 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$  im Überlapp in den Funktionenraum  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  abzubilden ist die Projektion. Man verwendet also anstelle der Bilinearform

$$b(v_h^1, v_h^2; \lambda_h) := \langle v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

die Bilinearform

$$b_h^P(v_h^1, v_h^2; \lambda_h) := \langle P_h^1 v_h^1 - v_h^2, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

mit dem  $H^1$ -Projektionsoperator  $P_h^1 : S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \rightarrow S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ , für den

$$\langle P_h^1 v_h^1, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \langle v_h^1, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $\lambda_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  gilt. Somit gilt jedoch

$$b(v_h^1, v_h^2, \lambda_h) = b_h^P(v_h^1, v_h^2; \lambda_h)$$

und die eindeutige Lösbarkeit ist mit den Aussagen aus den Abschnitten zuvor garantiert.

**Bemerkung 3.3.** *Ein numerischer Vergleich dieser beiden Zugänge (Interpolation und Projektion der Funktion  $v_h^1$  auf den Raum  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ ) in Abschnitt 4.3 des Kapitels 4 zeigt, dass die Interpolation kein stabiles Verfahren liefert, die Projektion jedoch schon.*

## 3.3 Global nicht konforme Diskretisierung

### 3.3.1 Formulierung als Sattelpunktproblem

Das in Abschnitt 3.2 hergeleitete Verfahren lässt sich auch auf beliebige Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  verallgemeinern, jedoch müssen die konformen endlichdimensionalen

Ansatzräume für  $(u_h^1, u_h^2)$  und  $\lambda_h$  etwas verändert werden:

$$\begin{aligned} V_h^1 &:= \left\{ v_h^1 \in C^0(\Omega_1) : v_h^1|_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} = w_h^1|_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}}, w_h^1 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)), \right. \\ &\quad \left. v_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = w_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, w_h^1 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \right\}, \\ V_h^2 &:= \left\{ v_h^2 \in C^0(\Omega_2) : v_h^2|_{\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}} = w_h^2|_{\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}}, w_h^2 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)), \right. \\ &\quad \left. v_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = w_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, w_h^2 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \right\}, \\ Q_h &:= \left\{ \lambda_h : \lambda_h = w_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, w_h^1 \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \right\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Räume formulieren wir nun ein diskretes Sattelpunktproblem.

Gesucht ist  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in V_h^1 \times V_h^2 \times Q_h$  sodass

$$a(u_h^1, u_h^2; v_h^1, v_h^2) + b(v_h^1, v_h^2, \lambda_h) = F(v_h^1, v_h^2) \quad (3.15)$$

$$b(u_h^1, u_h^2, \mu_h) = 0 \quad (3.16)$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2, \mu_h) \in V_h^1 \times V_h^2 \times Q_h$ .

Für den Beweis der eindeutigen Lösbarkeit und Konvergenz der Lösungen gegen die kontinuierliche Lösung wollen wir hier nur auf die Arbeit [7] von H. Ben Dhia und G. Rateau verweisen. In Abschnitt 4.4 des Kapitels 4 werden wir hierzu außerdem ein numerisches Beispiel betrachten, das zeigt, dass dieses Verfahren nicht nur für die hier betrachteten Räume  $V_h^1$ ,  $V_h^2$  und  $Q_h$  die erwartete Konvergenzordnung liefert, sondern auch für die Standardansatzräume  $S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$  für  $u_h^1$ ,  $S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  für  $u_h^2$  und  $Q_h$  für  $\lambda_h$ . Es ist jedoch nicht gelungen, für diese Ansatzräume die diskrete Stabilitätsbedingung zu beweisen. Aus diesem Grund werden wir in Abschnitt 3.4 eine weitere Formulierung betrachten, die eine solche Wahl der Ansatzräume ermöglicht.

### 3.4 Ein global nicht konformer Zugang über ein modifiziertes Sattelpunktproblem

In Abschnitt 3.3 haben wir einen Zugang für beliebige Triangulierungen betrachtet, der aber neue Funktionenräume für die Funktionen  $(u_h^1, u_h^2)$  benötigt. Die Implementierung dieser Funktionenräume erweist sich jedoch als schwierig. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt über eine neue Formulierung ein Zugang für  $(u_h^1, u_h^2) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  dargestellt werden. Dafür betrachten wir das in Abschnitt 2.6 des Kapitels 2 eingeführte modifizierte Variationsproblem (2.10)-(2.11).

**Voraussetzung 3.8.** Seien  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  beliebige aber formreguläre Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Außerdem wählen wir das Gebiet  $\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  als

$$\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) := \bigcup_{\substack{T \in \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \\ T \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset}} T$$

und für dieses Gebiet sei

$$\partial(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Weiters gelte

$$\partial\Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Vergleiche dazu auch Abbildung 3.4.

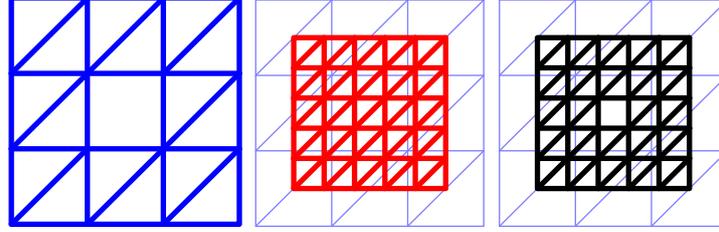


Abbildung 3.4: Die Triangulierungen der Gebiete  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und die Triangulierung des Gebietes  $\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ .

**Bemerkung 3.4.** Wählt man die Triangulierung  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  des Gebiets  $\Omega_2$  genügend fein, so ist diese Wahl mit der zusätzlichen Voraussetzung

$$\partial(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \cap \Gamma = \emptyset$$

immer möglich.

Somit kann man endlichdimensionale konforme Ansatzräume wählen:

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_1), \quad (3.17)$$

$$S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) := S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2) \subset H_{0,\Gamma}^1(\Omega_2), \quad (3.18)$$

$$S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))) \subset H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)). \quad (3.19)$$

Mit Hilfe dieser Funktionenräume erhalten wir das folgende diskrete gestörte Sattelpunktproblem.

Gesucht ist  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ , sodass

$$\bar{a}(u_h^1, u_h^2; v_h^1, v_h^2) + \bar{b}(v_h^1, v_h^2; \lambda_h) = F(v_h^1, v_h^2) \quad (3.20)$$

$$\bar{b}(u_h^1, u_h^2; \mu_h) - c(\lambda_h, \mu_h) = 0 \quad (3.21)$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2; \mu_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ .

### 3.4.1 Eindeutige Lösbarkeit

Wie in Abschnitt 2.6.1 des Kapitels 2 soll hier auf den Beweis der Beschränktheit der Bilinearformen  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  und  $c$  verzichtet werden, da er auf ähnliche Weise wie die Beweise der Lemmata 2.2 und 2.5 geführt werden kann. Für den Beweis der Elliptizität betrachten wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.9.** *Sei Voraussetzung 3.8 erfüllt, dann existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $\bar{\alpha}_1^h > 0$ , sodass*

$$\bar{a}(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) \geq \bar{\alpha}_1^h \|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2$$

für alle  $(v_h^1, v_h^2) \in \ker \bar{B}_h$  gilt.

**Beweis:** Für die Bilinearform  $\bar{a}$  gilt

$$\begin{aligned} \bar{a}(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &= |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2}|v_h^1|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 - \frac{1}{2}|v_h^2|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-t)|v_h^1|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung

$$\partial\Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \bar{a}(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v_h^1(x) ds_x \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \end{aligned}$$

und mit dem Normierungssatz von Sobolev (vgl Satz 2.2 in [15]) folgt, dass eine Konstante  $c > 0$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} \bar{a}(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \left[ |v_h^1|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \left( \int_{\partial\Omega_1 \cap \Gamma} v_h^1(x) ds_x \right)^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ c \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \min(1, c) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Für  $(v_h^1, v_h^2) \in \ker \bar{B}_h$  gilt aber

$$\bar{b}(v_h^1, v_h^2; \mu_h) = 0 \quad \forall \mu \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))).$$

Mit  $\mu_h = v_h^2|_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla v_h^2(x) \cdot \nabla v_h^2(x) dx + \langle v_h^2 - v_h^1, v_h^2 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &= |v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \langle v_h^2, v_h^1 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &= |v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \langle v_h^2, v_h^1 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

und somit

$$|v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 = \langle v_h^2, v_h^1 \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir also

$$\begin{aligned} |v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &\leq \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt

$$\|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \geq \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left[ \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right]^2$$

und mit dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) gilt

$$\begin{aligned} |v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|v_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \left[ |v_h^2|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} v_h^2(x) dx \right)^2 \right] \\ &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \bar{c} \|v_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \end{aligned}$$

für eine Konstante  $\bar{c} > 0$ . Insgesamt ergibt das

$$\min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \bar{c} \|v_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \leq \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|v_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

und nach Division durch  $\|v_h^1\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$  erhält man zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \bar{c} \|v_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \\ &\geq \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \bar{c} \|v_h^2\|_{L_2(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \\ &\geq \underbrace{\min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) \frac{\bar{c}}{\sqrt{|\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)|}}}_{=: \tilde{c}} \left[ \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} v_h^2(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \bar{a}(v_h^1, v_h^2, v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{2} \min(1, c) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \tilde{c}^2 \left[ \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} v_h^2(x) dx \right]^2 + |v_h^2|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit dem Normäquivalenzsatz von Sobolev (Satz 2.2 in [15]) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \bar{a}(v_h^1, v_h^2; v_h^1, v_h^2) &\geq \frac{1}{4} \min(1, c) \min(1, \tilde{c}^2) \left[ \|v_h^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \bar{c} \|v_h^2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{4} \min(1, c) \min(1, \tilde{c}^2) \min(1, \bar{c}) \| (v_h^1, v_h^2) \|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}^2 \end{aligned}$$

für eine Konstante  $\bar{c} > 0$ .

□

Somit bleibt auch hier nur noch die diskrete Stabilitätsbedingung zu beweisen.

**Lemma 3.10.** *Es existiert eine von  $h$  unabhängige Konstante  $\beta_1^h > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (v_h^1, v_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))} \frac{\bar{b}(v_h^1, v_h^2; \lambda_h)}{\| (v_h^1, v_h^2) \|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \geq \beta_1^h \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \quad (3.22)$$

für alle  $\lambda_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$  gilt.

**Beweis:** Für  $\lambda_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$  gilt mit der Voraussetzung

$$\partial \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \Gamma = \emptyset,$$

dass  $\lambda_h|_{\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))$  und mit der von der Triangulierung  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  induzierten Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{2 \setminus 1}(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})$  des Gebiets  $\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$  ist das folgende Variationsproblem eindeutig lösbar.

Gesucht ist  $w_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{2 \setminus 1}(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))$  mit  $w_h|_{\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} = \lambda_h|_{\partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}}$  und  $w_h|_{\Gamma} = 0$ , sodass

$$\int_{\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \nabla w_h(x) \cdot \nabla v_h(x) dx = 0$$

für alle  $v_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h^{2 \setminus 1}(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))$ , für die

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \leq c \|\lambda_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}))}$$

für eine Konstante  $c > 0$  gilt. Mit dem Spursatz (vgl. Satz 2.9 in [15]) gilt somit

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \leq c \|\lambda_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega_2 \setminus \overline{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)})} \leq c \|\lambda_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \leq c c_T \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

mit Konstanten  $c, c_T > 0$ .

Mit Hilfe dieser Funktion kann man nun die Funktion  $\bar{v}_h^2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definieren mit

$$\bar{v}_h^2(x) := \begin{cases} \lambda_h(x) & \text{für } x \in \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2), \\ w_h(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzt man außerdem  $\bar{v}_h^1 \equiv 0$ , so ist  $(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  mit

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2; \lambda_h) &= \langle \bar{v}_h^2 - \bar{v}_h^1, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \bar{v}_h^2(x) \cdot \nabla \lambda_h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \langle \lambda_h, \lambda_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \frac{1}{2}t \int_{\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)} \nabla \lambda_h(x) \cdot \nabla \lambda_h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \|\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 + \frac{1}{2}t |\lambda_h|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \\ &\geq \frac{1}{2}t \left[ |\lambda_h|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|\lambda_h\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \right] \end{aligned}$$

und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Normierungssatz von Sobolev (vgl. Satz 2.2 in [15]) gilt

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2; \lambda_h) &\geq \frac{1}{2}t \left[ |\lambda_h|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|\lambda_h\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2}t \left[ |\lambda_h|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \left( \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \lambda_h(x) dx \right)^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2}t \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) c \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 \end{aligned}$$

für eine Konstante  $c > 0$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} &= \|\bar{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &= \sqrt{\|\bar{v}_h^2\|_{H^1(\Omega_2 \setminus \mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|\bar{v}_h^2\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2} \\ &\leq \sqrt{\bar{c} \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2 + \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $\bar{c} > 0$ . Somit gilt

$$\|(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq \sqrt{1 + \bar{c}} \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

und für das Supremum erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{(v_h^1, v_h^2) \in S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))} \frac{\bar{b}(v_h^1, v_h^2; \lambda_h)}{\|(v_h^1, v_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} &\geq \frac{\bar{b}(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2; \lambda_h)}{\|(\bar{v}_h^1, \bar{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)}} \\ &\geq \frac{1}{2}t \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) c \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{c}}} \frac{\|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}^2}{\|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}} \\ &= \frac{1}{2}t \min \left( 1, \frac{1}{|\Omega_1 \cap \Omega_2|} \right) c \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{c}}} \|\lambda_h\|_{H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))}. \end{aligned}$$

□

Somit sind alle Voraussetzungen für Satz 1.3 in Kapitel 1 erfüllt und man kann eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit der diskreten modifizierten Sattelpunktformulierung (3.20)-(3.21) treffen.

**Satz 3.11.** *Sei Voraussetzung 3.8 erfüllt, dann ist mit der Definition der Ansatzräume wie in (3.17)-(3.19) das Sattelpunktproblem (3.20)-(3.21) eindeutig lösbar und für die Lösung  $(u_h^1, u_h^2; \lambda_h) \in S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$  gilt die Stetigkeitsabschätzung*

$$\|(u_h^1, u_h^2; \lambda_h)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$  unabhängig von  $h$ .

### 3.4.2 Konvergenz der Lösungen

In Abschnitt 3.4.1 haben wir die eindeutige Lösbarkeit des diskreten gestörten Sattelpunktproblems (3.20)-(3.21) gezeigt. Wie in den Abschnitten 3.1.3 und 3.2.3 soll nun auch hier die Konvergenz der Lösungen des diskreten gestörten Sattelpunktproblems (3.20)-(3.21) gegen die Lösung des kontinuierlichen gestörten Sattelpunktproblems (2.10)-(2.11) gezeigt werden.

Nach Abschnitt 3.4.1 ist das diskrete gestörte Sattelpunktproblem (3.20)-(3.21) eindeutig lösbar und somit gilt mit Satz 1.4 in Kapitel 1 die quasi-optimale Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|(u^1, u^2, \lambda) - (u_h^1, u_h^2, \lambda_h)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \\ & \leq c \inf_{(v_h^1, v_h^2, \mu_h) \in V_h \times Q_h} \|(u^1, u^2, \lambda) - (v_h^1, v_h^2, \mu_h)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} V_h & := S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)) \times S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)), \\ Q_h & := S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))) \end{aligned}$$

und mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$ . Mit den Approximationseigenschaften der Räume  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$ ,  $S_{h,0,\Gamma}^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$  und  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$  (vgl. Satz 9.2 in [15]) erhält man eine a-priori Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|(u^1, u^2, \lambda) - (u_h^1, u_h^2, \lambda_h)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \\ & \leq ch \left[ \|(u^1, u^2, \lambda)\|_{H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2) \times H^2(\mathcal{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2))} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

für eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$ .

# 4 Numerische Beispiele

## 4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir die in Kapitel 3 hergeleiteten Verfahren durch numerische Beispiele verifizieren. Das durch die Diskretisierung entstandene lineare Gleichungssystem wird hier mit dem direkten Löser Pardiso 4.0.0 (vgl. [13] und [14]) gelöst. Außerdem muss man, um die Skalarprodukte in der Bilinearform  $b$  wie in Kapitel 3 hergeleitet, auswerten zu können, Gitter miteinander schneiden. Um diesen Schnitt effizient berechnen zu können, greifen wir hier auf einen von M. Gander und C. Japhet in [9] vorgeschlagenen Algorithmus zurück.

Als numerisches Beispiel betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= xy(x-1)(y-1)/0.0625 && \text{für } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= 0 && \text{für } (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

für das Gebiet  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$ . Als Teilgebiete des Gebiets  $\Omega$  wählen wir

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) : (x, y) \notin [0.375, 0.625] \times [0.375, 0.625]\}, \\ \Omega_2 &:= (0.25, 0.75) \times (0.25, 0.75). \end{aligned}$$

## 4.2 Global konforme Diskretisierung

Wählen wir eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  des Gebiets  $\Omega_1$ , siehe Abbildung 4.1,

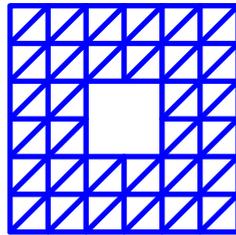


Abbildung 4.1: Gebiet  $\Omega_1$

Für das Gebiet  $\Omega_2$  wählen wir eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$ , siehe Abbildung 4.2.

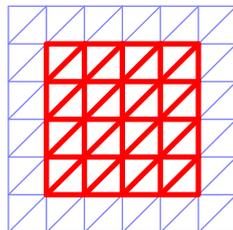


Abbildung 4.2: Gebiet  $\Omega_2$

Für den Überlapp  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  ergibt sich somit eine konforme Triangulierung, siehe Abbildung 4.3.

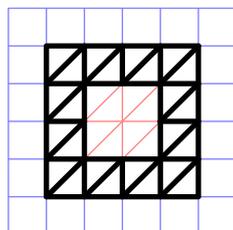


Abbildung 4.3: Gebiet  $\Omega_1 \cap \Omega_2$

Für diese Problemstellung haben wir in Abschnitt 3.1.3 des Kapitels 3 die a-priori Fehlerabschätzung (3.7)

$$\|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq ch |(u^1, u^2)|_{H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)}$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$  bewiesen. Für dieses Beispiel erhält man für die Näherungslösung  $u_h^1$  die Fehlertabelle

Elemente	$\ u^1 - u_h^1\ _{H^1(\Omega_1)}$	<i>eoc</i>
120	0.473064	
480	0.237802	0.992271
1920	0.119061	0.998066
7680	0.0595503	0.999516
30720	0.0297777	0.999879
122880	0.0148891	0.99997

Abbildung 4.4: Fehlertabelle für  $u_h^1$

und für die Näherungslösung  $u_h^2$  die folgende Fehlertabelle.

Elemente	$\ u^2 - u_h^2\ _{H^1(\Omega_2)}$	<i>eoc</i>
32	0.194811	
128	0.0970312	1.00555
512	0.0484663	1.00147
2048	0.0242269	1.00037
8192	0.0121127	1.00009
32768	0.00605624	1.00002

Abbildung 4.5: Fehlertabelle für das Gebiet  $\Omega_2$

Dieses Beispiel verifiziert also die in Abschnitt 3.1.3 des Kapitels 3 hergeleitete a-priori Fehlerabschätzung (3.7) mit einer linearen Konvergenzordnung.

## 4.3 Global teilkonforme Diskretisierung

### 4.3.1 Interpolation

Wählen wir nun eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  des Gebiets  $\Omega_1$ , siehe Abbildung 4.6.

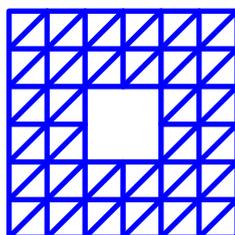
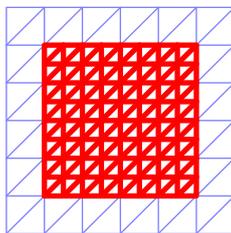
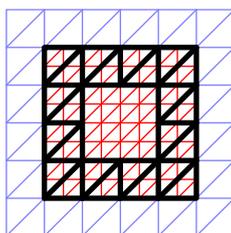


Abbildung 4.6: Gebiet  $\Omega_1$

Für das Gebiet  $\Omega_2$  wählen wir nun jedoch die folgende Triangulierung  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$ , siehe Abbildung 4.7.

Abbildung 4.7: Gebiet  $\Omega_2$ 

Als Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  für den Überlapp  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , auf dem wir die Interpolation anwenden, ergibt sich die folgende (siehe Abbildung 4.8).

Abbildung 4.8: Gebiet  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 

Für diese Problemstellung haben wir in Kapitel 3 keine a-priori Fehlerabschätzung bewiesen. Betrachten wir nun den  $H^1$ -Fehler, der sich mit Verfeinerung der Gitter für diese Problemstellung ergibt.

Elemente	$\ u^1 - u_h^1\ _{H^1(\Omega_1)}$	<i>eoc</i>
120	0.497566	
480	0.262109	0.924721
1920	0.142552	0.878673
7680	0.0814771	0.807027

Abbildung 4.9: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^1$

Elemente	$\ u^2 - u_h^2\ _{H^1(\Omega_2)}$	<i>eoc</i>
128	0.410605	
512	0.28145	0.544873
2048	0.19609	0.52136
8192	0.137667	0.510335

Abbildung 4.10: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^2$ 

Man sieht also, dass man mit dieser Methode nicht die erwartete Fehlerreduktion erhält.

### 4.3.2 Projektion

In diesem Abschnitt rechnen wir dasselbe Beispiel wie in Abschnitt 4.3.1, jedoch statt der Interpolation der Daten der Funktion  $v_h^1 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf eine Funktion in  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  projizieren wir die Daten. Dafür haben wir in Abschnitt 3.2.3 des Kapitels 3 die a-priori Fehlerabschätzung

$$\|(u^1, u^2) - (u_h^1, u_h^2)\|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \leq ch \left[ |(u^1, u^2)|_{H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)} + |\lambda|_{H^2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right] \quad (4.1)$$

für eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$  bewiesen. Betrachten wir nun die  $H^1$ -Fehler der Lösungen auf dem Gebiet  $\Omega_1$ .

Elemente	$\ u^1 - u_h^1\ _{H^1(\Omega_1)}$	<i>eoc</i>
120	0.472416	
480	0.237699	0.990925
1920	0.119047	0.997608
7680	0.0595489	0.99938
30720	0.0297776	0.999845

Abbildung 4.11: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^1$ 

Auf dem Gebiet  $\Omega_2$  erhalten wir folgende Fehler.

Elemente	$\ u^2 - u_h^2\ _{H^1(\Omega_2)}$	<i>eoc</i>
128	0.306032	
512	0.159414	0.940905
2048	0.0812889	0.971648
8192	0.0410691	0.985004
32768	0.0206598	0.991232

Abbildung 4.12: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^2$

Man sieht also eindeutig die in der a-priori Fehlerabschätzung bewiesene lineare Konvergenzordnung.

Betrachten wir nun die Lösung auf dem Gebiet  $\Omega_2$  mit dem größten Gitter für Interpolation

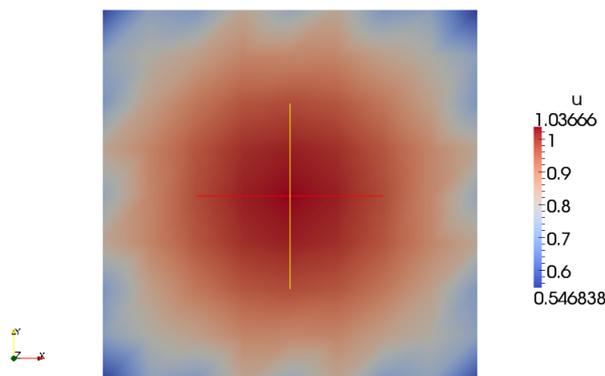


Abbildung 4.13: Lösung im Gebiet  $\Omega_2$  mit Interpolation

und für Projektion:

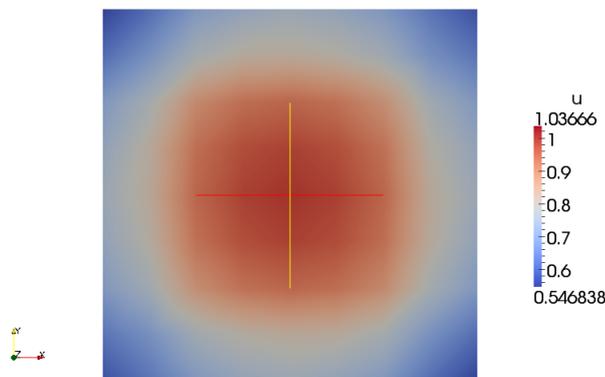


Abbildung 4.14: Lösung im Gebiet  $\Omega_2$  mit Projektion

Man sieht, dass für die Lösung mit Interpolation Oszillationen erkennbar sind, die auch auf feineren Gittern auftreten. Diese sind ein Hinweis darauf, dass die diskrete Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Durch die Interpolation der Funktion  $v_h^1 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  in den Raum  $S_h^1(\mathcal{T}_h^{12}(\Omega_1 \cap \Omega_2))$  erhält man also kein stabiles Verfahren. Betrachtet man hingegen die Lösung mit einer Projektion, so treten diese Oszillationen nicht mehr auf und man

erhält auch die erwartete Konvergenzordnung der Lösungen. Man sieht also, dass man mit Projektion ein stabiles Verfahren erhält.

## 4.4 Global nicht konforme Diskretisierung

In diesem Abschnitt soll das in Abschnitt 3.3 hergeleitete Verfahren betrachtet werden. Jedoch verwenden wir für die diskreten Lösungen  $(u_h^1, u_h^2)$  nicht die im Beweis vorgeschlagenen Funktionenräume  $V_h^1$  und  $V_h^2$ , sondern die Funktionenräume  $S_h^1(\mathcal{T}_h^1(\Omega_1))$  und  $S_h^1(\mathcal{T}_h^2(\Omega_2))$ . Als Beispiel betrachten wir dasselbe Beispiel wie in den Abschnitten zuvor. Dann erhalten wir folgende Fehlertabelle für den  $H^1$ -Fehler im Gebiet  $\Omega_1$ .

Elemente	$\ u^1 - u_h^1\ _{H^1(\Omega_1)}$	<i>eoc</i>
120	0.652518	
480	0.271943	1.26271
1920	0.127962	1.08758
7680	0.0633321	1.01471
30720	0.0316604	1.00026
122880	0.0158287	1.00014

Abbildung 4.15: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^1$

Im Gebiet  $\Omega_2$  erhalten wir die folgenden Fehler.

Elemente	$\ u^2 - u_h^2\ _{H^1(\Omega_2)}$	<i>eoc</i>
32	0.25311	
128	0.118526	1.09456
512	0.0516257	1.19904
2048	0.0245546	1.0721
8192	0.0121697	1.01269
32768	0.00608685	0.999531

Abbildung 4.16: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^2$

Man sieht also, dass man auch hier die erwartete Konvergenzordnung erhält, obwohl wir für diesen Fall den Beweis der Stabilität nicht geführt haben.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir hier noch die Lösungen auf den Gebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ .

Auf dem Gebiet  $\Omega_1$  erhalten wir die Lösung,

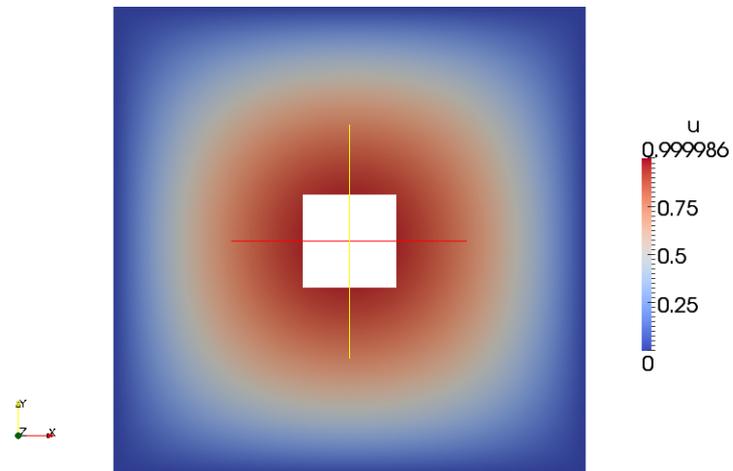


Abbildung 4.17: Lösung im Gebiet  $\Omega_1$

auf dieses Gebiet legen wir nun die Lösung des Gebiets  $\Omega_2$ .

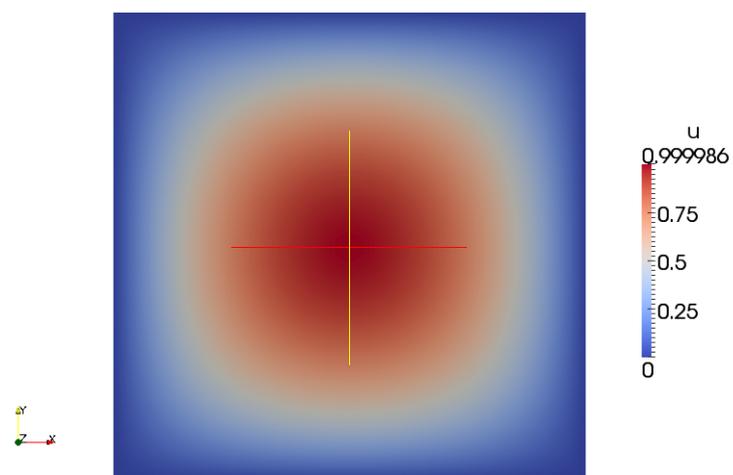


Abbildung 4.18: Lösung im Gebiet  $\Omega_2$

## 4.5 Ein global nicht konformer Zugang über ein modifiziertes Sattelpunktproblem

In diesem Abschnitt soll das in Abschnitt 2.6 hergeleitete Verfahren für das modifizierte Sattelpunktproblem betrachtet werden. Als Beispiel betrachten wir dasselbe Beispiel wie in den Abschnitten zuvor und wählen den Parameter  $t = 1$ . Dann erhalten wir folgende Fehlertabelle für den  $H^1$ -Fehler im Gebiet  $\Omega_1$ .

Elemente	$\ u^1 - u_h^1\ _{H^1(\Omega_1)}$	<i>eoc</i>
120	0.505571	
480	0.254147	0.992249
1920	0.127227	0.99826
7680	0.0633321	1.0064
30720	0.0316604	1.00026

Abbildung 4.19: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^1$

Im Gebiet  $\Omega_2$  erhalten wir die folgenden Fehler.

Elemente	$\ u^2 - u_h^2\ _{H^1(\Omega_2)}$	<i>eoc</i>
32	0.195953	
128	0.102615	0.933263
512	0.0508115	1.01402
2048	0.0245546	1.04916
8192	0.0121697	1.01269

Abbildung 4.20: Fehlertabelle für die Näherungslösung  $u_h^2$

Man sieht also, dass man auch hier die erwartete Konvergenzordnung erhält.



## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Teil haben wir die Arlequin-Methode hergeleitet und deren eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen und im Diskreten bewiesen. Außerdem haben wir die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die kontinuierliche Lösung bewiesen und in numerischen Beispielen gezeigt. Ein weiteres numerisches Beispiel hat gezeigt, dass der einfache Zugang der Interpolation der Daten zwischen den beiden Gittern kein stabiles Verfahren liefert, die Projektion der Daten jedoch schon. Abschließend haben wir eine Erweiterung der Arlequin-Methode betrachtet und auch für diese die eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen und Diskreten und die Konvergenz der diskreten Lösungen gezeigt, die wir zusätzlich noch in einem numerischen Beispiel verifiziert haben.

Wir haben gesehen, dass das Hauptkriterium für die eindeutige Lösbarkeit und somit auch für die Konvergenz der diskreten Probleme die diskrete Stabilitätsbedingung ist. Eine erhebliche Verbesserung der Methode würde also eine Stabilisierung des Verfahrens liefern. Hätte man eine solche Stabilisierung, die zeigt, dass die diskrete Stabilitätsbedingung nicht mehr bewiesen werden muss, so könnte man sogar die Daten zwischen den beiden Gittern interpolieren, um ein stabiles Verfahren zu erhalten. Die Realisierung einer solchen Stabilisierung ist jedoch noch nicht untersucht und es ist auch offen, ob eine solche überhaupt möglich ist.

Eine weiterer Aspekt wäre die Erweiterung des Verfahrens auf mehr als zwei Teilgebiete, was aus meiner Sicht zwar schon noch etwas Aufwand erfordert, aber durch Anwenden der hier bewiesenen Aussagen gezeigt werden kann.

Abschließend wäre eine Betrachtung von anderen elliptischen Randwertproblemen als der Poisson-Gleichung interessant. Aus diesem Grund werden wir im nächsten Teil der Arbeit das in diesem Kapitel hergeleitete Verfahren auf die Stokes-Gleichungen erweitern.



## Teil II

# Eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Stokes-Gleichungen



# 6 Kontinuierliche Variations- und Sattelpunktformulierungen

In diesem Abschnitt wollen wir eine kontinuierliche Sattelpunktformulierung für eine überlappende Gebietszerlegungsmethode für die Stokes-Gleichungen herleiten. Dazu werden wir das Problem aus Abschnitt 2.3 des Kapitels 2 auf die Stokes-Gleichungen erweitern. Für diese Formulierung werden wir im Anschluss die eindeutige Lösbarkeit und die Äquivalenz der Formulierung zum ursprünglichen Randwertproblem zeigen.

## 6.1 Standard-Sattelpunktformulierung für die Stokes-Gleichungen

Für die Herleitung einer Variationsformulierung gehen wir vom gemischten Randwertproblem der Stokes-Gleichungen auf einem Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aus.

$$-\nu \Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.2)$$

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \text{auf } \Gamma_{Wall}, \quad (6.3)$$

$$\underline{u} = \underline{g} \quad \text{auf } \Gamma_{In}, \quad (6.4)$$

$$\underline{t}(\underline{u}, p) = \underline{0} \quad \text{auf } \Gamma_{Out}, \quad (6.5)$$

mit der Konormalenableitung

$$t_i(\underline{u}, p) := \nu \nabla u_i \cdot \underline{n} - p n_i$$

für  $i = 1, 2$  und dem Rand  $\Gamma$  des Gebiets  $\Omega$  mit

$$\partial\Omega =: \Gamma = \overline{\Gamma_{Wall}} \cup \overline{\Gamma_{In}} \cup \overline{\Gamma_{Out}}$$

und dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_D$  mit

$$\overline{\Gamma_D} := \overline{\Gamma_{Wall}} \cup \overline{\Gamma_{In}}.$$

Definieren wir die Funktion

$$\underline{g}_D(x) := \begin{cases} \underline{g}(x) & \text{für } x \in \Gamma_{In}, \\ \underline{0} & \text{für } x \in \Gamma \setminus \overline{\Gamma_{In}}. \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung  $\underline{g} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{In})^2$  gilt  $\underline{g}_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2$  und somit existiert mit dem inversen Spursatz eine Funktion  $\underline{u}^g \in H^1(\Omega)^2$  mit  $\underline{u}^g|_{\Gamma} = \underline{g}_D$  und

$$\|\underline{u}^g\|_{H^1(\Omega)^2} \leq c_{IT} \|\underline{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2}$$

für eine Konstante  $c_{IT} > 0$ , wobei der Raum  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{In})^2$  definiert ist als

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{In})^2 := \overline{(C_0^\infty(\Gamma_{In}))^2}^{\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{In})}}.$$

Mit Hilfe dieser Funktion können wir nun ein Variationsproblem aufstellen.

Gesucht ist  $(\underline{u}, p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2 \times L_2(\Omega)$ , sodass

$$a'(\underline{u}, \underline{v}) - b'(\underline{v}, p) = F(\underline{v}) \quad (6.6)$$

$$b'(\underline{u}, q) = 0 \quad (6.7)$$

für alle  $(\underline{v}, q) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2 \times L_2(\Omega)$  mit den Bilinearformen

$$a'(\underline{u}, \underline{v}) := \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx,$$

$$b'(\underline{u}, q) := \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx$$

und der Linearform

$$F'(\underline{v}) := \int_{\Omega} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}(x) dx - a'(\underline{u}^g, \underline{v}).$$

Aus der Theorie der Stokes-Gleichungen (vgl. [15]) weiß man, dass das Sattelpunktproblem (6.6)-(6.7) eindeutig lösbar ist und dass die Lösung des Sattelpunktproblems äquivalent zur Lösung des Randwertproblems (6.1)-(6.5) ist.

## 6.2 Formulierung eines kontinuierlichen Sattelpunktproblems

Für das Sattelpunktproblem (6.6)-(6.7) wollen wir nun eine überlappende Gebietszerlegungsmethode herleiten. Dazu betrachten wir das folgende Problem.

Gesucht ist

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

sodass

$$a(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{v}^1, \underline{v}^2) - b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2) + \tilde{b}_1(\underline{v}^1, \underline{v}^2; \underline{\lambda}^u) = F(\underline{v}^1, \underline{v}^2), \quad (6.8)$$

$$b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; q^1, q^2) + \tilde{b}_2(q^1, q^2; \lambda^p) = 0, \quad (6.9)$$

$$\tilde{b}_1(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{\mu}^u) = 0, \quad (6.10)$$

$$\tilde{b}_2(p^1, p^2; \mu^p) = 0 \quad (6.11)$$

für alle

$$(\underline{v}^1, \underline{v}^2, q^1, q^2, \underline{\mu}^u, \mu^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{v}^1, \underline{v}^2) &:= \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_i^1(x) \cdot \nabla v_i^1(x) dx + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u_i^1(x) \cdot \nabla v_i^1(x) dx - \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\underline{v}^1, \underline{v}^2, p^1, p^2) &:= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \end{aligned}$$

$$\tilde{b}_1(\underline{v}^1, \underline{v}^2; \underline{\lambda}^u) := \langle \underline{v}^1 - \underline{v}^2; \underline{\lambda}^u \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2}$$

$$\tilde{b}_2(q^1, q^2; \lambda^p) := \langle q^1 - q^2; \lambda^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

und der Linearform

$$\begin{aligned} F(\underline{v}^1, \underline{v}^2) &:= \int_{\Omega_1} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx \\ &\quad - a(\underline{u}^g|_{\Omega_1}, \underline{u}^g|_{\Omega_2}; \underline{v}^1, \underline{v}^2). \end{aligned}$$

## 6.3 Eindeutige Lösbarkeit

Für den Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (6.8)-(6.11) zeigen wir vorerst die eindeutige Lösbarkeit des folgenden Problems.

Gesucht ist  $(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2) \in V \times Q$ , sodass

$$a(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{v}^1, \underline{v}^2) - b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2) = F(\underline{v}^1, \underline{v}^2) \quad (6.12)$$

$$b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; q^1, q^2) = 0 \quad (6.13)$$

für alle  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, q^1, q^2) \in V \times Q$  mit den Bilinearformen  $a$  und  $b$  und der Linearform  $F$  wie in (6.8)-(6.10), sowie den Funktionenräumen

$$V := \left\{ (\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 : \tilde{b}_1(\underline{v}^1, \underline{v}^2; \underline{\mu}) = 0 \quad \forall \underline{\mu} \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \right\}$$

und

$$Q := \left\{ (q^1, q^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) : \tilde{b}_2(q^1, q^2; \underline{\mu}) = 0 \quad \forall \underline{\mu} \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2) \right\}.$$

Um die eindeutige Lösbarkeit des Problems (6.12)-(6.13) zu zeigen, wenden wir hier den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 aus Kapitel 1) an. Dafür ist die  $V$ -Elliptizität der Bilinearform  $a$  eine Folgerung aus Lemma 2.3, ebenso folgt die Beschränktheit aus Lemma 2.2. Die Beschränktheit der Bilinearform  $b$  zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 6.1.** *Es existiert eine Konstante  $\beta_2 > 0$ , sodass*

$$|b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; p^1, p^2)| \leq \beta_2 \|(\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}$$

für alle  $(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \in H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2$  und  $(p^1, p^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für  $(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \in H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2$  und  $(p^1, p^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$  gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; p^1, p^2)| &= \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_i}(x) p^1(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}(x) p^2(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_i}(x) p^1(x) dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}(x) p^2(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^1}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_1)} \|p^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_2)} \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^1}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|p^1\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|p^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^1}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_1)} \|p^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i^2}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega_2)} \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)} \\ &\leq \frac{3}{2} \|\underline{u}^1\|_{H^1(\Omega_1)^2} \|p^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \frac{3}{2} \|\underline{u}^2\|_{H^1(\Omega_2)^2} \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)} \end{aligned}$$

und mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; p^1, p^2) &\leq \frac{3}{2} \|\underline{u}^1\|_{H^1(\Omega_1)^2} \|p^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \frac{3}{2} \|\underline{u}^2\|_{H^1(\Omega_2)^2} \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)} \\ &\leq \frac{3}{2} \|(\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}. \end{aligned}$$

□

Mit der Beschränktheit der Bilinearform  $a$  (vgl. Lemma 2.2) erhalten wir die Beschränktheit der Linearform  $F$ . Somit ist die einzig noch verbleibende Voraussetzung, um den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) anwenden zu können, die Stabilitätsbedingung für die Bilinearform  $b$ .

**Lemma 6.2.** *Es existiert eine Konstante  $\beta_1 > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in V} \frac{b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2)}{\|(\underline{v}^1, \underline{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq \beta_1 \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}$$

für alle  $(p^1, p^2) \in Q$ .

**Beweis:** Für  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in V$  ist

$$\underline{v}^1 = \underline{v}^2 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$$

und somit ist die Funktion

$$\underline{v}(x) := \begin{cases} \underline{v}^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \underline{v}^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2$ . Außerdem gilt für  $(p^1, p^2) \in Q$

$$p^1 = p^2 \quad \text{in } L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und somit ist die Funktion

$$p(x) := \begin{cases} p^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ p^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $L_2(\Omega)$ . Mit diesen Definitionen gilt also

$$\begin{aligned} b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2) &= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\ &= b'(\underline{v}, p) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|(\underline{v}^1, \underline{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}^2 &= \|\underline{v}^1\|_{H^1(\Omega_1)^2}^2 + \|\underline{v}^2\|_{H^1(\Omega_2)^2}^2 \\ &= \|\underline{v}\|_{H^1(\Omega_1)^2}^2 + \|\underline{v}\|_{H^1(\Omega_2)^2}^2 \\ &\leq 2\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in V} \frac{b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2)}{\|(\underline{v}^1, \underline{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq \frac{1}{2} \sup_{0 \neq \underline{v} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2} \frac{b'(\underline{v}, p)}{\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)^2}}$$

und mit der Stabilitätsbedingung für die Stokes-Gleichungen (vgl. Lemma 4.9 in [8] und Remark 1.6 in [5]) folgt

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in V} \frac{b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2)}{\|(\underline{v}^1, \underline{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq \frac{1}{2} c_1 \|p\|_{L_2(\Omega)}$$

für eine Konstante  $c_1 > 0$ . Es gilt aber

$$\begin{aligned} \|p\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \|p^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} \|p^1\|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}^2 - \frac{1}{2} \|p^2\|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} (\|p^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2) \end{aligned}$$

und somit

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}.$$

Insgesamt gilt also

$$\sup_{(\underline{v}^1, \underline{v}^2) \in V} \frac{b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2)}{\|(\underline{v}^1, \underline{v}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} c_1 \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}.$$

□

Somit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) erfüllt und wir wissen, dass das Problem (6.12)-(6.13) eindeutig lösbar ist und die Lösung die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|(\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

für Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  erfüllt. Außerdem wissen wir, dass man für einen Hilbertraum  $X$  mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz (vgl. Satz 3.1 in [15]) jeder Bilinearform  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  einen Operator  $D : X \rightarrow X^*$  zuordnen kann. Dadurch erhalten wir für die Bilinearform  $a$  den Operator

$$A : H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \rightarrow (H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2)^*$$

mit

$$\langle A(\underline{u}^1, \underline{u}^2), (\underline{v}^1, \underline{v}^2) \rangle = a(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{v}^1, \underline{v}^2),$$

für die Bilinearform  $b$  den Operator

$$B : H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \rightarrow L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$$

mit

$$\langle B(\underline{u}^1, \underline{u}^2), (q^1, q^2) \rangle = b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; q^1, q^2),$$

für die Bilinearform  $\tilde{b}_1$  den Operator

$$\tilde{B}_1 : H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \rightarrow (H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2))^2$$

mit

$$\langle \tilde{B}_1(\underline{u}^1, \underline{u}^2), \underline{\mu}^u \rangle = \tilde{b}_1(\underline{u}^1, \underline{u}^2; \underline{\mu}^u),$$

und für die Bilinearform  $\tilde{b}_2$  den Operator

$$\tilde{B}_2 : L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \rightarrow L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

mit

$$\langle \tilde{B}_2(p^1, p^2), \mu^p \rangle = \tilde{b}_2(p^1, p^2; \mu^p).$$

Mit Hilfe dieser Operatoren definieren wir nun Operatoren  $S$  mit

$$S(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2) := \begin{pmatrix} A(\underline{u}^1, \underline{u}^2) + B'(p^1, p^2) \\ B(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \end{pmatrix}$$

und  $\tilde{B}$  mit

$$\tilde{B}(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2) := \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(\underline{u}^1, \underline{u}^2) \\ \tilde{B}_2(p^1, p^2) \end{pmatrix}$$

und betrachten die folgende zum Variationsproblem (6.8)-(6.11) äquivalente Operatorgleichung

$$S(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2) + \tilde{B}'(\underline{\lambda}^u, \lambda^p) = \tilde{f} \quad (6.14)$$

$$\tilde{B}(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2) = \underline{0} \quad (6.15)$$

mit der rechten Seite

$$\tilde{f} := \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\tilde{B}'$  den zum Operator  $\tilde{B}$  adjungierten Operator bezeichnet. Wir werden nun die eindeutige Lösbarkeit der Operatorgleichung (6.14)-(6.15) zeigen, dafür wollen wir auch hier wieder den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) anwenden. Dazu wissen wir bereits mit der eindeutigen Lösbarkeit des Problems (6.12)-(6.13), dass  $S$  auf  $\ker \tilde{B}$  invertierbar ist und die Lösung stetig von der rechten Seite abhängt. Die Beschränktheit des Operators  $S$  folgt aus den Beschränktheiten der Bilinearformen  $a$  und  $b$ , die Beschränktheit des Operators  $\tilde{B}_1$  folgt aus Lemma 2.5, die Beschränktheit des Operators  $\tilde{B}_2$  soll das folgende Lemma zeigen, indem wir die Beschränktheit der zum Operator  $\tilde{B}_2$  gehörenden Bilinearform  $\tilde{b}_2$  zeigen.

**Lemma 6.3.** *Es existiert eine Konstante  $\tilde{\beta}_2 > 0$ , sodass*

$$|\tilde{b}_2(p^1, p^2; \lambda^p)| \leq \tilde{\beta}_2 \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $(p^1, p^2, \lambda^p) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für  $(p^1, p^2, \lambda^p) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_2(p^1, p^2; \lambda^p)| &= |\langle p^1 - p^2; \lambda^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}| \\ &\leq \|p^1 - p^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq (\|p^1\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} + \|p^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}) \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &\leq (\|p^1\|_{L_2(\Omega_1)} + \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)}) \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \end{aligned}$$

und mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_2(p^1, p^2; \lambda^p)| &\leq \sqrt{2} (\|p^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|p^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2)^{\frac{1}{2}} \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\ &= \sqrt{2} \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}. \end{aligned}$$

□

Für die Stabilitätsbedingung der Bilinearform  $\tilde{b}_1$  können wir auf Lemma 2.6 verweisen. Somit ist die einzig noch verbleibende Voraussetzung für den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) die Stabilitätsbedingung für die Bilinearform  $\tilde{b}_2$ .

**Lemma 6.4.** *Es existiert eine Konstante  $\tilde{\beta}_1^2 > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (q^1, q^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \frac{\tilde{b}_2(q^1, q^2; \lambda^p)}{\|(q^1, q^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} \geq \tilde{\beta}_1^2 \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

für alle  $\lambda^p \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt.

**Beweis:** Für  $\lambda^p \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  gilt mit  $\bar{q}^2 \equiv 0$ ,  $\bar{q}^1|_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \equiv 0$  und  $\bar{q}^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \lambda^p$  für die Funktion  $(\bar{p}^1, \bar{p}^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$  die folgende Abschätzung für das Supremum.

$$\begin{aligned} \sup_{(0,0) \neq (q^1, q^2) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \frac{\tilde{b}_2(q^1, q^2; \lambda^p)}{\|(q^1, q^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} &\geq \frac{\langle \bar{q}^1 - \bar{q}^2; \lambda^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}{\|(\bar{q}^1, \bar{q}^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} \\ &= \frac{\langle \lambda^p; \lambda^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}{\|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \\ &= \frac{\|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \\ &= \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}. \end{aligned}$$

□

Somit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) erfüllt und wir können eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit des Problems (6.8)-(6.11) treffen.

**Satz 6.5.** *Das Sattelpunktproblem (6.8)-(6.11) ist eindeutig lösbar und die Lösung*

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

erfüllt die Stetigkeitsabschätzungen

$$\begin{aligned} \|(\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|(p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|\underline{\lambda}^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} &\leq c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|\lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_4 \|f\|_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

mit Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

### 6.3.1 Äquivalenz zur schwachen Formulierung

Wir wissen, dass das Sattelpunktproblem (6.8)-(6.11) eindeutig lösbar ist, jedoch wissen wir nicht, ob die Lösung dieses Problems auch in Zusammenhang mit der Lösung der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7) steht. In diesem Abschnitt werden wir uns dieser Frage widmen und zeigen, dass die Lösung des Sattelpunktproblems (6.8)-(6.11) äquivalent zur Lösung der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7) ist.

**Satz 6.6.** Sei  $(\underline{u}, p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2 \times L_2(\Omega)$  eine Lösung der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7). Dann ist für mit

$$\begin{aligned}\underline{u}^1 &:= \underline{u}|_{\Omega_1}, \\ \underline{u}^2 &:= \underline{u}|_{\Omega_2}, \\ p^1 &:= p|_{\Omega_1}, \\ p^2 &:= p|_{\Omega_2}\end{aligned}$$

$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2)$  in  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$  und das folgende Problem ist eindeutig lösbar.

Gesucht ist  $(\underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ , sodass

$$\tilde{b}_1(\underline{v}^1, \underline{v}^2; \underline{\lambda}^u) = F(\underline{v}^1, \underline{v}^2) - a(\underline{u}^1, \underline{u}^1; \underline{v}^1, \underline{v}^2) + b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2), \quad (6.16)$$

$$\tilde{b}_2(q^1, q^2; \lambda^p) = -b(\underline{u}^1, \underline{u}^2; q^1, q^2) \quad (6.17)$$

für alle  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, q^1, q^2) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ . Außerdem ist

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

eine Lösung des Problems (6.8)-(6.11).

Sei umgekehrt

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

eine Lösung des Problems (6.8)-(6.11). Dann ist

$$\underline{u}(x) := \begin{cases} \underline{u}^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \underline{u}^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2$  und

$$p(x) := \begin{cases} p^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ p^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $L_2(\Omega)$  und  $(\underline{u}, p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2 \times L_2(\Omega)$  ist eine Lösung der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7).

**Beweis:** Sei  $(\underline{u}, p)$  eine Lösung von (6.6)-(6.7). Mit den Lemmata 2.5 und 6.3 sind die Bilinearformen  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  beschränkt und mit den Lemmata 2.6 und 6.4 gelten für die Bilinearformen  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  die kontinuierlichen Stabilitätsbedingungen. Somit ist mit dem Satz von Babuška-Aziz (vgl. Hilfssatz 4.2 in [4]) das Variationsproblem (6.16)-(6.17) eindeutig lösbar und nach Konstruktion gilt Gleichung (6.8). Da  $\underline{u}$  eine Lösung des Problems (6.6)-(6.7) ist, gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega).$$

Somit gilt im Speziellen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{u}^1(x) q^1(x) dx &= 0 \quad \forall q^1 \in L_2(\Omega_1), \\ \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{u}^2(x) q^2(x) dx &= 0 \quad \forall q^2 \in L_2(\Omega_2). \end{aligned}$$

Mit  $q^1|_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \equiv 0$  und  $q^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  beliebig gilt außerdem

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{u}^1(x) q^1(x) dx = 0 \quad \forall q^1 \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und mit  $q^2|_{\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}} \equiv 0$  und  $q^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{u}^2(x) q^2(x) dx = 0 \quad \forall q^2 \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und Gleichung (6.9) ist somit erfüllt. Außerdem gilt

$$\underline{u}^1 = \underline{u}^2 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$$

und

$$p^1 = p^2 \quad \text{in } L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und somit gelten auch die Gleichungen (6.10) und (6.11) und

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

ist somit eine Lösung des Problems (6.8)-(6.11).

Sei umgekehrt

$$(\underline{u}^1, \underline{u}^2, p^1, p^2, \underline{\lambda}^u, \lambda^p) \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 \times H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 \times L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

eine Lösung von (6.8)-(6.11). Dann gilt mit den Gleichungen (6.10) und (6.11)

$$\langle \underline{u}^1 - \underline{u}^2, \underline{\mu}^u \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} = 0$$

für alle  $\underline{\mu}^u \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$  und

$$\langle p^1 - p^2, \mu^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0$$

für alle  $\mu^p \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Also gilt

$$\underline{u}^1 = \underline{u}^2 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$$

und

$$p^1 = p^2 \quad \text{in } L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Somit ist die Funktion

$$\underline{u}(x) := \begin{cases} \underline{u}^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \underline{u}^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2$  und die Funktion

$$p(x) := \begin{cases} p^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ p^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

in  $L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Außerdem gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx = \int_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \operatorname{div} \underline{u}^1(x) q(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{u}^2(x) q(x) dx.$$

Aus Gleichung (6.9) folgt jedoch für  $q^1|_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \in L_2(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})$  beliebig,  $q^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \equiv 0$  und  $q^2 \equiv 0$

$$\int_{\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2})$$

und für  $q^1 \equiv 0$  und  $q^2 \in L_2(\Omega_2)$  beliebig folgt

$$\int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega_2).$$

Somit gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{u}(x) q(x) dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega)$$

und  $\underline{u}$  erfüllt Gleichung (6.7). Für  $\underline{v} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2$  und  $q \in L_2(\Omega)$  können wir Funktionen  $\underline{v}^1 := \underline{v}|_{\Omega_1} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2$ ,  $\underline{v}^2 := \underline{v}|_{\Omega_2} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2$ ,  $p^1 := p|_{\Omega_1} \in L_2(\Omega_1)$  und  $p^2 := p|_{\Omega_2} \in L_2(\Omega_2)$  definieren, für die

$$\underline{v}^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - \underline{v}^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = 0 \quad \text{in } H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$$

und

$$p^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - p^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = 0 \quad \text{in } L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

ist. Also gilt

$$\tilde{b}_1(\underline{v}^1, \underline{v}^2; \underline{\lambda}^u) = \langle \underline{v}^1 - \underline{v}^2, \underline{\lambda}^u \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} = 0$$

und

$$\tilde{b}_2(p^1, p^2; \lambda^p) = \langle p^1 - p^2, \lambda^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = 0.$$

Mit Gleichung (6.8) ergibt das

$$a(\underline{u}^1, \underline{u}^1; \underline{v}^1, \underline{v}^2) - b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2) = F(v^1, v^2).$$

Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}
a(\underline{u}^1, \underline{u}^1; \underline{v}^1, \underline{v}^2) &= \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_i^1(x) \cdot \nabla v_i^1(x) dx + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underbrace{\nabla u_i^1(x)}_{=u_i^2(x)} \cdot \underbrace{\nabla v_i^1(x)}_{v_i^2(x)} dx - \frac{1}{2} \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\
&= \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_i^1(x) \cdot \nabla v_i^1(x) dx + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\
&\quad - \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\
&= \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} \nabla u_i^1(x) \cdot \nabla v_i^1(x) dx + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}} \nabla u_i^2(x) \cdot \nabla v_i^2(x) dx \\
&= \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx \\
&= a'(u, v).
\end{aligned}$$

Weiters erhalten wir

$$\begin{aligned}
b(\underline{v}^1, \underline{v}^2; p^1, p^2) &= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^1(x) p^1(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}^2(x) p^2(x) dx \\
&= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v}(x) p(x) dx \\
&= b'(\underline{v}, p).
\end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
F(\underline{v}^1, \underline{v}^2) &= \int_{\Omega_1} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underbrace{\underline{v}^1(x)}_{=\underline{v}^2(x)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx \\
&\quad - a(\underline{u}^g|_{\Omega_1}, \underline{u}^g|_{\Omega_2}; \underline{v}^1, \underline{v}^2) \\
&= \int_{\Omega_1} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^1(x) dx + \int_{\Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}^2(x) dx - a'(\underline{u}^g, \underline{v}) \\
&= \int_{\Omega_1} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}(x) dx + \int_{\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}} \underline{f}(x) \cdot \underline{v}(x) dx - a'(\underline{u}^g, \underline{v}) \\
&= F'(\underline{v}).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$a'(\underline{u}, \underline{v}) - b'(\underline{v}, p) = F'(\underline{v})$$

für alle  $\underline{v} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)^2$  und auch Gleichung (6.6) ist erfüllt. Also ist  $(\underline{u}, p)$  eine Lösung der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7).

□

# 7 Diskretisierte Sattelpunktformulierungen

In diesem Kapitel soll das in Kapitel 6 hergeleitete kontinuierliche Sattelpunktproblem (6.8)-(6.11) konform diskretisiert werden. Für das diskretisierte Problem werden wir außerdem die eindeutige Lösbarkeit und die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die eindeutig bestimmte kontinuierliche Lösung zeigen. Damit erhalten wir durch die Lösung des diskretisierten Problems eine Näherungslösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems (6.8)-(6.11), das nach Satz 6.6 mit der schwachen Formulierung (6.6)-(6.7) äquivalent ist und somit eine Näherungslösung dieser schwachen Formulierung, die mit dem Randwertproblem (6.1)-(6.5) äquivalent ist.

## 7.1 Formulierung eines diskreten Sattelpunktproblems

Für konforme endlichdimensionale Räume  $V_h^1 \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2$ ,  $V_h^2 \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2$ ,  $Q_h^1 \subset L_2(\Omega_1)$ ,  $Q_h^2 \subset L_2(\Omega_2)$ ,  $V_h^\lambda \subset H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2$  und  $Q_h^\lambda \subset L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  betrachten wir das folgende Problem.

Gesucht ist  $(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2, p_h^1, p_h^2, \lambda_h, \lambda_h^p) \in V_h^1 \times V_h^2 \times Q_h^1 \times Q_h^2 \times V_h^\lambda \times Q_h^\lambda$ , sodass

$$a(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2; \underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2) + \tilde{b}_1(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; \lambda_h^u) = F(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \quad (7.1)$$

$$b(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2; q_h^1, q_h^2) + \tilde{b}_2(q_h^1, q_h^2; \lambda_h^p) = 0 \quad (7.2)$$

$$\tilde{b}_1(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2; \mu_h^u) = 0 \quad (7.3)$$

$$\tilde{b}_2(p_h^1, p_h^2; \mu_h^p) = 0 \quad (7.4)$$

für alle  $(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2, q_h^1, q_h^2, \mu_h^u, \mu_h^p) \in V_h^1 \times V_h^2 \times Q_h^1 \times Q_h^2 \times V_h^\lambda \times Q_h^\lambda$ .

## 7.2 Eindeutige Lösbarkeit des diskreten Problems

Auch für das diskrete Sattelpunktproblem (7.1)-(7.3) wollen wir hier nun die eindeutige Lösbarkeit zeigen. Dazu gehen wir ähnlich wie in Kapitel 6 vor und betrachten vorerst das folgende Problem.

Gesucht ist  $(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2, p_h^1, p_h^2) \in V_h \times Q_h$ , sodass

$$a(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2; \underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2) = F(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \quad (7.5)$$

$$b(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2; q_h^1, q_h^2) = 0 \quad (7.6)$$

für alle  $(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2, q_h^1, q_h^2) \in V_h \times Q_h$  mit den Funktionenräumen

$$V_h := \left\{ (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2 : \tilde{b}_1(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; \underline{\mu}_h) = 0 \quad \forall \underline{\mu}_h \in V_h^\lambda \right\}$$

und

$$Q_h := \left\{ (q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2 : \tilde{b}_2(q_h^1, q_h^2; \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in Q_h^\lambda \right\}.$$

Beweisen wir nun vorerst die eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (7.5)-(7.6) über den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1). Dazu kann die  $V_h$ -Elliptizität der Bilinearform  $a$  genauso wie Lemma 3.6 bewiesen werden. Die Beschränktheit der Bilinearform  $b$  folgt direkt aus Lemma 6.1. Setzen wir nun zusätzlich voraus, dass eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$  existiert, sodass

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h} \frac{b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2)}{\|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq c \| (p_h^1, p_h^2) \|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}$$

für alle  $(p_h^1, p_h^2) \in Q_h$  gilt, sind alle Voraussetzung für den Satz von Brezzi erfüllt und wir wissen, dass das Sattelpunktproblem (7.5)-(7.6) eindeutig lösbar ist und die Lösung die Stetigkeitsabschätzungen

$$\begin{aligned} \|(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|(p_h^1, p_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

für von  $h$  unabhängige Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  erfüllt.

Mit Hilfe dieser Aussage können wir nun die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (7.1)-(7.4) beweisen. Dazu betrachten wir vorerst, ähnlich wie in Kapitel 6 die den Bilinearformen zugeordnete Operatoren  $A_h$ ,  $B_h$ ,  $\tilde{B}_{1,h}$  und  $\tilde{B}_{2,h}$ . Diese Operatoren können jedoch mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} A_1[i, j] &:= a(\underline{\varphi}_j^1, \underline{0}; \underline{\varphi}_i^1, \underline{0}) \text{ für } i, j = 1, \dots, N_1, \\ A_2[k, l] &:= a(\underline{0}, \underline{\varphi}_l^2; \underline{0}, \underline{\varphi}_k^2) \text{ für } k, l = 1, \dots, N_2, \\ B_1[i, m] &:= b(\underline{\varphi}_i^1, \underline{0}; \psi_m^1, 0) \text{ für } i = 1, \dots, N_1; m = 1, \dots, M_1, \\ B_2[k, n] &:= b(\underline{0}, \underline{\varphi}_k^2; 0, \psi_n^2) \text{ für } k = 1, \dots, N_2; n = 1, \dots, M_2, \\ \tilde{B}_1^1[i, r] &:= \tilde{b}_1(\underline{\varphi}_i^1, \underline{0}; \underline{\eta}_r) \text{ für } i = 1, \dots, N_1; r = 1, \dots, N_3, \\ \tilde{B}_2^1[k, r] &:= \tilde{b}_1(\underline{0}, \underline{\varphi}_k^1; \underline{\eta}_r) \text{ für } k = 1, \dots, N_2; r = 1, \dots, N_3, \\ \tilde{B}_1^2[m, s] &:= \tilde{b}_2(\psi_m^1, 0; \vartheta_s) \text{ für } m = 1, \dots, M_1; s = 1, \dots, M_3, \\ \tilde{B}_2^2[n, s] &:= \tilde{b}_2(0, \psi_n^2; \vartheta_s) \text{ für } n = 1, \dots, M_2; s = 1, \dots, M_3 \end{aligned}$$

mit einer Basis  $\{\underline{\varphi}_i^1\}_{i=1}^{N_1}$  von  $V_h^1$ , einer Basis  $\{\underline{\varphi}_k^2\}_{k=1}^{N_2}$  von  $V_h^2$ , einer Basis  $\{\psi_m^1\}_{m=1}^{M_1}$  von  $Q_h^1$ , einer Basis  $\{\psi_n^2\}_{n=1}^{M_2}$  von  $Q_h^2$ , einer Basis  $\{\underline{\eta}_r\}_{r=1}^{N_3}$  von  $V_h^\lambda$  und einer Basis  $\{\vartheta_s\}_{s=1}^{M_3}$  von  $Q_h^\lambda$ . Außerdem kann auch die rechte Seite  $F$  mittels Vektoren dargestellt werden.

$$\begin{aligned} F_1[i] &:= F(\underline{\varphi}_i^1, \underline{0}) \text{ für } i = 1, \dots, N_1 \\ F_2[k] &:= F(\underline{0}, \underline{\varphi}_k^2) \text{ für } k = 1, \dots, N_2 \end{aligned}$$

mit einer Basis  $\{\underline{\varphi}_i^1\}_{i=1}^{N_1}$  von  $V_h^1$  und einer Basis  $\{\underline{\varphi}_k^2\}_{k=1}^{N_2}$  von  $V_h^2$ . Mit Hilfe dieser Matrizen kann man nun ein zum diskreten Variationsproblem äquivalentes lineares Gleichungssystem betrachten.

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & \tilde{B}_1 \\ 0 & S_2 & \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_1^t & \tilde{B}_2^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2 \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \underline{F} \quad (7.7)$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} S_1 &:= \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1^t & 0 \end{pmatrix}, \\ S_2 &:= \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2^t & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &:= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_1^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_2 &:= \begin{pmatrix} \tilde{B}_2^1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und der rechten Seite

$$\underline{F} := \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{0} \\ \underline{F}_2 \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

Dieses Problem entspricht dem diskreten Sattelpunktproblem (7.1)-(7.4) und wir werden die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems zeigen, um die eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (7.1)-(7.4) zu beweisen. Dazu wenden wir wiederum den Satz von Brezzi (vgl. Satz 1.1 in Kapitel 1) an. Dafür wissen wir mit der eindeutigen Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (7.5)-(7.6), dass die Matrix  $S$  mit

$$S := \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

auf  $\ker \tilde{B}$  mit

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Die Beschränktheit des zur Matrix  $S$  äquivalenten Operators  $S_h$  folgt aus den Beschränktheiten der Bilinearformen  $a$  (vgl. Lemma 2.2) und  $b$  (vgl. Lemma 6.1), die Beschränktheit des zur Matrix  $\tilde{B}$  äquivalenten Operators  $\tilde{B}_h$  folgt aus den Lemmata 2.5 und 6.3. Setzen wir nun voraus, dass mit den konformen Ansatzräumen  $V_h^\lambda$  und  $Q_h^\lambda$  die Stabilitätsbedingungen für die Bilinearformen  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_2$  gelten, können wir eine Aussage über die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (7.1)-(7.4) treffen.

**Satz 7.1.** *Existieren Konstanten  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , sodass*

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h} \frac{b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2)}{\|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq c_1 \|(p_h^1, p_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}, \quad (7.8)$$

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \frac{\tilde{b}_1(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; \lambda_h^u)}{\|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq c_2 \|\lambda_h^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2}, \quad (7.9)$$

$$\sup_{(0,0) \neq (p_h^1, p_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \frac{\tilde{b}_2(p_h^1, p_h^2; \lambda_h^p)}{\|(p_h^1, p_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} \geq c_3 \|\lambda_h^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \quad (7.10)$$

für alle  $(p^1, p^2) \in Q_h$ ,  $\lambda_h^u \in V_h^\lambda$  und  $\lambda_h^p \in Q_h^\lambda$  gilt. Dann ist das diskrete Sattelpunktproblem (7.1)-(7.4) eindeutig lösbar und die Lösung erfüllt die Stetigkeitsabschätzungen

$$\begin{aligned} \|(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} &\leq c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|(p_h^1, p_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} &\leq c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|\lambda_h^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} &\leq c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)^2}, \\ \|\lambda_h^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_4 \|f\|_{L_2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

mit von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

### 7.3 Konvergenz der Lösungen

Aus Abschnitt 7.2 wissen wir, dass das Sattelpunktproblem (7.1)-(7.4) eindeutig lösbar ist. Jedoch wissen wir nicht, ob die diskreten Lösungen auch gegen die kontinuierliche Lösung konvergieren. Mit dieser Frage wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Mit Hilfe der eindeutigen Lösbarkeit des Problems (7.1)-(7.4) können wir jedoch Satz 1.2 aus Kapitel 1 anwenden und erhalten die quasi-optimale Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
& \|(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \\
& \leq c_1 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
& \|(p_h^1, p_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \\
& \leq c_2 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\underline{\lambda}_h^u - \underline{\lambda}^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \leq c_3 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
& \|\lambda_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\
& \leq c_4 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right]
\end{aligned}$$

mit von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ . Eine a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir somit mit Hilfe von Approximationseigenschaften der Räume  $V_h^1, V_h^2, Q_h^1, Q_h^2, V_h^\lambda$  und  $Q_h^\lambda$ .

## 7.4 Eine mögliche Wahl für konforme Ansatzräume

Wir wissen aus den Abschnitten 7.1, 7.2 und 7.3, dass man für konforme endlichdimensionale Ansatzräume, die die Stabilitätsbedingungen (7.8)-(7.10) erfüllen, ein stabiles Verfahren erhält. Jetzt stellt sich jedoch die Frage nach solchen Ansatzräumen. Aus diesem Grund wollen wir in diesem Abschnitt eine mögliche Wahl von konformen Ansatzräumen vorstellen. Außerdem werden wir in Kapitel 8 sehen, dass man für eine andere Wahl von konformen Ansatzräumen gute Ergebnisse erhält, obwohl wir die Stabilitätsbedingungen (7.8)-(7.10) nicht alle für diese Ansatzräume zeigen werden.

Um die Stabilitätsbedingung für das Stokes-Problem zu erfüllen, weiß man jedoch, dass nicht jede beliebige Wahl von konformen Ansatzräumen zulässig ist. So zeigt es sich zum Beispiel, dass die Wahl von stückweise linearen und stetigen Ansatzfunktionen zur Approximation der Geschwindigkeit und stückweise konstanten Ansatzfunktionen zur Approximation des Drucks in einem instabilen Verfahren resultiert. Meist werden jedoch stetige Approximationen des Drucks verwendet, wie zum Beispiel das Taylor-Hood-Element oder das MINI-Element, für die bewiesen werden kann, dass sie in einem stabilen Verfahren resultieren (vgl. [4], [10] oder [5]). In diesem Abschnitt werden wir jedoch sehen, dass eine unstetige Approximation des Drucks notwendig ist, damit wir alle Stabilitätsbedingungen beweisen können. Deswegen werden wir in diesem Abschnitt die einfachste stabile Paarung mit unstetiger Druckapproximation verwenden, nämlich das  $P^2 - P^0$ -Element, bei dem wir stückweise quadratische und stetige Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeit und stückweise konstante Ansatzfunktionen für den Druck wählen. Für die Approximation der Stokes-Gleichungen mittels einer Standard-Finiten-Elemente-Methode lässt sich für diese Wahl von Ansatzfunktionen zeigen, dass sie in einem stabilen Verfahren resultieren (vgl. [3]). Für weitere Details zu stabilen bzw. nicht stabilen Elementen für die Standard-Finite-Elemente-Methode für die Stokes-Gleichungen siehe [4], [5], [3] oder [10].

Nehmen wir hier formreguläre Triangulierungen  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  an, sodass beide Triangulierungen im Überlapp  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  identisch sind. Man geht also von einer global konformen Diskretisierung wie in Abschnitt 3.1 aus. wir werden sehen, dass dies für den Beweis der diskreten Stabilitätsbedingungen eine große Rolle spielen wird. Unter diesen Voraussetzungen können wir nun endlichdimensionale konforme diskrete Ansatzräume definieren.

$$\begin{aligned}
 V_h^1 &:= \{ \underline{v}_h^1 \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 : \underline{v}_h^1|_T \in P^2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \}, \\
 V_h^2 &:= \{ \underline{v}_h^2 \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_2)^2 : \underline{v}_h^2|_T \in P^2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \}, \\
 Q_h^1 &:= \{ p_h^1 \in L_2(\Omega_1) : p_h^1|_T \in P^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \}, \\
 Q_h^2 &:= \{ p_h^2 \in L_2(\Omega_2) : p_h^2|_T \in P^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \}, \\
 V_h^\lambda &:= \{ \underline{\mu}_h^\lambda \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2 : \underline{\mu}_h^\lambda|_T \in P^2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cap \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \}, \\
 Q_h^\lambda &:= \{ \mu_h^\lambda \in L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2) : \mu_h^\lambda|_T \in P^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cap \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \},
 \end{aligned}$$

$$V_h := \left\{ (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2 : \langle \underline{v}_h^1 - \underline{v}_h^2; \underline{\mu}_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} = 0 \quad \forall \underline{\mu} \in V_h^\lambda \right\},$$

$$Q_h := \left\{ (q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2 : \langle q_h^1 - q_h^2; \mu_h \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \quad \forall \mu \in Q_h^\lambda \right\}.$$

**Bemerkung 7.1.** *Mit der Annahme, dass die Triangulierungen  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1)$  und  $\mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  im Überlapp  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  identisch sind, ist  $\mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cap \mathcal{T}_h^2(\Omega_2)$  eine Triangulierung des Überlapps  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .*

Für  $(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h$  gilt

$$\langle \underline{v}_h^1 - \underline{v}_h^2; \underline{\mu}_h \rangle_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} = 0 \quad \forall \underline{\mu}_h \in V_h^\lambda.$$

Mit den obigen Voraussetzungen gilt somit

$$\underline{v}_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \underline{v}_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$$

punktweise in  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

**Bemerkung 7.2.** *An dieser Stelle geht die globale Konformität der Räume ein, da ansonsten diese Bedingung nicht gilt.*

Damit ist die Funktion

$$\underline{v}_h := \begin{cases} \underline{v}_h^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \underline{v}_h^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und es gilt  $\underline{v}_h \in H^1(\Omega)$  und

$$\underline{v}_h|_T \in P^2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cup \mathcal{T}_h^2(\Omega_2).$$

Ebenso gilt für  $(p_h^1, p_h^2) \in Q_h$

$$p_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = p_h^2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$$

punktweise in  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  und die Funktion

$$p_h := \begin{cases} p_h^1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ p_h^2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und es gilt  $p_h \in L_2(\Omega)$  und

$$p_h|_T \in P^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cup \mathcal{T}_h^2(\Omega_2).$$

Somit gilt

$$\sup_{(0,0) \neq (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h} \frac{b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2)}{\|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \geq \frac{1}{2} \sup_{0 \neq \underline{v}_h \in S_h^2(\Omega) \cap H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} \frac{b'(\underline{v}_h, p_h)}{\|\underline{v}_h\|_{H^1(\Omega)^2}},$$

mit dem Funktionenraum

$$S_h^2(\Omega) := \{ \underline{v}_h \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) : \underline{v}_h|_T \in P^2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^1(\Omega_1) \cup \mathcal{T}_h^2(\Omega_2) \}.$$

Mit der Stabilitätsbedingung für das  $P^2 - P^0$ -Element (vgl. Proposition 3.1 in [3]) folgt somit

$$\begin{aligned}
& \sup_{(0,0) \neq (\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h} \frac{b(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2; p_h^1, p_h^2)}{\|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2}} \\
& \geq \frac{1}{2} c \|p_h\|_{L_2(\Omega)} \\
& = \frac{1}{2} c \sqrt{\|p_h^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|p_h^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} \|p_h^1\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2 - \frac{1}{2} \|p_h^2\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2} \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} c \sqrt{\|p_h^1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|p_h^2\|_{L_2(\Omega_2)}^2} \\
& = \frac{1}{2\sqrt{2}} c \|(p_h^1, p_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Stabilitätsbedingung (7.8) gezeigt.

Die Stabilitätsbedingung (7.9) kann ähnlich wie Lemma 3.13 bewiesen werden, wenn man statt stückweise linearen stückweise quadratische Ansatzfunktionen wählt.

Für die Stabilitätsbedingung (7.10) setzen wir für  $\lambda_h^p \in Q_h^\lambda$  die Funktionen  $\bar{q}_h^1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \lambda_h^p$  und  $\bar{q}_h^1|_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} \equiv 0$ . Außerdem setzen wir  $\bar{q}_h^2 \equiv 0$ , somit ist  $(\bar{q}_h^1, \bar{q}_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2$  und für das Supremum gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sup_{(0,0) \neq (q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \frac{\tilde{b}_2(q_h^1, q_h^2; \lambda_h^p)}{\|(q_h^1, q_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} & \geq \frac{\langle \bar{q}_h^1 - \bar{q}_h^2; \lambda_h^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}{\|(\bar{q}_h^1, \bar{q}_h^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)}} \\
& = \frac{\langle \lambda_h^p, \lambda_h^p \rangle_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}}{\|\bar{q}_h^1\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \\
& = \frac{\|\lambda_h^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}^2}{\|\lambda_h^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}} \\
& = \|\lambda_h^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)}
\end{aligned}$$

und somit ist auch die Stabilitätsbedingung (7.10) erfüllt.

**Bemerkung 7.3.** *An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, dass der Druck unstetig gewählt wird. Ansonsten ist eine solche Wahl nicht möglich.*

Diese Wahl der Ansatzfunktionen erfüllt somit alle Voraussetzungen für die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierungen bzw. für die Konvergenz des Verfahrens. Mit Hilfe der Aussagen aus Abschnitt 7.3 erhalten wir somit die quasi-optimalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
& \|(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \\
& \leq c_1 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
& \|(\underline{p}_h^1, \underline{p}_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} \\
& \leq c_2 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
& \|\underline{\lambda}_h^u - \underline{\lambda}^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \leq c_3 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
& \|\lambda_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \\
& \leq c_4 \left[ \inf_{(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) \in V_h^1 \times V_h^2} \|(\underline{v}_h^1, \underline{v}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} \right. \\
& \quad + \inf_{(q_h^1, q_h^2) \in Q_h^1 \times Q_h^2} \|(q_h^1, q_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} + \inf_{\underline{\mu}_h^u \in V_h^\lambda} \|\underline{\mu}_h^u - \lambda^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} \\
& \quad \left. + \inf_{\mu_h^p \in Q_h^\lambda} \|\mu_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right].
\end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, dass die kontinuierliche Lösung des Problems (6.8)-(6.11) die Regularitätsvoraussetzungen

$$\begin{aligned}
(\underline{u}^1, \underline{u}^2) & \in H^3(\Omega_1) \times H^3(\Omega_2), \\
(p^1, p^2) & \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2), \\
\underline{\lambda}^u & \in H^3(\Omega_1 \cap \Omega_2), \\
\lambda^p & \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)
\end{aligned}$$

erfüllen, erhalten wir mit den Approximationseigenschaften der Funktionenräume  $V_h^1, V_h^2, Q_h^1, Q_h^2, V_h^\lambda, Q_h^\lambda$  die a-priori-Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
\|(\underline{u}_h^1, \underline{u}_h^2) - (\underline{u}^1, \underline{u}^2)\|_{H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2} &\leq c_1 \left[ h^2 |(\underline{u}^1, \underline{u}^2)|_{H^3(\Omega_1) \times H^3(\Omega_2)} + h |(p^1, p^2)|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \right. \\
&\quad \left. + h^2 |\underline{\lambda}^u|_{H^3(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} + h |\lambda^p|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
\|(p_h^1, p_h^2) - (p^1, p^2)\|_{L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)} &\leq c_2 \left[ h^2 |(\underline{u}^1, \underline{u}^2)|_{H^3(\Omega_1) \times H^3(\Omega_2)} + h |(p^1, p^2)|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \right. \\
&\quad \left. + h^2 |\underline{\lambda}^u|_{H^3(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} + h |\lambda^p|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
\|\underline{\lambda}_h^u - \underline{\lambda}^u\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} &\leq c_3 \left[ h^2 |(\underline{u}^1, \underline{u}^2)|_{H^3(\Omega_1) \times H^3(\Omega_2)} + h |(p^1, p^2)|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \right. \\
&\quad \left. + h^2 |\underline{\lambda}^u|_{H^3(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} + h |\lambda^p|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right], \\
\|\lambda_h^p - \lambda^p\|_{L_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)} &\leq c_4 \left[ h^2 |(\underline{u}^1, \underline{u}^2)|_{H^3(\Omega_1) \times H^3(\Omega_2)} + h |(p^1, p^2)|_{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)} \right. \\
&\quad \left. + h^2 |\underline{\lambda}^u|_{H^3(\Omega_1 \cap \Omega_2)^2} + h |\lambda^p|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \right]
\end{aligned}$$

mit von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

## 8 Ein numerisches Beispiel

In den Kapiteln 6 und 7 haben wir ein Verfahren hergeleitet, für das wir unter der Voraussetzung der Stabilitätsbedingungen die eindeutige Lösbarkeit bzw. die Konvergenz des Verfahrens bewiesen haben. In diesem Kapitel werden wir ein numerisches Beispiel betrachten, wobei wir für die Ansatzfunktionen Taylor-Hood-Elemente wählen. Bei den Taylor-Hood-Elementen verwendet man stückweise quadratische und stetige Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten und stückweise lineare und stetige Ansatzfunktionen für die Approximation des Drucks. Für die Standard-Finite-Elemente-Methode der Stokes-Gleichungen lässt sich beweisen, dass diese Wahl von Ansatzfunktionen zu einem stabilen Verfahren führt (vgl. Lemma 2.6 in [10] und [18]). In unserem Fall haben wir nicht alle Stabilitätsbedingungen bewiesen. Die Stabilitätsbedingung (7.9) kann jedoch auf dieselbe Art bewiesen werden wie Lemma 3.13, indem man statt stückweise linearen stückweise quadratische Ansatzfunktionen verwendet. Die Stabilitätsbedingung (7.10) folgt direkt aus Lemma 3.13. Die Stabilitätsbedingung (7.8) wollen wir hier jedoch nicht betrachten. Als Beispiel betrachten wir hier die Umströmung eines Zylinders in zwei Dimensionen. Als Gebiet nehmen wir das folgende, das durch das Benchmark-Problem für die Umströmung eines Zylinders von S. Turek und M. Schäfer in [17] motiviert wurde.

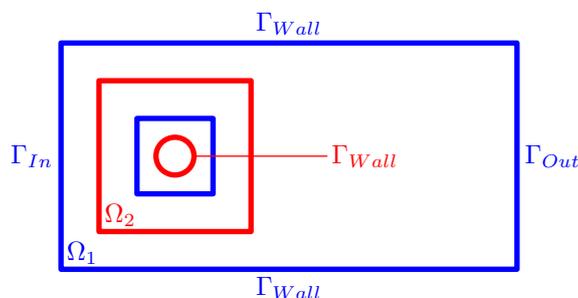


Abbildung 8.1: Gebiet für die Umströmung eines Zylinders

Wir betrachten in diesem Fall jedoch einen kürzeren Kanal, da es für die Stokes-Gleichungen, im Gegensatz zu den von S. Turek und M. Schäfer betrachteten Navier-Stokes-Gleichungen keinen Sinn macht, einen noch längeren Kanal zu betrachten. Für eine Rechnung mit 8316 Elementen im Gebiet  $\Omega_1$  und 1774 Elementen im Gebiet  $\Omega_2$  erhalten wir folgendes Ergebnis für die Geschwindigkeit (vgl. Abbildung 8.3). Um eine Idee der Gitteranordnung zu bekommen betrachten wir hier die Netze der beiden Gebiete. Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir hier jedoch Netze mit 1344 bzw. 342 Elementen (vgl. Abbildung 8.2).

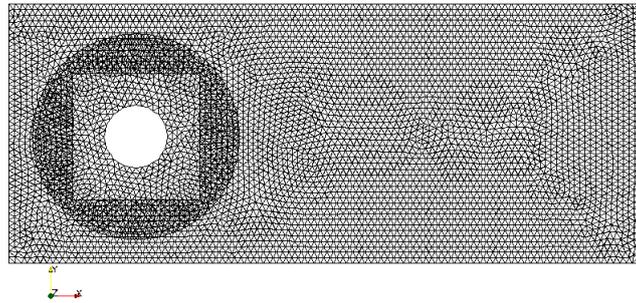


Abbildung 8.2: Rechenetz

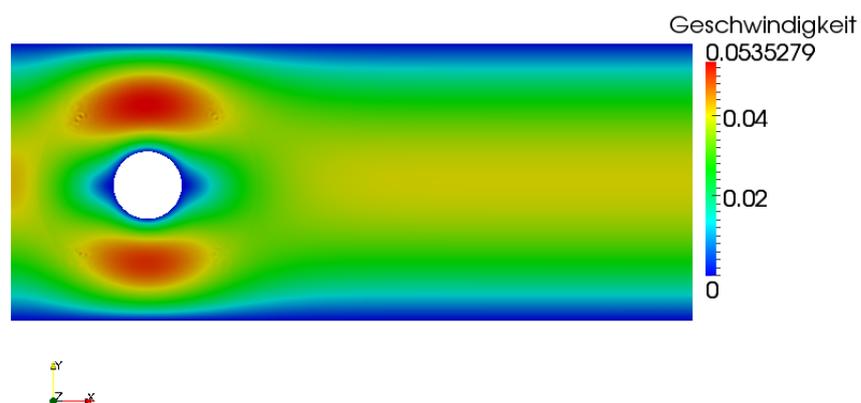


Abbildung 8.3: Umströmung eines Zylinders

Man sieht also, dass, obwohl wir nicht alle notwendigen Stabilitätsbedingungen bewiesen haben, um ein stabiles Verfahren zu erhalten, wir trotzdem ein gutes Ergebnis für dieses Beispiel erhalten.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Teil haben wir die Ergebnisse aus Teil I auf das gemischte Randwertproblem der Stokes-Gleichungen übertragen. Wir haben eine kontinuierliche Variationsformulierung für eine überlappende Gebietszerlegungsmethode basierend auf den Ergebnissen aus Teil I hergeleitet und dafür die eindeutige Lösbarkeit bzw. die Äquivalenz zur schwachen Formulierung des gemischten Randwertproblems für die Stokes-Gleichungen bewiesen. In Kapitel 7 haben wir dieses Problem diskretisiert und aufgezeigt, welche Bedingungen die konformen Ansatzräume erfüllen müssen, damit wir ein stabiles Verfahren erhalten. Außerdem haben wir eine Variante für ein stabiles Paar von Finiten-Elementen angeführt. Abschließend haben wir in Kapitel 8 ein numerisches Beispiel für Finite-Elemente betrachtet, für die wir nicht alle Stabilitätsbedingungen bewiesen haben, jedoch haben wir gesehen, dass wir trotzdem ein gutes Ergebnis für die Umströmung eines Zylinders in zwei Dimensionen erzielen konnten.

An dieser Stelle wäre die Betrachtung von weiteren Ansatzräumen interessant, die die diskreten Stabilitätsbedingungen (7.8)-(7.10) erfüllen. Es wäre interessant, welche Wahl von stabilen Finiten Elementen für die Stokes-Gleichungen auch in einem stabilen Verfahren für die überlappende Gebietszerlegungsmethode resultieren.

Weiters könnte man dieses Verfahren auf die instationären Navier-Stokes-Gleichungen erweitern. Dann wäre ein großer Vorteil dieses Verfahrens die Möglichkeit, mit bewegten Gittern (zeitabhängigen Gebieten) rechnen zu können, ohne das Gebiet in jedem Zeitschritt neu vernetzen zu müssen.



# Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] D. Boffi, F. Brezzi, L. F. Demkowicz, R. G. Durán, R. S. Falk, and M. Fortin. *Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications*, volume 1939 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, June 26–July 1, 2006, Edited by Boffi and Lucia Gastaldi.
- [4] D. Braess. *Finite elements. Theory, fast solvers and applications in elasticity theory. (Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.) 4th revised and extended ed.* Springer., Berlin, 2007.
- [5] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems: the Arlequin method. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 326:899–904, 1998.
- [7] H. Ben Dhia and G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(7), 2001.
- [8] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [9] M. Gander and C. Japhet. An algorithm for non-matching grid projections with linear complexity. *Preprint, University of Genova*.
- [10] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [11] G. Rateau H. Ben Dhia. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11):1442–1462, 2005.

- 
- [12] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
- [13] O. Schenk, M. Bollhöfer, and R. A. Römer. On large scale diagonalization techniques for the Anderson model of localization. *SIAM Review*, 50(1):91–112, 2008.
- [14] O. Schenk, A. Wächter, and M. Hagemann. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 36(2-3):321–341, April 2007.
- [15] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.
- [16] A. Toselli and O. Widlund. *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, volume 34 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [17] S. Turek and M. Schäfer. Benchmark computations of laminar flow around cylinder. In E.H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547–566. Vieweg, 1996.
- [18] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 18, 1984.
- [19] P. Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics*, volume 29 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [20] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.

# Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift