

**Roman Lesjak**

**Die Rolle einer inertialen Messeinheit  
in der Anwendung  
Moving-Base Gravimetry**

**MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Ingenieur/in

Masterstudium Geomatics Science



**Technische Universität Graz**

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Norbert KÜHTREIBER

Institut für Navigation und Satellitengeodäsie

Graz, September 2010

Deutsche Fassung:  
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008  
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

## EIDESSTÄTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....  
(Unterschrift)

Englische Fassung:

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....  
date

.....  
(signature)

# Kurzfassung

Inertiale Navigationssysteme (INS) ermöglichen die relative Positionsbestimmung anhand von Accelerometern und Kreiseln und kommen immer dann zum Einsatz, wenn die satellitengestützte Positionierung an ihre Grenzen stößt. Meist werden INS in Kombination mit GNSS eingesetzt, um die Genauigkeit und Zuverlässigkeit zu verbessern, bei entsprechender Qualität des INS ist jedoch auch eine eigenständige Positionsbestimmung mit sehr guter Genauigkeit auf kurze Zeit möglich.

Diese Masterarbeit beinhaltet im ersten Teil Untersuchungen des qualitativ hochwertigen Strapdown INS iMar iNav-RQH-003. Zur Kontrolle der Spezifikationen und zur Untersuchung der Systemeigenschaften wurden mehrere Messungen unter Laborbedingungen sowie in der freien Natur durchgeführt, welche zum Teil mithilfe von Neigungssensoren kontrolliert wurden.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Implementierung von Self-Alignment Algorithmen mit und ohne Fehlermodell sowie mit unterschiedlichen Integrationsverfahren in der Strapdown Auswertung. Es werden die entwickelten Algorithmen verglichen und es wird gezeigt, worauf bei der Datenaufzeichnung und der Auswertung besonders zu achten ist. Zusätzlich wird analysiert, inwieweit durch die Messdatenfilterung Verbesserungen erzielt werden können. Außerdem findet ein Vergleich mit der kommerziellen Software *Inertial Explorer* statt.

Der dritte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Strapdown Inertial Scalar Gravimetry, wobei anhand einiger Messfahrten und einiger stationärer Aufzeichnungen in Ruhe untersucht wird, ob die absolute und relative terrestrische Moving-Base Gravimetry im Stop-and-Go Modus möglich ist. Die Untersuchungen zur Moving-Base Gravimetry machen deutlich, dass aufgrund der Einschaltvariationen in den Accelerometer Biases die Absolutgravimetrie nicht möglich ist. Die Relativgravimetrie liefert Ergebnisse mit einer Standardabweichung  $< 5.6$  mGal. Bei einem Vergleich mit Referenzwerten weichen diese im Mittel um nicht signifikante 4.2 mGal ab.

# Abstract

Inertial Navigation Systems (INS) enable relative positioning using accelerometers and gyros and they are used whenever satellite navigation is limited or unfeasible. Most of the time INS are used in combination with GNSS to improve the accuracy and reliability. Using high-quality INS autonomous positioning can be done with good performance over short periods.

In the first part of this master thesis investigations are done using the higher-quality strap-down INS iMar iNav-RQH-003. To verify the specifications from the manufacturer and to get to know the systems behaviour measurements under laboratory conditions as well as under real conditions were carried out. Some of the tests were checked using inclination sensors.

In the second part of this work self-alignment algorithms with and without error models and strapdown algorithms using different numerical integration methods were implemented and compared. Investigations were done how to obtain best measurement data and how to achieve best results during processing. Furthermore it was analyzed if filtering the measurement data will improve the navigation results. Finally the results are compared with the results of the commercial software *Inertial Explorer*.

In the last part of this work strapdown inertial scalar gravimetry is carried out. Therefore measurements under static conditions and measurements where the INS was mounted on a car were recorded. Investigations were done for both absolute and relative terrestrial moving-base gravimetry in the stop-and-go mode. Investigations showed that absolute gravimetry is unfeasible because of the residual accelerometer biases. First results from relative gravimetry have a standard deviation  $< 5.6$  mGal, a comparison with reference values shows an average offset of 4.2 mGal, which is not significant.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Zielsetzung . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Inertiale Sensoren</b>	<b>4</b>
2.1	Accelerometer . . . . .	4
2.1.1	Mechanische Accelerometer . . . . .	6
2.1.2	Solid-State-Accelerometer . . . . .	9
2.2	Gyros . . . . .	9
2.2.1	Mechanische Gyros . . . . .	10
2.2.2	Optische Gyros . . . . .	12
2.3	Sensorfehler . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Inertialnavigation</b>	<b>18</b>
3.1	Geschichtliche Entwicklung der Navigation . . . . .	18
3.2	Mechanische Umsetzung . . . . .	20
3.2.1	Kardanisch gelagerte Systeme . . . . .	21
3.2.2	Strapdown Systeme . . . . .	22
3.3	Strapdown Implementierung . . . . .	23
3.3.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	23
3.3.2	Schema des Strapdown Algorithmus . . . . .	39
3.3.3	Alignment . . . . .	40
3.3.4	Strapdown Algorithmus . . . . .	42
3.3.5	Numerische Integrationsverfahren . . . . .	45
3.4	Einflussfaktoren auf die Genauigkeit . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Moving-Base Gravimetry</b>	<b>50</b>
4.1	Beobachtungsmodelle . . . . .	52
4.2	Fehler in der SINS Gravimetrie . . . . .	54
4.3	Stop-and-Go Modus . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Untersuchungen der Messdaten</b>	<b>57</b>
5.1	Rohe Messdaten . . . . .	58
5.2	Messdaten bei laufendem Motor . . . . .	65

5.3	Messdaten während der Fahrt . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Untersuchungen zur Navigation</b>	<b>71</b>
6.1	Alignment . . . . .	72
6.1.1	Coarse Alignment . . . . .	73
6.1.2	Coarse Alignment mit Verlaufsanpassung . . . . .	75
6.1.3	Coarse und Fine Alignment . . . . .	76
6.1.4	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	81
6.2	Navigation . . . . .	81
6.2.1	Vergleich verschiedener Integrationsverfahren . . . . .	82
6.2.2	Auswirkungen des Alignments . . . . .	84
6.2.3	Genauigkeitsvergleich mit dem Inertial Explorer . . . . .	85
6.2.4	Messdatenfilterung in der Navigation . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Untersuchungen zur Moving-Base Gravimetry</b>	<b>89</b>
7.1	Absolutgravimetrie . . . . .	89
7.2	Relativgravimetrie . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick</b>	<b>97</b>
8.1	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	97
8.2	Ausblick . . . . .	99
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>100</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>102</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>
	<b>Anhang</b>	<b>A1</b>
A1	GRS80 Parameter . . . . .	A1
A2	Spezifikation iMAR iNav-RQH-003 . . . . .	A2
A3	Dachmessungen . . . . .	A3
A4	Langzeitmessung 1 im Messlabor . . . . .	A5
A5	Langzeitmessung 2 im Messlabor . . . . .	A6

# Abkürzungsverzeichnis

CCID	Charge Coupled Imaging Device
CHAMP	Challenging Minisatellite Payload
d. h.	das heißt
EKF	Extended Kalman Filter
FIR	Finite Impulse Response
FOC	Full Operational Capability
FOG	Fibre Optic Gyro
GRS80	Geodetic Reference System 1980
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IFOG	Interferometric Fibre Optic Gyro
IIR	Infinite Impulse Response
GNSS	Global Navigation Satellite System
GOCE	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
Gyro	Gyroscope, Kreisel
IMS	Inertiales Messsystem
IMU	Inertial Measurement Unit
INAS	Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Technische Universität Graz
INS	Inertial Navigation System
LKF	Linearized Kalman Filter
NED	North-East-Down
MEMS	Micro-Machined Electromechanical System
RLG	Ring Laser Gyro
PPS	Pulse Per Second
RTK	Real Time Kinematic
SINS	Strapdown Inertial Navigation System
SISG	Strapdown Inertial Scalar Gravimetry
SIVG	Strapdown Inertial Vector Gravimetry
u. a.	unter anderem
z. B.	zum Beispiel
ZUPT	Zero Velocity Update

# 1 Einleitung

Ausgangspunkt dieser Masterarbeit ist das Projekt Gravis, welches am Institut für Navigation und Satellitengeodäsie (INAS) der TU Graz bearbeitet und von der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft (FFG) im Rahmen des Austrian Space Applications Programmes (ASAP) gefördert wird. Ziel dieses Projekts ist die terrestrische mobile Schwerfeldbestimmung (Moving-Base Gravimetry) mithilfe eines Strapdown Inertialen Navigationssystems (SINS) und eines GNSS Antennenarrays.

## 1.1 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Untersuchungen zur Inertialnavigation in Hinblick auf das Projekt Gravis durchzuführen. Für diese Untersuchungen steht das Strapdown System iNav iNav-RQH-003 zur Verfügung, das aufgrund seiner hohen Kosten und hohen Qualität nur im professionellen Sektor (z. B. beim Militär oder in Flugzeugen) eingesetzt wird. Die Inertialnavigation ganz allgemein befasst sich mit der Positionsbestimmung mittels inertialer Sensoren. Zu diesen zählen Accelerometer zur Messung von Beschleunigungen und Gyroskope (Gyros) zur Messung von Drehraten. Diese Messgrößen ermöglichen eine relative Positionsbestimmung durch die zeitliche Integration der Beschleunigungen und Drehraten. Da Inertiale Navigationssysteme (INS) aufgrund ihrer Sensoren unabhängig von jeglicher Infrastruktur funktionieren und kaum durch äußere Störeinflüsse beeinflussbar sind, werden sie sehr häufig mit GPS in sicherheitskritischen Anwendungen kombiniert, um Ausfälle von GPS zu überbrücken. INS werden jedoch viel seltener selbstständig zur Navigation eingesetzt, da sich die Positionsgenauigkeit durch die fortlaufende relative Positionsbestimmung exponentiell verschlechtert. So wird für das iNav-RQH-003 System eine Genauigkeit von kleiner als 1.5 km/h angegeben. Ein Teil dieser Arbeit wird sich daher damit beschäftigen, ob diese Spezifikation mithilfe selbst implementierter Algorithmen sowie unter Anwendung kommerzieller Software zu erreichen ist. Dies fordert zu Beginn eine intensive Literaturrecherche zu den Themen Inertialnavigation, Sensortechnologien und Strapdown Algorithmen und inkludiert Recherchen zu Self-Alignment Algorithmen sowie zur Fehlermodellierung im Fine Alignment. Für Testzwecke und zur Verifizierung der Ergebnisse werden Messfahrten mit einem Auto durchgeführt. Die Montage des INS auf dem Auto erfolgt mittels Dachträger, auf dem neben dem INS auch 4 GNSS Antennen zum Vergleich der Positionslösungen



montiert werden. Zum besseren Verständnis des Systems und der Sensoren werden mehrere Messungen, bei denen sich das INS in Ruhe befindet, in der freien Natur, wie auch in einem Messlabor mit konstanten klimatischen Bedingungen durchgeführt. Die Erkenntnisse daraus sollen helfen, die Algorithmen zu optimieren und somit die erzielbare Genauigkeit zu steigern.

Neben der relativen Positionsbestimmung können INS weiters dazu verwendet werden, Gravimetrie zu betreiben, da die von den Accelerometern gemessenen Beschleunigungen (spezifischen Kräfte) die Schwerebeschleunigung beinhalten. Ist die kinematische Beschleunigung bekannt, so kann aus der Differenz zwischen spezifischer Kraft und kinematischer Beschleunigung die auftretende Schwere bestimmt werden. Bei der *terrestrischen Moving-Base Gravimetry* wird mit einem Auto navigiert, mit GPS die Kinematik erfasst und als Ergebnis erhält man die Schwere entlang der Fahrtstrecke. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen sollen zeigen, ob eine mobile Schwerefeldbestimmung mit dem iNav-RQH-003 System möglich ist. Dabei konzentrieren sich die Untersuchungen auf die skalare Schwerefeldmessung im Stop-and-Go Modus, d. h. es sollen die Messdaten statischer Messphasen zur Schwerefeldbestimmung verwendet werden. Dadurch vereinfacht sich die Auswertung, da die Bestimmung der Kinematik mittels GPS wegfällt. Für diese Untersuchungen soll nach verwandten Forschungsarbeiten im Bereich der terrestrischen Gravimetrie und Fluggravimetrie gesucht und ein geeigneter Ansatz umgesetzt werden.

### 1.2 Aufbau der Arbeit

Nach der Einleitung folgt in Kapitel 2 ein Überblick über existierende Sensortechnologien, ihre Funktionsprinzipien und auftretende Sensorfehler. Kapitel 3 liefert eine Zusammenfassung der geschichtlichen Entwicklung von Inertialen Navigationssystemen (INS) und beschreibt Möglichkeiten der mechanischen Umsetzung. Es werden die mathematischen Grundlagen zur Inertialnavigation präsentiert, die für das Verständnis des im Anschluss folgenden Strapdown Algorithmus im Local-Level-Frame essentiell sind.

In Kapitel 4 werden verschiedene Beobachtungsmodelle zur Moving-Base Gravimetry sowie deren Fehler vorgestellt. Danach folgen Überlegungen zur Gravimetrie im Stop-and-Go Modus.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit Untersuchungen der Messdaten eines INS in Ruhe und vergleicht, wie sich diese bei laufendem Motor und während der Fahrt ändern. Anschließend werden in Kapitel 6 verschiedene Self-Alignment Algorithmen präsentiert und erklärt, worauf beim Alignment zu achten ist. Weiters folgt ein Vergleich von Strapdown Algorithmen bezüglich ihrer Genauigkeit und eine Untersuchung, ob die Filterung von Messdaten zu einer Verbesserung des Ergebnisses führt. Kapitel 7 befasst sich mit der Anwendung der

terrestrischen Moving-Base Gravimetry im Stop-and-Go Modus. Es werden Untersuchungen zur skalaren Absolut- und Relativgravimetrie durchgeführt und erste Ergebnisse angeführt.

Abschließend liefert Kapitel 8 eine Zusammenfassung der gesammelten Erkenntnisse und erzielten Ergebnisse und gibt einen Ausblick auf mögliche Optimierungen.

## 2 Inertiale Sensoren

Inertiale Sensoren folgen den Newton'schen Gesetzen der Bewegung und dienen der Bestimmung von Beschleunigungen und Drehraten (Drehgeschwindigkeiten). Während Accelerometer (Beschleunigungsaufnehmer) lineare Beschleunigungen messen, erfassen Gyros (Kurzform für Gyroskop, zu deutsch Kreisel) Drehraten. In der heutigen Zeit spielen inertielle Sensoren eine immer stärker werdende Rolle. Sie finden Anwendung in der Geodäsie, der Navigation, der Fahrzeugtechnik, dem Bauingenieurwesen, der Robotik und vielen anderen Bereichen. In dieser Arbeit werden in weiterer Folge ausschließlich die Begriffe Accelerometer und Gyro verwendet, da nur sie in der Fachliteratur der Inertialnavigation Verwendung finden.

Inertiale Sensoren werden sowohl einzeln als auch in Gruppen eingesetzt. Im Bereich der Navigation kommen inertielle Sensoren in inertialen Messeinheiten (IMUs) bzw. in inertialen Navigationssystemen (INS) zum Einsatz. Eine andere Bezeichnung für IMU ist das inertielle Messsystem (IMS). In diesen Systemen werden mehrere Accelerometer und Gyros so ausgerichtet, dass sie die Beschleunigungen und Drehraten in allen drei Raumrichtungen erfassen. Mehr zum Thema IMU bzw. INS folgen in Kapitel 3.

Inertiale Sensoren unterscheiden sich, je nachdem ob sie Beschleunigungen bzw. Drehraten entlang einer oder mehrerer sensitiver Achsen aufnehmen können. Der IEEE Standard beschreibt die sensitive Achse als jene Achse, entlang der oder um die bei einem gewissen Input der maximale Output entsteht (Lawrence, 1998).

Inertiale Sensoren werden anhand ihrer Qualität und Anwendung in drei Kategorien eingeteilt. Qualitätskriterien sind vor allem sowohl bei den Accelerometern wie auch Gyros die Stabilität des Bias sowie jene des Skalenfaktors. Tabelle 2.1 listet die Kategorien mit den Größenordnungen der Qualitätskriterien auf (Jekeli, 2001).

Die folgenden beiden Abschnitte geben einen Überblick über die existierenden Technologien und deren Grundkonzepte.

### 2.1 Accelerometer

Mit Accelerometern lassen sich lineare Beschleunigungen erfassen. Dies wird speziell in der Geodäsie und dem Bauingenieurwesen ausgenutzt, um mittels Satelliten das Erdschwerefeld

**Tabelle 2.1:** Kategorien von inertialen Sensoren

Kategorie	Qualitätskriterium	Größenordnung
strategic grade	Gyro Bias Stabilität	$< 0.0001 \text{ } ^\circ/\text{h}$
	Gyro Skalenfaktor Stabilität	$< 50 \text{ ppm}$
	Accelerometer Bias Stabilität	$< 1 \text{ } \mu\text{g}$
	Accelerometer Skalenfaktor Stabilität	$< 2 \text{ ppm}$
navigation grade	Gyro Bias Stabilität	$0.0001 - 0.1 \text{ } ^\circ/\text{h}$
	Gyro Skalenfaktor Stabilität	$1 - 100 \text{ ppm}$
	Accelerometer Bias Stabilität	$1 - 1000 \text{ } \mu\text{g}$
	Accelerometer Skalenfaktor Stabilität	$1 - 100 \text{ ppm}$
tactical grade	Gyro Bias Stabilität	$0.1 - 10000 \text{ } ^\circ/\text{h}$
	Gyro Skalenfaktor Stabilität	$> 100 \text{ ppm}$
	Accelerometer Bias Stabilität	$50 - 10000 \text{ } \mu\text{g}$
	Accelerometer Skalenfaktor Stabilität	$> 100 \text{ ppm}$

bestimmen oder aber auch Deformationen an Infrastrukturen erfassen zu können. Darüber hinaus ergaben sich in jüngster Zeit durch die Verringerung der Herstellkosten, wie auch der Größe von Accelerometern, neue Anwendungsgebiete. So findet man Accelerometer heutzutage in Fotokameras, um automatisch zu erkennen, ob das Bild im Portrait- oder Landschaftsmodus aufgenommen wurde. In modernen Mobiltelefonen, MP3-Playern bzw. Spielecontrollern dienen Accelerometer zur Steuerung von Spielen, indem die Geräte bewegt werden und die Accelerometer diese Bewegungen erfassen. Auch in Notebooks werden in letzter Zeit vermehrt Accelerometer eingebaut. Diese sollen einen Fall des Laptops detektieren, damit zum Schutz vor Schäden die Festplatte rechtzeitig vom Betriebssystem deaktiviert wird. Weitere Anwendungsgebiete sind Alarmanlagen für bewegliche Objekte, aktive Federungssysteme in Fahrzeugen, bei Crashtests oder im Erdbebenmonitoring.

Das Grundprinzip der Accelerometermessungen beruht auf dem zweiten Newton'schen Axiom. Dieses besagt, dass ein Körper der Masse  $m$  bezüglich des inertialen Raumes beschleunigt wird, wenn eine Kraft  $F$  auf ihn wirkt:

$$F = m \cdot a. \quad (2.1)$$

Accelerometer messen diese Beschleunigungen, die als *spezifische Kraft* oder dynamische Beschleunigung bezeichnet wird. Bezüglich des inertialen Raums bedeutet dies, dass die gemessenen Beschleunigungen mit Schwerebeschleunigungen überlagert sind, wenn man sich in der Nähe großer Massen befindet. Auf der Erde setzt sich die Schwerebeschleunigung aus Gravitation und Fliehkraft zusammen. Um die Beschleunigung relativ zur Erde bestimmen zu können, muss daher die Schwerebeschleunigung bekannt sein. Informationen zur momentan

auf das System auftretenden Schwere können unter Kenntnis der Position aus Modellen wie z. B. dem Normalschwerefeld abgeleitet werden. Aufgrund der Tatsache, dass es sich um Modelle handelt, welche eine mehr oder weniger gute Näherung an das tatsächliche Schwerefeld darstellen, enthalten die abgeleiteten Beschleunigungen Fehler. Details siehe Kapitel 3.3.1.

Im Bereich der Inertialnavigation dienen Accelerometer der Bestimmung von Geschwindigkeits- und Positionsänderungen. Durch die zeitliche Integration von Beschleunigungen erhält man Geschwindigkeitsänderungen. Kennt man weiters die Absolutgeschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit (z. B. zu Beginn), so kann man zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit berechnen. Durch erneute zeitliche Integration der Geschwindigkeit lassen sich Weg- oder Positionsänderungen ermitteln. Um absolute Weg- oder Positionsinformationen zu erhalten, muss zusätzlich der Startwert bzw. die Startposition möglichst genau bekannt sein.

Das zugrunde liegende Messprinzip eines Accelerometers besteht darin, jene Kräfte zu messen, die auf die kleine Probemasse (engl. proof mass) innerhalb des Sensorgehäuses wirken. Je nach Sensordesign eignen sie sich zum Messen von Beschleunigungen entlang einer oder zweier Achsen. Weiters wird zwischen *Open-Loop* und *Closed-Loop* Accelerometern unterschieden. Während beim *Open-Loop* Accelerometer die tatsächliche Bewegung der Masse gemessen wird, wird im *Closed-Loop* Fall jene Kraft bestimmt, die notwendig ist, um die Masse in ihrer Ursprungslage zu halten. Die *Closed-Loop* Implementierung hat den Vorteil, dass sie eine bessere Linearität, geringere Hysterese- und Temperatureffekte aufweist, da sich die Probemasse nur um die Nulllage bewegt (Lawrence, 1998).

In den nächsten Abschnitten folgt eine kleine Auswahl an Accelerometertypen mit ihren Funktionsweisen. Umfangreichere Darstellungen von Accelerometertypen finden sich u. a. in Lawrence (1998), Titterton und Weston (2004) oder Jekeli (2001).

### 2.1.1 Mechanische Accelerometer

Das einfachste Funktionsprinzip besitzt der *Open-Loop-Feder-Accelerometer*. Er gehört zur Gruppe der mechanischen Accelerometer und ist der Vorfahre aller heutigen modernen Accelerometer. Um die Beschleunigung entlang der sensitiven Achse zu bestimmen, misst der Accelerometer jedoch nicht die Kräfte (siehe zweites Newton'sches Axiom in Formel 2.1), die auf ihn wirken. Stattdessen verwendet der Accelerometer eine kleine Probemasse (siehe Abbildung 2.1), die über eine Feder mit dem Gehäuse verbunden ist. Wirkt nun eine Beschleunigung in Richtung der sensitiven Achse auf das Gehäuse, bewegt sich die Masse aufgrund ihrer Trägheit relativ zum Gehäuse. Um den Zusammenhang zwischen Auslenkung und auftretender Kraft zu ermitteln, kommt die Differentialgleichung

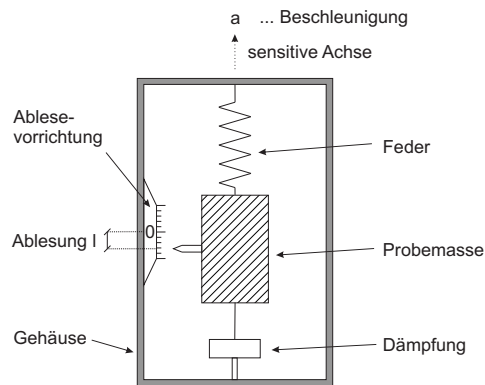
$$m \cdot \ddot{l} + k_v \cdot \dot{l} - k_e \cdot l = F \tag{2.2}$$

zum Einsatz, wobei  $m$  die Probemasse,  $l$  die relative Auslenkung bezüglich des Gehäuses,  $\dot{l}$  und  $\ddot{l}$  die erste und zweite zeitliche Ableitung von  $l$ ,  $k_v$  der Dämpfungskoeffizient,  $k_e$  der Elastizitätskoeffizient der Feder und  $F$  die wirkende Kraft in Richtung der sensitiven Achse ist. Löst man die Differentialgleichung für den Fall  $F = const$ , so erhält man das Hook'sche Gesetz

$$-k_e \cdot l = F, \quad (2.3)$$

welches zeigt, dass die auftretende Kraft proportional zur Auslenkung ist.

Um schließlich die Beschleunigung bestimmen zu können, benötigt man noch eine Ablesereinheit, die die Auslenkung der Probemasse bezüglich ihrer zuvor definierten Nullstellung feststellt. Zu guter Letzt benötigt man noch eine Dämpfung, um Schwingungen der Probemasse zu unterdrücken.

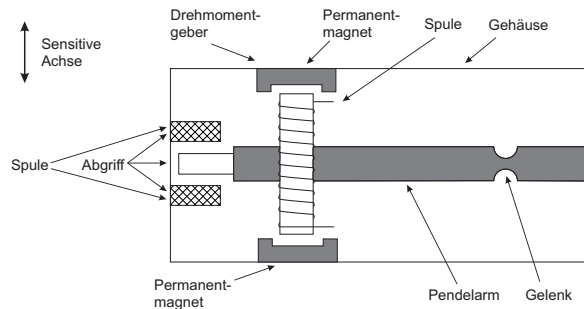


**Abbildung 2.1:** Schematischer Aufbau eines Open-Loop-Feder-Accelerometers

Die Open-Loop Implementierung hat den Nachteil, dass die Auslenkung Nichtlinearitäten aufweist, dass sie empfindlich gegenüber Stromschwankungen ist und thermischen Schwankungen unterliegt (Titterton und Weston, 2004). Eine Verbesserung stellt der *Closed-Loop-Feder-Accelerometer* dar. Hier wird die Auslenkung unterdrückt. Weiters wird die Feder durch einen Elektromagneten ersetzt und eine Spule auf der Probemasse angebracht. Sobald eine Bewegung detektiert wird, wird ein Strom durch die Spule geleitet. Diese erzeugt ein Magnetfeld, wodurch die Probemasse in ihre Nullposition zurückversetzt wird. Die aufzuwendende Stromstärke ist proportional zur auftretenden spezifischen Kraft und dient somit zur Bestimmung der Beschleunigung.

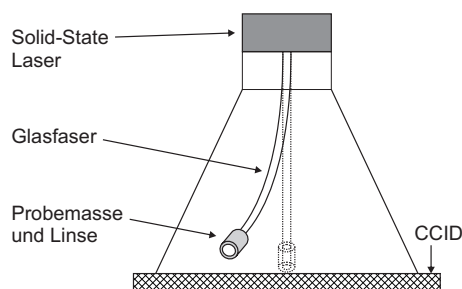
Eine weitere Art eines mechanischen Accelerometers ist der *Pendel-Accelerometer*. Dieser Accelerometertyp beinhaltet ein Pendel, dessen Pendelachse orthogonal auf die sensitive Achse des Sensors steht, das Pendel selbst ist direkt mit dem Gehäuse verbunden (siehe Abbildung 2.2). Wird das Gehäuse beschleunigt, so verlässt das Pendel seine Nullstellung. Diese Auslenkung wird anschließend entweder optisch, induktiv oder kapazitiv abgegriffen. Auch hier kann

durch eine Closed-Loop Implementierung die Genauigkeit verbessert werden. Ein sehr bekannter und verbreiteter Vertreter des Pendel Accelerometers ist der Q-Flex-Accelerometer. Dessen Pendel besteht aus Quarz, welcher durch seinen geringen Temperaturkoeffizienten von  $0.6 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$  sehr geringe Temperaturvariationen aufweist. Der Abgriff erfolgt beim Q-Flex-Accelerometer kapazitiv. Mehr Details siehe Lawrence (1998).



**Abbildung 2.2:** Schematischer Aufbau eines Closed-Loop-Pendel-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004)

Ein weiterer Vertreter der mechanischen Accelerometer ist der *Glasfaser-Accelerometer* (engl. optical fibre accelerometer), der dem Pendel-Accelerometer vom Prinzip her sehr ähnlich ist (siehe Abbildung 2.3). Dabei wird ein Laserstrahl durch eine Glasfaser geleitet, an dessen anderem Ende eine Probemasse sowie eine Linse angebracht ist. Die Linse fokussiert das Laserlicht auf einen zweidimensionalen Photodetektor (CCID, charge coupled imaging device). Die Glasfaser fungiert als Pendel und das CCID greift die Auslenkung ab. Hierbei handelt es sich im Vergleich zu den bisher beschriebenen Sensoren um einen zweiachsigen Accelerometer.

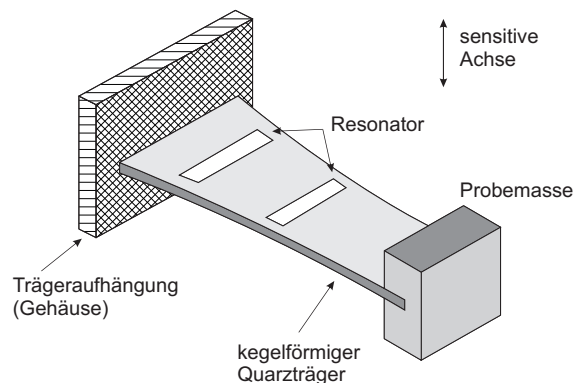


**Abbildung 2.3:** Schematischer Aufbau eines Glasfaser-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004)

### 2.1.2 Solid-State-Accelerometer

In den letzten Jahren wurde vermehrt auf dem Gebiet der *Solid-State-Accelerometer*, also Accelerometer ohne Mechanik, geforscht. Die besten Ergebnisse erzielte man mit Sensoren basierend auf akustischen Oberflächenwellen, Quarz- und Silikonelementen (Titterton und Weston, 2004).

Beim *Oberflächenwellen-Accelerometer* (engl. surface acoustic wave Accelerometer) wird ein freitragender Balken aus piezoelektrischem Quarz mittels Oberflächenwellenresonator in Schwingung versetzt. Der Quarz ist auf der einen Seite am Gehäuse befestigt, am anderen Ende befindet sich die frei bewegliche Probemasse (siehe Abbildung 2.4). Tritt eine Beschleunigung senkrecht zur Quarzoberfläche auf, so verbiegt sich der Quarz, wodurch sich die Frequenz der Oberflächenwelle ändert. Aus der Frequenzänderung kann wiederum auf die Beschleunigung geschlossen werden.



**Abbildung 2.4:** Schematischer Aufbau eines Oberflächenwellen-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004)

## 2.2 Gyros

Der Name Gyro ist die Abkürzung für Gyroskop. Das Wort Gyroskop kommt aus dem Griechischen und bedeutet Kreisel. Unter einem Gyro versteht man eine sich schnell drehende rotationssymmetrische Masse, die die Eigenschaft besitzt, ihre Ausrichtung im inertialen Raum beizubehalten, solange kein Drehmoment von außen auf sie wirkt. Die ersten Gyros dieser Art wurden Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelt. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts fand man heraus, dass sich Licht ebenfalls zur Bestimmung von Drehraten eignet. Obwohl diese modernen Drehratensensoren hinsichtlich ihres Messprinzips nichts mehr mit den ursprünglichen Gyroskopen gemeinsam haben, wurde der Begriff Gyro beibehalten. Das Messprinzip dieser optischen Gyros beruht auf dem Sagnac Effekt. Eine weitere Sensortechnologie für



Gyros, welche für diese Arbeit nicht relevant ist, jedoch der Vollständigkeit halber erwähnt werden sollte, sind MEMS (Micro-Machined Electromechanical System). Diese Technologie wurde in den letzten 25 Jahren entwickelt und wird vor allem in low-cost Systemen eingebaut (Details siehe Titterton und Weston (2004)).

Je nach Qualitätsanforderung unterscheiden sich die Einsatzgebiete der verschiedenen Gyrotechnologien. Im Bereich der Inertialnavigation werden mechanische Kreisel vorwiegend in kardanisch gelagerten inertialen Messsystemen (IMS) eingesetzt, welche heutzutage nur mehr dort zum Einsatz kommen, wo extrem hohe Genauigkeitsanforderungen herrschen. Optische Gyros und MEMS finden hingegen hauptsächlich in Strapdown Systemen Verwendung und werden in allen Genauigkeitsklassen eingesetzt. Neben der Inertialnavigation werden speziell mechanische Gyros sehr vielfältig genutzt. So wird beispielsweise der künstliche Horizont in Flugzeugen mittels mechanischen Gyros bestimmt. Bei sogenannten Kreiselkompassen werden die Eigenschaften des Gyros in Kombination mit der Erddrehung zur Anzeige der Nordrichtung verwendet (z. B. Schiffskreiselkompass). Der Vermessungskreisel nutzt denselben Effekt, um im Tunnelbau die Vortriebsrichtung vorzugeben.

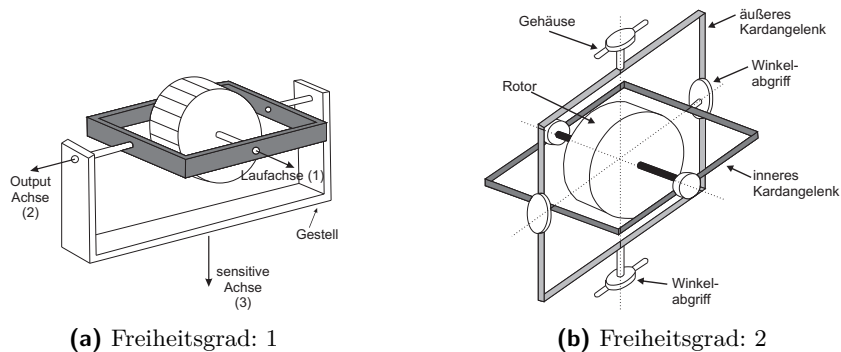
Im Bereich der Inertialnavigation werden mithilfe von Gyros Drehraten und somit Änderungen der Attitude eines Fahrzeugs bezüglich des inertialen Raumes bestimmt. Außerdem können Gyros in kardanisch gelagerten Systemen dazu verwendet werden, die Plattform zu stabilisieren (Details siehe Kapitel 3.2). Befindet sich ein Fahrzeug auf der Erde in Ruhe, so wird von einem Gyro die Komponente der Erdrotation in Richtung seiner sensitiven Achse(n) gemessen, da sich die Erde im inertialen Raum dreht.

In den folgenden Abschnitten werden einige für die Inertialnavigation relevante Sensortechnologien beschrieben. Für weiterführende Details über Kreisel wird auf von Fabek (1980) verwiesen. Eine umfangreiche Auflistung und Beschreibung der Gyrotechnologien für die Inertialnavigation geben Titterton und Weston (2004).

### 2.2.1 Mechanische Gyros

Ein mechanischer Gyro besteht aus einem schnell rotierenden Schwungrad (meist eine rotationssymmetrische Masse - dem Läufer), einem Antrieb, der Lagerung und dem Signalabgriff. Die Messung eines mechanischen Gyros beruht auf dem Lehrsatz vom Drehimpuls  $M = dH/dt$ , der besagt, dass ein von außen einwirkendes Drehmoment  $M$  den Drehimpuls  $H$  des Gyros in Richtung und/oder Betrag ändert. Dies bedeutet weiters, dass der Drehimpulsvektor im Raum konstant bleibt, wenn kein Drehmoment wirkt. In Wirklichkeit unterscheidet sich der Drehimpulsvektor von der Richtung der Laufachse leicht. Der Einfachheit halber wird hier aber angenommen, dass beide zusammenfallen. Die Schwenkgeschwindigkeit des Drehimpulsvektors entspricht somit der mittleren Schwenkgeschwindigkeit der Laufachse. Die Schwenkbewegung des Drehimpulsvektors nennt man *Präzession*.

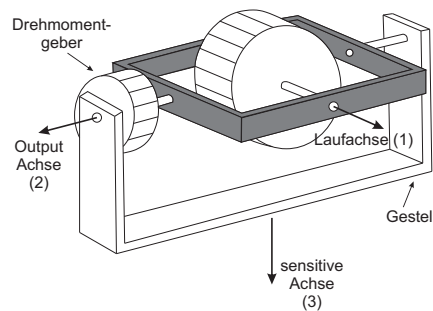
Bei mechanischen Gyros kann man wie bei Accelerometern zwischen jenen mit einem und jenen mit zwei Freiheitsgraden unterscheiden. Während die Rotation des Kreisels (Läufers) um seine Laufachse im eigentlichen Sinn einem Freiheitsgrad entspricht, wird dieser bei Kreiseln nicht mitgezählt. Somit kann bei einem Gyro mit einem Freiheitsgrad die Laufachse um eine Achse geschwenkt werden, während sie beim Gyro mit zwei Freiheitsgraden beliebig geschwenkt werden kann. Die technische Realisierung erfolgt meist durch Kardangelenke (siehe Abbildung 2.5).



**Abbildung 2.5:** Mechanische Gyros nach von Fabeck (1980) bzw. Titterton und Weston (2004)

Bei inertialen Navigationssystemen kommen entweder drei Gyros mit einem Freiheitsgrad oder zwei Gyros mit je zwei Freiheitsgraden zum Einsatz. Zum besseren Verständnis wird hier jener mit einem Freiheitsgrad im Detail besprochen. Als Wendekreisler bezeichnet von Fabeck (1980) jene Art von mechanischem Gyro, der z. B. in Strapdown Systemen eingesetzt werden kann. Dieser ermöglicht die Bestimmung der Drehraten. Wie in Abbildung 2.5a sichtbar, rotiert der Läufer um seine Laufachse (1). Orthogonal darauf stehen die Rahmenachse (2) und die sensitive Achse (3). Der Gyro zeigt keine Reaktionen auf äußere Drehmomente entlang der Achsen 1 und 2, er reagiert nur auf jene Komponente, welche in Richtung seiner sensitiven Achse wirkt und zeigt diese an. Wirkt nun ein Drehmoment entlang der sensitiven Achse, so dreht sich der Läufer wider Erwarten nicht um diese Achse. Stattdessen führt er eine Präzessionsbewegung orthogonal dazu, also um die Rahmenachse aus (Open-Loop). Im Closed-Loop Fall wird diese Präzessionsbewegung durch ein entsprechendes von außen aufgebrachtes Gegendrehmoment ausgeglichen. Das Ausmaß der Schwenkbewegung bzw. des Gegendrehmoments geben Auskunft über die Drehgeschwindigkeit entlang der sensitiven Achse. Während sich beim Open-Loop Gyro die sensitive Achse durch die Präzessionsbewegung ändert (sie steht immer orthogonal auf 1 und 2), bleibt sie im Closed-Loop Fall gleich. Dies wird bei Strapdown Systemen gefordert, da drei solcher Sensoren eingesetzt werden, deren sensitive Achsen orthogonal aufeinander stehen müssen, um Drehbewegungen entlang der drei Raumrichtungen bestimmen zu können. Betrachtet man den Closed-Loop Gyro genauer, so ist es von großer Bedeutung, dass die sensitive Achse möglichst gleich bleibt. Den

Fehler, der begangen wird, wenn die sensitive Achse durch ein auftretendes Drehmoment leicht verschwenkt ist, nennt man *Kreuzkopplungsfehler*. Eine Variante zur Stabilisierung der sensitiven Achse ist die Fesselung des Rahmens mittels einer Feder, welche jedoch im Fall eines Strapdown Systems ungenügend ist. Bei Strapdown Systemen muss die Drehbewegung möglichst vollständig verhindert werden. Dies geschieht, indem ein Drehmomentgeber (siehe Abbildung 2.6) den Rahmen in die Nullstellung zurückdreht, sobald nur die geringste Rahmenauslenkung bemerkbar wird. Gemessen wird die Stromstärke, die der Drehmomentgeber für die Rückführung in die Nullstellung benötigt. Sie ist proportional zum aufgewendeten Drehmoment.

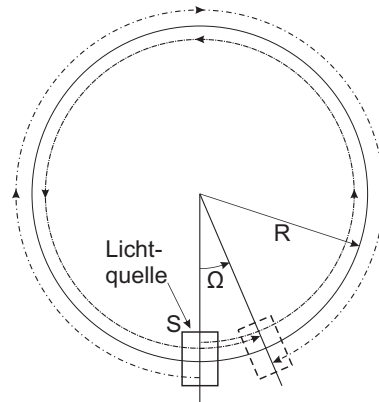


**Abbildung 2.6:** Mechanischer Gyro mit Drehmomentgeber nach von Fabock (1980)

### 2.2.2 Optische Gyros

Optische Gyros sind heutzutage in der Inertialnavigation viel stärker vertreten als ihre mechanischen Verwandten. Sie besitzen einen Freiheitsgrad von eins und basieren auf dem Sagnac Effekt. Der Sagnac Effekt kann mithilfe der Relativitätstheorie erklärt werden und wird hier anhand eines Ringinterferometers mit dem Radius  $R$  und der Lichtquelle  $S$  beschrieben (siehe Abbildung 2.7). Wird nun von  $S$  kohärentes Licht in beide Richtungen ausgesendet, so trifft dieses zeitgleich wieder bei der Lichtquelle  $S$  auf, da der Lichtweg gleich ist. Rotiert nun  $S$  mit der Geschwindigkeit  $\Omega$ , so trifft jenes Licht, das entgegengesetzt zur Rotationsrichtung ausgestrahlt wurde, früher am Punkt  $S$  auf, weil sich der Lichtweg verkürzt hat. Gleichzeitig hat sich der Lichtweg in der anderen Richtung verlängert. Aus dem Interferenzmuster, welches die beiden überlagernden Wellen am Photodetektor erzeugen, kann auf die Drehbewegung geschlossen werden.

Die zwei Hauptarten von optischen Gyros sind Ring Laser Gyros (RLG) und faseroptische Gyros (FOG). Während sich RLGs durch einen kurzen Lichtweg auszeichnen, weisen FOGs längere Lichtwege auf. Weiters basiert der RLG auf dem aktiven Resonatorprinzip, während FOGs hauptsächlich dem Interferometerprinzip folgen.

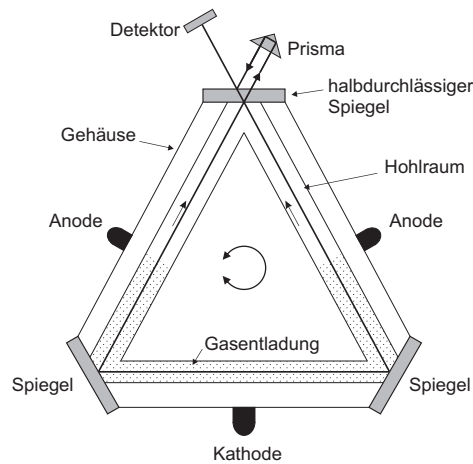


**Abbildung 2.7:** Ringinterferometer nach Lawrence (1998)

### Ring Laser Gyros (RLGs)

Der Lichtweg eines RLGs ist ein drei- oder mehrseitiges Polygon, an dessen Enden sich hochqualitative Spiegel befinden (siehe Abbildung 2.8). Einer der Spiegel ist halbdurchlässig, dahinter befindet sich ein Photodetektor. Der geschlossene Lichtweg selbst befindet sich in einem ausgehöhlten Glaskörper, der mit Helium-Neon Gas gefüllt ist. Das Gas wird mithilfe zweier Anoden und einer Kathode mit hoher Spannung (ca. 1000V) geladen, wodurch es zur Gasentladung kommt und Laserstrahlen in beide Richtungen freigesetzt werden. Das Helium-Neon Gas mit den Anoden und der Kathode fungiert beim RLG als Laserresonator, d. h. die Wellenlänge der erzeugten Strahlung passt sich gemäß dem Resonatorprinzip an die Länge des Lichtweges an und beträgt immer ein Vielfaches des Lichtweges. Treten keine Drehbewegungen auf, so sind die Lichtwege und somit auch die Frequenzen der beiden Strahlen gleich. Am Photodetektor entstehen ortsfeste Interferenzstreifen. Sobald eine Drehbewegung in Richtung der sensitiven Achse auftritt, unterscheiden sich die Frequenzen der beiden Lichtstrahlen aufgrund der unterschiedlichen Resonatorlängen. Am Photodetektor entstehen nun wandernde Interferenzstreifen, die Hell-Dunkel-Impulse werden gezählt und sind ein Maß für die Drehbewegung. Detailliertere Informationen zur Funktionsweise bringen von Fabeck (1980) und Lawrence (1998).

Ein wesentlicher Nachteil des RLGs ist der sogenannte Unempfindlichkeitsfehler (engl. lock-in error). Dieser macht sich bei Drehgeschwindigkeiten  $< 0.1^\circ/\text{h}$  störend bemerkbar (von Fabeck, 1980). Obwohl der Gyro entlang seiner sensitiven Achse geringe Drehbewegungen erfährt, sind die Frequenzen der Laserstrahlen gleich, wodurch am Photodetektor keine Drehbewegungen registriert werden. Abhilfe schafft z. B. das sogenannte *Dithering* (zu deutsch zittern). Hierbei wird der Resonator entlang seiner sensitiven Achse rasch hin- und hergedreht, sodass die Drehbewegung stets größer als der kritische Wert ist. Das Zittern hat zur Ursache, dass die Einzelmessungen stark verrauscht sind, im zeitlichen Mittel jedoch genau jene Drehbewe-

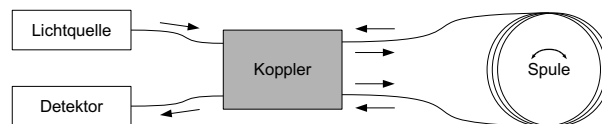


**Abbildung 2.8:** Schematischer Aufbau eines Ring Laser Gyros nach Hofmann-Wellenhof et al. (2003)

gung angezeigt wird, die er von außen erfährt. Weitere Details zum Unempfindlichkeitsfehler und zu anderen Lösungsansätzen liefert u. a. Lawrence (1998).

### Faseroptischer Gyros (FOGs)

Der FOG beruht in den meisten Fällen auf dem Interferometerprinzip, daher wird hier im Speziellen der interferometrische FOG (IFOG) erklärt. Beim IFOG erzeugt ein Laser eine Welle, welche in einem Koppler in zwei Anteile aufgespalten wird. Diese durchlaufen eine Glasfaser-Spule mit einer Länge von 1000 und mehr Metern im und gegen den Uhrzeigersinn (schematischer Aufbau siehe Abbildung 2.9). Anschließend werden die beiden Anteile in einem Koppler wieder vereint, wobei es zu Überlagerungseffekten kommt. Wirkt nun ein Drehimpuls auf den Sensor, dann tritt ein Phasenunterschied zwischen den beiden Laseranteilen aufgrund des Sagnac Effekts auf. Aufgrund des Phasenunterschiedes entstehen Interferenzlinien (Hell-Dunkel-Übergänge), welche vom Photodetektor erfasst und anschließend ausgewertet werden. Die Anzahl dieser Hell-Dunkel-Übergänge ist ein Maß für die aufgetretene Drehbewegung.



**Abbildung 2.9:** Schematischer Aufbau eines faseroptischen Gyros nach Hofmann-Wellenhof et al. (2003)

## 2.3 Sensorfehler

Wie bei jedem Messsystem sind auch die Messungen der Accelerometer und Gyros mit Fehlern behaftet. Je nach Sensortyp unterscheiden sich die Fehlerquellen, die Auswirkungen sind jedoch bei den meisten Sensoren gleich. Im Folgenden werden die wichtigsten Sensorfehler kurz beschrieben und grafisch veranschaulicht, ohne deren mathematische Modellierung zu betrachten. Eine ausführlichere Erläuterung findet man z. B. in Lawrence (1998) oder Titterton und Weston (2004).

Der *Bias* ist laut Definition ein zeitlich konstanter Fehler und beschreibt jenen Wert, der vom Sensor bei fehlendem Eingangssignal ausgegeben wird (siehe Abbildung 2.10a). Im Fall der Accelerometer bedeutet dies, dass bezüglich des inertialen Raumes keine Beschleunigung auftritt, im Fall der Gyros tritt keine Drehbewegung auf. In der Fachliteratur wird beim Gyro der Begriff *Bias* sehr oft als *Drift* bezeichnet. Dies kommt daher, dass sich bei freien mechanischen Kreisel die Laufachse aufgrund des fortlaufend auftretenden Bias mit der Zeit kontinuierlich ändert und somit zu einer Drift führt. Bei den heute modernen optischen Gyros driften aufgrund des Bias die aufintegrierten Attitudewinkel.

Der *Skalenfaktor* beschreibt das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Die meisten Sensoren weisen ein Ausgangssignal auf, das direkt proportional zum Eingangssignal ist. Der Skalenfaktor entspricht somit der Steigung jener Geraden, die man erhält, wenn man das Eingangssignal über einen entsprechenden Bereich variiert (siehe Abbildung 2.10a). Die Steigung der mittleren Geraden erhält man mittels Ausgleich nach kleinsten Quadraten. Im Falle von Nichtlinearitäten des Skalenfaktors kann ein Polynom höherer Ordnung angepasst werden. Manchmal weisen Instrumente unterschiedliche Skalenfaktoren für positive und negative Eingangssignale auf. Dies nennt man *Skalenfaktorasymmetrie*. Der *Skalenfaktorfehler* entspricht bei einem linearen Skalenfaktor der maximal möglichen Abweichung von der im Ausgleich bestimmten Geraden und wird oft als Verhältniszahl der maximalen Abweichung zum Messintervall angegeben.

Ein weiterer Sensorfehler ist der *Kreuzkopplungsfehler*. Er tritt vor allem bei Sensoransammlungen (z. B. einer IMU), aber auch bei einzelnen Sensoren auf. Er gibt an, welche Fehler durch Instabilitäten der sensitiven Achsen entstehen. Bei einer IMU beschreibt er jenen Fehler, der auftritt, wenn die Sensorachsen nicht aufeinander orthogonal stehen.

Beim *Random Drift* befindet sich der Sensor in Ruhe (kein Signal am Eingang), der Messwert am Ausgang variiert jedoch aufgrund von Störungen innerhalb des Sensors um kleine Beträge.

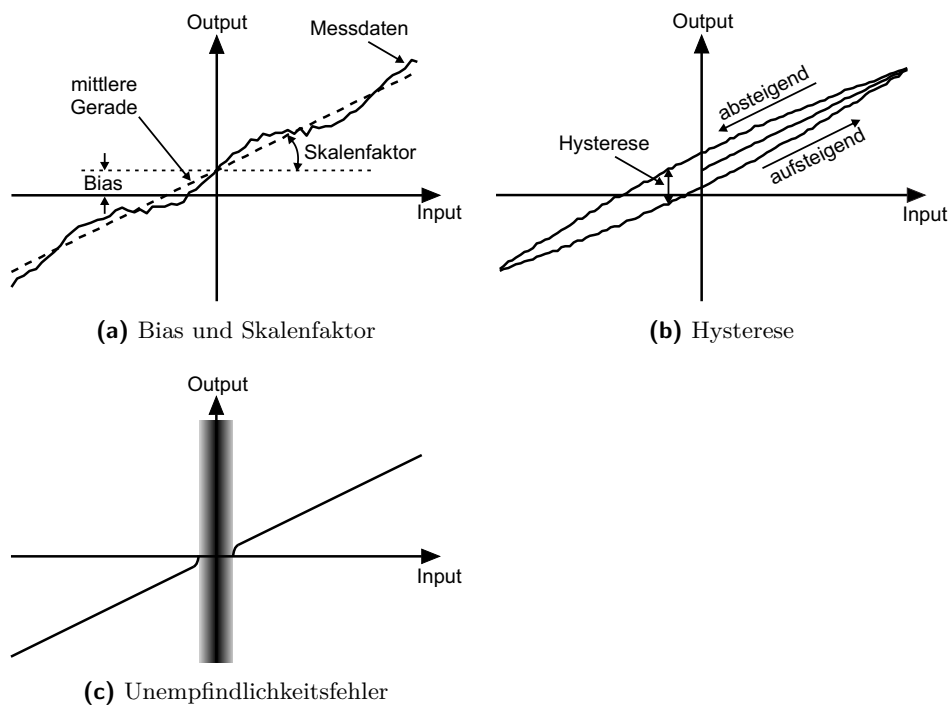
Der *Random Walk* ist ein Fehler, der z. B. bei optischen Gyros auftritt. Das weiße Messrauschen führt auf lange Zeit gesehen zu einem zufälligen Anwachsen von Fehlern in der Attitude.

Die *Hysteresis* beschreibt den Unterschied des Verlaufs des Ausgangssignals bei stetig steigendem Eingangssignal zu jenem Verlauf bei stetig sinkendem Eingangssignal (siehe Abbildung 2.10b). Der maximale Unterschied zwischen beiden Verläufen wird als Hysteresefehler bezeichnet (Lawrence, 1998).

Ein nicht zu unterschätzender Sensorfehler, der u. a. beim RLG auftritt, ist der *Unempfindlichkeitsfehler* (dead band error oder auch lock-in error). Er beschreibt das Problem, dass sehr kleine Messwerte nicht erfasst werden können (siehe Abbildung 2.10c). Ein Grund dafür kann wie beim RLG das Messprinzip sein, es kann jedoch auch daher kommen, dass das Messrauschen größer als der Messwert ist und daher nicht detektierbar ist.

*Einschaltvariationen* (day-to-day uncertainty oder switch-on-switch-of error) beschreiben variable Anteile im Bias und Skalenfaktor, die bei jedem Einschalten der Sensoren variieren, jedoch für die Laufzeit konstant bleiben. Gründe dafür können z. B. Alterungserscheinungen interner Komponenten oder Stöße während der Lagerung sein.

Weitere systematische wie auch zufällige Fehler können durch die Elektronik hervorgerufen werden und müssen, wenn möglich, modelliert werden. Als Beispiel soll hier der Analog-Digital-Wandler erwähnt werden, der für die Digitalisierung analoger Messsignale verantwortlich ist. Sein Verhalten kann stark temperaturabhängig sein und muss in diesem Fall modelliert werden. Prinzipiell ist zu beachten, dass die einzelnen Fehler neben konstanten Anteilen auch temperaturabhängige Anteile, Einschaltvariationen und Laufzeitvariationen aufweisen. Während die konstanten Anteile in einem Kalibrierungsverfahren bestimmt werden können, können die variablen Anteile ausschließlich zur Laufzeit (während dem Alignment, durch Sensorintegration oder eventuell durch Kalibrierung) bestimmt werden. Im Fall der Laufzeitvariationen spricht man speziell bei den Accelerometern oft von *Random Biases*.



**Abbildung 2.10:** Wichtige Sensorfehler



## 3 Inertialnavigation

Jekeli (2001) beschreibt den Begriff der Inertialnavigation wie folgt: „Mittels Inertialnavigation lassen sich in Echtzeit Position und Geschwindigkeit eines sich in Bewegung befindlichen Fahrzeugs bestimmen, indem Sensoren zum Einsatz kommen, welche den Newton’schen Gesetzen der Bewegung gehorchen.“

Eine andere Definition liefern Titterton und Weston (2004): „Unter Inertialnavigation versteht man den Prozess der Bestimmung von Position, Geschwindigkeit, Attitude und Heading eines Fahrzeugs mittels Messdaten von inertialen Sensoren.“

Der deutsche Begriff für Inertialnavigation ist Trägheitsnavigation. In dieser Arbeit wird jedoch der eingedeutschte Begriff Inertialnavigation verwendet, der auch in der Fachliteratur am häufigsten Verwendung findet.

Um Inertialnavigation betreiben zu können, benötigt man entweder eine inertielle Messeinheit (IMU) oder ein inertiales Navigationssystem (INS). Streng genommen ist eine IMU ein Messsystem bestehend aus mehreren Accelerometern und Gyros, um die Beschleunigungen und Drehraten in allen drei Raumrichtungen zu erfassen. Dazu verwendet man entweder jeweils drei Einachsinstrumente oder sogenannte Mehrachsinstrumente. Zusätzlich beinhaltet eine IMU die notwendige Elektronik und einen optionalen Mikroprozessor zur Kompensation etwaiger Sensorfehler. Ein INS erweitert die IMU um einen Mikroprozessor zur Echtzeitpositionierung wie auch zur Integration mit anderen Sensoren wie z. B. GNSS (Global Navigation Satellite System) (Titterton und Weston, 2004).

### 3.1 Geschichtliche Entwicklung der Navigation

Seit jeher war es die Aufgabe der Lebewesen sich auf der Erde zu bewegen, um Nahrung zu finden. Sie orientierten sich anhand markanter Punkte wie Berge, Flüsse etc. Als die Menschheit Wissen über das Sonnensystem und die Himmelskörper erlangte, wurden die Sterne ebenfalls als Orientierungs- und somit Navigationshilfe herangezogen. So gelang z. B. den Polynesiern vor ungefähr 2000 Jahren die Überquerung des Pazifiks. Probleme gab es jedoch bei schlechten Wetterverhältnissen. Das erste Navigationsequipment, welches unabhängig von Sichtverhältnissen funktionierte, war wahrscheinlich (Historiker sind sich darüber nicht einig) ein Prototyp eines Odometers, der etwa 2600 v. Chr. von den Chinesen entwickelt

wurde und so wie ein Odometer heute zur Bestimmung zurückgelegter Wegstrecken diente. Die erste westliche Beschreibung eines Odometers stammt aus dem Jahr 100 v. Chr. von Hero von Alexandria und dem römischen Architekten Vitruvius. Zwischen dem 12. und 13. Jahrhundert wurde dann fast zeitgleich der magnetische Kompass zur Richtungsbestimmung in China wie auch in Italien erfunden. Weitere Instrumente zur Positionsbestimmung wie der Quadrant, der Kreuzstab, das Astrolabium und der Sextant folgten.

Im 17. und 18. Jahrhundert sorgten Johannes Kepler, Galileo Galilei und Sir Isaac Newton für neue wissenschaftliche Erkenntnisse, die wichtige Grundlagen der Inertialnavigation bilden. Johannes Kepler (1571-1630) gilt als der Erfinder der Planetenbewegung, Galileo Galilei (1564-1642) als der Erfinder der Mechanik und Sir Isaac Newton (1642-1727) formulierte die Gesetze der Mechanik und Gravitation.

Die Entdeckung des gyroskopischen Effekts wird dem französischen Physiker Foucault im Jahr 1852 zugeschrieben. Foucault, sowie auch andere Wissenschaftler wie Bohneberger, Johnson und Lemarle untersuchten die Erdrotation und nutzten die Eigenschaft, dass schnell drehende Scheiben fix im Raum stehen.

In den frühen 1920er Jahren wurde der Kreiselkompass entwickelt, der vor allem in Schiffen eingesetzt wurde. Er ermöglichte die Bestimmung der wahren (geografischen) Nordrichtung im Unterschied zur magnetischen Nordrichtung, die ein Kompass liefert. An der Weiterentwicklung des Kreiselkompasses war auch Max Schuler beteiligt, nach ihm wurde später auch die Schuler Periode benannt. Die Entwicklungen auf dem Gebiet der richtungsfindenden Instrumente war enorm. Sie fanden in Flugzeugen zur Navigationshilfe und als Autopilot Verwendung. Schuler entwickelte ein Instrument, welches es ermöglichte, die Nordrichtung an Land auf 22 Bogensekunden genau zu bestimmen. Große Fortschritte konnten im Bereich von kardanischem gelagerten Raketenabschussystemen erzielt werden. Weiters wurde erstmals das Konzept eines INS von Boykov definiert, die Sensoren waren jedoch zu diesem Zeitpunkt noch nicht genügend ausgereift.

Erste Konzepte für die Land- und Schiffsnavigation entwarf J. Gievers in Deutschland vor und während des 2. Weltkrieges. Im Krieg wurden außerdem erstmals inerte Sensoren in Raketen eingesetzt. Zu dieser Zeit wurde weltweit sehr viel auf dem Gebiet der inertialen Sensorik geforscht. Bereits 1949 gab es die erste Publikation zur Strapdown Technologie, eine Realisierung war jedoch aufgrund der Sensortechnologien noch nicht möglich. In den 50er Jahren gab es eine Menge neuer Entwicklungen im Bereich der Marine- und Flugnavigation. Vor allem die hohe Geschwindigkeit stellte in der Flugnavigation jedoch noch Probleme dar. Einer der Vorreiter in der Flugnavigation war unter anderem Charles Draper vom Massachusetts Institute of Technology (MIT). Im selben Jahrzehnt konnte die Genauigkeit der Gyros von  $15^\circ/\text{h}$  auf  $0.01^\circ/\text{h}$  gesteigert werden. Weiters wurde das erste kardanischem gelagerte INS produziert. Bereits in den 60er Jahren wurden INS in militärischen Flugzeugen, Schiffen und U-Booten Standard, bei sämtlichen Systemen handelte es sich um kardanischem gelagerte INS. Zu dieser Zeit konnte die Genauigkeit der Sensoren stark gesteigert werden,

zusätzlich begann die Entwicklung der Ring Laser Gyros. Außerdem wurde auf dem Gebiet der Weltraumnavigation und der Raketenzielführung geforscht. Bereits in den 70er Jahren wurden INS auch in der zivilen Luftfahrt eingesetzt.

In den letzten zwei bis drei Jahrzehnten gab es enorme Veränderungen im Bereich der Inertialnavigation aufgrund der Entwicklungen auf dem Gebiet der Mikro-Computer und der Gyros. Dies ermöglichte die Realisierung der Strapdown Technologie. Weiters konnten dadurch Größe, Komplexität und Kosten der Sensoren verringert werden, wodurch sich für INS neue Anwendungsbereiche ergaben. Es fanden enorme Weiterentwicklungen bei monolithischen Sensoren wie FOGs und Accelerometern aus Silikon statt. In der Luftfahrt spielte neben der Inertialnavigation die Radionavigation eine wesentliche Rolle. Beide Systeme wurden seit der Operabilität von GPS stark in den Schatten gestellt.

Die Entwicklung von INS hat sich in den letzten Jahren von kardanischn gelagerten Systemen auf Strapdown Systeme verlagert. Grund dafür waren die enormen Weiterentwicklungen der Gyros wie RLG, FOGs, vibrierende Gyros und MEMS Sensoren. So werden Strapdown Systeme heute mehr und mehr in Flugzeugen, Lenkflugkörpern, Schiffen und U-Booten eingesetzt. Neue Einsatzgebiete sind zum Beispiel die Robotik, die Kontrolle von Pipelines oder der Ausgleich des Wellengangs einzelner Kabinen in einem Schiff.

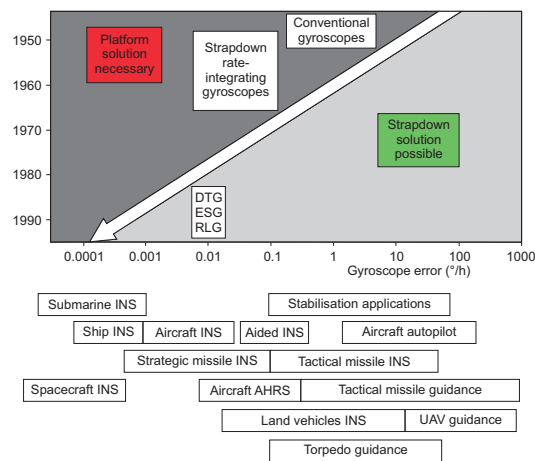
Obwohl die Inertialnavigation durch GPS in den Schatten gestellt wurde, spielt sie auch heute noch eine wichtige Rolle, und zwar in U-Booten, zur Unterstützung von Satelliten- und Radionavigation sowie zur autonomen Navigation und Zielführung (Jekeli, 2001).

Wie man anhand der verschiedensten Anwendungsgebiete sehen kann unterscheiden sich diese zum Teil sehr stark in ihren Genauigkeitsanforderungen und ihrer Laufzeit. Während Kurzstreckenraketen nur wenige Sekunden bis Minuten fliegen und Genauigkeiten auf wenige 100 Meter erreichen müssen, sind luftgestützte Systeme mehrere Stunden unterwegs und müssen auf wenige Kilometer genau sein. Im Bereich der Raumfahrt sind diese Genauigkeiten sogar über Wochen, Monate oder länger zu gewährleisten (Titterton und Weston, 2004).

Abbildung 3.1 liefert einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung und den Einsatz von INS.

## 3.2 Mechanische Umsetzung

Das Grundprinzip aller inertialen Navigationssysteme ist dasselbe, sie unterscheiden sich lediglich durch ihre Realisierung, d. h. durch die physikalische Anordnung der inertialen



**Abbildung 3.1:** Sensorentwicklung mit einigen Anwendungen nach Titterton und Weston (2004)

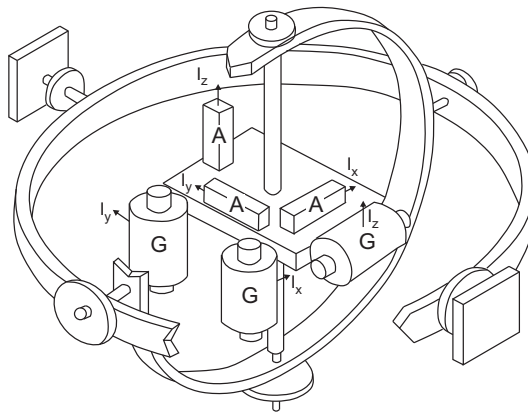
Sensoren relativ zum Fahrzeug sowie zum inertialen, zum Navigations- bzw. zum Body-Koordinatensystem (Jekeli, 2001). Die einzelnen hier erwähnten Koordinatensysteme sind in Kapitel 3.3 näher beschrieben.

Es existieren prinzipiell zwei Typen von mechanischen Umsetzungen, einerseits kardanisch gelagerte Systeme (engl. stable platforms) und andererseits Strapdown Systeme. Auch im Deutschen wird der englische Begriff Strapdown System verwendet, die Übersetzung des Wortes *strapdown* ist „festgeschnallt, niedergeschnallt“. Im 20. Jahrhundert waren die kardanisch gelagerten Systeme federführend. Hier erfolgt eine Isolation sämtlicher Drehbewegungen. Sie werden heute noch dort eingesetzt, wo sehr hohe Genauigkeiten gefordert sind. In den letzten Jahren des 20. Jahrhunderts wurden die kardanisch gelagerten Systeme immer mehr von den sogenannten Strapdown Systemen abgelöst. Hierbei wird auf eine komplizierte Mechanik verzichtet, sämtliche Sensoren sind fest mit dem Fahrzeug verbunden. Dies ermöglicht eine kostengünstigere Produktion, eine geringere Größe und eine größere Zuverlässigkeit. Durch die verringerte Größe ergab sich auch die Möglichkeit der Integration von INS in militärischen Raketen. Nachteile der Strapdown Systeme sind die komplexere Berechnung und die Notwendigkeit höherer Aufzeichnungsraten bei den Gyros.

### 3.2.1 Kardanisch gelagerte Systeme

Diese Art von mechanischer Umsetzung besteht aus einer im inertialen Raum gleichbleibend ausgerichteten Plattform, welche über Kardangelenke mit dem Fahrzeug verbunden ist (siehe Abbildung 3.2). Alternativ dazu kann das System auch so implementiert werden, dass es stets entsprechend dem lokalen Horizontsystem oder dem Wanderazimuthsystem orientiert ist. Auf der Plattform befinden sich die Gyros (G) und Accelerometer (A) mit ihren sensi-

tiven Achsen  $I_x$ ,  $I_y$  und  $I_z$ . Die Isolation der Drehbewegungen könnte theoretisch über die Gyros selbst erfolgen. Diese Idee wurde jedoch aufgrund von Reibungseffekten in den Lagern der Gyros verworfen. Anstelle dessen werden die Drehraten, die von den Gyros gemessen werden, dazu verwendet, um die Servomotoren in den Kardangelenken zu steuern. Somit werden die auftretenden Drehraten von den Servomotoren ausgeglichen und die Plattformausrichtung bleibt konstant. Die stabilisierten Sensoren messen dadurch die Beschleunigungen und Drehraten bereits im Navigationsframe. Die gemessenen Beschleunigungen dienen nun zur Berechnung von Geschwindigkeit und Position. Die Kenntnis der Attitudewinkel der Plattform ist nicht erforderlich, eine Ausgabe ist jedoch möglich, um sie gegebenenfalls auch an andere Systeme wie z. B. in Flugzeugen weiterzugeben. Da die Messungen bereits im Navigationsframe stattfinden, verringert sich der Rechenaufwand. Außerdem weisen kardanisch gelagerte Systeme im Vergleich zu Strapdown Systemen eine höhere Genauigkeit auf (Jekeli, 2001).



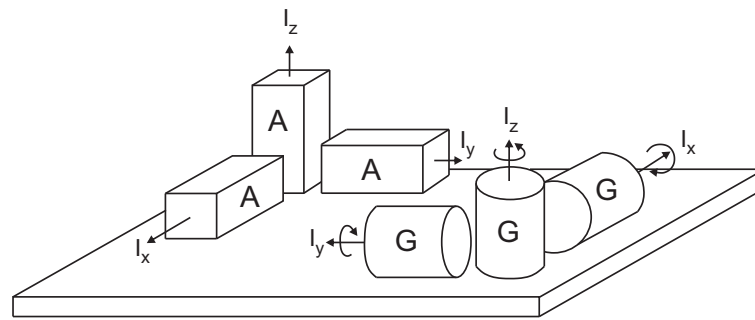
**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung eines kardanisch gelagerten Systems nach Jekeli (2001)

Mehr Details zu dieser Art von Systemen sowie zu den unterschiedlichen Realisierungen findet man z. B. in Jekeli (2001).

### 3.2.2 Strapdown Systeme

Bei einem Strapdown System befinden sich sämtliche Sensoren in einer Box, die fix mit dem Fahrzeug verbunden ist (siehe Abbildung 3.3). Die inertialen Sensoren registrieren somit sämtliche auf das Fahrzeug wirkende Dynamiken. Eine eventuelle Dämpfung schützt die IMU vor etwaigen Stößen und reduziert Vibrationen.

Laut Jekeli (2001) haben Strapdown Systeme eine schlechtere Systemperformance wegen der zusätzlich auf das System wirkenden Fahrzeugdynamiken (z. B. Hebelarmeffekt bei Accelerometern aufgrund von Drehbewegungen des Fahrzeugs, da alle drei Accelerometer nicht genau



**Abbildung 3.3:** Schematische Darstellung eines Strapdown Systems nach Jekeli (2001)

im selben Punkt befestigt sein können). Ein Teil der Effekte kann durch Laborkalibrierung kompensiert werden.

Strapdown Systeme haben den Vorteil, dass sie beliebig montiert werden können, da die Transformation der Messwerte vom Body Frame in den Navigationsframe rein rechen-technisch erfolgt. Trotzdem sollte die Montage so erfolgen, dass Sensorfehler minimiert werden. Weitere Vorteile sind eine geringere Größe, ein geringeres Gewicht, ein geringerer Strombedarf und geringere Kosten im Vergleich zu kardanisch gelagerten Systemen. Außerdem sind Strapdown Systeme aufgrund der nicht vorhandenen Mechanik wartungsfreundlicher und weniger fehleranfällig.

### 3.3 Strapdown Implementierung

Im folgenden Abschnitt werden die Navigationsgleichungen eines Strapdown Systems im lokalen Horizontsystem aufgelistet und erklärt. Während die Formeln des Alignments auf der Methode der Rotationsmatrizen (Richtungskosinusmatrizen) basieren, wird bei den Formeln des Strapdown Algorithmus die Methode der Quaternionen angewandt. Die Formeln für andere Koordinatensysteme wie auch andere Attitude Repräsentationen sind in der gängigen Literatur wie z.B. Jekeli (2001) oder Titterton und Weston (2004) nachzulesen.

Bevor nun im Detail auf die Formeln der Strapdown Berechnung eingegangen wird, liefert der nächste Abschnitt einige mathematische Grundlagen.

#### 3.3.1 Mathematische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden jene Grundlagen der Mathematik beschrieben, die essentiell für den Strapdown Algorithmus sind. Dies umfasst u. a. die Definitionen der zum Einsatz

kommenden Koordinatensysteme, diverse Transformationen, Axiatoren und Axialvektoren, Grundlagen zur Attitude und zu Quaternionen sowie Formeln zur Berechnung der Normal-schwere.

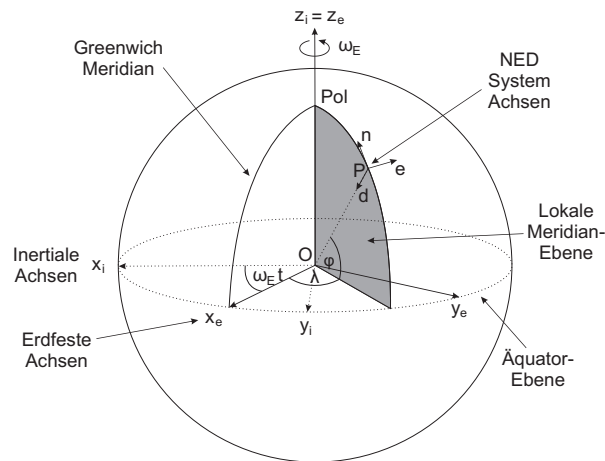
#### Koordinatensysteme

In den Formeln des Strapdown Algorithmus kommen verschiedene Koordinatensysteme (engl. frames) zum Einsatz. Bei all diesen Systemen handelt es sich um dreidimensionale kartesische rechtsdrehende Systeme. Da sie alle einen Bezug zur Erde besitzen, ist der Wechsel zwischen den Systemen mittels Transformationen möglich.

Der *inertiale Frame* (i-Frame) besitzt seinen Ursprung im Zentrum der Erde (siehe Abbildung 3.4, Punkt O), seine  $z_i$ -Achse fällt mit der mittleren Rotationsachse der Erde zusammen. Die  $x_i$ -Achse ist die Schnittlinie der Äquatorebene mit der Ekliptikebene in Richtung des Frühlingspunkts. Die  $y_i$ -Achse steht orthogonal auf  $x_i$  und  $z_i$  und bildet ein Rechtssystem. Durch diese Definition behalten die Achsen ihre Richtung im inertialen Raum bei. Laut Definition ist ein inertiales Koordinatensystem ein nicht beschleunigtes System, das sich in Ruhe befindet oder eine gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit) erfährt. Der hier beschriebene inertiale Frame ist daher nur ein quasi-inertiales Koordinatensystem, da sich das Erdzentrum nicht vollkommen gleichförmig bewegt.

Das *erdfeste Koordinatensystem* (e-Frame) hat seinen Ursprung ebenfalls im Zentrum der Erde und seine  $z_e$ -Achse fällt ebenfalls mit der mittleren Rotationsachse der Erde zusammen. Dieses System dreht sich jedoch mit der Erde mit und dient der Bestimmung von Punkten auf der Erde. Die  $x_e$ -Achse ist die Schnittgerade zwischen Äquatorebene und Greenwich Ebene und die  $y_e$ -Achse steht wieder senkrecht auf  $x_e$  und  $z_e$ . Die Transformation zwischen inertialen Frame und erdfestem Koordinatensystem erfolgt durch eine Drehung um die gemeinsame z-Achse um den sogenannten Stundenwinkel ( $\omega_E t$ ), der sich aus der Erdrotation  $\omega_E$  multipliziert mit der Zeit  $t$  zusammensetzt.

Im *Navigationsframe* (n-Frame) werden sehr häufig die Navigationsgleichungen des Strapdown Algorithmus aufgestellt. Dieses System wird auch als lokales Horizontsystem (engl. local-level frame) oder auch als North-East-Down (NED) System bezeichnet. Der Ursprung des Systems ist beliebig und liegt im Falle der Inertialnavigation im Ursprung des INS. Die n-Achse zeigt Richtung Norden, die e-Achse nach Osten und die d-Achse entlang der Ellipsoidnormalen nach unten. Manche Autoren wie z.B. Savage (2007) unterscheiden zusätzlich zwischen dem lokalen Horizontsystem und dem Navigationsframe mit den Achsen in Richtung Osten, Norden und Oben. In Anlehnung an Titterton und Weston (2004) bzw. Jekeli (2001) wird der Navigationsframe jedoch dem lokalen Horizontsystem gleichgesetzt. Die Formeln zur Transformation vom n-Frame in den e-Frame folgen auf Seite 27.

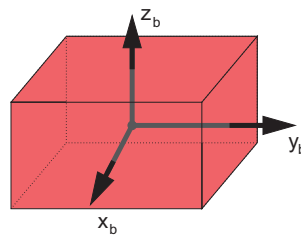


**Abbildung 3.4:** Koordinatensysteme

Der *Body Frame* (b-Frame) oder das Body System (deutsch Körperkoordinatensystem) beschreibt die Ausrichtung der sensitiven Achsen der IMU als 3D-kartesisches Koordinatensystem (siehe Abbildung 3.5). Die Messdaten beziehen sich auf dieses System und müssen in weiterer Folge mithilfe der Attitudewinkel Roll, Pitch und Yaw in den Navigationsframe transformiert werden (mehr Details dazu siehe Seite 31).

Zur einfacheren Schreibweise werden im Folgenden nur mehr die Kurzbezeichnungen i-Frame, e-Frame, n-Frame und b-Frame verwendet. Der Großteil der Formeln in diesem Abschnitt stammt aus Hofmann-Wellenhof et al. (2003), der den Navigationsframe l-Frame (local-level frame) nennt. Im Bereich der Inertialnavigation ist jedoch die Bezeichnung n-Frame verbreiteter und wird daher in dieser Arbeit verwendet.

Die Abbildung 3.4 zeigt die Beziehungen zwischen i-Frame, e-Frame und n-Frame. Die Theorie und die praktische Umsetzung der Transformationen zwischen den Systemen folgen in den nächsten Abschnitten.



**Abbildung 3.5:** Body Frame



**Theorie zu Transformationen allgemeiner Art**

Um zwischen zwei beliebigen Koordinatensystemen zu wechseln, bedarf es der sogenannten 7-Parameter-Transformation oder auch Helmert Transformation

$$x^q = c + \mu R_p^q x^p. \quad (3.1)$$

Die 7 Parameter setzen sich aus drei Translationen ( $c$ ), einem Maßstab ( $\mu$ ) und drei Rotationen ( $R_p^q$ ) zusammen. Formel 3.1 beschreibt den Übergang des Vektors  $x^p$  vom System  $p$  ins System  $q$ , wobei die Systeme einen unterschiedlichen Ursprung und Maßstab und eine unterschiedliche Ausrichtung haben.

In der Anwendung der Inertialnavigation werden Transformationen fast ausschließlich eingesetzt um Rotationen durchzuführen, wodurch von den 7 Parametern der Helmert Transformation nur mehr die drei Parameter der Rotation übrig bleiben. Einzige Ausnahme ist die Transformation zwischen e-Frame und n-Frame, wobei es sich hierbei um keine Helmert Transformation handelt.

Die Rotationsmatrix (auch Richtungskosinusmatrix genannt)  $R_p^q$  beschreibt die Rotation eines Vektors vom System  $p$  (tiefgestellter Index) ins System  $q$  (hochgestellter Index):

$$x^q = R_p^q x^p \quad (3.2)$$

Mit dieser Transformation können jegliche Vektoren (auch Ortsvektoren) rotiert werden. In der Inertialnavigation werden Rotationsmatrizen hauptsächlich verwendet, um Beschleunigungs- und Drehratenvektoren zu transformieren. Rotationsmatrizen besitzen die wesentliche Eigenschaft der Orthonormalität. Daraus folgt

$$R_p^{qT} R_q^p = R_p^q R_q^{pT} = I, \det(R_p^q) = 1, (R_p^q)^{-1} = (R_p^q)^T \quad (3.3)$$

wobei  $I$  für die Einheitsmatrix und  $\det$  für Determinante steht. Möchte man nun eine Rotation durchführen, so muss zuerst festgelegt werden, um welche Achse  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) und um welchen Winkel  $\alpha$  gedreht werden soll. Bei rechtsdrehenden Systemen beschreiben die folgenden elementaren Rotationsmatrizen Drehungen im Uhrzeigersinn. Somit beschreibt  $R_1$  eine Drehung um  $x_1$ ,  $R_2$  eine Drehung um  $x_2$  etc.

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$
$$R_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Übergang vom System p in ein beliebig verdrehtes System q kann durch drei sequentielle Drehungen um die  $x_i$ -Achsen erfolgen. Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Teildrehungen von Bedeutung ist. Formel 3.5 beschreibt den allgemeinen Übergang zwischen zwei Systemen, wobei zuerst um  $x_1$ , dann um  $x_2$  und dann um  $x_3$  gedreht wird. Die drei Winkel  $\alpha_i$  werden als Eulerwinkel bezeichnet.

$$R_p^q = R_3(\alpha_3) R_2(\alpha_2) R_1(\alpha_1) \quad (3.5)$$

### Anwendung von Transformationen im Strapdown Algorithmus

Eine für den Strapdown Algorithmus indirekt benötigte Transformation ist die Umrechnung zwischen erdfesten ellipsoidischen Koordinaten  $(\varphi, \lambda, h)$  und den dazugehörigen kartesischen Koordinaten  $(x^e)$

$$x^e = \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ (N + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N + h\right) \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

wobei N der Normalkrümmungsradius mit der Definition

$$N = \frac{c}{V} \quad (3.7)$$

ist und a und b die große und kleine Halbachse des Ellipsoids darstellen. Die Hilfsgrößen c, V und  $e'^2$  berechnen sich ebenfalls aus a und b:

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2(\varphi)}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (3.8)$$

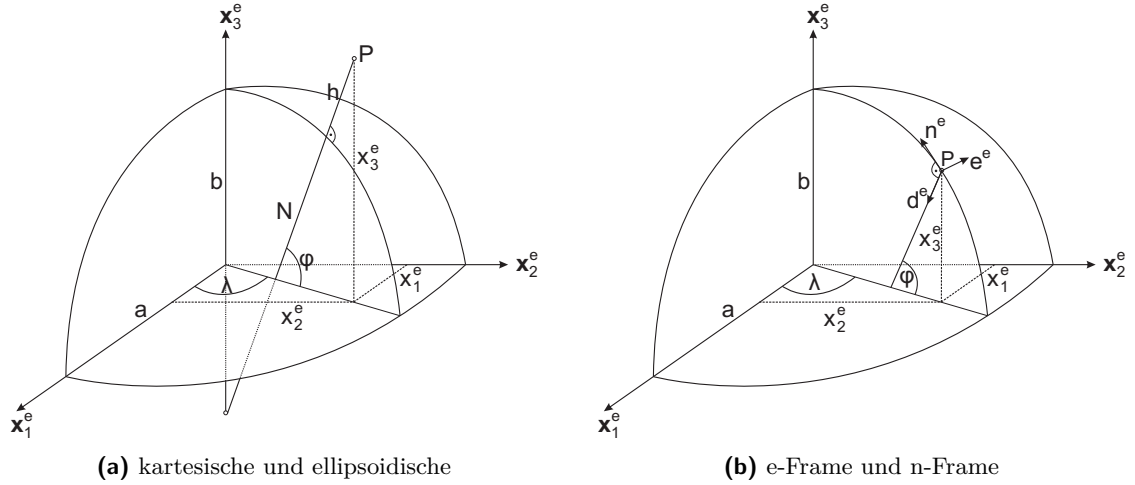
Für spätere Berechnungen wird zusätzlich der Meridiankrümmungsradius M benötigt, dessen Definition

$$M = \frac{c}{V^3} \quad (3.9)$$

ist. Abbildung 3.6a zeigt den geometrischen Zusammenhang zwischen ellipsoidischen und kartesischen Koordinaten.

Die Transformation zwischen n-Frame und e-Frame ist nicht so trivial, da die beiden Systeme nicht den gleichen Mittelpunkt besitzen (siehe Abbildung 3.6b). Möchte man jedoch nur die Orientierung der Achsen zueinander beschreiben, so erfolgt dies über die zusammengesetzte Transformation

$$R_n^e = R_3(-\lambda) R_2(\pi/2 + \varphi) = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & -\cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ -\sin(\varphi) \sin(\lambda) & \cos(\lambda) & -\cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$


**Abbildung 3.6:** Koordinaten

Mit dieser Formel lassen sich keine Punkte (Ortsvektoren), sehr wohl aber Vektoren transformieren.

Beim Strapdown Algorithmus werden Beschleunigungen und Geschwindigkeiten im n-Frame behandelt, die Positionen hingegen im e-Frame. Um die Positionen im e-Frame berechnen zu können, muss der Geschwindigkeitsvektor vom n-Frame in den e-Frame transformiert werden. Die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit im n-Frame und jener im e-Frame lautet

$$v^n = \begin{bmatrix} v^n \\ v^e \\ v^d \end{bmatrix} = R_e^n \dot{x}^e. \quad (3.11)$$

$\dot{x}^e$  beschreibt die zeitliche Ableitung des Ortsvektors  $x^e$  (Gleichung 3.6) und lautet nach Jekeli (2001)

$$\dot{x}^e = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}(M+h)\sin(\varphi)\cos(\lambda) - \dot{\lambda}(N+h)\cos(\varphi)\sin(\lambda) + \dot{h}\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ -\dot{\varphi}(M+h)\sin(\varphi)\sin(\lambda) + \dot{\lambda}(N+h)\cos(\varphi)\cos(\lambda) + \dot{h}\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ \dot{\varphi}(M+h)\cos(\varphi) + \dot{h}\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Setzt man nun Gleichung 3.12 in Gleichung 3.11 ein und vereinfacht, erhält man

$$v^n = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(M+h) \\ \dot{\lambda}(N+h)\cos(\varphi) \\ -\dot{h} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v^n}{M+h} \\ \frac{v^e}{(N+h)\cos(\varphi)} \\ -v^d \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

### Infinitesimale Drehungen

Bei infinitesimal kleinen Drehwinkeln verändern sich die Rotationsmatrizen aus Gleichung 3.4 entsprechend der Approximationen  $\sin(\psi) \approx \psi$  und  $\cos(\psi) \approx 1$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 R_1(\psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \psi \\ 0 & -\psi & 1 \end{bmatrix} & R_2(\psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \psi & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_3(\psi) &= \begin{bmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Zu beachten ist jedoch, dass die Rotationsmatrizen durch die Approximation streng genommen ihre Orthogonalität verlieren. Vernachlässigt man Terme zweiter und höherer Ordnung, so sieht die zusammengesetzte Transformationsmatrix analog zu Gleichung 3.5 wie folgt aus:

$$R_3(\psi_3) R_2(\psi_2) R_1(\psi_1) = I - \Psi = I - \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Die Matrix  $\Psi$  ist eine schiefsymmetrische Matrix und wird Axiator genannt. Besitzt man eine Rotationsmatrix  $\hat{R}_p^g$ , deren Rotationswinkel nur ungefähr bekannt sind und die dazugehörige wahre Rotationsmatrix heißt  $R_p^g$ , so kann der Übergang zwischen den beiden Matrizen mittels infinitesimaler Drehung erfolgen:

$$\hat{R}_p^g = (I - \Psi) R_p^g \quad \text{bzw.} \quad R_p^g = (I + \Psi) \hat{R}_p^g. \tag{3.16}$$

### Axiatoren und Axialvektoren

Eine IMU misst Drehgeschwindigkeiten des Gehäuses relativ zum i-Frame. Um diese Messdaten weiterverarbeiten zu können, benötigt man den Axialvektor und den Axiator. Ein Axialvektor ist ein Vektor, welcher die Eulerwinkel in geordneter Reihenfolge beinhaltet:

$$\psi = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Der Axialvektor ist kein Vektor im eigentlichen Sinn, deshalb gilt für die Axialvektoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  das Kommutativgesetz generell nicht:

$$\psi_1 + \psi_2 \neq \psi_2 + \psi_1. \tag{3.18}$$

Das kommt daher, dass bei zusammengesetzten Transformationen die Reihenfolge eine entscheidende Rolle spielt. Betrachtet man jedoch nur kleine Winkel  $\alpha_i$ , so kann der Axialvektor als wahrer Vektor betrachtet werden (dieser Fall trifft in der Inertialnavigation zu) und das Kommutativgesetz gilt. Der zum Axialvektor gehörige Axiator sieht wie folgt aus:

$$\Psi = [\psi \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung kleiner Winkel kann der Axialvektor wie ein gewöhnlicher Vektor transformiert werden:

$$\psi^s = R_t^s \psi^t. \quad (3.20)$$

$\psi^t$  beschreibt eine kleine Drehung des t-Frames, die entsprechende Drehung des s-Frames ist  $\psi^s$ . Analog dazu funktioniert die Transformation eines Axiators wie folgt:

$$\Psi^s = R_t^s \Psi^t R_s^t. \quad (3.21)$$

Ein Drehratenvektor ist ein Axialvektor, der anstatt aus infinitesimalen Winkeln aus kleinen Drehraten besteht. Der Drehratenvektor  $\omega_{pq}^q$  beschreibt die Drehgeschwindigkeit des q-Frames relativ zum p-Frame, ausgedrückt im q-Frame. Ein Drehratenvektor kann wie ein Vektor komponentenweise addiert werden. Somit können die Drehraten zwischen dem p-Frame und dem q-Frame aus der Summe der Drehraten zwischen p-Frame und u-Frame und den Drehraten zwischen u-Frame und q-Frame gebildet werden:

$$\omega_{pq}^q = \omega_{pu}^q + \omega_{uq}^q. \quad (3.22)$$

Weiters gilt folgende Beziehung:

$$\omega_{pq}^q = -\omega_{qp}^q. \quad (3.23)$$

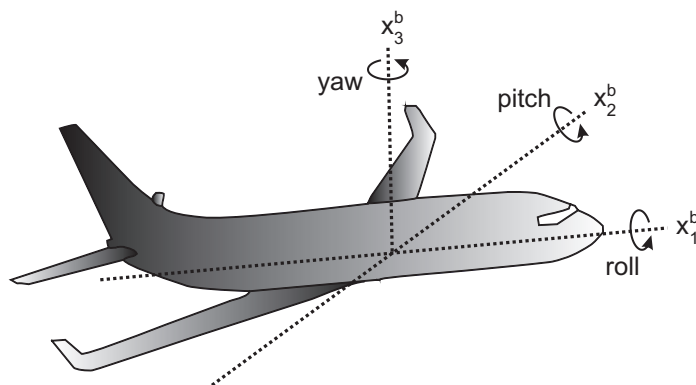
### Zeitliche Ableitung einer Rotationsmatrix

In der Inertialnavigation spielt die Ableitung der Rotationsmatrix bei der Integration der Drehraten eine wichtige Rolle. Die zeitliche Ableitung  $\dot{R}_p^q$  lautet nach Hofmann-Wellenhof et al. (2003):

$$\dot{R}_p^q = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_p^q(t_0 + \delta t) - R_p^q(t_0)}{\delta t}. \quad (3.24)$$

Unter Verwendung von Gleichung 3.16 kann  $R_p^q(t_0 + \delta t)$  entsprechend umgeformt werden und man erhält

$$R_p^q(t_0 + \delta t) = (I - \Psi) R_p^q(t_0). \quad (3.25)$$



**Abbildung 3.7:** Attitudewinkel Roll, Pitch und Yaw

Setzt man dies nun in Gleichung 3.24 ein und vereinfacht, dann sieht das Ergebnis folgendermaßen aus:

$$\dot{R}_p^q = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{-\Psi}{\delta t} R_p^q(t_0) = -\Omega_{pq}^q R_p^q. \quad (3.26)$$

Die Elemente  $\omega_i$  von  $\Omega_{pq}^q$  beschreiben die Komponenten der Drehrate bzw. Drehgeschwindigkeit des q-Frames relativ zum p-Frame und bilden den Axialvektor  $\omega_{pq}^q$ .

Gleichung 3.26 kann noch entsprechend umgeformt werden, sodass man

$$\dot{R}_p^q = R_p^q \Omega_{qp}^p \quad (3.27)$$

erhält.

### Attitude

Die *Attitude* beschreibt die Ausrichtung des Body Frames relativ zum Referenzframe. Stellt man die Navigationsgleichungen im n-Frame auf, so kann die Attitude durch die drei Eulerwinkel Roll (r), Pitch (p) und Yaw (y) beschrieben werden (siehe Abbildung 3.7). Roll beschreibt die Verdrehung um die Längsachse, Pitch jene um die Querachse und Yaw jene in Bezug auf die Nordrichtung (auch Azimuth oder Heading genannt).

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Attitude sind Rotationsmatrizen (Richtungs-

kosinusmatrizen). Sie werden wie folgt aufgestellt:

$$R_n^b = R_1(r) R_2(p) R_3(y) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \cos(p) \cos(y) \\ R_{12} &= \cos(p) \sin(y) \\ R_{13} &= -\sin(p) \\ R_{21} &= \sin(r) \sin(p) \cos(y) - \cos(r) \sin(y) \\ R_{22} &= \sin(r) \sin(p) \sin(y) + \cos(r) \cos(y) \\ R_{23} &= \sin(r) \cos(p) \\ R_{31} &= \cos(r) \sin(p) \cos(y) + \sin(r) \sin(y) \\ R_{32} &= \cos(r) \sin(p) \sin(y) - \sin(r) \cos(y) \\ R_{33} &= \cos(r) \cos(p) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Um aus einer bestehenden  $R_n^b$  Matrix die Attitudewinkel zu extrahieren, müssen die Formeln aus Gleichung 3.28 entsprechend umgeformt und kombiniert werden und man erhält:

$$\begin{aligned} \tan(r) &= \frac{R_{23}}{R_{33}} \\ \tan(p) &= \frac{-R_{13}}{\sqrt{R_{11}^2 + R_{12}^2}} \\ \tan(y) &= \frac{R_{12}}{R_{11}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

### Quaternionen

Alternativ zu Rotationsmatrizen und Eulerwinkeln lässt sich die Attitude außerdem in Form von *Quaternionen* ausdrücken. Da die numerischen Integrationsverfahren (siehe Kapitel 3.3.5) auf Quaternionen beruhen, wird hier das Wesentliche über sie erklärt. Mehr zum Thema Quaternionen findet sich in der einschlägigen Literatur.

Ein Quaternion basiert darauf, dass die Transformation zwischen zwei Frames durch eine einzige Drehung um den Vektor  $\vec{\mu}$  mit dem Winkel  $\mu = \|\vec{\mu}\|$  erfolgen kann. Seine Definition sieht wie folgt aus:

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_1/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_2/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_3/\mu) \sin(\mu/2) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

wobei  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  die Komponenten von  $\vec{\mu}$  sind. Quaternionen besitzen die Eigenschaft, dass ihre Norm

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1 \quad (3.31)$$

ist. Das Produkt zweier Quaternionen  $q_1$  und  $q_2$  errechnet man mithilfe der Formel

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Die Transformation eines Vektors vom Frame  $s$  in den Frame  $t$  erfolgt analog zu  $x^t = R_s^t x^s$  über

$$\bar{x}^t = q \cdot \bar{x}^s \cdot q^* \quad \text{mit} \quad \bar{x}^t = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{bmatrix}, \bar{x}^s = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \end{bmatrix}, q^* = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Die Umrechnung zwischen Attitudematrix und Quaternion geschieht mit

$$R_s^t = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

bzw.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}} \\ b &= \frac{1}{4a} (R_{32} - R_{23}) \\ c &= \frac{1}{4a} (R_{13} - R_{31}) \\ d &= \frac{1}{4a} (R_{21} - R_{12}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

### Kalman Filter

Der Kalman Filter ist ein wesentliches Werkzeug in der Inertialnavigation. Er wird während des Fine Alignments oder bei der Integration von INS mit GPS eingesetzt, um Systemfehler zu bestimmen. Dabei kann es sich um Positions-, Geschwindigkeits-, Attitude- und Sensorfehler handeln. Ein Kalman Filter wird überall dort verwendet, wo Parameter ständig mithilfe neuer Messungen aktualisiert werden müssen und ein nichtstationärer Zufallsprozess vorliegt. Die Vorstufe des Kalman Filters ist ein zum Zweck der Parameterschätzung angewandter rekursiver Ausgleichsansatz, der bei stationären Zufallsprozessen zum Einsatz



kommt. Fachbücher zum Thema Kalman Filter gibt es sehr viele. Die im Anschluss angeführten Formeln sind Zarchan und Musoff (2005) entnommen, die einen sehr praktischen Zugang zu dieser Thematik liefern.

Ausgangspunkt bei der Kalman Filterung ist die Beschreibung der zeitlichen Änderung der Parameter, die in Form des Zustandsvektors vorliegen. Dies kann entweder mithilfe der *Übertragungsmatrix*  $\Phi$  oder der *Systems Dynamic Matrix*  $F$  erfolgen. Auf dem Gebiet der Inertialnavigation wird meist die Systems Dynamic Matrix verwendet. Sie beschreibt die zeitliche Änderung eines dynamischen Systems der realen Welt in Form von Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = Fx + Gu + w \quad (3.36)$$

$\dot{x}$  symbolisiert dabei die zeitliche Änderung des Zustandsvektors  $x$ ,  $F$  beinhaltet die Differentiale von  $x$ ,  $Gu$  beschreibt den sogenannten *Control Input* (wird in weiterer Folge nicht berücksichtigt) und  $w$  steht für einen Zufallsprozess in Form von weißem Rauschen. Bei einem zeitlich invarianten System ( $F = const$ ) lässt sich die Systems Dynamic Matrix entsprechend einfach in die Übertragungsmatrix überführen:

$$\Phi(t) = e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!}(Ft)^2 + \frac{1}{3!}(Ft)^3 + \dots, \quad (3.37)$$

wobei  $\Phi(t)$  die Übertragungsmatrix vom Zeitpunkt 0 zum Zeitpunkt  $t$  ist. Die Überführung von  $\Phi(t)$  in eine diskrete Form erfolgt so, dass die Übertragungsmatrix jeweils mit der Samplingperiode  $T_s = t_k - t_{k-1}$  ausgewertet wird. Die Annahme einer konstanten  $F$ -Matrix kann in der Inertialnavigation aufgrund der hohen Aufzeichnungsraten getroffen werden. Nachdem es nun gelungen, ist eine diskrete Form für die Übertragungsmatrix zu finden, können nun die Formeln des diskreten Kalman Filters angewandt werden. Die Übertragung des Zustandsvektors  $x$  vom Zeitpunkt  $t_{k-1}$  zum Zeitpunkt  $t_k$  kann nun folgendermaßen erfolgen:

$$x_k = \Phi_k x_{k-1} + w_k. \quad (3.38)$$

Die dazugehörige diskrete Beobachtungsgleichung lautet:

$$z_k = Hx_k + v_k, \quad (3.39)$$

wobei  $z_k$  der Beobachtungsvektor,  $H$  die Designmatrix und  $v_k$  das normalverteilte Messrauschen ist. In der Designmatrix verbirgt sich der lineare Zusammenhang zwischen den Parametern und den Beobachtungen.  $R_k$  ist die zu  $v_k$  zugehörige Kovarianzmatrix:

$$R_k = E(v_k v_k^T). \quad (3.40)$$

Bei der Kalman Filterung muss zu Beginn der Zustandsvektor und dessen Kovarianzmatrix initialisiert werden. Anschließend wird die Kalman Gain Matrix  $K_k$  mithilfe der sogenannten *Matrix Ricatti Gleichungen*

$$\begin{aligned} M_k &= \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + Q_k \\ K_k &= M_k H^T (H M_k H^T + R_k)^{-1} \\ P_k &= (I - K_k H) M_k \end{aligned} \tag{3.41}$$

berechnet.  $M_k$  beinhaltet die Kovarianzinformation des prädierten Zustandsvektors und wird zur Gain-Berechnung benötigt. Hier werden die Genauigkeiten des prädierten Zustandsvektors mit jenen der Beobachtungen kombiniert und es wird Messungen dementsprechend mehr oder weniger Bedeutung bei der Aktualisierung des Zustandsvektors zuerkannt.  $P_k$  beschreibt die Kovarianzinformation des geschätzten Zustandsvektors zur Epoche  $k$ . Die Matrix  $Q_k$  ist ein Maß für das Systemrauschen und gibt an, wie groß die modellbasierten Fehler durch die Prädiktion sein können. Nach der Gain-Berechnung erfolgt das Messupdate:

$$\hat{x}_k = \Phi_k \hat{x}_{k-1} + K_k [z_k - H \Phi_k \hat{x}_{k-1}]. \tag{3.42}$$

$\hat{x}_k$  steht für den geschätzten Zustandsvektor der Epoche  $k$ , und

$$\Phi_k \hat{x}_{k-1} \tag{3.43}$$

beschreibt die Prädiktion des Zustandsvektors.

Der große Vorteil des Kalman Filters gegenüber dem rekursiven Ausgleich ist die Möglichkeit der Schätzung der Parameter auch wenn keine Messungen vorliegen. Dann vereinfacht sich Gleichung 3.42 nach:

$$\hat{x}_k = \Phi_k \hat{x}_{k-1}. \tag{3.44}$$

Bisher wurde der *lineare Kalman Filter* betrachtet. Das bedeutet, dass sowohl das dynamische System der realen Welt als lineare Differentialgleichungen des Zustandsvektors darstellbar sind, als auch die Messungen in linearer Beziehung zum Zustandsvektor stehen. Beim *Extended Kalman Filter (EKF)* treffen diese Annahmen nicht mehr zu. Die reale Welt wird nun durch die nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\dot{x} = f(x) + w \tag{3.45}$$

beschrieben, das nichtlineare Beobachtungsmodell lautet weiters:

$$z = h(x) + v. \tag{3.46}$$

Die Funktionen  $f(x)$  und  $h(x)$  beschreiben die nichtlinearen Funktionale, die mittels Taylorreihenentwicklung linearisiert werden müssen, die auf folgenden partiellen Ableitungen beruht (siehe Zarchan und Musoff (2005)):

$$F = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} \quad H = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} . \quad (3.47)$$

Die Übertragungsmatrix berechnet man mithilfe von  $F$  analog zum linearen Kalman Filter. Ebenso sehen die Matrix Ricatti Gleichungen äquivalent zum linearen Fall aus. Das Messupdate unterscheidet sich hingegen und verwendet die nichtlinearen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k [z_k - h(\bar{x}_k)] \\ \bar{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + \hat{x}_{k-1}(t - t') \\ \hat{x}_{k-1} &= f(\hat{x}_{k-1}) \quad . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die prädizierten Werte des Zustandsvektors  $\bar{x}_k$  werden durch numerische Integration der Differentialgleichungen berechnet. Wenn man die nichtlineare Vektorübertragungsfunktion  $\varphi$  kennt, wird diese zur Prädiktion herangezogen und Gleichung 3.48 verändert sich zu:

$$\hat{x}_k = \varphi_k(\hat{x}_{k-1}) + K_k [z_k - h(\varphi_k(\hat{x}_{k-1}))] . \quad (3.49)$$

Sowohl der lineare Kalman Filter als auch der EKF benötigen a-priori nur den initialen Zustandsvektor sowie dessen Kovarianzmatrix. Sind darüber hinaus weitere Informationen a-priori verfügbar, so können diese nicht berücksichtigt werden. In der Inertialnavigation wird der Kalman Filter vor allem im Alignment sowie bei der Integration mit GPS eingesetzt. In beiden Fällen würden zusätzliche Informationen zur Verfügung stehen. Beim Alignments weiß man, dass man sich nicht oder nur ganz wenig bewegt, bei der Sensorintegration könnte man die mittels GPS bestimmte Trajektorie als wahr ansehen. Der *Linearized Kalman Filter (LKF)* bietet die Möglichkeit solche nominellen Informationen in den Filterprozess zu integrieren. Die Ausgangslage des LKF gleicht jener des EKF, d. h. es existieren nichtlineare Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + w \quad \text{und} \\ z &= h(x) + v . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nimmt man nun an, dass die zusätzlichen nominellen Informationen ebenfalls als Differentialgleichungen in der Form

$$\dot{x}_{NOM} = f(x_{NOM}) \quad (3.51)$$

verfügbar sind, könnte man die Fehlergleichung

$$\Delta x = x - x_{NOM} \quad (3.52)$$

als Differenz zwischen dem aktuellen Zustandsvektor  $x$  und dem nominell bekannten Zustandsvektor  $x_{NOM}$  aufstellen.  $\Delta x$  beschreibt somit die Fehler im Zustandsvektor und wird deshalb auch Fehlerzustandsvektors (engl. error state) genannt. Als Nächstes stellt man nun approximierete linearisierte Differentialgleichungen für  $\Delta x$  auf:

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{NOM}} \Delta x + w. \quad (3.53)$$

Dies ist vergleichbar mit der Linearisierung beim EKF, wobei man es beim LKF mit Fehlerzuständen zu tun hat, und die partiellen Ableitungen deshalb an den nominellen Werten des Zustandsvektors ausgewertet werden. In ähnlicher Weise wird der Messfehler

$$\Delta z = z - z_{NOM} \quad (3.54)$$

als Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem nominellen Messwert definiert. Die dazugehörige Beobachtungsgleichung lautet:

$$\Delta z = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{NOM}} \Delta x + v. \quad (3.55)$$

Ähnlich wie beim EKF werden auch beim LKF die Systems Dynamic Matrix und die Design Matrix gebildet:

$$F = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{NOM}} \quad H = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{NOM}}. \quad (3.56)$$

Liegen diskrete Messungen vor, so sieht das Beobachtungsmodell folgendermaßen aus:

$$\Delta z_k = H \Delta x_k + v_k. \quad (3.57)$$

Die Übertragungsmatrix  $\Phi$  berechnet sich wie in Gleichung 3.37, wobei die Taylorreihenentwicklung oft nach dem linearen Term abgebrochen wird:

$$\Phi \approx I + F(t - t'). \quad (3.58)$$

Die Matrix Ricatti Gleichungen bleiben ebenfalls gleich, die Schätzung des Fehlerzustandsvektors ändert sich aufgrund des Linearisierungsansatzes:

$$\Delta \hat{x}_k = \Phi_k \Delta \hat{x}_{k-1} + K_k [\Delta z_k - H \Phi_k \Delta \hat{x}_{k-1}]. \quad (3.59)$$

Um schlussendlich die aktuellen Werte des Zustandsvektors zu erhalten, formt man den Linearisierungsansatz aus 3.52 entsprechend um und man erhält:

$$\hat{x}_k = \Delta \hat{x}_k + x_{NOM}. \quad (3.60)$$

### Berechnung der Schwere

Bei der Auswertung der Navigationsgleichungen im Strapdown Algorithmus muss die spezifische Kraft um die Schwerebeschleunigung reduziert werden, um die kinematische Beschleunigung zu erhalten. Die Schwerebeschleunigung setzt sich aus Gravitation und Fliehkraft zusammen und muss unter Verwendung entsprechender Modelle geschätzt werden, da sie nicht exakt bekannt ist. Ein sehr gängiger Ansatz in der Inertialnavigation ist die Modellierung mittels Normalschwere. Hier wird ein Rotationsellipsoid der Erde bestmöglich angepasst, zusätzlich erhält das Ellipsoid eine homogene Dichte. Durch die resultierende Masse und die Drehbewegung erhält das Normalellipsoid ein Schwerfeld, das sogenannte Normalschwerfeld. Die Normalschwere modelliert jedoch nur jene Komponente der Schwere entlang der Ellipsoidnormalen und vernachlässigt die Lotabweichungen und somit die horizontalen Komponenten des Schwerevektors. Die Genauigkeit der Normalschwere liegt in der Größenordnung von  $\pm 200$  mGal und führt zu einer deutlichen Verschlechterung der Positionsgenauigkeit in der Vertikalen im Vergleich zur Horizontalen. Diese Verschlechterung wird in den meisten Anwendungen in Kauf genommen. Für hochpräzise Anwendungen wie z. B. in U-Booten werden jedoch genauere Schweremodelle benötigt, welche neben der besseren Modellierung der Vertikalkomponente auch Schätzungen der Horizontalkomponenten liefern. Ansätze dazu sind die Verwendung von Kugelfunktionsmodellen (globale Modelle) oder die Methode der Kollokation (lokale Modelle). Beide Ansätze sind in Hofmann-Wellenhof und Moritz (2005) im Detail beschrieben. Chatfield (1997) zeigt weiters, dass auch Punktmassenmodelle, 2D Fourierreihenentwicklungen oder auch zweidimensionale Tabellen in der hochpräzisen Inertialnavigation zum Einsatz kommen. Der Nachteil einiger dieser Methoden ist der große Rechenaufwand, der eine Echtzeitnavigation unmöglich macht. Eine weitere Möglichkeit um Schwereinformation zu erhalten ist die Integration des INS mit externen Messsystemen wie z. B. GNSS. Hierbei werden die kinematischen Beschleunigungen mittels zusätzlicher Sensoren bestimmt und anschließend von der spezifischen Kraft abgezogen, um Schwereinformation zu erhalten. Während sich einige Systeme diesen Vorteil zunutze machen, ist bei der Moving-Base Gravimetry die Gewinnung der Schwereinformation das Kernthema (mehr dazu siehe Kapitel 4). In dieser Arbeit wird für die Navigation auf das Normalschwerfeld zurückgegriffen. Die Berechnung des Normalschwerewerts für eine bestimmte Position erfolgt mithilfe der Formel von Somigliana (Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005)

$$\gamma(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2(\varphi) + b\gamma_b \sin^2(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \quad (3.61)$$

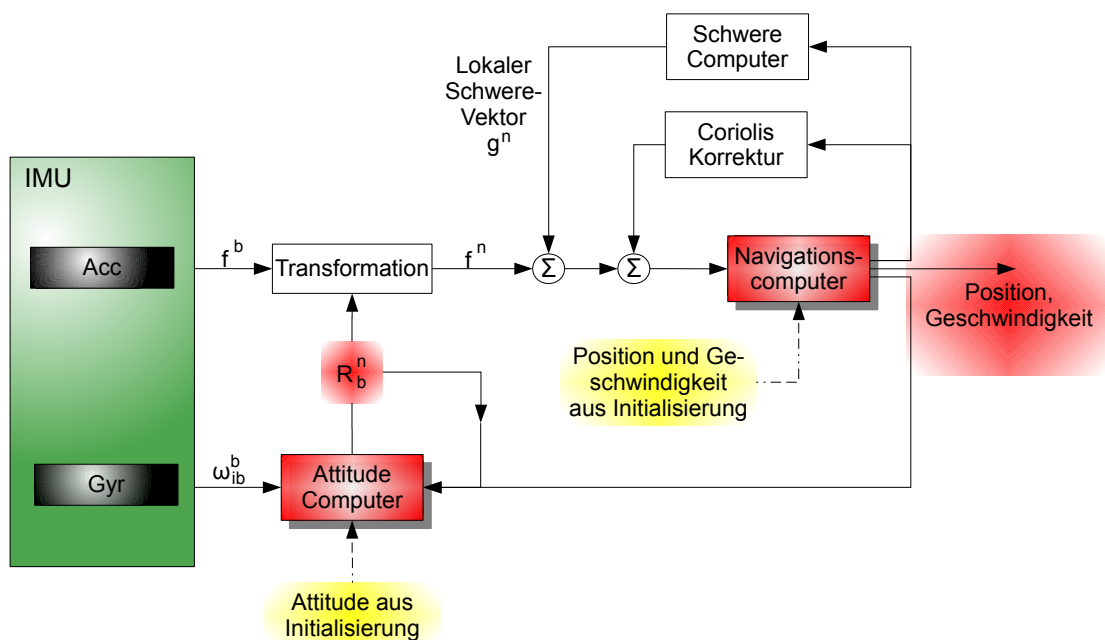
$\varphi$  steht für die ellipsoidische Breite,  $a$  und  $b$  sind die Halbachsen des Ellipsoids und  $\gamma_a$  bzw.  $\gamma_b$  sind die Normalschwerewerte am Äquator und am Pol. Die Normalschwere bezieht sich nun auf die ellipsoidische Höhe  $h = 0$  m. Für Punkte bis zu 20 km über dem Ellipsoid wird die Normalschwere durch folgende Approximationsformel berechnet:

$$\gamma(\varphi, h) = \gamma(\varphi) \left( 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\varphi)) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right). \quad (3.62)$$

Die für die Berechnung benötigten Größen  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $f$  (Abplattung) und  $m$  (Hilfsgröße) sind der entsprechenden Definition des Bezugssystems zu entnehmen. Ein sehr weit verbreitetes System, auf das z. B. Jekeli (2001) zurückgreift, ist das GRS80 System, dessen Definition in Anhang A1 angeführt ist.

### 3.3.2 Schema des Strapdown Algorithmus

In diesem Abschnitt wird der Strapdown Algorithmus schematisch beschrieben, bevor Abschnitt 3.3.4 den dazugehörigen Formelapparat liefert. Der Strapdown Algorithmus beschreibt jene Prozessierungsschritte, die notwendig sind, um aus den rohen Messdaten des IMS Positionsinformation zu erhalten. Zur besseren Veranschaulichung zeigt Abbildung 3.8 den schematischen Ablauf der Berechnungen.



**Abbildung 3.8:** Schema der Strapdown Auswertung

Um mit einem Strapdown System Positionierung betreiben zu können, müssen zu Beginn Position und Geschwindigkeit wie auch Attitude bekannt sein. Die Position muss immer von einem externen System wie z. B. GNSS geliefert werden, die restlichen Informationen stammen entweder ebenfalls von externen Systemen oder werden mittels Self-Alignment bestimmt (Details siehe Abschnitt 3.3.3). Sobald die erste Messung vorliegt, wird als Erstes die Attitude aktualisiert. Dafür werden zusätzlich Informationen über die Position, die Geschwindigkeit sowie die Erddrehrate benötigt. Mit diesen Informationen kann die gemessene

Drehrate  $\omega_{ib}^b$  in die benötigte Drehrate  $\omega_{nb}^b$  umgerechnet werden. Nun kann die  $R_n^b$  Matrix mittels numerischer Integration aktualisiert werden, um anschließend die von den Accelerometern gemessene spezifische Kraft  $f^b$  in den n-Frame zu transformieren. Zur Berechnung der Beschleunigung relativ zur Erde müssen die Gravitations-, die Coriolis- und die Zentrifugalbeschleunigung angebracht werden. Anschließend wird nun einfach bzw. zweifach numerisch integriert um Geschwindigkeiten bzw. Positionen zu erhalten. Der beschriebene Berechnungsprozess wird fortlaufend wiederholt, um mithilfe der neuen Messwerte die aktuelle Position, Geschwindigkeit und Attitude zu aktualisieren.

#### 3.3.3 Alignment

Der Alignment Prozess dient dazu die Attitudewinkel Roll, Pitch und Yaw zu bestimmen. Das Alignment kann mithilfe von externen Informationen oder auch eigenständig durchgeführt werden. Erfolgt das Alignment mittels Informationen von zusätzlichen Sensoren, so kann sich das System sowohl in Ruhe wie auch in Bewegung befinden. Beispielsweise kann in einem Flugzeug die Orientierung vom *Aircraft Carrier System* übernommen werden. Andere Möglichkeiten sind z. B. die Verwendung der Attitude eines INS höherer Qualität oder die Verwendung einer Sternenkamera. Es besteht auch die Möglichkeit die Richtung eines Theodoliten zu übertragen. Eine in letzter Zeit sehr modern gewordene Variante, die sich hier ebenfalls anbietet, ist die Bestimmung der Attitude mittels GNSS Antennenarray. Sobald das Alignment mittels Informationen von externen Systemen durchgeführt wird, spricht man im Allgemeinen von *Transfer Alignment*. Wird beim Alignment hingegen nicht auf externe Systeme zurückgegriffen, muss das INS anhand seiner Messwerte in einer Ruhephase seine Ausrichtung selbst bestimmen. Dieser Prozess wird auch *Self-Alignment* genannt. Dabei werden die Richtungen des Schwerevektors sowie der Erdrotation, die näherungsweise bekannt sind, zu Hilfe genommen. Der Alignmentprozess wird prinzipiell in zwei Phasen eingeteilt. Begonnen wird mit dem *Coarse Alignment*. Unter der Annahme, dass keine Sensorfehler vorliegen, wird die Attitude in kurzer Zeit näherungsweise bestimmt. Im *Fine Alignment* wird anschließend die im Coarse Alignment näherungsweise bestimmte Attitude verbessert, indem verbleibende Sensorfehler wie Einschaltvariationen, die während der Kalibrierung nicht bestimmbar sind, mitgeschätzt werden. Dies ist besonders wichtig, da Sensorfehler Orientierungsfehler (engl. *Misalignment*) verursachen (Details dazu folgen später in diesem Abschnitt). Je nachdem wie viele Sensorfehler geschätzt werden, variiert die notwendige Zeit für das Fine Alignment.

Das Alignment kann weiters auch in Horizontierung und Nordfindung unterteilt werden. Die Plattform ist dann horizontiert, wenn die down-Achse des vom System angezeigten n-Frames mit der Lotrichtung (Richtung des Schwerevektors) übereinstimmt. Hierbei werden ausschließlich die Daten der Accelerometer herangezogen. Es wird das IMU Body System so lange analytisch gedreht, bis die beiden horizontalen Accelerometer keine spezifische Kraft

und somit keine Komponenten des Schwerevektors mehr messen (Annahme: keine Sensorfehler). Dies entspricht der Bestimmung von Roll und Pitch. Bei dieser Art von Horizontierung bleiben die Lotabweichungen (im Regelfall  $<30''$ ) unberücksichtigt, da die down-Achse des wahren lokalen Horizontsystems nicht mit der Lotlinie, sondern mit der Ellipsoidnormalen zusammenfällt. In den meisten Anwendungen kann dieser Fehler jedoch vernachlässigt werden. Bei der Nordfindung wird die Richtung der Erdrotation zu Hilfe genommen. Diese besitzt in der Ostrichtung des n-Frames keine Komponente. Daher wird solange virtuell um die Vertikalachse gedreht, bis der Gyro in  $y_b$  Richtung keine Drehraten mehr misst. Die Bestimmung der Nordrichtung (des Yaw Winkels) wird auch als *analytical Gyrocompassing* bezeichnet. Durch das geringe Signal-zu-Rausch Verhalten benötigt das Finden der Nordrichtung mehr Zeit und kann nicht mit derselben Genauigkeit erzielt werden.

Die Genauigkeit des Alignments ist vor allem durch die Qualität der Sensoren limitiert. Weitere Einflussfaktoren sind die Stabilität des Fahrzeuges und die Befestigung der IMU mit dem Fahrzeug. Auch die Genauigkeit und Stabilität der physikalischen Anordnung der Sensoren innerhalb des Gehäuses (Genauigkeit und Stabilität der internen Geometrie) spielen eine wesentliche Rolle. Die Bestimmung der Anfangsattitude kann verkürzt und verbessert werden, indem man ein sogenanntes *kinematisches Alignment* durchführt. Dazu werden jedoch Positionslösungen eines externen Systems (meist GNSS) benötigt. Es werden spezielle Manöver (z. B. Kreise und Achter) gefahren, um mithilfe der erhaltenen Positionslösungen die Attitudewinkel (vor allem den Yaw Winkel) zu verbessern. Um das Misalignment des Strapdown Systems durch die Fehlerfortpflanzung im Laufe der Zeit zu begrenzen, werden vor allem bei IMU-only Prozessierungen (Prozessierung ohne Stützung mittels Daten weiterer Sensoren wie z. B. GNSS) in regelmäßigen Abständen sogenannte *ZUPTs* (Zero Velocity Updates) durchgeführt. Ein ZUPT unterscheidet sich prinzipiell nicht vom Initial Alignment, d. h. es wird zwischendurch eine statische Phase eingelegt, in der sich das System seine Attitudewinkel wieder neu bestimmt. Zusätzlich wird die Geschwindigkeit auf 0 gesetzt und somit werden Fehler durch die numerische Integration der Beschleunigungen in Grenzen gehalten.

Die Formeln für das Coarse Alignment beruhen auf der Bestimmung der Transformationsmatrix  $R_n^b$  und gehen von der idealisierten Situation aus, dass die Messdaten der Accelerometer und Gyros nur zufällige Fehler aufweisen. Für die Bestimmung der Transformationsmatrix werden drei Vektoren benötigt, die sowohl im n-Frame als auch im b-Frame bekannt sind. Die von den Accelerometern gemessene spezifische Kraft entspricht im statischen Fall dem negativen Erdschwerevektor. Weiters entsprechen die von den Gyros aufgenommenen Drehraten der Erddrehrate. Die korrespondierenden Vektoren im n-Frame können unter Kenntnis der Position näherungsweise berechnet werden. Der Zusammenhang zwischen b- und n-Frame lautet daher:

$$-f^b = R_n^b g^n, \quad \omega_{ib}^b = R_n^b \omega_{ie}^n. \quad (3.63)$$



Der dritte Vektor wird mittels Kreuzprodukt gebildet:

$$c^b = -f^b \times \omega_{ib}^b, \quad c^n = g^n \times \omega_{ie}^n. \quad (3.64)$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\left[ -f^b \left| \omega_{ib}^b \right| c^b \right]^T = R_n^b \left[ g^n \left| \omega_{ie}^n \right| c^n \right]^T \quad \text{bzw.} \quad F^b = R_n^b F^n, \quad (3.65)$$

wobei  $F^b$  die Messgrößen und  $F^n$  die Rechengrößen beinhaltet. Durch Matrixinversion erhält man die Transformationsmatrix

$$R_n^b = F^b (F^n)^{-1}. \quad (3.66)$$

Aus der Attitudematrix lassen sich nun die Winkel Roll, Pitch und Yaw extrahieren (siehe Gleichung 3.29). Aufgrund des Messrauschens ist es empfehlenswert entweder zuvor die Messdaten oder danach die Ergebnisse entsprechend zu filtern bzw. zu glätten. Zu beachten ist, dass sich die  $F^n$  Matrix nur so lange invertieren lässt, solange der Schwerevektor und die Erddrehachse nicht parallel sind. Somit kann dieser Formelapparat nicht in der Nähe der Pole angewandt werden.

Wie bereits erwähnt basieren diese Formeln auf der Tatsache, dass die Messdaten der Accelerometer und Gyros keine systematischen Fehler aufweisen. Weisen sie jedoch systematische Fehler auf, so wirken sich diese Fehler als Misalignmentfehler aus, d. h. die im Alignment bestimmte Attitude weicht von der wahren Attitude aufgrund der Sensorfehler ab. Mathematisch kann der Zusammenhang zwischen den Sensorfehlern ( $B_x, B_y, B_z$  und  $D_y$ ) und Alignmentfehlern ( $\delta\alpha, \delta\beta$  und  $\delta\gamma$ ) durch die Gleichungen

$$\delta\alpha = \frac{B_y}{g}, \quad \delta\beta = -\frac{B_x}{g}, \quad \delta\gamma = \frac{D_y}{\omega_E \cos(\varphi)} + \frac{B_y \tan \varphi}{g} \quad (3.67)$$

beschrieben werden (Titterton und Weston, 2004). Die Winkel  $\delta\alpha, \delta\beta$  und  $\delta\gamma$  sind den Attitudeparametern Roll, Pitch und Yaw zugeordnet. B steht in diesem Fall für Accelerometer Bias, D für Gyro Bias und g für den Erdschwerewert. Gleichung 3.67 zeigt, dass speziell Accelerometerfehler und Horizontierungsfehler stark miteinander korreliert sind. Dadurch sind Accelerometerfehler während des Alignments kaum bestimmbar und beeinflussen entscheidend die Alignmentqualität.

### 3.3.4 Strapdown Algorithmus

In diesem Abschnitt werden die Formeln des Strapdown Algorithmus hergeleitet. Die Navigationsformeln werden wie bereits erwähnt für den n-Frame aufgestellt, d. h. die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten werden im n-Frame berechnet. Anschließend werden die Positionen im e-Frame bestimmt. Eine gängige Methode zur Herleitung der Navigationsformeln im n-Frame besteht darin, zuerst die Gleichung für die spezifische Kraft im e-Frame aufzustellen

und anschließend diese in den  $n$ -Frame zu transformieren. Begonnen wird die Herleitung mit der Transformation eines Vektors vom  $e$ -Frame in den  $i$ -Frame:

$$x^i = R_e^i x^e. \quad (3.68)$$

Anschließend wird die Gleichung zweimal analytisch nach der Zeit differenziert. Das bereits umgeformte Ergebnis der ersten Ableitung lautet

$$\dot{x}^i = R_e^i (\dot{x}^e + \Omega_{ie}^e x^e) \quad (3.69)$$

und enthält mit  $\dot{x}^i$  den Geschwindigkeitsvektor und mit  $\Omega_{ie}^e$  die Drehraten der Erddrehung. Analog dazu sieht das Ergebnis der zweiten Ableitung folgendermaßen aus:

$$\ddot{x}^i = R_e^i (\ddot{x}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{x}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e x^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e x^e). \quad (3.70)$$

Die einzelnen Terme auf der rechten Seite von Gleichung 3.70 haben folgende Bedeutung:

- $\ddot{x}^e$  beschreibt die Beschleunigung des Fahrzeugs relativ zum  $e$ -Frame,
- $2\Omega_{ie}^e \dot{x}^e$  beschreibt die Coriolisbeschleunigung, welche auftritt, wenn sich ein Objekt relativ zu einem rotierenden Koordinatensystem dreht,
- $\dot{\Omega}_{ie}^e x^e$  beschreibt die Tangentialbeschleunigung aufgrund von Änderungen der Erddrehrate und
- $\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e x^e$  beschreibt die Zentrifugalbeschleunigung aufgrund der Rotation des  $e$ -Frames relativ zum  $i$ -Frame.

Da die Erdrotation über wenige Stunden als konstant angenommen werden kann, kann der 3. Term vernachlässigt werden. Um  $\ddot{x}^e$  aus der Gleichung zu erhalten, wird die Gleichung nun von rechts mit  $R_i^e$  multipliziert und nach entsprechender Umformung erhält man:

$$\ddot{x}^e = R_i^e \ddot{x}^i - 2\Omega_{ie}^e \dot{x}^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e x^e. \quad (3.71)$$

Führt man nun die Gleichung der spezifischen Kraft  $f^i$  im  $i$ -Frame

$$\ddot{x}^i = g^i + f^i \quad (3.72)$$

ein ( $g^i$  beschreibt die Gravitationsbeschleunigung), so erhält man

$$\ddot{x}^e = g^e + f^e - 2\Omega_{ie}^e \dot{x}^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e x^e. \quad (3.73)$$

Fasst man nun Gravitation und Zentrifugalkraft (auch Fliehkraft genannt) zum Schwerevektor  $\bar{g}^e$  zusammen

$$\bar{g}^e = g^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e x^e, \quad (3.74)$$

so erhält man die Gleichung der spezifischen Kraft im e-Frame:

$$\ddot{x}^e = \bar{g}^e + f^e - 2\Omega_{ie}^e \dot{x}^e. \quad (3.75)$$

Da nun die Navigationsgleichungen im e-Frame vollständig aufgestellt sind, erfolgt die Transformation in den n-Frame. Begonnen wird mit der Einführung des Geschwindigkeitsvektors  $v^n$ :

$$\dot{x}^e = R_n^e v^n. \quad (3.76)$$

Leitet man diese Gleichung wiederum nach der Zeit ab, so erhält man

$$\ddot{x}^e = R_n^e (\dot{v}^n + \Omega_{en}^n v^n). \quad (3.77)$$

Setzt man nun die Gleichungen 3.76 und 3.77 in 3.75 ein, so erhält man

$$R_n^e (\dot{v}^n + \Omega_{en}^n v^n) = \bar{g}^e + f^e - 2\Omega_{ie}^e R_n^e v^n. \quad (3.78)$$

Multipliziert man die Gleichung von rechts mit  $R_e^n$ , erhält man

$$\dot{v}^n = \bar{g}^n + f^n - (\Omega_{en}^n + 2R_e^n \Omega_{ie}^e R_n^e) v^n. \quad (3.79)$$

Gleichung 3.79 setzt die Beschleunigung  $\dot{v}^n$  in Beziehung zur spezifischen Kraft. Durch Vereinfachung des Klammerausdrucks siehe Hofmann-Wellenhof et al. (2003) erhält man schlussendlich

$$\dot{v}^n = \bar{g}^n + f^n - (\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n) v^n. \quad (3.80)$$

Durch geeignete numerische Integration der Differentialgleichung 3.80 erhält man die Geschwindigkeit im n-Frame. Die Drehratenmatrix  $\Omega_{in}^n$  beschreibt die Drehung des n-Frames zum i-Frame ausgedrückt im n-Frame, die Matrix  $\Omega_{ie}^n$  beschreibt die Erdrotation im n-Frame. Um aus den berechneten Geschwindigkeiten Positionen berechnen zu können, muss Gleichung 3.76 ebenfalls integriert werden.

Die spezifische Kraft  $f^n$  aus Gleichung 3.80 lässt sich aus der gemessenen spezifischen Kraft  $f^b$  mittels Transformation wie folgt berechnen:

$$f^n = R_b^n f^b. \quad (3.81)$$

Die Attitudematrix  $R_b^n$  wird durch numerische Integration der Differentialgleichung

$$\dot{R}_b^n = R_b^n \Omega_{nb}^b \quad (3.82)$$

bestimmt, wobei die Ausgangsattitude  $R_b^n(t_0)$  aus dem Alignment stammt. Da die Gyros nicht die Drehraten  $\Omega_{nb}^b$ , sondern die Drehraten  $\Omega_{ib}^b$  messen, muss entsprechend umgeformt werden:

$$\Omega_{nb}^b = \Omega_{ni}^b + \Omega_{ib}^b = -\Omega_{in}^b + \Omega_{ib}^b = -R_n^b \Omega_{in}^n R_b^n + \Omega_{ib}^b. \quad (3.83)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 3.83 in 3.82 erhält man schließlich

$$\dot{R}_b^n = -\Omega_{in}^n R_b^n + R_b^n \Omega_{ib}^b. \quad (3.84)$$

Für die Lösung der Differentialgleichungen 3.80 und 3.84 fehlen nun nur mehr die Formeln für die Drehraten  $\omega_{in}^n$  und  $\omega_{ie}^n$

$$\omega_{in}^n = \begin{bmatrix} (\dot{\lambda} + \omega_E) \cos(\varphi) \\ -\dot{\varphi} \\ -(\dot{\lambda} + \omega_E) \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_E \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\omega_E \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

sowie die Formel für den Schwerevektor  $\bar{g}^e$ . Da die tatsächliche Schwere nicht bekannt ist, muss sie anhand eines Modells berechnet werden. Am Häufigsten wird die Normalschwere  $\gamma$  herangezogen. Details zur Berechnung finden sich im Abschnitt „Berechnung der Schwere“ auf Seite 38. Hier wird nur gezeigt, wie der Schwerevektor aufgestellt wird:

$$\bar{g}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(\varphi, h) \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

### 3.3.5 Numerische Integrationsverfahren

Das vorige Kapitel lieferte die notwendigen Formeln für den Strapdown Algorithmus in Form von exakten Formeln, Näherungsformeln und Differentialgleichungen. Für die Umsetzung in eine Programmiersprache mangelt es noch an einem entsprechenden Lösungsansatz für die gelieferten Differentialgleichungen. Da die Messdaten nicht kontinuierlich sondern diskret vorliegen, können die Gleichungen nicht exakt gelöst werden, stattdessen müssen numerische Verfahren eingesetzt werden. Die Wahl des Verfahrens hängt von der geforderten Genauigkeit, der Aufzeichnungsrate, der Bewegung und der Messdauer ab. Da bei jedem Integrationsschritt ein Fehler gemacht wird, benötigt man bei hohen Aufzeichnungsraten genauere Verfahren als bei niedrigeren Aufzeichnungsraten. Das Gleiche gilt für die Messdauer. Je länger man navigiert, desto mehr Integrationsschritte sind notwendig. Ebenso braucht man bei hohen Fahrzeugdynamiken bessere Verfahren als bei geringen, um dieselbe Positionsgenauigkeit zu erzielen. Im Strapdown Algorithmus unterscheidet man zwischen Integrationsverfahren für Drehraten und Integrationsverfahren für Beschleunigungen und Geschwindigkeiten.

Als Erstes werden mögliche *Integrationsverfahren für Beschleunigungen und Geschwindigkeiten* beschrieben. Von einer allgemeinen Funktion  $y(t)$  kennt man die erste Ableitung  $\dot{y}(t) = f(t)$  zu diskreten Zeitpunkten sowie einen Funktionswert  $y$  zum Zeitpunkt  $t_{l-1}$

$$y(t_l) = y(t_{l-1}) + \int_{t_{l-1}}^{t_l} f(t) dt. \quad (3.87)$$

Der Zeitunterschied  $\delta t = t_l - t_{l-1}$  entspricht der Zeit zwischen zwei Messungen und wird als Samplingintervall bezeichnet. Um den Funktionswert zum Zeitpunkt  $t_l$  berechnen zu können, bietet sich im einfachsten Fall die Rechteckformel

$$y_l = y_{l-1} + f(t_l) \delta t \quad (3.88)$$

an. Eine Verbesserung der Rechteckformel bietet die Trapezformel

$$y_l = y_{l-1} + \frac{\delta t}{2} \left( f(t_{l-1}) + f(t_l) \right). \quad (3.89)$$

Die Simpson'sche Formel verwendet drei Steigungen zur Integration und lautet

$$y_l = y_{l-1} + \frac{\delta t}{6} \left( f(t_{l-2}) + 4f(t_{l-1}) + f(t_l) \right). \quad (3.90)$$

Bartsch (2004) liefert neben den hier erwähnten Verfahren (Newton-Cotes Formel 0. bis 2. Ordnung) weitere Verfahren höherer Ordnung, die ebenfalls zum Einsatz kommen können.

Für die *Integration der Drehraten* werden Quaternionen zu Hilfe genommen. Die Differentialgleichung für Quaternionen lautet:

$$\dot{q}_b^n = \frac{1}{2} A q_b^n \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Löst man nun diese Differentialgleichung, so erhält man

$$q(t_l) = \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_{t_{l-1}}^{t_l} A \right) \right] q(t_{l-1}). \quad (3.92)$$

Unter der Annahme konstanter Drehraten während des Integrationsintervalls folgt

$$\hat{B}_l = A_l \delta t, \quad (3.93)$$

weitere ist das Matrixexponentprodukt durch

$$\exp(B) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (B)^p \quad (3.94)$$

gegeben. Setzt man die Gleichungen 3.93 und 3.94 in 3.92 ein, so erhält man

$$q(t_l) \approx \left( I + \frac{1}{2} \hat{B}_l + \frac{1}{8} \hat{B}_l^2 + \frac{1}{48} \hat{B}_l^3 + \dots \right) q(t_{l-1}). \quad (3.95)$$

Aufgrund der hohen Aufzeichnungsrate von Strapdown Systemen ( $\geq 256$  Hz) kann die Annahme von konstanten Drehraten über das Integrationsintervall ausreichend sein. Ein Genauigkeitsgewinn kann erzielt werden, indem das Integral

$$B_l = \int_{t_{l-1}}^{t_l} A(t) dt \quad (3.96)$$

nicht wie in Gleichung 3.93 durch das Rechteckverfahren gelöst wird, sondern durch das Simpsonverfahren. Da die von den Kreiseln gemessenen Drehraten bereits über das Samplingintervall integrierte Größen sind, eignet sich hier das Trapezverfahren nicht.

### 3.4 Einflussfaktoren auf die Genauigkeit

Die Genauigkeit, die mit einem INS erzielt werden kann, hängt von vielen sehr unterschiedlichen Faktoren ab. Den wesentlichen Beitrag liefern die eingebauten Sensoren. Je geringer deren systematische Fehler sind bzw. desto besser diese bekannt sind, desto besser werden die erzielten Ergebnisse sein. Bei den Sensoren ist jedoch auch die Stabilität der systematischen Fehler über die Laufzeit sehr wichtig, d. h. wie sehr sich der Bias und der Skalenfaktor während der Fahrt verändern (siehe Kapitel 2.3 Random Bias). Weiters ist die Qualität des INS als Gesamtes sehr entscheidend, d. h. wie gut die Lagerung der Sensoren im Inneren des Gehäuses ist bzw. wie gut die Kreuzkopplungsfehler kalibriert sind.

Ein weiteres bedeutendes Kriterium für die Positionsgenauigkeit speziell bei Strapdown Systemen sind die implementierten Algorithmen. In Abschnitt 3.3.4 wurden verschiedene Algorithmen präsentiert. Ob der implementierte Algorithmus eine gute Qualität erzielt, hängt neben der Wahl des Algorithmus auch von den auftretenden Fahrzeugdynamiken ab. Je größer die Dynamiken sind, d. h. je größer die Beschleunigungen bzw. Winkelgeschwindigkeiten sind, desto besser müssen die implementierten Algorithmen sein, um dieselbe Genauigkeit zu erzielen. Zusätzlich benötigt man bei größeren Dynamiken höhere Aufzeichnungsraten, um die Dynamiken erfassen zu können. Die Qualität eines Algorithmus kann zusätzlich gesteigert werden, indem *Coning* und *Sculling* Fehler berücksichtigt werden. Diese Fehler treten durch Vibrationen, die auf das INS wirken, auf. Beim Coning bewegt sich die sensitive Achse des Gyros auf einer Kegelfläche bezüglich des inertialen Raumes (Titterton und Weston, 2004). Dies kommt dadurch zustande, dass zwei orthogonal aufeinander stehende Achsen simultan Vibrationen in Form von phasenverschobenen Kreisbewegungen erfahren. Aufgrund dessen ist die sensitive Achse bezüglich ihrer nominellen Richtung immer leicht versetzt und misst leicht verfälschte Werte. Wird diese Kegelbewegung algorithmisch nicht berücksichtigt, wirkt sich dies in Form einer Drift in der Attitude aus. Zu beachten ist, dass die Gyros korrekt

messen, die Messdaten jedoch durch die Variation der sensitiven Achse verfälscht sind. Es handelt sich daher beim Coning nicht um einen Sensorfehler, sondern um einen Algorithmusfehler (Jekeli, 2001). Dies trifft auch beim Sculling zu. Hier treten lineare und kreisförmige Vibrationen gleicher Frequenz entlang orthogonaler Achsen auf. Werden die Vibrationen algorithmisch nicht berücksichtigt, so treten die Fehler aufgrund der unberücksichtigten raschen Änderungen der Attitude in Form von Accelerometer Biases auf. Während das Coning bei der Drehratenintegration berücksichtigt werden muss, kommen Sculling Algorithmen bei der Beschleunigungsintegration zum Einsatz.

Die Integrationskonstanten für die Lösung der Navigationsgleichungen haben ebenfalls großen Einfluss auf die Genauigkeit des Endresultats. Da sich die Positionsgenauigkeit exponentiell mit der Zeit verschlechtert, sind die Startwerte für Position, Geschwindigkeit und Attitude sehr wichtig. Die exponentielle Verschlechterung kommt daher zustande, dass bei jedem Integrationsschritt kleine Fehler gemacht werden, welche sich im Laufe der Zeit aufsummieren und Fehler in der berechneten Position, Geschwindigkeit und Attitude verursachen. Durch die Fehler in der Position und Geschwindigkeit entstehen wiederum Fehler bei der Berechnung der Erddrehrate, Normalschwere sowie Coriolisbeschleunigung. Die Fehler in der Attitude wirken sich wie bereits in Formel 3.67 beschrieben als Accelerometer Biases aus und verschlechtern das Ergebnis weiters. Für die bestmögliche Bestimmung der Attitude mittels Self-Alignment ist es besonders wichtig, die statischen Phasen zeitlich korrekt zu definieren.

Eine mögliche Verbesserung der Positionsgenauigkeit kann dann erzielt werden, wenn genaue Informationen über die Bewegung bekannt sind. Dies ist z. B. bei industriellen Anlagen der Fall. Mithilfe eines Kalman Filters und einem entsprechenden dynamischen Modell lassen sich die Ergebnisse verbessern.

Die Fehlermodellierung ist ein weiterer Punkt zur Qualitätsverbesserung. Hiermit ist nicht die Anbringung von Bias, Skalenfaktor etc. gemeint, da davon ausgegangen wird, dass das INS kalibriert ist und die Messdaten bereits um die aus der Kalibrierung stammenden Sensorfehler bereinigt sind. Vielmehr geht es um die Bestimmung und Reduktion von den sogenannten zufälligen systematischen Fehlern, also vor allem den Variationen in den Biases. Während des Fine Alignments kann versucht werden, die Biases zu bestimmen, um diese dann während der Navigation anzubringen. Da es jedoch schwer ist, in statischen Phasen Misalignment und Sensorfehler zu trennen, bietet es sich an, ein INS mit GNSS zu integrieren. Die von GNSS stammenden Positions- und Geschwindigkeitsinformationen können verwendet werden, um die Biases und die Misalignmentwinkel zu schätzen und somit die Positions-, Geschwindigkeits- und Alignmentfehler so gering wie möglich zu halten und die bei reiner INS Auswertung auftretenden Driften zu reduzieren oder sogar zu eliminieren.

Eine mögliche Einteilung der INS in Genauigkeitsklassen liefert Tabelle 3.1 (Jekeli, 2001). Sie beschreibt die Abweichung der vom System gelieferten Position zur wahren Position

als Maß pro Zeiteinheit. Diese Angaben beziehen sich auf reine INS Auswertungen. Die Nachvollziehbarkeit solcher Angaben in einer Spezifikation ist nur schwer möglich, da selten bis nie bekannt ist, auf welche Algorithmik sich die Angaben beziehen.

**Tabelle 3.1:** Genauigkeitsklassen von INS

Kategorie	Genauigkeit
niedrige Genauigkeitsklasse	> 2-4 km/h
mittlere Genauigkeitsklasse	1-4 km/h
hohe Genauigkeitsklasse	< 0.2-0.4 km/h



## 4 Moving-Base Gravimetry

Während in den meisten Anwendungen inertielle Navigationssysteme mit globalen Satellitenpositionierungssystemen kombiniert werden um die Vorteile beider Systeme auszunutzen, verfolgt die Moving-Base Gravimetry ein anderes Ziel. Hierbei geht es um die mobile terrestrische Bestimmung des Schwerefelds der Erde. Die Bestimmung des Erdschwerefelds bzw. des Geoids ist speziell in der Geodäsie und der Geophysik von großer Bedeutung. Da das Schwerefeld in direkter Verbindung zur Massenverteilung steht, lassen Erkenntnisse über das Schwerefeld Rückschlüsse über den Aufbau und die Gestalt der Erde zu. In der Geodäsie wird die genaue Kenntnis des Schwerefelds zur Definition von Höhensystemen benötigt. Gleichzeitig ist für die Umrechnung von GPS Höhen (ellipsoidische WGS84 Höhen) in orthometrische Höhen die genaue Kenntnis der Geoidundulation (Höhenunterschied zwischen Ellipsoid und Geoid) essentiell. In der Satellitengeodäsie wird das Schwerefeld zur möglichst genauen Prädiktion der Satellitenorbits benötigt, da die Satelliten durch das inhomogene Schwerefeld der Erde in ihrer Bewegung gestört werden. In der Geophysik werden Schwerefeldinformationen in der Vulkanologie sowie zum besseren Verständnis der Plattentektonik eingesetzt. Erdschwerefelddaten geben weiters Auskunft über große Massenveränderungen wie Eismassen-, Meeresniveau- und Grundwasserveränderungen. Die Anzahl möglicher Einsatzgebiete ist sehr groß, sie stellen jedoch sehr unterschiedliche Anforderungen bezüglich Genauigkeit sowie räumlicher und zeitlicher Auflösung. Die zeitliche Auflösung gibt an, in welchem Zeitabstand Informationen vom selben Gebiet vorliegen. Die räumliche Auflösung beschreibt die minimale Größe, die eine Struktur aufweisen muss, damit sie im Modell erkennbar ist. Die notwendigen Messungen zur Bestimmung des Erdschwerefelds können auf verschiedenste Art und Weise erfolgen. Bekannte Verfahren sind die terrestrische Absolut- und Relativgravimetrie, die Schiffs- und die Fluggravimetrie, sowie Satellitenschwerefeldmissionen (CHAMP, GRACE, GOCE) und Satellitenaltimetrie. Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich neben ihrem unterschiedlichen Einsatzgebiet in der Genauigkeit und räumlichen Auflösung. Vor dem Zeitalter der Satellitenmissionen zur Schwerefeldbestimmung (vor dem Jahr 2000) war das Schwerefeld nur in wenigen Regionen der Erde (Europa, Nordamerika, Japan und Teilen Australiens) mit hoher Genauigkeit bekannt. Die Daten wurden mittels terrestrischer Verfahren erfasst, welche einerseits ein teures Messinstrumentarium erfordern und andererseits sehr zeitaufwändig sind (15-30 Minuten pro Aufstellung). Terrestrische Verfahren haben jedoch den Vorteil, dass sie äußerst genaue Daten liefern. Absolutgravimeter besitzen zum Beispiel eine Genauigkeit von ungefähr  $1 \mu\text{Gal}$ . Durch die Satellitenschwerefeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE konnte das Schwerefeld mit nahezu globaler

Abdeckung und homogener Genauigkeit bestimmt werden. Nachteil der Satellitenmissionen ist jedoch die Flughöhe von mindestens 250 Kilometer im Fall von GOCE. Tiefer kann ein Satellit nicht fliegen, da der Luftwiderstand mit abnehmender Höhe immer größer wird und dadurch der Satellit innerhalb kürzester Zeit auf die Erde zurückfallen würde. Gleichzeitig verringert sich der Schwereinfluss mit steigender Höhe. Dadurch wird vor allem der Einfluss der hochfrequenten Details des Erdschwerefelds stark abgeschwächt, wodurch sich bei GOCE eine minimale räumliche Auflösung von 100 km halber Wellenlänge bei einer Genauigkeit von 1 mGal für die Schwereanomalien bzw. 1 cm für die Geoidhöhen ergibt. Diese räumliche Auflösung reicht jedoch für einige Anwendungen wie z. B. die Umrechnung zwischen GPS Höhen und orthometrischen Höhen bei weitem nicht aus. Um eine höhere räumliche Auflösung zu erzielen, müssen die Messungen im näheren Umfeld der Erde erfolgen. Aufgrund der Tatsache, dass terrestrische Messungen sehr zeitaufwändig sind und somit eine große räumliche Abdeckung in adäquater Zeit nicht möglich ist, bietet sich in diesem Fall die Fluggravimetrie an. In der Fluggravimetrie gibt es drei Ansätze, das sind einerseits die Skalargravimetrie und die Vektorgravimetrie und andererseits die Schweregradiometrie. Bei den ersten beiden Verfahren werden der Betrag bzw. der Betrag und die Richtung des anomalen Schwerevektors als erste Ableitungen des Störpotentials bestimmt, während bei der Gradiometrie zweite Ableitungen des Störpotentials gemessen werden. Zum Einsatz kommen sowohl kardanisches System wie auch Strapdown Systeme. An der Universität von Calgary wurde ein SINS System entwickelt, das bei einer räumlichen Auflösung von 2 km die Schwerestörung auf 1.5 mGal bestimmen kann (Bruton, 2000).

Ein erst in den letzten Jahren verfolgter Weg zur Schwerefeldbestimmung ist die terrestrische Moving-Base Gravimetry, die der SINS Fluggravimetrie sehr ähnlich ist. Bei beiden Ansätzen werden die spezifische Kraft mit einem SINS und die Kinematik mittels GNSS im differentiellen oder relativen Modus erfasst. Alternativ dazu können drei Accelerometer eingesetzt werden, deren Orientierung mittels GNSS Antennenarray bestimmt wird (Cali et al., 2005). Während man sich bei der Fluggravimetrie in der Luft bewegt, fährt man bei der Moving-Base Gravimetry mit einem Fahrzeug auf der Erde. Die Realisierung beider Ansätze wurde erst durch die FOC (full operational capability) von GPS im Jahr 1995 und den damit verbundenen Verbesserungen möglich. Vorteil der Fluggravimetrie gegenüber der Moving-Base Gravimetry ist die gleichmäßigere Bewegung mit geringeren Störungen, der Nachteil ist weiterhin die Flughöhe. Bei der Moving-Base Gravimetry liegt der Vorteil in der Nähe zur Erde, Nachteile sind die sich ständig ändernde Bewegung aufgrund von Verkehr und Straßenverlauf, Störungen in den IMU Daten aufgrund von Schäden im Straßenbelag sowie Probleme mit der Satellitensichtbarkeit aufgrund von Bäumen, Gebäuden etc. Zusammenfassend kann man sagen, dass im Unterschied zur Fluggravimetrie die aufgezeichneten dynamischen Beschleunigungen größere Variationen aufweisen und die Kinematik mittels GNSS mit schlechterer Genauigkeit bestimmbar ist. Gemein haben beide Ansätze den Umgang mit dem großen Messrauschen im Verhältnis zur gewünschten Genauigkeit von weniger als 3 mGal. Aufgrund dieser Tatsache müssen geeignete Filter zum Einsatz kommen, die

das Messrauschen stark reduzieren, ohne die räumliche Auflösung zu sehr zu dezimieren und somit Anteile des Schwerefeldsignals zu verfälschen.

## 4.1 Beobachtungsmodelle

Jekeli (2001) liefert zwei mögliche Verfahren zur Moving-Base Gravimetry, die auch in der Fluggravimetrie zum Einsatz kommen können. Der erste Ansatz beruht auf Beschleunigungen und nutzt die Grundbeziehung zwischen Schwerebeschleunigung, kinematischer Beschleunigung und spezifischer Kraft

$$g^i = \ddot{x}^i - f^i. \quad (4.1)$$

Die spezifische Kraft  $f^i$  wird von den Accelerometern geliefert und die kinematische Beschleunigung  $\ddot{x}^i$  wird aus den GNSS Messungen z. B. durch zweifache Ableitung nach der Zeit bestimmt (mehr dazu folgt später in diesem Abschnitt). Als Differenz erhält man den Schwerevektor zusammengesetzt aus Gravitation und Fliehkraft. In vielen Fällen wird zusätzlich noch die Normalschwere abgezogen, um als Resultat die Schwerestörung zu erhalten.

Der zweite Ansatz von Jekeli (2001) basiert auf Positionslösungen. Die inertial bestimmte Position lautet

$$x^i = x_0^i + (t - t_0) \dot{x}_0^i + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t (f^i + g^i) dt dt \quad (4.2)$$

und unterscheidet sich von der GNSS Position vor allem aufgrund eines Fehlers in der angenommenen Schwere  $g^i$ . Der beobachtete Unterschied kann verwendet werden, um die tatsächliche Schwere zu schätzen. Dies kann z. B. in einem Kalman Filter erfolgen.

Die beiden beschriebenen Ansätze sind grundlegend verschieden, sie haben jedoch gemeinsam, dass Sensorfehler die Schätzung der Schwerestörung maßgeblich beeinflussen und verfälschen. Zusätzlich ist aus den Gleichungen 4.1 und 4.2 zu erkennen, dass GPS und INS getrennt betrieben werden, wodurch die Fehler nicht geschätzt werden können. Bruton (2000) zeigt jedoch, dass auch in dieser Anwendung eine Integration beider Systeme mittels Kalman Filter zur Bias- und Driftschätzung sinnvoll, wenn nicht sogar essentiell ist.

Bisher wurde immer der Schwerevektor als Gesamtes betrachtet. In diesem Fall spricht man von Vektorgravimetrie. Oftmals wird jedoch auch nur die z-Komponente im Horizontsystem betrachtet. Der Fachbegriff dafür lautet Skalargravimetrie. Die Vektorgravimetrie ist insofern kritischer, da die Horizontalkomponenten viel stärker von Misalignment Fehlern beeinflusst werden als die z-Komponente. In dieser Arbeit wird ausschließlich Skalargravimetrie betrieben.

Weiß und Schwarz (1998) liefern die Beobachtungsgleichung für die *Strapdown Inertial Vector Gravimetry* (SIVG) mit

$$\delta g^n = \dot{v}^n - R_b^n f^b + (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)v^n - \gamma^n. \quad (4.3)$$

Dies entspricht dem Beschleunigungsansatz von Jekeli (2001) ausgedrückt im n-Frame.  $\delta g^n$  beschreibt die Schwerestörung,  $\dot{v}^n$  ist die kinematische Beschleunigung,  $(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)v^n$  beschreibt die Coriolisbeschleunigung und  $\gamma^n$  steht für die Normalschwere. Im Falle der Skalargravimetrie wird nur die z-Komponente von Gleichung 4.3 betrachtet, in diesem Fall wird dann von *Strapdown Inertial Scalar Gravimetry* (SISG) gesprochen.

Eine weitere Variante zur Schwerebestimmung beschreiben Weiß und Schwarz (1998) unter dem Namen *Rotation Invariant Scalar Gravimetry*:

$$\delta g = \sqrt{|f^b| - (\dot{v}_E^n)^2 - (\dot{v}_N^n)^2} + \dot{v}_D^n - \gamma. \quad (4.4)$$

Dieser Ansatz arbeitet nur mit dem Betrag der spezifischen Kraft, wodurch keine Gyromessungen benötigt werden.

In der weiteren Arbeit wird der Beschleunigungsansatz nach Weiß und Schwarz (1998) in Hinblick auf die Skalargravimetrie verfolgt. Abbildung 4.1 liefert das Schema zur SISG. Hierbei liefert die IMU die spezifische Kraft  $f^b$ , welche mithilfe der aus den Gyromessungen abgeleiteten Attitude  $R_b^n$  in den n-Frame transformiert wird. GNSS liefert die kinematische Beschleunigung  $\dot{v}^n$  sowie die aus Position und Geschwindigkeit abgeleiteten Werte für die Corioliskorrektur  $c^n$  und die Normalschwere  $\gamma^n$ .

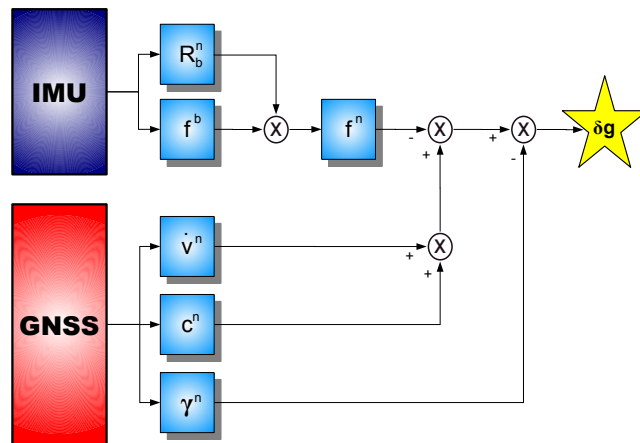


Abbildung 4.1: Schema eines SISG Systems

Die mittels GNSS bestimmten Beschleunigungen  $\dot{v}^n$  sind von großer Bedeutung, nicht zuletzt, weil die Genauigkeit dieser Messungen die Genauigkeit des Endresultats wesentlich

beeinflusst. Zur Bestimmung der Beschleunigung existieren mehrere Ansätze. Der naheliegendste Ansatz ist die zweifache numerische Differentiation der Positionslösungen. Dieser Ansatz benötigt jedoch hohe Genauigkeiten der Einzelpositionen, da Fehler in der Position durch die zweifache Ableitung enorm verstärkt werden. Die Beschleunigungen können außerdem durch einfache numerische Differentiation der Dopplergeschwindigkeiten berechnet werden. Ein dritter und sehr effektiver Ansatz ist jener mittels Phasenbeschleunigungen. Dabei kann die Positionsgenauigkeit im Meterbereich liegen, wichtig ist nur, dass die Trägerphase kontinuierlich beobachtet wird und keine Cycle Slips auftreten. Bei allen Methoden muss der Hebelarmeffekt berücksichtigt werden. Dieser tritt dadurch in Erscheinung, dass IMU und GNSS Empfänger unterschiedliche Sensornullpunkte aufweisen. Daher müssen die GNSS Beschleunigungen auf das IMU Zentrum oder die IMU Messungen auf das GNSS Phasenzentrum umgerechnet werden.

An der Universität von Ohio wurde ein Moving-Base System zur Vektorgravimetrie entwickelt (Li, 2007). Anhand dieses Systems sollen die einzelnen notwendigen und/oder möglichen Schritte zur Prozessierung beschrieben werden. Als Erstes werden INS und GPS lose in einem *two-stage adaptive extended Kalman Filter* gekoppelt, um die DGPS Datenlücken zu schließen. Weiters werden in diesem Kalman Filter die langwelligen INS Fehler wie Accelerometer und Gyro Bias und Skalenfaktor bestimmt, um anschließend die INS Messdaten zu korrigieren. Die kinematischen Beschleunigungen werden aus GPS mittels Positions- und Phasenmethode bestimmt und miteinander kombiniert. Anschließend wird mittels *B-Spline Glätter* das hochfrequente Beobachtungsrauschen in den kinematischen und dynamischen Beschleunigungen (Beschleunigungen der IMU) reduziert. Danach werden die geglätteten Beschleunigungen in einem Kalman Filter kombiniert, um genäherte Schwerestörungen zu schätzen. Um das Resultat weiter zu verbessern, werden die Schwerestörungen zusätzlich mittels *Wavelets* gefiltert. Liegen mehrere Messfahrten derselben Trajektorie vor, so können diese mittels *Wave-Number Correlation* kombiniert werden. Um verbleibende systematische Fehler zu eliminieren, wird das sogenannte *End-Point Matching* angewendet. Bei diesem Verfahren benötigt man entlang der Trajektorie mindestens zwei Punkte mit bekannter Schwere (am besten am Anfang und am Ende). Der geschätzte Schwereverlauf wird an diesen Stützstellen absolut eingehängt und wird somit nur als Relativinformation genutzt. Zusätzlich zu den bisher erwähnten Prozessierungsschritten empfiehlt Bruton (2000) die rohen Messdaten beider Systeme zu filtern, noch bevor diese in einem Kalman Filter zur INS Fehlerschätzung kombiniert werden.

### 4.2 Fehler in der SINS Gravimetrie

Betrachtet man die Messungen für die Schwerestörung, so fällt einem sofort das niedrige Signal-zu-Rausch Verhältnis auf. Während sich das zu bestimmende Signal der Schwerestörung im Bereich von maximal 100 mGal bewegt, betragen die kinematischen Beschleu-

nigungen mehrere  $m/s^2$  (Faktor 1000 und mehr). Zur Verbesserung des schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnisses aufgrund der zufälligen Fehler werden in der Fluggravimetrie wie auch Moving-Base Gravimetry komplexe Filtermethoden praktiziert. Dies umfasst die Filterung im Zeitbereich mittels FIR und IIR Filter, die Filterung im Ortsbereich mittels Fourier Transformation oder Wavelets sowie die Anwendung von B-Spline Glätter, Wave Correlation Filter und Kalman Filter.

Die sehr unterschiedlichen Fehlercharakteristiken zwischen IMU und GPS stellen eine weitere Herausforderung dar. Während die Fehler einer IMU eher im niedrigen Frequenzbereich aufzufinden sind, besitzen die GNSS Messdaten Fehler im höheren Frequenzbereich. Als Resultat beinhaltet der abgeleitete Schwerevektor bzw. die abgeleitete Schwerestörung eine Überlagerung beider Fehler. Neben der eventuellen Modellierung und Bestimmung einzelner Fehler werden auch hier entsprechende Filter angewandt.

Betrachtet man das Fehlermodell der SIVG, so lautet dies laut Schwarz und Wei (1994) adaptiert für das NED System

$$d\delta g^n = F^n \epsilon^n - R_b^n df^b + d\dot{v}^n + \ddot{v}^n dT + (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)dv^n - V^n(2d\omega_{ie}^n + d\omega_{en}^n) - d\gamma^n. \quad (4.5)$$

$d\delta g^n$  beschreibt die Fehler in der Schwerestörung,  $F^n$  ist eine schiefsymmetrische Matrix mit den Komponenten der spezifischen Kraft,  $\epsilon^n$  steht für die Fehler in der Attitude,  $df^b$  entspricht den Accelerometerfehlern und  $\ddot{v}^n dT$  beschreibt den aufgrund des Synchronisierungsfehlers hervorgerufenen Fehler.  $(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)dv^n$  zeigt den Einfluss des Geschwindigkeitsfehlers auf die Schwere und die beiden letzten Terme beschreiben die aufgrund von Positions- und Geschwindigkeitsfehlern auftretenden Fehler in den berechneten Drehraten und der Normal-schwere und dem daraus resultierenden Einfluss auf die Schwerebeschleunigung. Reduziert man das Fehlermodell auf die signifikanten Fehler, so resultiert daraus

$$d\delta g^n = F^n \epsilon^n - R_b^n df^b + d\dot{v}^n + \ddot{v}^n dT. \quad (4.6)$$

Dies lässt sich damit begründen, dass Position und Geschwindigkeit mit ausreichender Genauigkeit bestimmbar sind. Beschränkt man sich auf die Skalargravimetrie, erhält man folgendes Fehlermodell:

$$d\delta g = f_N \epsilon_E - f_E \epsilon_N - R_b^n df^b + d\dot{v}_D + \ddot{v}_D dT. \quad (4.7)$$

Aus dieser Gleichung wird klar, weshalb eine gleichmäßige Bewegung Vorteile mit sich bringt. Im Falle gleichmäßiger Bewegung sind die spezifischen Kräfte  $f_N$  in Nordrichtung und  $f_E$  in Ostrichtung klein, wodurch sich die Fehler  $\epsilon_N$  und  $\epsilon_E$  in der Attitude weniger stark auf die Schwerebeschleunigung auswirken. Zusätzlich werden die Geschwindigkeitsfehler  $d\dot{v}_D$  geringer und die kleinen vertikalen Beschleunigungen  $\ddot{v}_D$  verringern den Einfluss des Synchronisierungsfehlers  $dT$ .

Betrachtet man die Accelerometerfehler  $df^b$  im Detail, so setzen sich diese aus Bias  $b$ , Skalenfaktor  $S_f$ , Nichtorthogonalität der Sensorachsen  $N_f$  und dem zufälligen Messrauschen  $n_f$  zusammen (Bruton, 2000):

$$df^b = b + S_f f^b + N_f f^b + n_f. \quad (4.8)$$

Durch eine Laborkalibrierung kann ein Großteil der ersten drei Terme bestimmt werden. Der verbleibende Accelerometerfehler besteht dann aus einer Kombination aus verbleibenden systematischen niedrigfrequenten Fehlern und zufälligen Fehlern, die über das gesamte Frequenzspektrum verteilt auftreten.

### 4.3 Stop-and-Go Modus

In dieser Arbeit wird eine Vorstufe der Moving-Base Gravimetry realisiert, und zwar die SISG im Stop-and-Go Modus. Hierbei wird ähnlich wie bei der Moving-Base Gravimetry ein Sensorsystem in einem Auto installiert und damit jene Gebiete abgefahren, in denen die Schwere zu bestimmen ist. Im Vergleich zur Moving-Base Gravimetry wird die Schwere jedoch nur in den statischen Phasen bestimmt. Das heißt, es werden jene Orte, an denen die Schwere gesucht ist, angefahren, um dort für eine gewisse Zeit Messungen durchzuführen. Dadurch werden die kinematische Beschleunigung  $\dot{v}^n$  sowie die Geschwindigkeit  $v^n$  zu null und man erhält aus Gleichung 4.3

$$\delta g^n = -R_b^n f^b - \gamma^n. \quad (4.9)$$

Es vereinfacht sich somit die Prozessierung der GNSS Messdaten enorm, da keine Geschwindigkeiten und kinematischen Beschleunigungen zu bestimmen sind. Der GNSS Empfänger entfällt jedoch nicht vollständig, da zur Berechnung der Normalschwere die geografische Breite  $\varphi$  und die ellipsoidische Höhe  $h$  benötigt werden. Für diese Anwendung ist jedoch kein Empfänger für kinematische Anwendungen erforderlich. Ebenso verringert sich die benötigte Aufzeichnungsrate auf 1 Hz und darunter, während bei der Moving-Base Gravimetry 10 Hz und mehr Standard sind.

Im Stop-and-Go Modus vereinfacht sich ebenso das Fehlermodell:

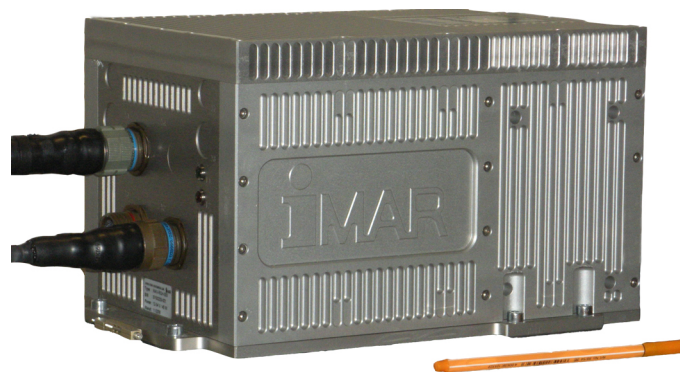
$$d\delta g = f_N \epsilon_E - f_E \epsilon_N - R_b^n df^b. \quad (4.10)$$

Obwohl sich das Fehlermodell im Stop-and-Go Modus vereinfacht, trifft dies jedoch nicht auf die Bestimmung der Schwerestörung zu. Aufgrund der nichtvorhandenen Kinematik können Sensorfehler der IMU nicht durch eine Integration mit GNSS bestimmt werden. Relative Techniken wie das Einhängen zwischen Stützpunkten (End-Point Matching) sind ebenfalls nicht möglich. Dadurch können keine systematischen Restfehler eliminiert werden. Weiters besteht wie beim Alignment das Problem, dass Sensorfehler und Alignmentfehler nicht trennbar sind, wodurch sich ein Fehler in der Attitude als Accelerometerfehler auswirkt und somit die abgeleitete Schwere um einen systematischen Fehler verfälscht.

## 5 Untersuchungen der Messdaten

Dieses Kapitel befasst sich mit verschiedenen Untersuchungen zu den rohen Messdaten. Sämtliche Untersuchungen innerhalb dieses Kapitels sowie jene der Kapitel 6 und 7 wurden mit MATLAB durchgeführt. Bevor näher auf die Untersuchungen eingegangen wird, wird in den nächsten Absätzen das verwendete INS näher beschrieben.

Sämtliche Untersuchungen wurden mit dem INS iMAR iNav-RQH-003 (siehe Abbildung 5.1) durchgeführt, welches sich im Besitz des INAS befindet. Beim iNav-RQH-003 handelt es sich um ein Strapdown System bestehend aus drei Honeywell GG1320 Ring Laser Gyros, drei Honeywell QA2000-40 Q-Flex-Accelerometern und einem Strapdown Prozessor. Das System bietet die Möglichkeit, einen externen RTK GPS Empfänger sowie bis zu 3 Odometer anzuschließen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit der Synchronisation der Messdaten mittels PPS oder SYNC Signal. Dieses Feature wird für die Synchronisation von IMU Messdaten und GPS Messdaten benötigt. Das iNav-RQH-003 System kann sowohl als IMS als auch als INS eingesetzt werden. Im Einsatz als IMS liefert das System entweder rohe Messdaten oder bereits korrigierte Messdaten, d. h. die während des Herstellerkalibrierungsprozesses bestimmten INS Fehler sind angebracht. Im Betrieb als INS werden vom System in Echtzeit Position, Geschwindigkeit und Attitude ausgegeben, wobei die Positionslösungen aus einer rein inertialen Auswertung oder aus der Integration mit GNSS und Odometer stammen können. Innerhalb dieser Arbeit wird das iNav-RQH-003 System ausschließlich als IMS verwendet, um die bereits korrigierten Messdaten weiterzuverarbeiten.



**Abbildung 5.1:** Abbildung des INS iMAR iNav-RQH-003



Aufgrund der hohen Qualität des iNav-RQH-003 Systems eignet es sich für eine Vielzahl von Anwendungen. Laut Hersteller kommen diese Systeme bei Land-, Luft-, Wasser- und Unterwasserapplikationen sowohl im militärischen wie auch im zivilen Bereich zum Einsatz.

Tabelle 5.1 liefert eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Spezifikationen. Die vollständige Spezifikation ist im Anhang A2 zu finden. Betrachtet man die Positionsgenauigkeit von 0.8 nm/h (1.5 km/h), so ist das System laut Tabelle 3.1 ein System mittlerer Genauigkeit. Bei der Angabe zur Auflösung der RLGs gilt es zu beachten, dass sich diese auf eine Datenrate von 1 Hz bezieht, misst man hingegen mit der maximalen Datenrate von 2000 Hz, so reduziert sich die Auflösung auf  $0.6^\circ$  (mehr dazu siehe Abschnitt 5.1). Trotz dieser gravierenden Verringerung wird vom Hersteller empfohlen mit maximaler Datenrate aufzuzeichnen, um Coning Effekte so gering wie möglich zu halten. Außerdem stellt es im Nachhinein kein Problem dar, die Daten auf eine geringere Datenrate zu konvertieren, da bei geringeren Aufzeichnungsraten intern trotzdem mit 2000 Hz aufgezeichnet wird, und nur eine arithmetische Mittelbildung stattfindet.

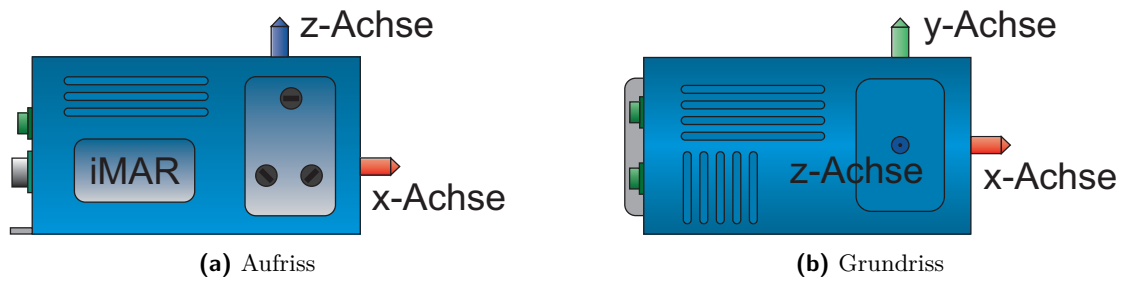
**Tabelle 5.1:** iNav-RQH Spezifikationen

Qualitätsmerkmal	Größenordnung
Positionsgenauigkeit	0.8 nm/h (ohne Unterstützung)
Aufzeichnungsrate	1 bis 2000 Hz
Gyro Drift	$< 0.003^\circ/\text{h}$
Accelerometer Bias	$< 60 \mu\text{g}$
Auflösung Gyro	$0.0003^\circ$
Auflösung Accelerometer	$< 1 \mu\text{g}$

Wie bereits im Abschnitt 2.3 „Sensorfehler“ erklärt, besitzen RLGs den sogenannten Unempfindlichkeitsfehler. Um diesen bestmöglich zu eliminieren, werden die Gyros mittels Dithering angeregt. Die entsprechenden Anregungsfrequenzen für die Gyros werden vom Hersteller mit 620 Hz in  $x_b$ -Richtung, 518 Hz in  $y_b$  und 574 Hz in  $z_b$ -Richtung angegeben. Die Definition des b-Frames kann der Abbildung 5.2 entnommen werden.

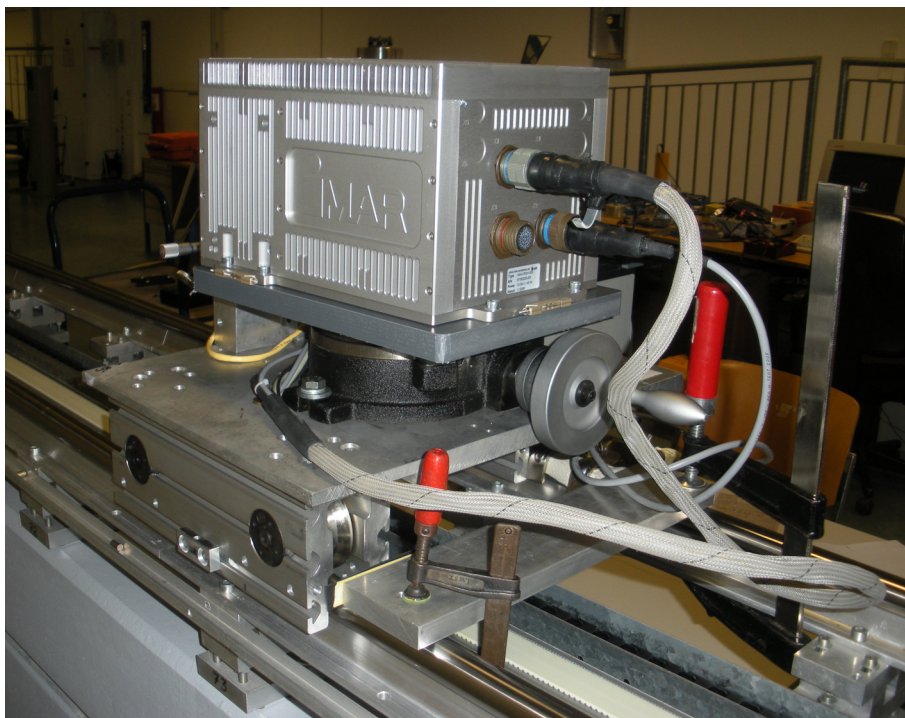
## 5.1 Rohe Messdaten

Um die Messdaten näher zu untersuchen, wurden Messungen durchgeführt, bei denen sich die IMU stets in Ruhe befand. Die Messungen fanden im Messlabor des Instituts für Ingenieurgeodäsie und Messsysteme der TU Graz, Steyrergasse 30, statt. Die IMU war auf einem Wagen auf der Komparatorbank montiert (siehe Abbildung 5.3). Der Wagen war wiederum



**Abbildung 5.2:** Body Frame des iMAR iNav-RQH-003

mittels *Schweißer-Gripzangen* auf der Komparatorbank fixiert, um mögliche Bewegungen des Wagens zu verhindern (nicht auf der Abbildung zu sehen).



**Abbildung 5.3:** Montage im Messlabor

Um Systematiken in den Messdaten aufgrund von Temperatureffekten ausschließen zu können, wurde das Instrument eine halbe Stunde bei eingeschaltetem Zustand akklimatisiert. Zusätzlich zeigten Untersuchungen, dass die Zangen zu Beginn geringe Bewegungen zulassen, bis sich diese festziehen. Eine allgemeine Aussage über die Dauer dieser Einlaufphase kann aufgrund nicht modellierbarer Variation nicht gemacht werden.

Betrachtet man die rohen Messdaten (siehe Abbildung 5.4), so fallen sofort die großen Rauschamplituden im Verhältnis zu den angegebenen Auflösungen auf. Dies kommt daher,

dass die RLGs in Schwingung versetzt werden, um den Unempfindlichkeitsfehler größtenteils auszuschalten. Wie bereits erwähnt, werden die drei RLGs mit unterschiedlichen Frequenzen und jeweils in Richtung seiner sensitiven Achse in Schwingung versetzt. Dies hat zur Ursache, dass das gesamte Gehäuse leicht vibriert. Da die Accelerometer im Gehäuse nicht gleich hart gelagert sind, wirken sich diese Vibrationen unterschiedlich auf die Rauschamplituden der einzelnen Sensoren aus. Während die Accelerometer Y und Z mit 1.3 bzw. 1.6  $m/s^2$  eine ähnlich hohe Rauschamplitude aufweisen, besitzt der X-Accelerometer mit 0.3  $m/s^2$  eine signifikant geringere Rauschamplitude.

Die Untersuchungen der Drehraten lassen vermuten, dass hier eine Quantifizierung stattfand. Schaut man sich die Drehraten im Detail an (siehe Abbildung 5.5b), so lässt sich eine Quantifizierung von 0.6  $^\circ/s$  erkennen. Die Angabe von 0.0003  $^\circ/s$  laut Spezifikation lässt sich so erklären, dass bei einer Aufzeichnungsrate von 1 Hz mit 0.0003  $^\circ/s$  aufgelöst werden kann, während sich bei der maximalen Samplingrate von 2000 Hz die Auflösung auf 0.6  $^\circ/s$  reduziert. Die Beziehung zwischen der Aufzeichnungsrate  $f_s$  in Hz und der Auflösung lautet:

$$\text{Auflösung} = 0.6^\circ / f_s. \quad (5.1)$$

Um die Messdaten näher zu untersuchen, empfiehlt es sich die Messdaten mittels *Fourier Transformation* vom Zeitbereich in den Spektralbereich zu transformieren. Die Fourier Transformation bedient sich der Eigenschaft, dass jedes periodische Signal durch eine Kombination von Sinus und Cosinus Funktionen beliebiger Frequenz und Amplitude darstellbar ist. Die Fourier Transformation zerlegt also das zu untersuchende Signal in eine Reihe von Sinus und Cosinus Funktionen. Die Formel für die kontinuierliche Fourier Transformation (Fourier Analyse) lautet:

$$F(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\eta t} dt, \quad (5.2)$$

die Formel für die inverse Fourier Transformation (Fourier Synthese) lautet:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)e^{i2\pi\eta t} dt. \quad (5.3)$$

$f(t)$  beschreibt das Signal im Zeitbereich,  $F(\eta)$  ist das Äquivalent im Spektralbereich (auch *Spectral Density* genannt) und  $\eta$  entspricht der Frequenz. Die Sinus und Cosinus Funktionen sind in der Euler'schen Zahl versteckt. Die Beziehung zwischen Euler'scher Zahl und Sinus und Cosinus liefert die Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi). \quad (5.4)$$

Um das Signal im Spektralbereich analysieren zu können, muss aus der Spectral Density das Amplitudenspektrum  $|F(\eta)|$  berechnet werden:

$$|F(\eta)| = \sqrt{\Re[F(\eta)]^2 + \Im[F(\eta)]^2} \quad (5.5)$$

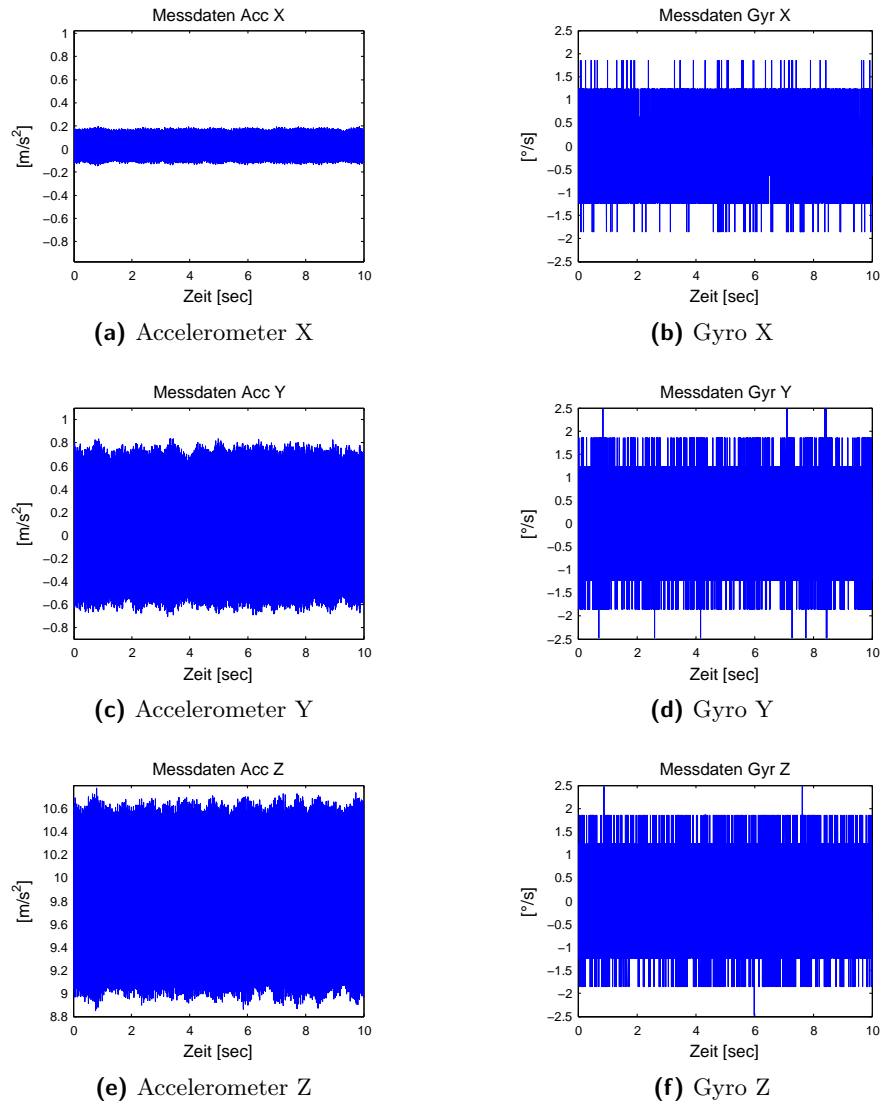


Abbildung 5.4: Messungen im Messlabor

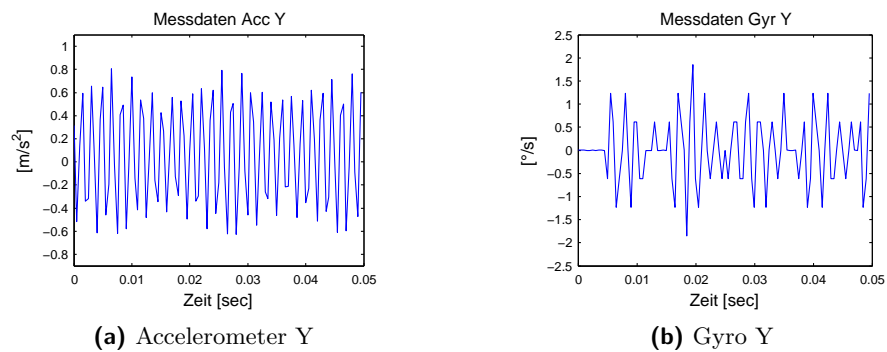


Abbildung 5.5: Detailansicht der Messungen im Messlabor

Dieses drückt aus, wie stark die einzelnen Frequenzen im Signal vertreten sind. Somit lässt sich erkennen, aus welchen Bestandteilen ein Signal besteht.

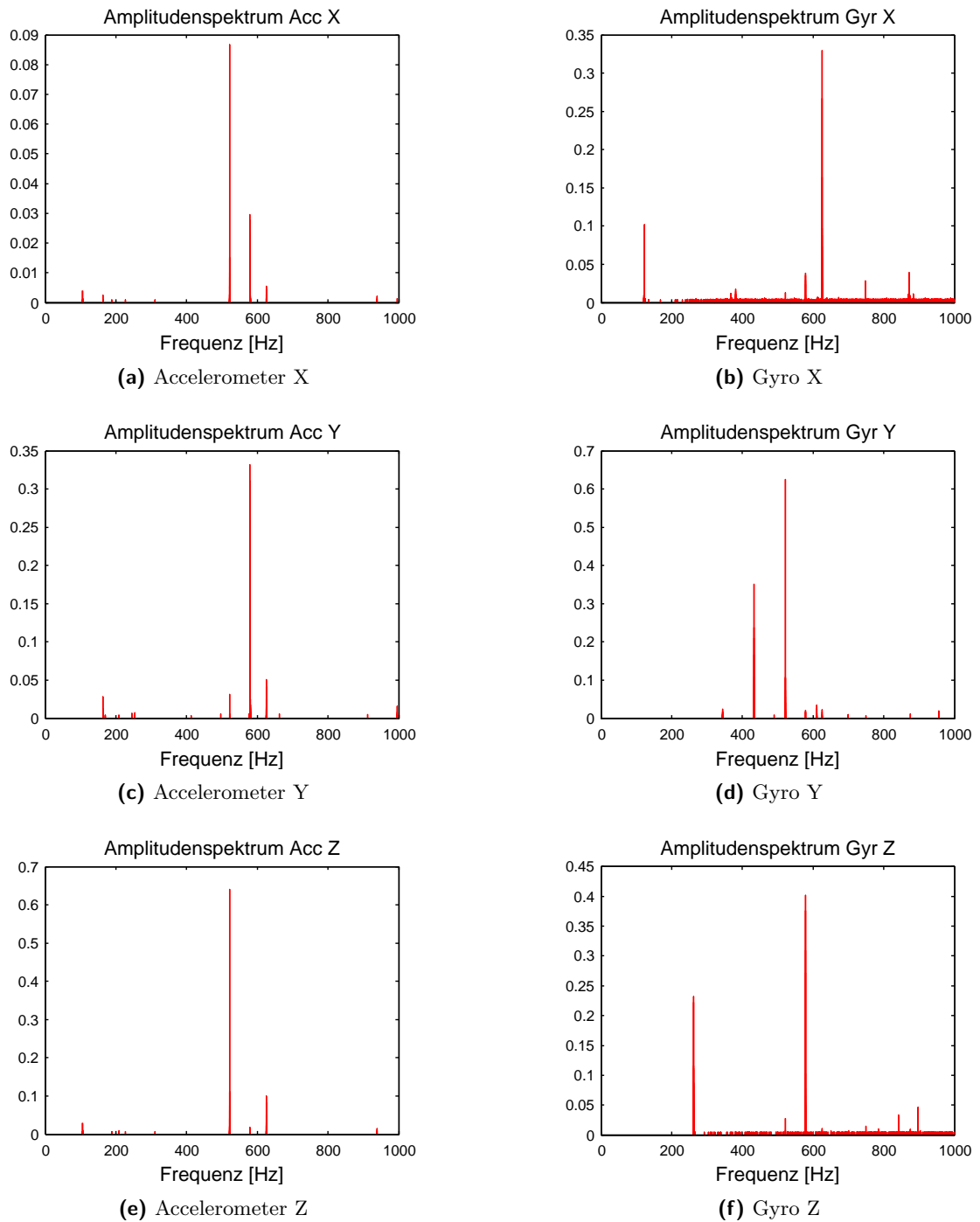
Führt man für die Messungen im Messlabor die Fourier Analyse durch, so kann man einige signifikante Frequenzen erkennen. Die Fourier Analyse wurde auf einem 100 Sekunden langen Ausschnitt der Daten angewandt. Die Untersuchung größerer Datenmengen hat keine Veränderung im Amplitudenspektrum gezeigt. In den Spektren sind der Übersichtlichkeit halber nur jene Frequenzen eingezeichnet, deren Amplitude größer 1/100 der Maximalamplitude ist.

Betrachtet man zuerst die Gyromessungen in Abbildung 5.6, so können sehr deutlich die Anregungsfrequenzen als jeweils größter Peak in den Spektren identifiziert werden. Die geschätzten Anregungsfrequenzen der Gyros betragen 625.8 Hz in X-Richtung (nominell 620 Hz), 522.2 Hz in Y-Richtung (nominell 518 Hz) und 579.5 Hz in Z-Richtung (nominell 574 Hz). Erklärungen für die Abweichungen von den nominellen Werten wurden keine gefunden. Wiederholt man die Untersuchungen für verschiedene Ausschnitte innerhalb einer Messung, so variieren die geschätzten Frequenzen um wenige Hundertstel Hz. Tabelle 5.2 zeigt die Variationen zwischen verschiedenen Messungen. Zwischen den Messungen wurde die IMU immer für wenige Minuten ausgeschaltet. Wie aus den Werten der Tabelle ersichtlich ist, unterscheiden sich die Anregungsfrequenzen zwischen den Messungen um bis zu 1 Hz. Daraus lässt sich ableiten, dass auch die Schwingungsanreger Einschaltvariationen aufweisen. Dies ist speziell dann zu beachten, wenn Filter angewandt werden, die diese Frequenzen abschwächen oder entfernen sollen. Untersuchungen zu Filteransätzen sowohl für die Navigation wie auch für die Moving-Base Gravimetry sind in den Kapiteln 6 und 7 angeführt.

**Tabelle 5.2:** Variationen in den Anregungsfrequenzen

Messung	X-Richtung	Y-Richtung	Z-Richtung
1	625.8 Hz	522.2 Hz	579.5 Hz
2	625.4 Hz	521.8 Hz	578.9 Hz
3	625.0 Hz	521.4 Hz	578.5 Hz
4	625.6 Hz	521.9 Hz	579.2 Hz
5	625.0 Hz	521.5 Hz	578.4 Hz
6	625.8 Hz	522.2 Hz	579.4 Hz
7	625.1 Hz	521.6 Hz	578.7 Hz

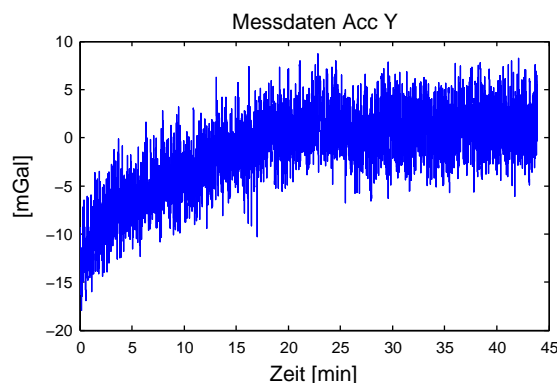
Analysiert man das Amplitudenspektrum in Abbildung 5.6b genauer, so findet man in den Messdaten des X-Gyros neben der Anregungsfrequenz eine weitere signifikante Frequenz von 122.7 Hz, deren Ursache jedoch nicht eruiert werden konnte. Dabei handelt es sich vielleicht um eine Eigenfrequenz des Gyros. Vielmehr sieht man jedoch, dass es weitere Frequenzen



**Abbildung 5.6:** Frequenzanalyse der Messungen im Messlabor

mit niedriger Amplitude gibt. Darunter verbergen sich auch die Anregungsfrequenzen der anderen beiden Gyros. Diese zeigen die Coning Bewegung des Gyros. Die Messdaten der Gyros Y und Z beinhalten ebenso die Anregungsfrequenzen der jeweils anderen Gyros. Gleich wie beim X-Gyro enthalten auch die Messdaten der Gyros in Y und Z-Richtung jeweils eine zweite signifikante Frequenz. Ein Beweis für den Zusammenhang zwischen dem Dithering und diesen Frequenzen (433 Hz im Y-Gyro und 261.7 Hz im Z-Gyro) konnte nicht gefunden werden.

Betrachtet man die Frequenzanteile der Accelerometer, so sieht man sofort, dass die stärksten Amplituden ebenfalls durch die Gyroanregung hervorgerufen werden. Vergleicht man die Beträge der Amplituden der drei Accelerometer, so sieht man, dass der X-Accelerometer die kleinste Amplitude aufweist, gefolgt vom Y-Accelerometer. Da das Amplitudenspektrum die Energie eines Signals beschreibt, stimmen die hier erzielten Ergebnisse mit den Untersuchungen im Zeitbereich (siehe Abbildung 5.4) überein, wo die Messdaten des X-Accelerometers über das geringste Rauschen verfügen. Um das Messrauschen der Accelerometer bei vollkommener Ruhe (ohne Gyroanregung) zu simulieren, wurden die Messdaten entsprechend gefiltert. In diesem Fall verringert sich die Rauschamplitude je nach Sensor um den Faktor 8 bis 12.



**Abbildung 5.7:** Einlaufeffekt durch kurzes Ausschalten der IMU

Ein wesentliches Qualitätskriterium einer IMU sind die Angaben von Accelerometer Bias und Gyro Drift. Bei der iNav-RQH-003 werden die Werte mit  $< 60 \mu g = 60 \text{ mGal}$  für den Bias und  $< 0.003 \text{ }^\circ/h$  für die Drift angegeben. Da die Bestimmung dieser Werte nur mit großem Aufwand und mit entsprechenden Vorrichtungen wie z. B. Drehtischen möglich ist, werden hier nur die Variationen dieser Parameter analysiert. Da die IMU jedoch bei der Auslieferung im Jahr 2006 vom Hersteller iMAR kalibriert wurde, sollten die festgestellten Variationen in Bias und Drift nur den Einschaltvariationen entsprechen. Zur Untersuchung wurden mehrere Messungen mit einer Dauer von mindestens 40 Minuten durchgeführt, zwischen den Messungen wurde die IMU für ein bis zwei Minuten vom Strom getrennt und neu gestartet. Diese Zeit reichte aus, um in den Messdaten Einlaufeffekte von bis zu 20 Minuten erkennen zu können (siehe Abbildung 5.7). Daher wurden die Mittelwerte und Standardab-

weichungen in Tabelle 5.3 bei Bedarf ohne Einlaufphase berechnet. Der Bias wird in Gal angegeben, da diese Einheit vor allem in der physikalischen Geodäsie sehr verbreitet ist. Die Relation zwischen Gal und  $m/s^2$  lautet:  $100 \text{ Gal} = 1 m/s^2$ . Die numerischen Werte zeigen, dass bei den Accelerometern mit  $\pm 52.5 \text{ mGal}$  (die Hälfte von  $\Delta_{\max}=105 \text{ mGal}$ ) die Spezifikation von  $< 60 \text{ mGal}$  eingehalten wird. Bei den Gyros wurden maximale Variationen im Drift von  $\pm 0.0043 \text{ }^\circ/\text{h}$  (die Hälfte von  $\Delta_{\max}=0.0087 \text{ }^\circ/\text{h}$ ) festgestellt, welche knapp über der Spezifikation von  $0.003 \text{ }^\circ/\text{h}$  liegt.

**Tabelle 5.3:** Variationen im Accelerometer Bias und Gyro Drift

Messung	Acc X	Acc Y	Acc Z	Gyr X	Gyr Y	Gyr Z
1	2.787 Gal	6.624 Gal	980.696 Gal	-4.8320 $^\circ/\text{h}$	-8.9399 $^\circ/\text{h}$	11.0860 $^\circ/\text{h}$
2	2.789 Gal	6.616 Gal	980.692 Gal	-4.8316 $^\circ/\text{h}$	-8.9411 $^\circ/\text{h}$	11.0863 $^\circ/\text{h}$
3	2.797 Gal	6.627 Gal	980.656 Gal	-4.8282 $^\circ/\text{h}$	-8.9434 $^\circ/\text{h}$	11.0853 $^\circ/\text{h}$
4	2.792 Gal	6.621 Gal	980.702 Gal	-4.8245 $^\circ/\text{h}$	-8.9399 $^\circ/\text{h}$	11.0864 $^\circ/\text{h}$
5	2.699 Gal	6.592 Gal	980.726 Gal	-4.8271 $^\circ/\text{h}$	-8.9486 $^\circ/\text{h}$	11.0884 $^\circ/\text{h}$
6	2.709 Gal	6.588 Gal	980.761 Gal	-4.8283 $^\circ/\text{h}$	-8.9418 $^\circ/\text{h}$	11.0833 $^\circ/\text{h}$
$\Delta_{\max}$	98 mGal	39 mGal	105 mGal	0.0075 $^\circ/\text{h}$	0.0087 $^\circ/\text{h}$	0.0051 $^\circ/\text{h}$
Mittelw.	2.762 Gal	6.611 Gal	980.706 Gal	-4.8286 $^\circ/\text{h}$	-8.9425 $^\circ/\text{h}$	11.0860 $^\circ/\text{h}$
Stdabw.	45 mGal	17 mGal	35 mGal	0.0028 $^\circ/\text{h}$	0.0033 $^\circ/\text{h}$	0.0017 $^\circ/\text{h}$

## 5.2 Messdaten bei laufendem Motor

Bevor auf die Untersuchungen der Messdaten bei eingeschaltetem Motor eingegangen wird, beschreiben die nächsten Zeilen den Messaufbau, der in weiterer Folge bei allen kinematischen Messungen (siehe Kapitel 6) sowie teilweise bei den Messungen zur Moving-Base Gravimetry (siehe Kapitel 7) zum Einsatz kam. Zur Montage der IMU auf dem Dach des Messfahrzeuges wurde ein Dachträger aus Kohlefaser verwendet (siehe Abbildung 5.8), als Messfahrzeug diente ein Audi A4 mit Dieselantrieb. Der Dachträger wurde vom Institut für Digitale Bildverarbeitung des Joanneum Research in Graz aufgrund der Kooperation innerhalb des Projekts IMUVar zur Verfügung gestellt. Er ermöglicht die Montage von bis zu vier GNSS Antennen sowie zwei IMUs. Als Material wurde Kohlefaser gewählt, damit der Dachträger möglichst leicht und gleichzeitig aber möglichst temperaturinvariant und somit formstabil ist. Die Formstabilität ist in Hinblick auf eine mögliche Integration von GNSS und INS wesentlich, da die innere Geometrie der Antennenphasenzentren und der INS Nullpunkte konstant bleiben muss. Dies ist nicht nur für die Berücksichtigung der Hebelarmeffekte essentiell, sondern auch für die Bestimmung der Attitude mittels GNSS Antennenarrays.



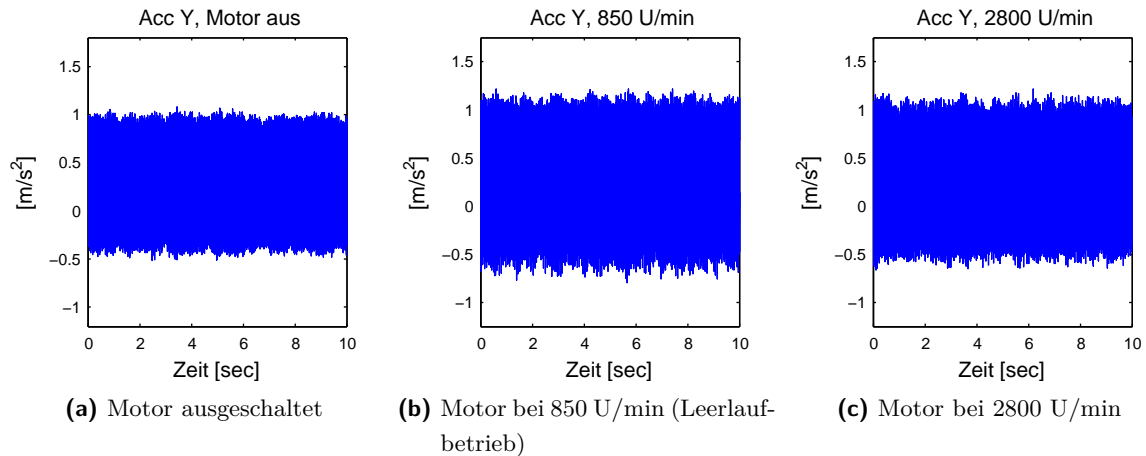
Im Rahmen der Diplomarbeit von Landfahner (2009) wurde der Dachträger mit den GNSS Antennen und der iNav-RQH-003 vermessen und die Basislinien und die Hebelarme berechnet.



**Abbildung 5.8:** Messaufbau am Auto

Nachdem im letzten Abschnitt die Systemeigenschaften analysiert wurden, soll nun herausgefunden werden, inwieweit der Motor Einfluss auf die Messdaten hat. Durch den laufenden Motor wird die Karosserie in Vibration versetzt. Um festzustellen, ob diese Vibrationen die Messdaten verändern, wurden Messungen bei ausgeschaltetem Motor, bei einer Motordrehzahl von ca. 850 U/min (Leerlauf) und bei einer Drehzahl von ca. 2800 U/min durchgeführt. Die Position des Fahrzeugs wurde zwischen den Aufzeichnungen nicht verändert. Die Messungen fanden in kurzem Abstand hintereinander statt, ohne dass dazwischen die IMU ausgeschaltet wurde. Dies soll gewährleisten, dass sich einerseits Laufzeitvariationen möglichst gering auswirken und andererseits keine Einschaltvariationen auftreten. Während sich zur Zeit des ausgeschaltetem Motors kein Fahrer im Fahrzeug befand, war dies bei laufendem Motor sehr wohl der Fall. Der Fahrer versuchte sich nicht zu bewegen, um keine Störungen in den Messdaten zu verursachen und eine möglichst konstante Drehzahl von 2800 U/min zu erzielen. Betrachtet man nun das Messrauschen der Accelerometer im Zeitbereich (siehe Abbildung 5.9), so ist erkennbar, dass der Motor nahezu unabhängig von seiner Drehzahl die Genauigkeit der Messungen verschlechtert (je nach Sensor um den Faktor 1.2 bis 3.75). Interessant ist, dass die Messdaten bei 850 U/min minimal stärker verrauscht sind. Dies ist ein Phänomen, das speziell bei Dieselfahrzeugen bemerkbar ist. Denkt man z. B. an ältere Taxis, so wird einem schnell bewusst, dass diese oft im Leerlauf sehr stark vibrieren, während der Fahrt aber nicht.

Abbildung 5.9 zeigt, dass der Motor entscheidenden Einfluss auf das Signal-zu-Rausch Verhältnis der Messdaten bei den Accelerometern hat. Sieht man sich die Daten der Gyros an, so ist dies aufgrund der Quantifizierung nicht so deutlich zu erkennen. Um die Frequenzen

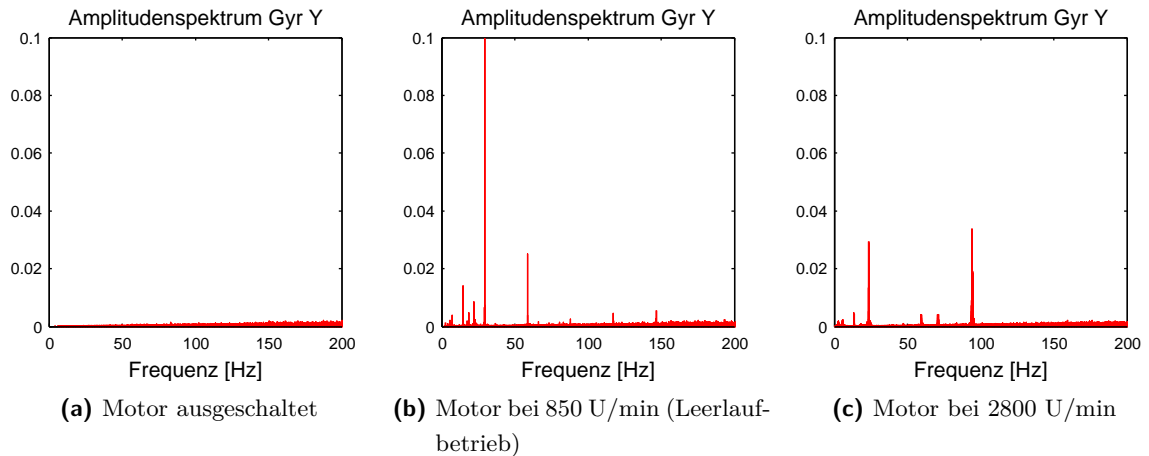


**Abbildung 5.9:** Motoreinfluss auf das Messrauschen im Zeitbereich

jedoch auch hier nachweisen zu können, werden die Daten im Frequenzbereich analysiert (siehe Abbildung 5.10). Der Deutlichkeit halber wurde nur jener Bereich des Amplitudenspektrums visualisiert, der sich durch die Motorvibrationen verändert hat. Während bei ausgeschaltetem Motor im Frequenzband von 0 bis 200 Hz keine signifikante Frequenz im Signal zu finden ist, sieht dies bei laufendem Motor entsprechend anders aus. Im Leerlauf konnten die Frequenzen 14.68, 29.34 und 58.69 Hz eindeutig dem Motor zugeordnet werden. Die Frequenz von 14.68 Hz entspricht einer Drehzahl von ca. 881 U/min. Bei den Frequenzen 29.34 und 58.69 Hz handelt es sich um die doppelte und die vierfache Motordrehzahl. Diese Frequenzen dürften durch die Zylinderbewegungen im Motor hervorgerufen werden. Ob die vierte signifikante Frequenz, die bei 22.01 Hz liegt, ebenfalls vom Motor verursacht wird, konnte nicht festgestellt werden. Da sie ausschließlich in den Messungen des Versuchs mit 850 U/min enthalten ist, muss jedoch davon ausgegangen werden. Bei der Untersuchung eines anderen Sensors wäre diese Frequenz wahrscheinlich gar nicht aufgefallen, da sie nur beim Gyro in Y-Richtung derart stark auftritt.

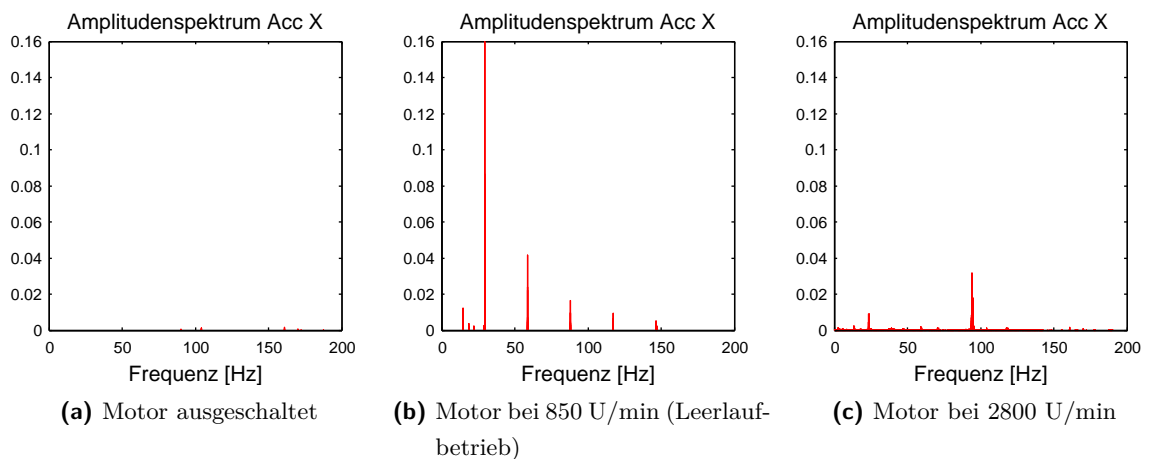
Bei den Messungen mit einer Motordrehzahl von ca. 2800 U/min sehen die Ergebnisse teilweise überraschend aus. Es wurden nur zwei signifikante Frequenzen gefunden. Dabei handelt es sich einerseits um 23.6 Hz und andererseits um 92.4 Hz. Die maximale Amplitude trat wieder bei der ungefähr doppelten Motordrehzahl auf, die zweite Frequenz jedoch nicht wie zuvor bei der Motordrehzahl selbst, sondern bei der Hälfte dieser (23.6 Hz = 1418 U/min). Gründe dafür konnten nicht gefunden werden.

Um sicherzugehen, dass alle durch den Motor hervorgerufenen Störfrequenzen detektiert wurden, wird dieselbe Untersuchung für den Accelerometer in X-Richtung durchgeführt. Die Wahl fiel auf diesen Sensor, da dieser mit Abstand das geringste Messrauschen aufweist. Betrachtet man das Amplitudenspektrum für diesen Sensor bei 850 U/min, so stechen einem einige zusätzliche Frequenzen ins Auge (siehe Abbildung 5.11). Neben den bereits bekannten



**Abbildung 5.10:** Motoreinfluss auf das Amplitudenspektrum beim Gyro

Frequenzen 14,68, 29,34 und 58,69 Hz, sind weiters signifikante Amplituden bei 88,03 (6x), 117,38 (8x) und 146,72 Hz (10x) zu erkennen. Aufgrund der konstanten Abstände zwischen den Frequenzen ist davon auszugehen, dass es sich bei 29,34 Hz um die Grundfrequenz handelt, während die anderen Frequenzen sogenannte Oberschwingungen darstellen. Dasselbe trifft höchst wahrscheinlich auf die Frequenzen 14,68, 18,45 und 22,01 Hz zu. Analysiert man nun erneut Abbildung 5.10b, so findet man auch dort diese Frequenzen, man hätte sie jedoch wegen ihrer geringen Amplitude nicht dem Motor zugeordnet. Untersucht man nun die Messungen bei der höheren Drehzahl, so können mithilfe des X-Accelerometers keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden. Neben den bereits bekannten Frequenzen gibt es eine Vielzahl sehr kleiner Amplituden, die jedoch nur als allgemeine Störungen interpretiert werden können.



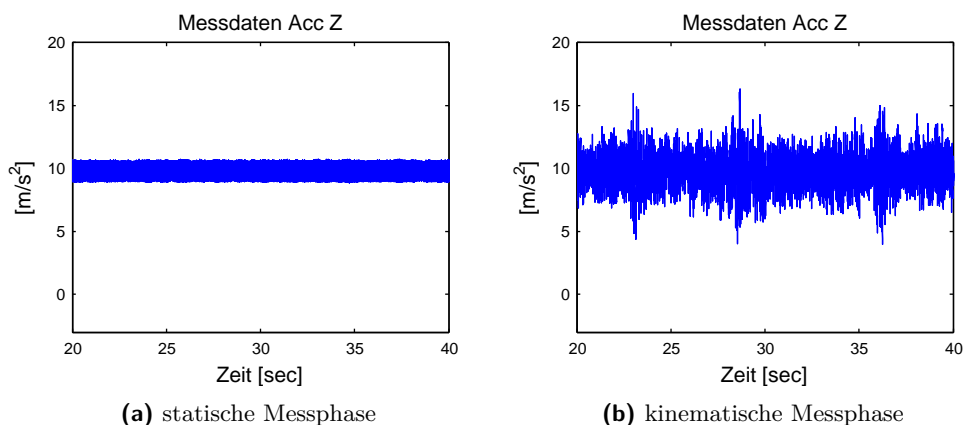
**Abbildung 5.11:** Motoreinfluss auf das Amplitudenspektrum beim Accelerometer

Abbildung 5.9 hat bereits gezeigt, dass die Messdaten durch den laufenden Motor stär-

ker verrauscht sind. Im Leerlauf lassen sich die stärksten Frequenzen eindeutig identifizieren. Die Kenntnis dieser Frequenzen könnte für den Einsatz von Filtern genutzt werden. Da die Störungen durch das Ausschalten des Motors verhindert werden können, sollten Messungen in statischen Phasen stets bei ausgeschaltetem Motor durchgeführt werden.

### 5.3 Messdaten während der Fahrt

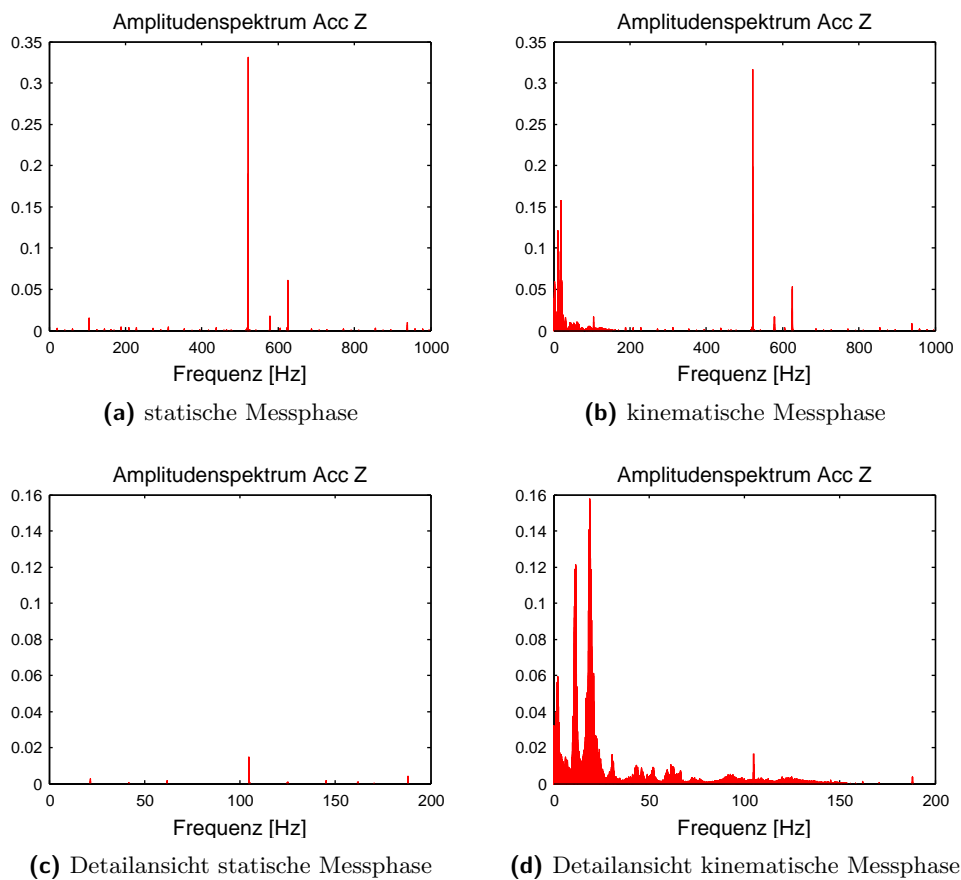
Dieser Abschnitt befasst sich mit Daten, die mit dem Messaufbau (siehe Abbildung 5.8) während der Fahrt aufgenommen wurden. Die Fahrgeschwindigkeit betrug dabei maximal 70 km/h, die Messfahrt fand im Gebiet um Stainz statt. Die Untersuchungen wurden jeweils mit 100 Sekunden langen Datensätzen durchgeführt. Abbildung 5.12 zeigt exemplarisch einen Vergleich zwischen den Messdaten der statischen und kinematischen Phase im Zeitbereich. Während die Messungen der statischen Phase ausschließlich das Messrauschen der Sensoren zeigen, beinhalten die Messungen der kinematischen Phase die vollständige Dynamik des INS.



**Abbildung 5.12:** Vergleich von Messdaten einer statischen und kinematischen Phase im Zeitbereich

Möchte man nun wissen, über welchen Frequenzbereich sich die Kinematik erstreckt, müssen die Zeitreihen mittels Fourier Analyse in den Spektralbereich transformiert werden. Abbildung 5.13 zeigt den direkten Vergleich zwischen den Messungen. Die Aufzeichnungen der statischen Phase enthalten hauptsächlich die drei Anregungsfrequenzen der RLGs. Betrachtet man im Vergleich dazu das Spektrum der Messungen in der kinematischen Phase in Abbildung 5.13b, so sieht man, dass diese Frequenzen in derselben Intensität im Signal vorzufinden sind. Analysiert man weiters den Bereich zwischen 0 und 200 Hz genauer (Abbildungen 5.13c und 5.13d), so kann man erkennen, dass sich die Fahrdynamik im Frequenzbereich zwischen 0 und ca. 150 Hz bewegt.

Vergleicht man nun die Fahrzeugdynamiken mit den Karosserievibrationen (siehe Abschnitt 5.2), so muss man feststellen, dass der größte Teil der Energie der beiden Signalanteile im selben Frequenzbereich liegt. Daraus folgt, dass eine Filterung der Motoreinflüsse nicht möglich ist. Stellt man jedoch den Frequenzbereich der Fahrzeugdynamiken jenem des Ditherings gegenüber, so unterscheiden sich diese stark genug, um eine Filterung anwenden zu können. Die Filterung kann mittels Low-Pass Filter oder Band-Stop Filter erfolgen. Zu beachten ist jedoch, dass die Signale der Bewegung weder in Amplitude noch in Phase verändert werden. Untersuchungen zur Filterung in der Navigation werden im Abschnitt 6.2.4 durchgeführt. Auch im Bereich der Gravimetrie ist eine Filterung der Karosserievibrationen möglich, da die Vibrationen im Vergleich zur Schwereanomalie sehr hochfrequent sind.



**Abbildung 5.13:** Vergleich von Messdaten einer statischen und kinematischen Phase im Spektralbereich

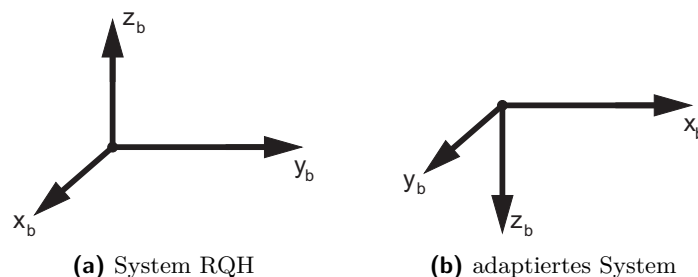
## 6 Untersuchungen zur Navigation

Im folgenden Kapitel werden Untersuchungen zu verschiedenen Alignment Algorithmen, Strapdown Algorithmen und Filtern durchgeführt. Sämtliche Algorithmen wurden vom Autor in MATLAB implementiert. Zum Vergleich wurden die Daten zusätzlich mit einer kommerziellen Software ausgewertet.

Für die Verwendung der Messdaten im Alignment und im Strapdown Prozess wurden die Messdaten der iNav-RQH-003 entsprechend Abbildung 6.1 in ein anderes Körperkoordinatensystem transformiert. Dies hat einerseits den Vorteil, dass die Ergebnisse mit jenen der kommerziellen Software Inertial Explorer von Waypoint vergleichbar sind, andererseits lassen sich die Attitudewinkel leichter interpretieren. Mathematisch handelt es sich bei der Transformation um eine  $90^\circ$ -Drehung um die  $z_b$ -Achse, gefolgt von einer  $180^\circ$ -Drehung um die mitgedrehte  $x_b$ -Achse. Die dazugehörige Rotationsmatrix analog zu Gleichung 3.4 lautet:

$$R = R_1(180^\circ) R_3(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (6.1)$$

Die folgenden Untersuchungen wurden anhand zweier Messfahrten durchgeführt. Die erste Fahrt fand im Juni 2009 in Lebring statt, die zweite im April 2010 in der Region um Stainz. Die Beschreibung des Messaufbaus und des Instrumentariums ist in Abschnitt 5.2 zu finden.



**Abbildung 6.1:** Adaption des Körperkoordinatensystems

## 6.1 Alignment

Die Ergebnisse des Alignments sind ein wesentliches Kriterium für die später erreichbare Positionsgenauigkeit. Um im Alignment gute Ergebnisse zu erzielen, ist es besonders wichtig, dass Bewegungen des INS bestmöglich verhindert werden. Auch wenn es in einigen Fällen kaum realisierbar ist, wie z. B. bei Passagierflugzeugen, sollte es wenn möglich angestrebt werden. Im Falle eines Messfahrzeugs, wie innerhalb dieser Untersuchungen, können Störungen größtenteils ausgeschaltet werden, indem das Alignment einerseits bei ausgeschaltetem Motor stattfindet und sich andererseits keine Personen im Auto befinden. Weiters sollte darauf geachtet werden, dass keine Untergrundvibrationen aufgrund vorbeifahrender LKWs oder Züge auftreten, und dass das Fahrzeug möglichst windgeschützt geparkt wird. Treten dennoch Störungen in den Alignmentmessungen auf, so hängt der Umgang damit vom Alignmentalgorithmus ab. Manche Algorithmen wissen mit Störungen zu Beginn und in der Mitte der Alignmentphase umzugehen, andere nicht. Kritisch sind Störungen immer am Ende der statischen Phase. Ganz wesentlich beim Alignment ist auch die Definition des Start-, aber vor allem des Endzeitpunktes. Wird die statische Phase länger definiert als sie in Wirklichkeit ist, so verfälschen die bereits in den Messdaten enthaltenen Bewegungen das Ergebnis. Ebenso kritisch ist es, die Alignmentphase kürzer als in der Realität zu definieren. Dadurch werden bereits die Messungen der statischen Phase aufintegriert, wodurch aufgrund des großen Messrauschens durch die Gyroanregung und aufgrund der numerischen Integration sehr schnell große Fehler in der Geschwindigkeit, der Position und der Attitude entstehen. Aus demselben Grund ist es auch wichtig, möglichst rasch einzusteigen und loszufahren. Bei der Definition der Alignmentphasen muss berücksichtigt werden, dass das Messrauschen eventuell so groß ist, dass leichte Dynamiken darin verschleiert werden. Daher wird zur Festlegung von Start- und Endzeitpunkt eines ZUPTs empfohlen, die Daten zu filtern oder zu glätten, um die Übergangsphasen besser erkennen zu können.

Um eine Vorstellung zu bekommen, wie genau die Horizontierung möglich ist, bedient man sich der Fehlergleichungen in 3.67. Der maximale Accelerometer Bias für das iNav-RQH-003 System wird mit  $60 \mu\text{g}$  angegeben. Daraus ergibt sich ein maximaler Horizontierungsfehler von  $0.0035^\circ$  bzw.  $13''$ . Wie bereits in Kapitel 3 erläutert, werden beim Alignment die Lotabweichungen ignoriert, die maximal  $30''$  betragen. Daraus resultiert laut Fehlerfortpflanzungsgesetz ein kombinierter theoretischer Fehler in der Größenordnung von maximal  $33''$ . Dieser Fehler kann jedoch aufgrund von Störungen in den Messdaten oder aufgrund mangelhafter Algorithmen auch um einiges größer ausfallen.

Betrachtet man die Fehlerabschätzung für den Yaw-Winkel, so beträgt der maximale theoretische Fehler  $0.02^\circ$  (Annahmen:  $0.003^\circ/\text{h}$  Gyro Bias und  $47^\circ$  Breite). Dieser Wert ist aufgrund des schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnisses sehr optimistisch. Bei den Untersuchungen wurde ein Fehler von nur  $0.1^\circ$  bereits als Erfolg angesehen.

Vor jeder Fahrt wurde eine in etwa 15 Minuten lange Alignmentphase durchgeführt. Bei einer

Datenrate von 2000 Hz ergeben sich dadurch 1.8 Millionen Einzelmessungen pro Sensor. Um die Rechenzeit der Auswertung der Alignmentmessungen zu verkürzen, wurden die Daten entsprechend reduziert. Untersuchungen zeigen, dass dies nicht nur aus rechentechnischen Gründen von Vorteil ist, sondern auch hilft, das schlechte Signal-zu-Rausch Verhältnis der Gyros wie auch der Accelerometer zu verbessern, was schließlich auch zu einer Verbesserung der Attitudewinkel führt. Neben der reinen Datenreduktion durch Mittelwertbildung empfiehlt es sich auch, die Daten mit einem Low-Pass Filter zu glätten.

Ein Problem bei Testfahrten stellt die Verifikation der im Alignment bestimmten Winkel dar. Eine Möglichkeit wäre, mit den ermittelten Attitudewinkeln anschließend die kinematische Messphase auszuwerten und die gerechnete Trajektorie mit der wahren zu vergleichen. Bei dieser Variante kann es jedoch passieren, dass sich die falsch bestimmten Attitudeparameter und die auftretenden Positionsdriften aufheben, wodurch fälschlicherweise von einer guten Alignmentlösung ausgegangen wird. Eine zweite Möglichkeit bildet der Vergleich der Alignmentergebnisse mit jenen einer kommerziellen Software. Auch bei dieser Variante ist nicht gewährleistet, dass die Lösung der kommerziellen Software entsprechend besser ist, um sie als Referenz heranziehen zu können. Einzig die Bestimmung der Ausrichtung der IMU mittels höchst genauer geodätischer Messungen würde eine tatsächliche Referenz liefern. Hier stellt sich jedoch das Problem, dass die Vermessungen nur am Gehäuse stattfinden können und meist nur wenig über die tatsächliche Ausrichtung der sensitiven Achsen im Gehäuseinneren bekannt ist. Außerdem nehmen die Messungen und die anschließenden Auswertungen sehr viel Zeit in Anspruch, weswegen dies in der Praxis nicht gemacht wird. In den anschließenden Abschnitten werden mehrere Alignmentansätze präsentiert. Die erzielten Ergebnisse werden dann in Abschnitt 6.1.4 gegenübergestellt.

### 6.1.1 Coarse Alignment

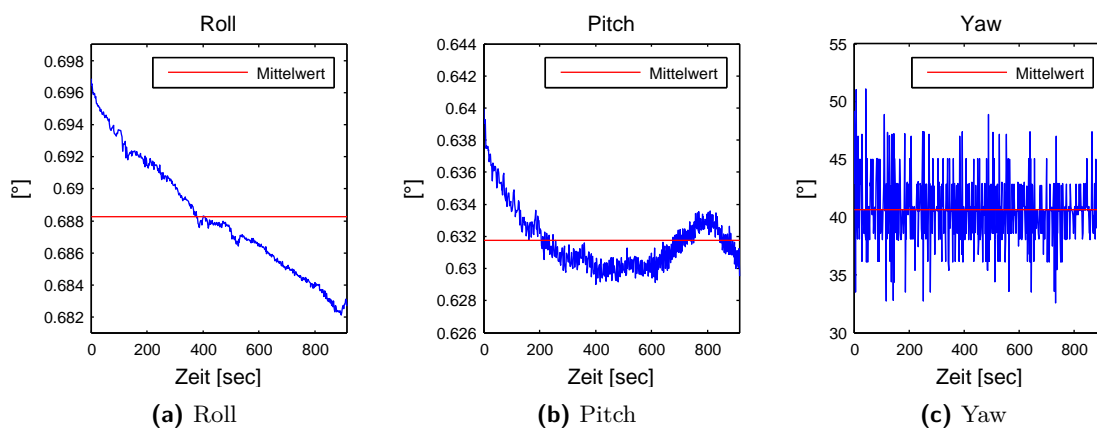
Beim *Coarse Alignment* werden die Formeln aus Abschnitt 3.3.3 umgesetzt und auf die Messdaten der statischen Phase angewandt. Als Endergebnis erhält man Attitudewinkel, die durch Mittelbildung der Winkelzeitreihen entstehen. Aufgrund der Mittelbildung wird das Ergebnis durch eventuelle Störungen in den Messdaten verfälscht. Deshalb sollte besonders darauf geachtet werden, dass Störungen zuvor aus den Daten entfernt werden. Dies kann mithilfe einer Ausreißerdetektion oder einer Filterung erfolgen.

Das Coarse Alignment dient eigentlich zur raschen Bestimmung von Näherungswerten für die Attitudewinkel, die anschließend im Fine Alignment verbessert werden, da beim Coarse Alignment keine Sensorfehler bestimmt und korrigiert werden, sondern davon ausgegangen wird, dass die Messdaten nur zufällige Fehler beinhalten. Mit zunehmender Qualität der Sensoren und den damit verbundenen geringeren Fehlern ist die Unterteilung in Coarse und Fine Alignment nicht zwingend notwendig, da schon mithilfe des Coarse Alignments gute Ergebnisse erzielt werden können. Der Coarse Alignment Algorithmus berechnet für jede



Messepoche unabhängig die Winkel, die schlussendlich für die Bestimmung des Endergebnisses gemittelt werden. Durch die Bildung des arithmetischen Mittels über die gesamte statische Phase wirken sich die mittleren Sensorfehler auf das Alignmentergebnis aus, die zufälligen Laufzeitvariationen werden somit reduziert.

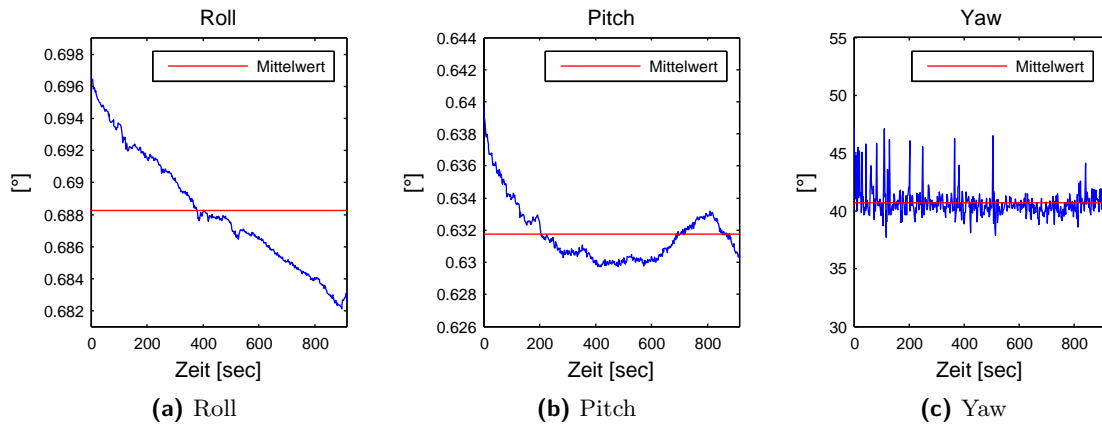
Abbildung 6.2 zeigt die Zeitreihen des Coarse Alignments. Die Messdaten wurden vor der Berechnung auf 0.5 Hz reduziert. In den Auswertungen von Roll und Pitch sind niedrigfrequente Verläufe sichtbar, die aufgrund von Variationen in den Biases der Accelerometer entstehen. In der Darstellung des Yaw-Winkels lässt sich erkennen, wie stark die Gyromessungen trotz Glättung verrauscht sind. Die roten Linien zeigen jeweils den Mittelwert der einzelnen Zeitreihen, der gleichzeitig dem Endergebnis des Coarse Alignments entspricht.



**Abbildung 6.2:** Ergebnisse des Coarse Alignments

Der Mittelwertfilter ist aufgrund seiner leichten Anwendung sehr beliebt, er weist jedoch nicht die besten Filtereigenschaften auf. Bei der Suche nach Alternativen fiel die Wahl auf die Finite Impulse Response (FIR) Filter, da diese ein lineares Phasenverhalten besitzen. Durch die Filterung der Daten von beiden Seiten bewirkt dies, dass ein FIR Filter phasentreu ist. Dies ist wichtig, da der Zeitbezug der Strukturen im Signal erhalten bleiben muss. Im Speziellen fiel die Entscheidung auf den Bartlett-Hanning Filter. Dieser Filter weist eine stärkere Dämpfung der höheren Frequenzen auf, wodurch die Anregungsfrequenzen der Kreisel stärker gefiltert werden. Der Filter wurde mit der Ordnung 500 und einer Cut-off Frequenz von 0.5 Hz angewandt.

Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, wurden die Daten erneut auf 0.5 Hz reduziert. Abbildung 6.3 zeigt die Ergebnisse der gefilterten Daten. Durch die Filterung sind die Verläufe entsprechend glatter, die Attitudewinkel unterscheiden sich jedoch nur marginal.

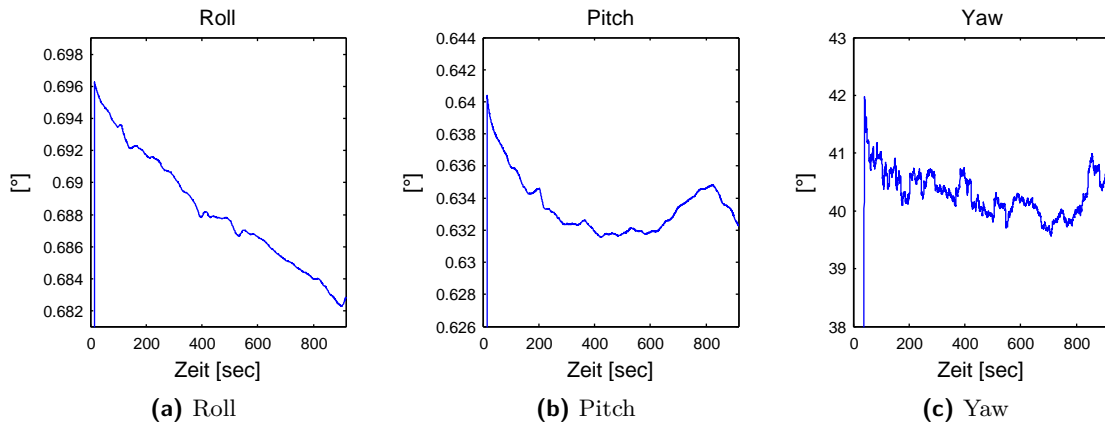


**Abbildung 6.3:** Ergebnisse des Coarse Alignments bei gefilterten Messdaten

### 6.1.2 Coarse Alignment mit Verlaufsanpassung

Die Untersuchungen des Coarse Alignments mit anschließender Mittelbildung haben gezeigt, dass die Attitudewinkel während der Alignmentphase zum Teil stark variieren. Dies kann einerseits durch die zufälligen Variationen in den Biases und Driften hervorgerufen werden, andererseits aber auch durch tatsächliche Veränderungen der Ausrichtung der IMU. Da nicht mit Sicherheit davon ausgegangen werden kann, dass die Sensoren für diese Variationen verantwortlich sind, sollten die bestimmten Attitudewinkel an den tatsächlichen Verlauf angepasst werden. Diese Art des Alignments könnte man als eine mögliche Vorstufe des Fine Alignments betrachten. Da das Fine Alignment immer mit höheren Datenraten als das Coarse Alignment stattfindet, um besser eventuelle Dynamiken erfassen zu können, erfolgt dies auch hier. Es werden die Daten mit 10 Hz ausgewertet, wobei genau wie zuvor ein Bartlett-Hanning Filter mit den gleichen Einstellungen zur Anwendung kommt. Wie bereits in Abbildung 6.3 zu sehen war, sind die Attitudewinkel trotz Filterung noch zum Teil stark verrauscht. Daher werden die geschätzten Attitudewinkel zusätzlich mittels gleitendem Mittelwertfilter der Breite 15 für Roll und Pitch sowie der Breite 41 für Yaw geglättet. Als Ergebnis des Alignments gilt nun jeweils der letzte Wert der gefilterten Winkelzeitreihe (siehe Abbildung 6.4). Zu beachten ist die unterschiedliche Skalierung im Yaw Winkel im Vergleich zu den Abbildungen 6.2, 6.3 und 6.5.

Ein Nachteil des gleitenden Mittelwertfilters ist die Einschwingphase zu Beginn. Diese stellt jedoch kein Problem dar, da nur die Endwerte entscheidend sind. Ein weiterer viel wesentlicherer Nachteil besteht darin, dass die Ergebniswinkel aus dem Mittel der letzten 15 bzw. 41 Werte berechnet werden. Dies entspricht einer Zeitspanne von 1.5 bzw. 4 Sekunden. Breitere Filter würden zwar stärker glätten, sie würden jedoch gleichzeitig im Falle von Driften wie hier das Ergebnis noch stärker verfälschen. Schmalere Filter würden wiederum das Rauschen weniger stark dämpfen. Um diesen Nachteil größtenteils auszuschalten, kann z. B. eine gewichtete Polynomannäherung zum Einsatz kommen. Hierbei wird ein Polynom bestmöglich



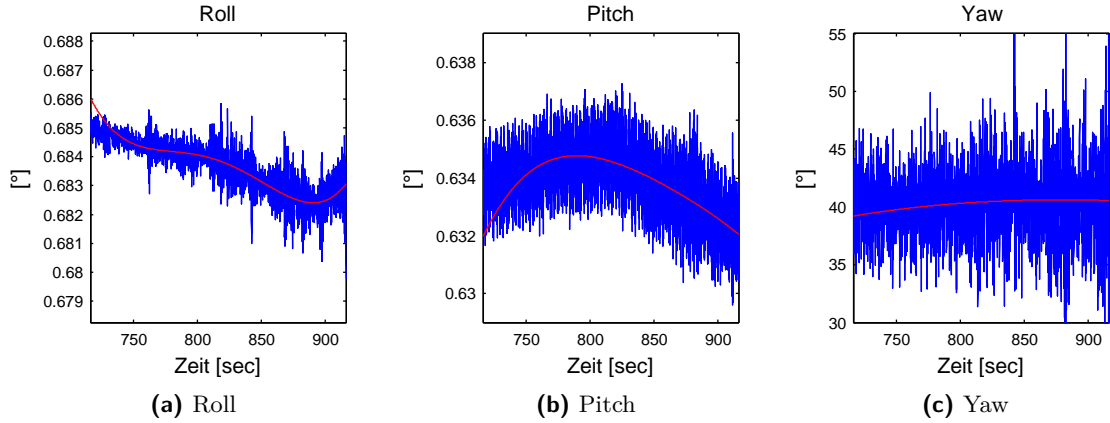
**Abbildung 6.4:** Ergebnisse des Coarse Alignments mit Mittelwertfilterung

an den Verlauf angepasst, wobei die einzelnen Werte des Verlaufs zum Ende hin stärker gewichtet werden. Die Polynomrechnung findet mittels Ausgleich nach kleinsten Quadraten statt. Bei der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Polynom Anpassung kann einerseits die Ordnung des Polynoms variiert werden und andererseits die Ordnung der Gewichtung. Das bedeutet, dass man wählen kann, ob die Gewichtung zum Ende hin linear, quadratisch oder kubisch etc. zunimmt. Es ist durchaus möglich, dass eine Anpassung der Einstellungen an die unterschiedlichen Messumgebungen notwendig ist. Aufgrund des schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnisses der Kreismessungen mussten hier für den Yaw-Winkel andere Einstellungen getroffen werden. Für Roll und Pitch wurde ein Polynom 4. Grades gewählt sowie eine Gewichtung 3. Grades. Beim Yaw-Winkel war eine Gewichtung 3. Grades nicht möglich, da dadurch die Messungen zum Schluss hin zu stark gewichtet wurden und das Messrauschen dadurch zu sehr das Ergebnis beeinflusste. Eine lineare Gewichtung mit einem Polynom 3. Grades führte hier zu guten Ergebnissen. Abbildung 6.5 zeigt die Polynom Anpassung, wobei dafür nur die letzten 200 Sekunden herangezogen wurden. Zur besseren Veranschaulichung wurden auch nur diese Daten visualisiert.

Als besonderer Hinweis soll hier vermerkt werden, dass es für die Bestimmung des Yaw-Winkels mittels der Formeln des Coarse Alignments wesentlich ist, die Gyromessungen zuvor ausreichend zu filtern, da Untersuchungen gezeigt haben, dass sonst keine sinnvollen Ergebnisse erzielt werden können.

### 6.1.3 Coarse und Fine Alignment

Bisher wurden Ansätze präsentiert, die alle auf den Formeln des Coarse Alignments basieren und sich nur durch die Filterung der Attitudezeitreihen unterscheiden. Professionelle Ansätze für das Self-Alignment basieren auf der Kalman Filterung und entsprechenden



**Abbildung 6.5:** Ergebnisse des Coarse Alignments mit Polynom Anpassung

Fehlermodellen. Eine Möglichkeit dazu bildet das *PSI-Angle Error Model*, das im Zustandsvektor Horizontalgeschwindigkeits- und Attitudefehler sowie Accelerometer Biases und Gyro Driften beinhaltet. Lü et al. (2008) zeigen, dass dieses Modell aufgrund der Sensorfehler im Zustandsvektor nicht vollkommen beobachtbar ist und empfehlen, den Zustandsvektor auf die Geschwindigkeits- und Attitudefehler zu reduzieren. Dadurch werden, wie bereits beim Coarse Alignment, die Sensorfehler vernachlässigt. Dies sollte prinzipiell vermieden werden, aufgrund der Qualität des eingesetzten INS wirken sich die daraus resultierenden Fehler jedoch nur gering aus (Fehlerabschätzung siehe Abschnitt 6.1). Lü et al. (2008) setzen das reduzierte PSI-Angle Fehlermodell in Form eines *Extended Linearized Kalman Filters* um, damit Fehler aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs minimiert werden. In der Inertialnavigation wird der Extended Kalman Filter oft als *closed-loop* Kalman Filter bezeichnet, da die geschätzten Parameter in das System rückergeführt werden. Als Beobachtungen dienen ausschließlich die Horizontalgeschwindigkeiten, da die Gyromessungen viel störanfälliger durch äußere Einflüsse sind (Lü et al., 2008). Das Beobachtungsmodell lautet demnach:

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{v}_N \\ \delta\tilde{v}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Die Beobachtungen  $\delta\tilde{v}_N$  und  $\delta\tilde{v}_E$  beschreiben die gemessenen Horizontalgeschwindigkeiten und dienen der Bestimmung des Zustandsvektors  $\Delta x$ . Dieser besteht neben den geschätzten Geschwindigkeitsfehlern  $\delta v_N$  und  $\delta v_E$  zusätzlich aus den drei Attitudefehlern  $\psi_N$ ,  $\psi_E$  und  $\psi_D$ . Der Beobachtungsvektor  $\Delta z$  wird durch numerische Integration der Beschleunigungen unter Verwendung des Trapezoidverfahrens erhalten:

$$\dot{v}_k = R_{b\ k-1}^n f^b - \bar{g}^n - 2w_{ie}^n \times v_{k-1} \quad (6.3)$$

Das Messrauschen  $R_k$  wurde mithilfe der Standardabweichung der Accelerometer bestimmt:

$$R_k = R_{b0}^n \begin{bmatrix} \sigma_{f_1^b} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{f_2^b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{f_3^b} \end{bmatrix} R_{b0}^{nT}. \quad (6.4)$$

Das dazugehörige Fehlermodell sieht wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{v}_N \\ \delta \dot{v}_E \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Die Kovarianzmatrix zu Beginn des Kalman Filters wurde empirisch bestimmt und lautet:

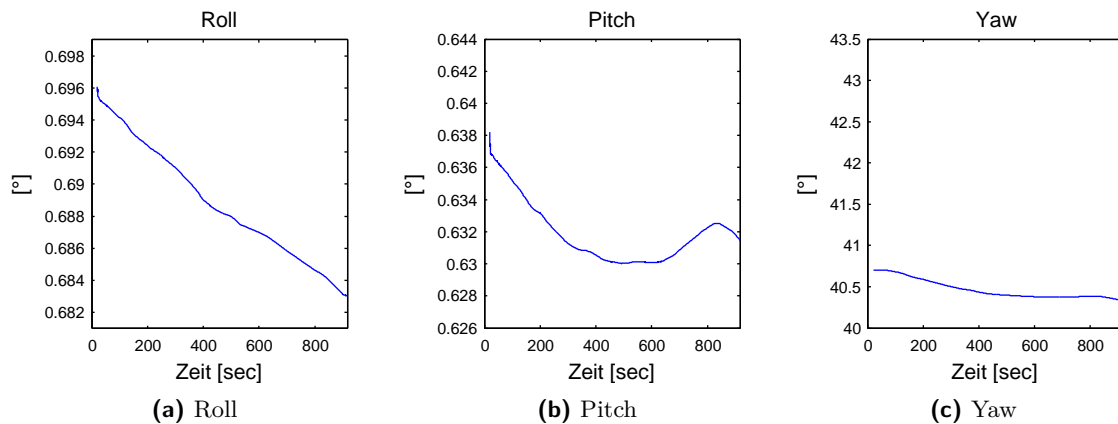
$$M_k = \begin{bmatrix} 0.1m/s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1m/s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5^\circ \end{bmatrix}^2. \quad (6.6)$$

Die Werte für das Systemrauschen  $Q$  wurden ebenfalls empirisch ermittelt:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & 0 & 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{bmatrix} \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0.005^\circ \\ 0.005^\circ \\ 0.15^\circ \\ 0.05m/s^2 \\ 0.05m/s^2 \\ 0.05m/s^2 \end{bmatrix} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} & R_{22} \\ 0 & 0 & 0 & R_{12} & R_{22} \\ 0 & 0 & 0 & R_{13} & R_{23} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Nachdem nun alle Vorbereitungen für den Kalman Filter getroffen wurden, sind jetzt nur noch die Formeln des LKF siehe Abschnitt „Kalman Filter“ auf Seite 33 umzusetzen. Nach der Gain-Berechnung erfolgt das Messupdate, in welchem der Fehlerzustandsvektor geschätzt wird. Die bestimmten Werte werden sofort in das System rückergeführt (closing the loop), um die Fehler zu korrigieren. Dies bedeutet, dass einerseits die Attitudematrix  $R_b^n$  mittels infinitesimaler Drehung um die  $\Psi$ -Winkel korrigiert und andererseits die aktuelle Geschwindigkeit von den Fehlern bereinigt wird. Durch das Rückeinführen wird der Fehlerzustandsvektor zu null. Daher ist es nur notwendig, die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors zu präzisieren. Anschließend beginnt der Vorgang von neuem, wobei die spezifische Kraft immer mit den aktuellsten Attitudewerten transformiert wird. Da im Alignment die nominellen Werte der Horizontalgeschwindigkeiten Null sind, folgt  $\Delta z = z$ .

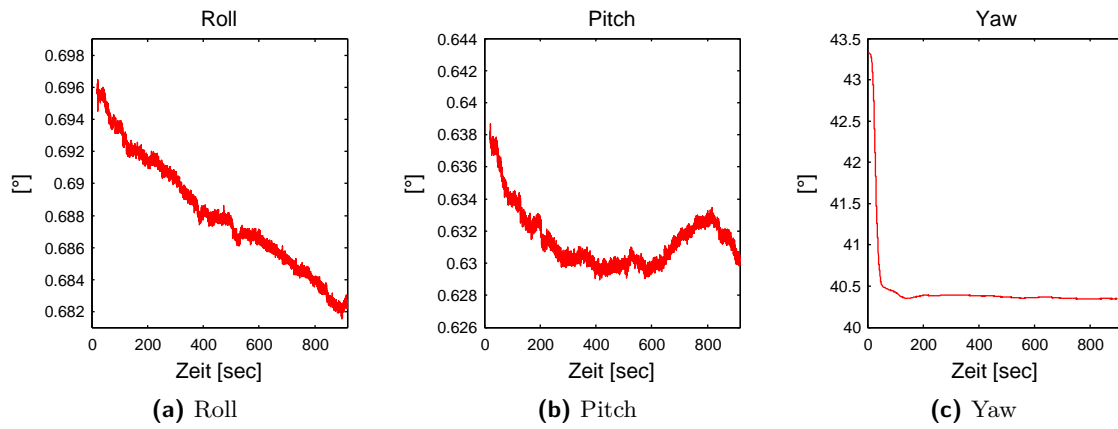
Die Auswertungen in Abbildung 6.6 wurden erzielt, indem zuerst für 20 Sekunden ein Coarse Alignment mit Mittelbildung erfolgte und anschließend das zuvor beschriebene Fine Alignment angewandt wurde.



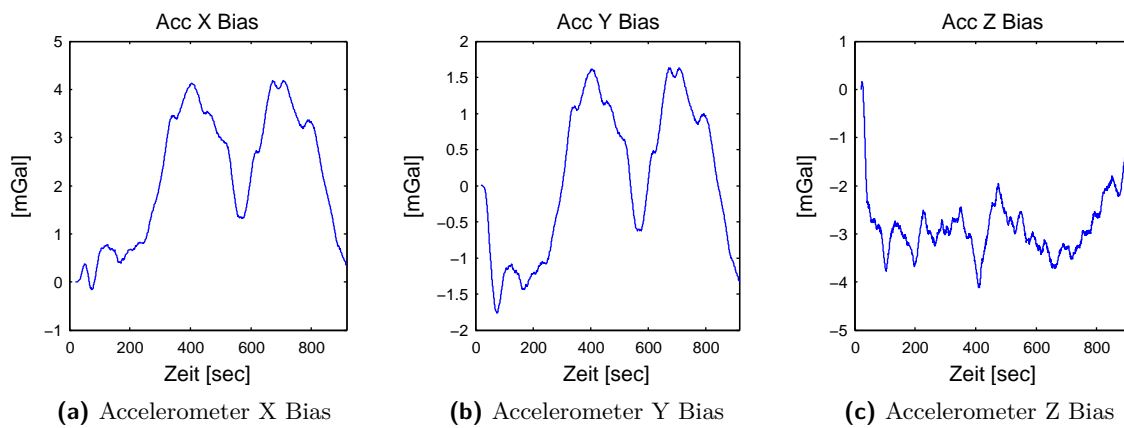
**Abbildung 6.6:** Ergebnisse des Fine Alignments

Zum Vergleich werden in Abbildung 6.7 die Ergebnisse des Alignments der kommerziellen Software Inertial Explorer 8.2 der Firma Waypoint präsentiert. Wie man sieht, stimmen die Ergebnisse und auch Verläufe in Roll und Pitch sehr gut überein und die Endergebnisse differieren nur leicht. Der Unterschied des Verlaufs im Yaw-Winkel kommt daher, dass die Ergebnisse des Coarse Alignments stark voneinander abweichen. Es ist davon auszugehen, dass der Fine Alignment Algorithmus des Inertial Explorers genauer ist, da auch Sensorfehler mitgeschätzt werden. Außerdem fällt beim Yaw-Winkel auf, dass dieser erwartungsgemäß konvergiert. Dies ist bei der selbst implementierten Lösung nicht der Fall. Ein kritischer Faktor bei der eigenen Lösung ist die Festlegung der a-priori Informationen. Speziell die Kovarianz von  $\psi_D$  hat sehr viel Einfluss auf das Endergebnis. Wählt man als Standardabweichung statt  $5^\circ$  z. B.  $7^\circ$ , so verändert sich der geschätzte Wert für den Yaw-Winkel von  $40.349$  bereits auf  $40.184^\circ$ .

Sieht man zur Kontrolle die vom Inertial Explorer geschätzten Accelerometer Biases in Abbildung 6.8 hinsichtlich ihrer Plausibilität an, so bewegen sich diese im Bereich weniger mGal und sind daher innerhalb der Spezifikationen ( $< 60mGal$ ). Da der zeitlich konstante Bias der Accelerometer durch Kalibrierung bestimmt wurde und bereits angebracht wird, sollten diese Werte nur mehr zufällige Variationen enthalten, wie dies auch die Abbildung bestätigt. Die starke Korrelation zwischen X und Y Accelerometer lässt jedoch Zweifel an der Richtigkeit der Biases aufkommen. Die Korrelation würde eher auf sehr geringe Störungen hindeuten. Allgemein sollte man sehr vorsichtig mit der Interpretation dieser Werte sein, da sie sehr stark von den angenommenen Kovarianzen im Fehlermodell des Kalman Filters abhängen. Ob die Werte korrekt sind oder nicht, kann nur unter Kenntnis der wahren Schwere innerhalb einer Kalibrierung festgestellt werden.



**Abbildung 6.7:** Ergebnisse des Fine Alignments vom Inertial Explorer



**Abbildung 6.8:** Schätzung der Accelerometer Biases vom Inertial Explorer

Fazit: Trotz Kalman Filterung und Fehlermodellen gibt es weiterhin Schwierigkeiten in der Bestimmung der Attitude. Speziell die Bestimmung sowie der Einfluss der Sensorfehler stellen Probleme dar. Durch den Einsatz des qualitativ hochwertigen INS iNav-RQH-003 kann die Horizontierung auf wenige  $1/1000^\circ$  genau durchgeführt werden. Obwohl die Qualität der Gyros ebenfalls hervorragend ist, ist die Bestimmung der Nordrichtung nur mit geringer Genauigkeit ( $\geq 0.1^\circ$ ) möglich. Aus diesen Gründen ist es speziell beim Einsatz von Systemen geringerer Genauigkeit unausweichlich, Sensorintegration mit GNSS zu betreiben. Durch die Kombination mit GPS in Form eines kinematischen Alignments sollte speziell die Bestimmung des Yaw-Winkels genauer erfolgen können.

### 6.1.4 Vergleich der Ergebnisse

Die Ergebnisse der verschiedenen Alignmentansätze sind in Tabelle 6.1 gegenübergestellt. Die Ergebnisse unterscheiden sich in Roll und Pitch nur sehr gering, in Yaw jedoch zum Teil sehr stark. Welche Auswirkungen diese Unterschiede auf die Ergebnisse einer anschließenden Trajektorienauswertung haben, wird in Abschnitt 6.2.2 gezeigt.

**Tabelle 6.1:** Ergebnisse der verschiedenen Alignmentvarianten

Methode	Roll	Pitch	Yaw
Coarse Alignment	$0.6883^\circ$	$0.6318^\circ$	$40.6667^\circ$
Coarse Alignment mit gefilterten Messdaten	$0.6883^\circ$	$0.6318^\circ$	$40.7044^\circ$
Coarse Alignment mit Mittelwertfilterung	$0.6828^\circ$	$0.6323^\circ$	$40.5235^\circ$
Coarse Alignment mit Polynomanpassung	$0.6831^\circ$	$0.6321^\circ$	$40.5425^\circ$
Coarse Alignment und Fine Alignment	$0.6831^\circ$	$0.6315^\circ$	$40.3357^\circ$
Inertial Explorer	$0.6823^\circ$	$0.6301^\circ$	$40.3485^\circ$

In Abschnitt 5.1 wurde der Messaufbau im Messlabor beschrieben. Mit diesen Messungen wurden nicht nur die Einschaltvariationen untersucht, sondern auch die Wiederholbarkeit der Alignmentergebnisse. Zwischen den Messungen wurde die IMU jeweils kurz ausgeschaltet und vom Strom getrennt, um zusätzlich den Einfluss der Einschaltvariationen auf das Ergebnis beobachten zu können. Die Ergebnisse der einzelnen Messungen (siehe Tabelle 6.2) basieren auf dem selbst implementierten Fine Alignment Algorithmus.

## 6.2 Navigation

Im folgenden Abschnitt werden Untersuchungen zur Positionsgenauigkeit während der Navigation durchgeführt. Zur Kontrolle werden die inertialen Positionslösungen mit jenen einer relativen GNSS Auswertung verglichen. Die GNSS Trajektorie wird dabei als „wahr“



**Tabelle 6.2:** Wiederholbarkeit der Alignmentergebnisse

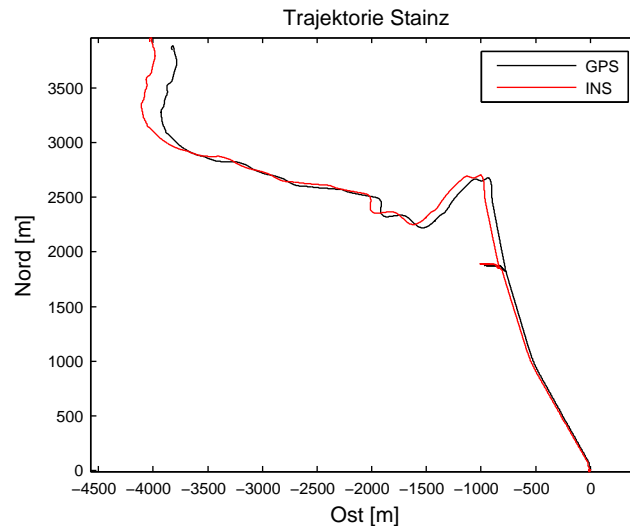
Messung	Roll	Pitch	Yaw
1	-0.1626°	0.3869°	151.7173°
2	-0.1630°	0.3867°	151.6205°
3	-0.1637°	0.3875°	151.6750°
4	-0.1629°	0.3869°	151.6759°
5	-0.1579°	0.3849°	151.7093°
6	-0.1581°	0.3847°	151.6760°
7	-0.1623°	0.3872°	151.6517°
Mittelwert	-0.1615°	0.3864°	151.6751°
Standardabweichung	0.0024°	0.0011°	0.0329°

angenommen. Dies ist erlaubt, da schon nach sehr kurzer Zeit die inertialen Positionslösungen signifikant schlechter sind als jene aus GPS. Die Startkoordinaten beider Trajektorien wurden gleichgesetzt, damit die Trajektorien denselben Ausgangspunkt haben und dadurch verglichen werden können.

### 6.2.1 Vergleich verschiedener Integrationsverfahren

Zum Vergleich der in Abschnitt 3.3.5 erwähnten Integrationsverfahren wurde eine Messfahrt in der Umgebung von Stainz durchgeführt. Die gefahrene Strecke hat eine Länge von etwa 7.5 km, der Höhenunterschied zwischen Start- und Endpunkt beträgt ca. 260 Meter und die Fahrtdauer beläuft sich auf ca. 18 Minuten. Um den am besten geeigneten Integrationsalgorithmus zu finden, wurden dieselben Messdaten mit derselben Anfangsattitude auf verschiedene Weise integriert. Verglichen wurden das Rechteck-, Trapez- und Simpsonverfahren sowie das Newton-Cotes Verfahren 3. Ordnung. Abbildung 6.9 zeigt den Vergleich zwischen GPS und INS. Da sich die INS Trajektorien nur um wenige Meter unterscheiden, überlagern sich diese aufgrund des Maßstabs in der Abbildung.

Tabelle 6.3 listet die Positions-, Geschwindigkeits- und Attitudefehler am Ende der Trajektorie. Die Position wird dabei mit GPS verglichen, die Geschwindigkeit sollte aufgrund der Ruhephase am Ende Null sein, und die Attitude wurde mit jener einer Reverse-Auswertung des ZUPTs am Ende der Trajektorie verglichen. Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass sich die Integrationsfehler je nach Verfahren unterschiedlich auswirken, da die Verfahren höherer Ordnung einen geringeren Fehler in Nord-Richtung besitzen, während die Verfahren niedrigerer Ordnung geringere Fehler in Ost-Richtung aufweisen. Im Großen und Ganzen erzielen jedoch alle Algorithmen nahezu ähnliche Ergebnisse, wie man anhand der Werte des 2D-Positionsfehlers erkennen kann. Bei der Betrachtung des Misalignments muss beachtet



**Abbildung 6.9:** GPS und INS Trajektorie von Stainz

werden, dass die Genauigkeit der Vergleichswinkel vom Inertial Explorer mit  $0.0066^\circ$  für Roll,  $0.0083^\circ$  für Pitch und  $0.1833^\circ$  für Yaw angegeben wird.

**Tabelle 6.3:** Vergleich der Integrationsvarianten anhand der Trajektorie von Stainz

Fehler	Rechteck	Trapez	Simpson	Newton-Cotes N=3
$\Delta$ Nord	80.094 m	85.545 m	69.381 m	69.663 m
$\Delta$ Ost	-201.897 m	-198.759 m	-207.247 m	-207.855 m
$\Delta$ Unten	24.763 m	25.328 m	24.271 m	24.467 m
2D-Pos.-Fehler	217.203 m	216.386 m	218.552 m	219.218 m
2D-Geschw.-Fehler	0.271 m/s	0.268 m/s	0.263 m/s	0.247 m/s
Misalignment Roll	$-0.0035^\circ$	$-0.0037^\circ$	$-0.0035^\circ$	$-0.0035^\circ$
Misalignment Pitch	$0.0029^\circ$	$0.0029^\circ$	$0.0030^\circ$	$0.0030^\circ$
Misalignment Yaw	$0.0763^\circ$	$0.0762^\circ$	$0.0763^\circ$	$0.0763^\circ$

Da die Trajektorie jedoch sehr geradlinig verläuft, wurden die Verfahren anhand einer weiteren Testfahrt verglichen. Diese Fahrt fand auf dem Gelände eines Fahrsicherheitszentrums in Lebring statt und zeigt mehrfach gefahrene Kreise. Bei dieser Fahrt fanden Richtungsänderungen öfters und stärker statt, wodurch die Qualität der Integrationsalgorithmen besser untersucht werden kann. Die Fahrt hatte eine Länge von etwa 3.3 Kilometer und dauerte etwa 8 Minuten. Abbildung 6.10 zeigt, dass durch die nun höhere Dynamik der Messfahrt das Simpsonverfahren besser abschneidet als das Trapezoid- und das Rechteckverfahren. Eine Verbesserung durch die Anwendung der Newton-Cotes Formel 3. Ordnung kann jedoch nicht erzielt werden.

Die Untersuchungen zu den Integrationsverfahren haben ergeben, dass für die Autonavigation unter normalen Fahrbedingungen die Simpsonintegration am besten geeignet ist. Die Anwendung von Verfahren niedrigerer Ordnung kann bei niedrigen Fahrzeugdynamiken zum selben Ergebnis führen, um das beste Ergebnis zu garantieren, wird jedoch das Simpsonverfahren empfohlen.

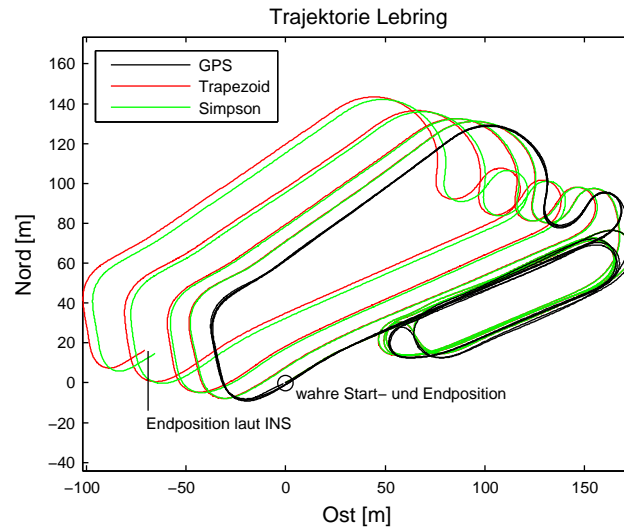


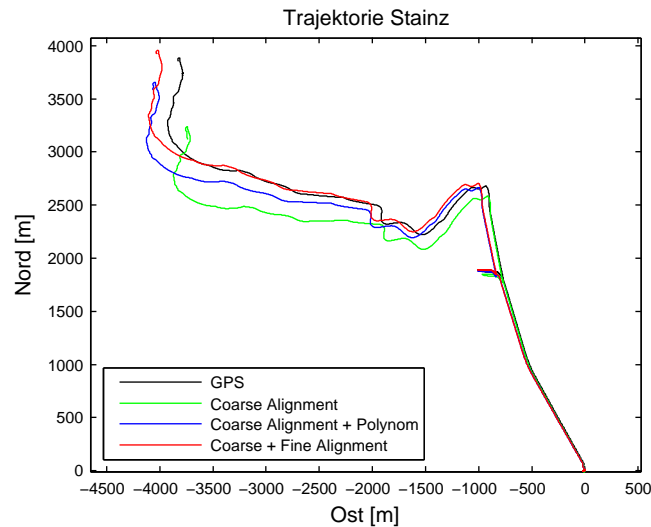
Abbildung 6.10: Vergleich der Integrationsverfahren

## 6.2.2 Auswirkungen des Alignments

Die Ergebnisse des Alignments haben im Vergleich zum Integrationsverfahren einen viel größeren Einfluss auf die Genauigkeit der Positionslösungen während der Navigation. In Abschnitt 6.1 wurden verschiedene Alignmentverfahren präsentiert, deren Ergebnisse in Tabelle 6.1 aufgelistet sind. Um die Qualität der geschätzten Attitudewinkel zu analysieren, werden die Messdaten der Fahrt von Stainz mit dem Simpsonverfahren ausgewertet. Abbildung 6.11 zeigt die dazugehörigen Trajektorien. Verantwortlich für die zum Teil großen Unterschiede ist vor allem der Yaw-Winkel, der zwischen der einfachsten Methode (Coarse Alignment mit Mittelbildung) und der besten Methode (Coarse und Fine Alignment) eine Diskrepanz von  $0.35^\circ$  aufweist.

Neben dem Alignmentalgorithmus ist auch die zeitliche Definition der statischen Phase besonders wichtig. Sie hat nicht nur Einfluss auf das Alignment-, sondern auch auf das Navigationsergebnis. Tabelle 6.4 zeigt, wie groß Fehler in Position, Geschwindigkeit und Attitude durch die Aufintegration der Messungen der statischen Phase werden können. Die Position bringt zum Ausdruck, welcher Weg laut System zurückgelegt wurde, obwohl das Fahrzeug steht. Ebenso zeigt das System eine Geschwindigkeit an, obwohl diese in Wahrheit Null ist. Bei den Werten handelt es sich um Maximalwerte, die bei den Untersuchungen festgestellt

wurden. Die Fehler entstehen durch das Messrauschen und die nicht exakte numerische Integration.



**Abbildung 6.11:** Vergleich der Navigationsergebnisse bei unterschiedlichen Alignmentverfahren

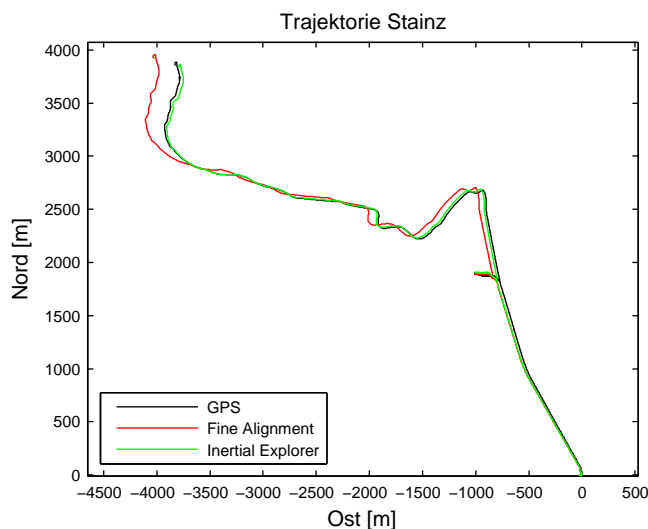
**Tabelle 6.4:** Fehler durch die Aufintegration von statischen Messungen

Zeit	Position	Geschwindigkeit	Attitude
30 s	0.09 m	0.006 m/s	0.0012°
60 s	0.34 m	0.011 m/s	0.0015°
120 s	1.40 m	0.025 m/s	0.0027°

### 6.2.3 Genauigkeitsvergleich mit dem Inertial Explorer

Bisher wurden Auswertungen mit der selbst entwickelten Software durchgeführt. Hier werden nun die Ergebnisse basierend auf der Simpsonintegration und dem Fine Alignment Algorithmus mit jenen einer reinen IMU Auswertung des Inertial Explorers 8.2 verglichen. Großes Verbesserungspotential ist vorhanden, wie man anhand der beiden Ergebnistrajektorien (siehe Abbildung 6.12) erkennen kann. Während der selbst implementierte Algorithmus einen Positionsfehler von etwa 215 Metern aufweist, beträgt der Fehler beim Inertial Explorer knapp 50 Meter. Ein Grund für diesen großen Unterschied liegt in den implementierten Algorithmen. Der Inertial Explorer wendet einen Fine Alignment Algorithmus an, der die Sensorfehler mitschätzt und diese während der gesamten Fahrt anbringt. Außerdem berechnet die Software anhand der Restgeschwindigkeit und dem Misalignment zu Beginn jedes

ZUPTs eine Koordinatenkorrektur, die ebenfalls angebracht wird. Weiters besitzt der Inertial Explorer eine automatische ZUPT Erkennung, d. h. es werden einerseits definierte ZUPTs automatisch verlängert oder verkürzt und andererseits automatisch statische Phasen in den Messdaten erkannt. Auf diese Art wurde z. B. ein ZUPT von etwa 12 Sekunden nach 6.5 Minuten Fahrt erkannt, in der ein kurzes Fine Alignment durchgeführt, aber vor allem der Geschwindigkeitsfehler zurückgesetzt wird. Dieser betrug zu dieser Zeit bereits 0.2 m/s. Vergleicht man die Ergebnisse, wenn die automatische ZUPT Erkennung deaktiviert ist, erzielen beide Programme dieselbe Genauigkeit.

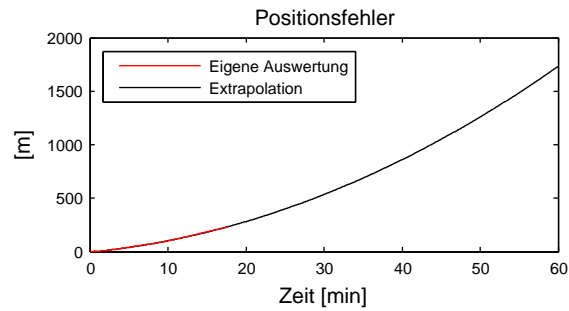


**Abbildung 6.12:** Vergleich der Navigationsergebnisse mit dem Inertial Explorer

Um festzustellen, ob die selbst implementierten Algorithmen die Positionsgenauigkeit von 0.8 nm ( $\approx 1.5$  km) laut Spezifikation erfüllen, mussten die Positionsfehler extrapoliert werden, da nur Messdaten mit einer maximalen Fahrzeit von 18 Minuten zwischen zwei ZUPTs vorlagen. Die Extrapolation in Abbildung 6.13 zeigt, dass die Spezifikation bei dieser Fahrt vermutlich knapp nicht erreicht werden kann und dass zum Erfüllen der Spezifikation bessere Algorithmen implementiert werden müssen. Zur Berechnung der Extrapolierenden wurde ein Ausgleich nach kleinsten Quadraten durchgeführt. Die beste Anpassung an die Positionsfehler gelang mittels Polynom 2. Grades. Die Quadratsumme der Verbesserungen beim Polynom 2. Grades beträgt ein Viertel im Vergleich zur Anpassung einer Exponentialfunktion.

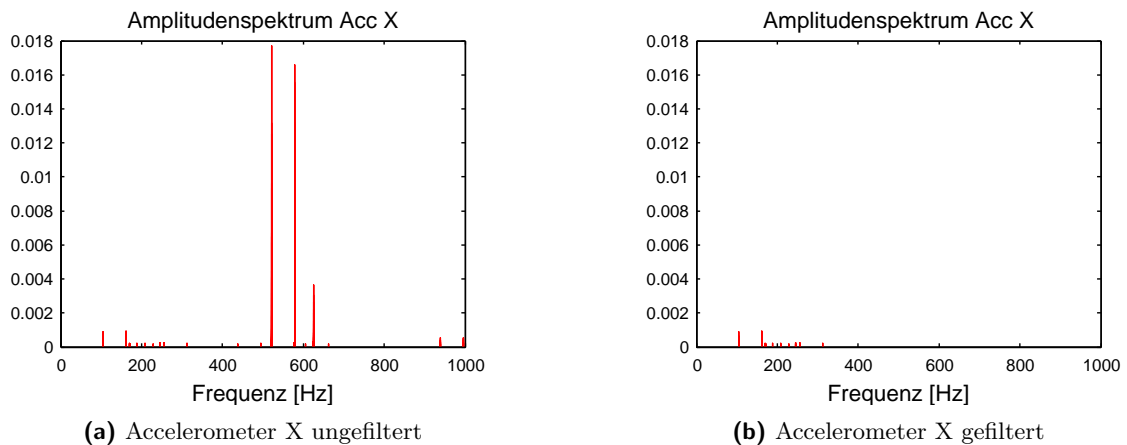
#### 6.2.4 Messdatenfilterung in der Navigation

Im Kapitel 5.3 wurden Frequenzanalysen von kinematischen Messdaten durchgeführt und festgestellt, dass die Anregungsfrequenzen der Gyros im Amplitudenspektrum dominant



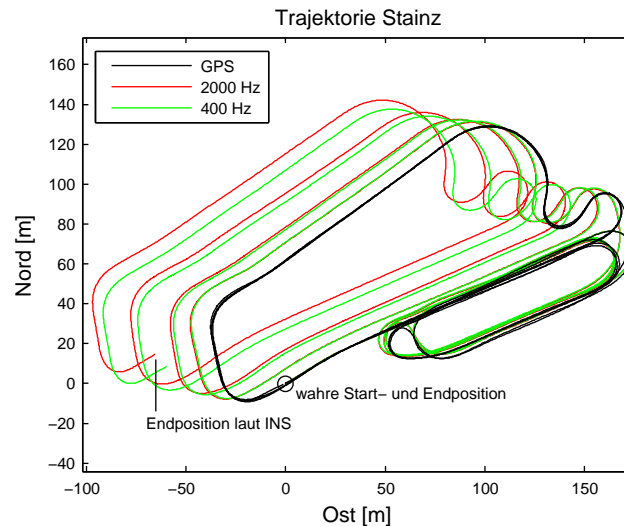
**Abbildung 6.13:** Vergleich des Positionsfehlers mit den Spezifikationen

sind. Um festzustellen, ob dieses zusätzliche Messrauschen Einfluss auf das Navigationsergebnis hat, wurden die Messdaten auf unterschiedliche Weise gefiltert und anschließend mittels Simpsonintegration ausgewertet. Die Filterung wurde im Zeitbereich durchgeführt, um etwaige Effekte der Fourier Transformation aufgrund nichtperiodischer Signale zu vermeiden. Zum Einsatz kamen der Bartlett-Hanning Low-Pass Filter, der Kaiser Low-Pass Filter (siehe Abbildung 6.14), der gleitende Mittelwertfilter und der Kaiser Band-Stop Filter. Die Phasentreue der Filter wurde wie bereits in Kapitel 5 dadurch erzielt, dass die Daten zuerst von vorne und das Ergebnis anschließend von hinten gefiltert wurde (Befehl `filtfilt` in MATLAB). Außer der Phasentreue war eine sehr geringe Veränderung der Amplitude (Rippling) im Pass-Band für die Auswahl der Filter entscheidend. Die Auswertungen der gefilterten Daten der Fahrt in Stainz wie auch der Fahrt in Lebring ergaben jedoch keine Verbesserungen. Dies lässt darauf schließen, dass das Dithering aufgrund seiner Frequenzen kein Problem für die Navigation darstellt.



**Abbildung 6.14:** Ergebnis der Kaiser Low-Pass Filterung

Weiters wurde untersucht, bei welcher Aufzeichnungsrate die besten Ergebnisse erzielt werden. Dazu werden die mit 2000 Hz aufgezeichneten Messdaten nachträglich mittels Mittelwertbildung auf eine geringere Datenrate reduziert. Dies entspricht demselben Vorgehen wie



**Abbildung 6.15:** Vergleich der Navigationsergebnisse bei Datenreduktion

bei der direkten Aufzeichnung mit einer geringeren Datenrate. Der Theorie nach sollte immer die maximale Frequenz gewählt werden, um Coning und Sculling Effekte zu verringern. Beim implementierten Algorithmus mit Simpsonintegration und ohne speziellen Coning bzw. Sculling Algorithmus zeigt sich, dass das optimale Ergebnis bei 400 Hz erzielt wird (siehe Abbildung 6.15). Dies führt zu einer Verbesserung der Endposition von 7 Metern in Lebring und 8 Metern in Stainz. Die Datenreduktion mittels Mittelbildung ist im Prinzip nichts anderes als ein Mittelwertfilter. Da der gleitende Mittelwertfilter von zuvor mit denselben Einstellungen angewandt wurde wie hier bei der Datenreduktion auf 400 Hz (Breite 5), ist davon auszugehen, dass die Verbesserung nicht durch die Filterung, sondern durch die Datenreduktion und der damit verbundenen geringeren Anzahl an Integrationsschritten zustande kam. Es könnte jedoch auch mit der Bandbreite der Sensoren von 400 Hz zu tun haben. Da eine entsprechende Filterung zu keiner Verbesserung der Resultate führte, wird dies jedoch eher ausgeschlossen.

Eine Kombination zwischen Filterung und Datenreduktion führte ebenfalls zu keiner Verbesserung der Positionslösungen.

# 7 Untersuchungen zur Moving-Base Gravimetry

Da die Accelerometer einer IMU die auftretende spezifische Kraft erfassen, soll nun versucht werden, aus dieser die Schwerebeschleunigung zu extrahieren. Im statischen Fall entspricht die spezifische Kraft der Schwerebeschleunigung, im kinematischen Fall muss sie um die kinematische und die Coriolisbeschleunigung reduziert werden. Als Vorstufe der tatsächlichen Moving-Base Gravimetry gilt der Stop-and-Go Modus, wo nur die statischen Phasen zur Schwerebestimmung herangezogen werden. Die folgenden Untersuchungen sollen zeigen, ob die Schwerebestimmung mit dem INS iNav-RQH-003 im Stop-and-Go Modus möglich ist und wie dabei vorgegangen werden muss.

## 7.1 Absolutgravimetrie

Die Labormessungen, von denen bereits in Kapitel 5 berichtet wurde, werden nun verwendet, um herauszufinden, ob die SINS Absolutgravimetrie in statischen Messphasen möglich ist. Es stehen 5 Aufzeichnungen mit einer Dauer von jeweils 40 Minuten sowie eine weitere Aufzeichnung mit einer Dauer von 150 Minuten zur Verfügung. Die Messungen wurden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen durchgeführt, zwischen jeder Aufzeichnung wurde die IMU vom Strom getrennt und neu gestartet. In Kapitel 5.1 wurde bereits festgestellt, dass trotz des kurzen Ausschaltens der IMU Einlaufeffekte von bis zu 20 Minuten in den Messdaten auftreten. Dadurch kann teilweise nur der spätere Teil einer Messung zur Auswertung herangezogen werden.

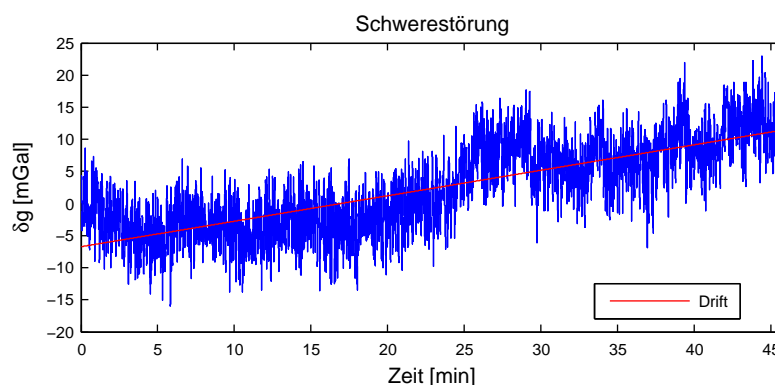
Um den Schwerevektor zu erhalten, müssen die Messungen der spezifischen Kraft zuerst mittels Fine Alignment vom b-Frame in den n-Frame transformiert werden. Anschließend wird analog zu Gleichung 4.9 der Schwerevektor um die Normalschwere reduziert und als Ergebnis erhält man die Schwerestörung. Alternativ dazu könnte man auch den Ansatz der rotationsinvarianten Skalargravimetrie wählen, indem der Betrag der spezifischen Kraft berechnet und davon die Normalschwere abgezogen wird. Vergleicht man nun die Schätzungen für die Schwerestörung (siehe Tabelle 7.1), dann sieht man enorme Differenzen. Diese resultieren vor allem aus den Einschaltvariationen der Accelerometer Biases. Zusätzlich weisen die Daten



Driften auf, die sich zwischen 0.2 mGal/h bei der Messung 6 und 23.8 mGal/h bei der Messung 3 bewegen. Die Aufzeichnungen 3 und 4 weisen neben den enormen Driften zusätzlich Störsignale mit einer Periode von 5 Minuten auf (siehe Abbildung 7.1). Anfänglich wurde vermutet, dass diese entweder durch eine Person im Messlabor hervorgerufen wurde oder aber durch LKWs auf der anliegenden Straße. Eine später durchgeführte Langzeitmessung weist jedoch keine so kurzen Effekte auf, daher müssen diese beiden Vermutungen verworfen werden. Bei den Langzeituntersuchungen traten ähnliche Effekte, jedoch über einen Zeitraum von einer halben Stunde und mehr auf. Daher wird vermutet, dass es sich um Effekte der Sensoren handelt. Um die tatsächliche Ursache zu finden, sind weitere Untersuchungen notwendig. Betrachtet man nur die Messungen 1, 2, 5 und 6, so bewegt sich die Drift zwischen 0.2 und 3 mGal/h. Aufgrund der kurzen Messepochen müssen die Werte der Driften anhand längerer Zeitreihen verifiziert werden. Diese Untersuchungen folgen in Abschnitt „Präzision der Relativgravimetrie“ auf Seite 94.

**Tabelle 7.1:** Schwerstörungen der Labormessungen

Messungen	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Schwerstörung [mGal]	107.3	43.0	2.4	38.9	48.4	44.6
Standardabweichung [mGal]	3.2	3.2	6.8	5.0	3.5	3.4
Drift [mGal/h]	2.5	0.4	23.8	14.1	3.0	0.2



**Abbildung 7.1:** Labormessung 3 zur Driftveranschaulichung

Zur Berechnung der Werte in Tabelle 7.1 wurden die rohen Messdaten (2000 Hz) mit einem Chebychev II Low-Pass Filter gefiltert. Der Übergangsbereich wurde von 0.3 bis 1.4 Hz festgelegt, als maximale Dämpfungen wurden 1 dB am Beginn und 150 dB am Ende des Übergangsbereich festgelegt. Beim Chebychev II Filter handelt es sich um einen IIR Filter. Diese Filter haben den Vorteil, dass sie im Vergleich zu FIR Filter die gleichen Toleranzspezifikationen mit einer viel kleineren Ordnung erzielen können (Pail, 2008). Dadurch dauert der Filterprozess bei großen Datenmengen erheblich kürzer. Der Chebychev II Filter hat wei-

ters den Vorteil, dass das Rippling nur im Stopband auftritt und somit die zu erhaltenden Frequenzen nicht in ihrer Amplitude verändert werden.

Anhand der Werte aus Tabelle 7.1 kann sehr deutlich gezeigt werden, dass die SINS Absolutgravimetrie mit dem iNav-RQH-003 System nicht möglich ist, da die Sensorfehler, insbesondere die Random Biases der Accelerometer zu groß sind, um die gewünschte Genauigkeit von  $<3$  mGal erreichen zu können. Weitere Messungen haben bestätigt, dass es sich bei den Messungen 1 und 3 nicht um Ausreißer handelt, die zu eliminieren sind, sondern dass tatsächlich solch große Variationen auftreten. Die Variationen können geringer ausfallen (siehe Messungen 4 bis 6), wenn sich die IMU wie hier zwischen den Messungen nicht bewegt, wodurch sich auch im Gehäuseinneren nichts verändert. Um trotzdem die Schätzungen hinsichtlich ihrer Genauigkeit zu kontrollieren, wurde mithilfe der Basisdaten aus Pail et al. (2007) von Kühnreiter ein Referenzwert ermittelt. Dieser beträgt  $34.6 \pm 3$  mGal und weicht teilweise signifikant von den Schätzungen ab.

## 7.2 Relativgravimetrie

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass aufgrund der Größe der Restbiases die SINS Absolutgravimetrie mit dem iNav-RQH-003 System nicht möglich ist. Nun soll untersucht werden, ob die Genauigkeit des Systems ausreicht, um SINS Relativgravimetrie betreiben zu können. Grundgedanke dabei ist, dass man mit dem Messfahrzeug an einem Punkt bekannter Schwere startet und den Offset in der Schwerestörung aufgrund der Restbiases der Accelerometer bestimmt. Anschließend fährt man an jene Orte, an denen die Schwere zu bestimmen ist und führt dort Messungen durch, bei denen sich das IMS in Ruhe befindet. Diese Methode würde sich für die Netzverdichtung eignen, nicht jedoch für großräumige Gebiete, in denen noch keine Schwereinformation vorhanden ist.

Um Relativgravimetrie betreiben zu können, dürfen sich die Sensorfehler im Laufe der Zeit nur um wenige mGal verändern. Als Vorbereitung für die Relativgravimetrie wird nun die Reproduzierbarkeit von Schwerewerten untersucht. Dabei soll gezeigt werden, wie gut Messungen am selben Ort übereinstimmen, wenn die IMU zwischen den Messungen nicht ausgeschaltet wird. Zur Untersuchung der Reproduzierbarkeit wurden mehrere Messungen am Dach des TU-Gebäudes Steyrergasse 30 in Graz durchgeführt. Die IMU war am Dachträger montiert und dieser lag am Boden. Zwischen den Messungen wurde der Dachträger in seiner Ausrichtung verändert, die IMU blieb jedoch während der gesamten Messreihe eingeschaltet. Die Aufzeichnungen fanden am 23. März 2010 im Zeitraum zwischen 10:15 und 14:25 statt, gestartet wurde die IMU bereits um 9 Uhr. Betrachtet man die aufgeführten Werte in Tabelle 7.2, so passen die ersten drei Messungen bezüglich der abgeleiteten Schwere sehr gut zusammen. Zwischen 3. und 4. Messung kommt es zu einem großen Sprung in der geschätzten Schwerebeschleunigung. Anschließend stimmen die Ergebnisse der Messungen 4 bis 6 ebenfalls sehr gut überein. Schuld am Sprung zwischen 3. und 4. Messung ist

eine sehr starke Drift im Zeitraum zwischen 11:40 und 12:10 (siehe Abbildung A3). Ein möglicher Grund für diese starke Drift ist die starke Sonneneinstrahlung. Da nach der dritten Messepoche die Aufzeichnung kurz gestoppt wurde, um ein neues Messfile anzulegen, könnte dieses Vorgehen zusätzlich für den Offset verantwortlich sein. Weiters war zu Beginn der 5. Messung eine sehr starke Drift in den ersten Minuten zu beobachten, weswegen diese Zeitspanne nicht zur Berechnung herangezogen wurde. Wahrscheinliche Ursache dafür sind die Bodenplatten, die nicht sehr stabil sind und sich nach einer Belastung durch das Beobachtungsteam beim Verdrehen des Messaufbaus zwischen Messung 4 und 5 wieder entspannten. Um die genaueren Ursachen der diversen Phänomene zu bestimmen, sind weitere Untersuchungen notwendig. Die Schwereverläufe der einzelnen Messungen sind in Anhang A3 abgebildet.

**Tabelle 7.2:** Schwerestörungen der Dachmessungen

Messungen	Zeitraum	Schwerestörung	Stdabw.	Trend
Messung 1	10:15 - 10:30	37.3 mGal	2.9 mGal	2.8 mGal/h
Messung 2	10:50 - 11:30	34.0 mGal	2.8 mGal	-0.9 mGal/h
Messung 3	11:40 - 12:10	37.5 mGal	3.1 mGal	-7.4 mGal/h
Messung 4	12:30 - 13:15	28.6 mGal	2.8 mGal	-1.0 mGal/h
Messung 5	13:30 - 13:45	28.4 mGal	2.8 mGal	-5.0 mGal/h
Messung 6	13:48 - 14:25	24.6 mGal	2.7 mGal	-0.6 mGal/h

Betrachtet man die Ergebnisse der Messungen 1 bis 3 und 4 bis 6 getrennt, so kann die Schwerestörung über eine Zeit von 2 Stunden mit einer Präzision von  $\pm 2$  mGal reproduziert werden. Dies bedeutet, dass ausgehend vom Punkt bekannter Schwere Orte, die in einer Entfernung von 2 Stunden Fahrt liegen, angefahren werden können und der dadurch begangene Fehler maximal  $\pm 2$  mGal beträgt (Annahmen: keine Temperatureffekte, keine Veränderungen der Biases aufgrund der Erschütterungen während der Fahrt zwischen den Punkten).

Als Nächstes wurden zwei Messfahrten in der Region Stainz durchgeführt. Dabei wurden an zwei Punkten statische Messphasen durchgeführt, wobei zwischen beiden Punkten eine Fahrt von ca. 7.5 Kilometern Länge und 260 Metern Höhe liegt. Bei der Auswahl der Punkte wurde darauf geachtet, dass diese einen möglichst großen Unterschied in der Schwerestörung aufweisen. Tabelle 7.3 zeigt das Auswerteprotokoll der beiden Messfahrten. Betrachtet man als Erstes die Werte der Standardabweichungen, so sind diese im Durchschnitt um 1 mGal größer als jene bei den Untersuchungen am Dach. Dies resultiert zum Teil aus den teilweise größeren Driften. Ein möglicher Grund für die großen Driften sind auftretende Temperatureffekte. Zur Untersuchung möglicher Temperatureffekte sind Messungen in der Klimakammer des Messlabors angedacht.

**Tabelle 7.3:** Schwerestörungen der Testfahrten

Messfahrt	Punkt	Zeitpunkt	Messdauer	Schwerestörung	Stdabw.	Drift
Fahrt 1	A	11:00	27.00 min	6.2 mGal	3.5 mGal	1.6 mGal/h
	B	11:27	6.50 min	50.7 mGal	4.0 mGal	-37.2 mGal/h
	A	11:47	9.25 min	13.7 mGal	3.9 mGal	-0.1 mGal/h
	B	12:15	14.25 min	48.2 mGal	3.8 mGal	-6.7 mGal/h
	A	12:37	11.75 min	14.1 mGal	3.8 mGal	-16.9 mGal/h
Fahrt 2	A	10:27	15.25 min	6.2 mGal	3.4 mGal	3.1 mGal/h
	B	10:57	9.00 min	44.6 mGal	3.6 mGal	6.0 mGal/h
	A	11:28	15.75 min	10.8 mGal	3.5 mGal	2.2 mGal/h
	A	12:05	11.50 min	9.6 mGal	3.8 mGal	-8.8 mGal/h

Die starke Drift von -37.2 mGal/h siehe Zeile 2 in Tabelle 7.3 verrät noch nicht identifizierte Effekte auf der Fahrt von A nach B sowie in den Messungen vom Punkt B. Vermutet wird, dass diese Effekte temperaturbedingt sind. Am Punkt A könnte sich die IMU aufgrund der langen Stehzeit und der Sonneneinstrahlung erhitzt haben. Während der Fahrt zum 260 Meter höher gelegenen Punkt B dürfte es dann zur Abkühlung gekommen sein, was in den Daten als starke Drift zu bemerken ist. Ähnliche Gründe könnte die höhere Drift von -16.9 mGal/h siehe Zeile 5 haben.

Um Genauigkeitsaussagen über die Relativgravimetrie treffen zu können, wird wie bereits bei den Dachmessungen als Erstes die Reproduzierbarkeit der Messungen (siehe Tabelle 7.4) untersucht. Anhand der Werte ist erkennbar, dass die geschätzten Schwerestörungen mit Ausnahme der ersten Messung in der ersten Zeile sehr gut zusammen passen. Die erste Messung wird aufgrund der vermuteten Temperatureffekte eliminiert und so erhält man Ergebnisse mit einer Standardabweichung kleiner als 3 mGal.

**Tabelle 7.4:** Reproduzierbarkeit der Messungen der Stainz-Fahrten

Messfahrt	Messung	#1	#2	#3	Mittelwert	Stdabw.
Fahrt 1	Punkt A	<del>6.2 mGal</del>	13.7 mGal	14.1 mGal	13.9 mGal	0.3 mGal
Fahrt 1	Punkt B	50.7 mGal	48.2 mGal		49.5 mGal	1.8 mGal
Fahrt 2	Punkt A	6.2 mGal	10.8 mGal	9.6 mGal	8.9 mGal	2.4 mGal

Dass der Ausschluss der ersten Messung (siehe Tabelle 7.4) gerechtfertigt ist, zeigt auch die Analyse der Ergebnisse der Relativgravimetrie (siehe Tabelle 7.5). Abgesehen von der ersten Messung stimmen alle Werte mit einer Standardabweichung von  $\pm 2.0$  mGal überein. Die Werte streuen um 4.6 mGal und weisen Standardabweichungen von maximal  $\pm 5.6$  mGal auf.

Der Mittelwert beträgt 35.6 mGal und besitzt eine Standardabweichung von  $\pm 2.4$  mGal. Die Werte für die Differenzen B-A (siehe Tabelle 7.5) wurden mithilfe der Werte aus Tabelle 7.3 berechnet. Die Messung 1 in Tabelle 7.5 entspricht der Differenz zwischen A und B (Zeile 1 und 2 in Tabelle 7.3), die Messung 2 entspricht der Differenz zwischen B und A (Zeile 2 und 3), etc.

**Tabelle 7.5:** Ergebnisse der Relativgravimetrie der Stainz-Fahrten

Messungen	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Mittelwert
Differenz B-A [mGal]	44.5	37.0	34.5	34.1	38.4	33.8	35.6
Stdabw. [mGal]	5.3	5.6	5.4	5.4	5.0	5.0	2.4

Zum Vergleich der Ergebnisse (siehe Tabelle 7.5) wurden Schwerstörungen von Kühtreiber zur Verfügung gestellt (siehe Tabelle 7.6). Diese wurden mithilfe der Basisdaten aus Pail et al. (2007) prädiziert. Stellt man diese Werte den Schätzungen (siehe Tabelle 7.5) gegenüber, so weichen die Einzelmessungen um 2.4 bis 7.0 mGal und der Mittelwert um 4.2 mGal ab. Mittels Varianzfortpflanzung kann die Varianz der Abweichung berechnet werden. Wendet man anschließend die  $3\sigma$ -Methode an, so sind die Abweichungen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.3% nicht signifikant.

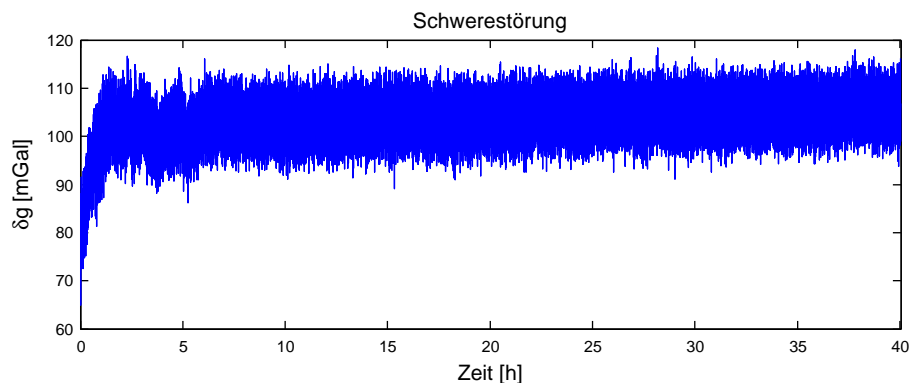
**Tabelle 7.6:** Referenzwerte

Punkt	Schwerstörung	Stdabw.
A	19.8 mGal	2.0 mGal
B	51.2 mGal	2.0 mGal
Differenz B-A	31.4 mGal	2.8 mGal

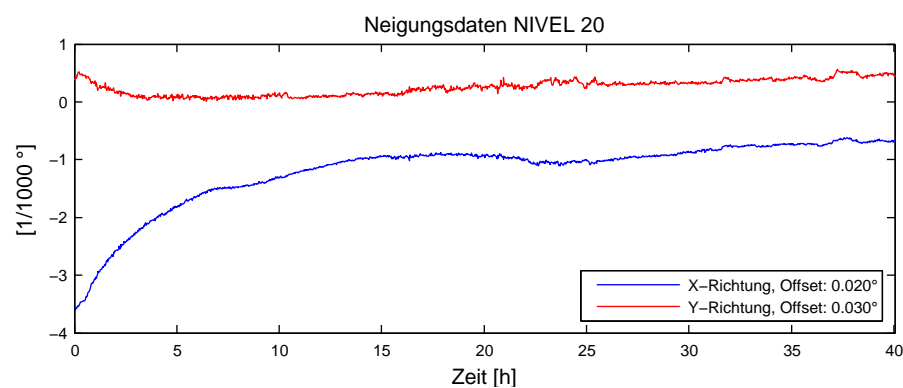
### Präzision der Relativgravimetrie

Um die Variationen in den Accelerometer Biases unter idealen Bedingungen zu untersuchen, wurde eine Langzeitmessung über 40 Stunden im Messlabor durchgeführt (siehe Abbildung 7.2a). Zur Kontrolle, dass im Zeitraum der Messung keine externen Störeinflüsse auftraten, wurde die IMU auf einer Granitplatte montiert, auf der sich zusätzlich ein Leica NIVEL 20 Zweiachs-Neigungssensor (Nullpunktstabilität  $3 \cdot 10^{-4}$  °/°C) befand (siehe Abbildung 7.3). Der NIVEL 20 besitzt ein internes Thermometer, welches während der 40 Stunden eine Temperatur von 19.6° zu Beginn und 20.0° am Ende maß. Die Messungen zeigen, dass sich die Schwerstörungen innerhalb der ersten 1.5 Stunden stark veränderten und danach noch bis zu 6 Stunden nach Messbeginn im Bereich von 5 mGal variierten. Vergleicht man diese Auswertungen mit den Daten des Neigungssensors (siehe Abbildung 7.2b), so könnte man auf

den ersten Blick eine Korrelation vermuten. Betrachtet man jedoch die Accelerometerdaten der einzelnen Sensoren getrennt (siehe Anhang A4), so sieht man, dass die Variationen fast ausschließlich in den Messdaten des Z-Accelerometers auftraten. Würde es tatsächlich eine Neigungsänderung geben, so würde man diese in allen drei Komponenten, aber vor allem in den Messdaten der horizontalen Accelerometer sehen. Außerdem beträgt die maximale Neigungsänderung  $0.001^\circ$  in den ersten zwei Stunden. Dies entspricht bei einer Plattenlänge von 50 cm einer Höhenänderung von  $9 \mu\text{m}$  und somit eine nicht auflösbare Beschleunigung von  $10^{-9} \text{ m/s}^2$ .



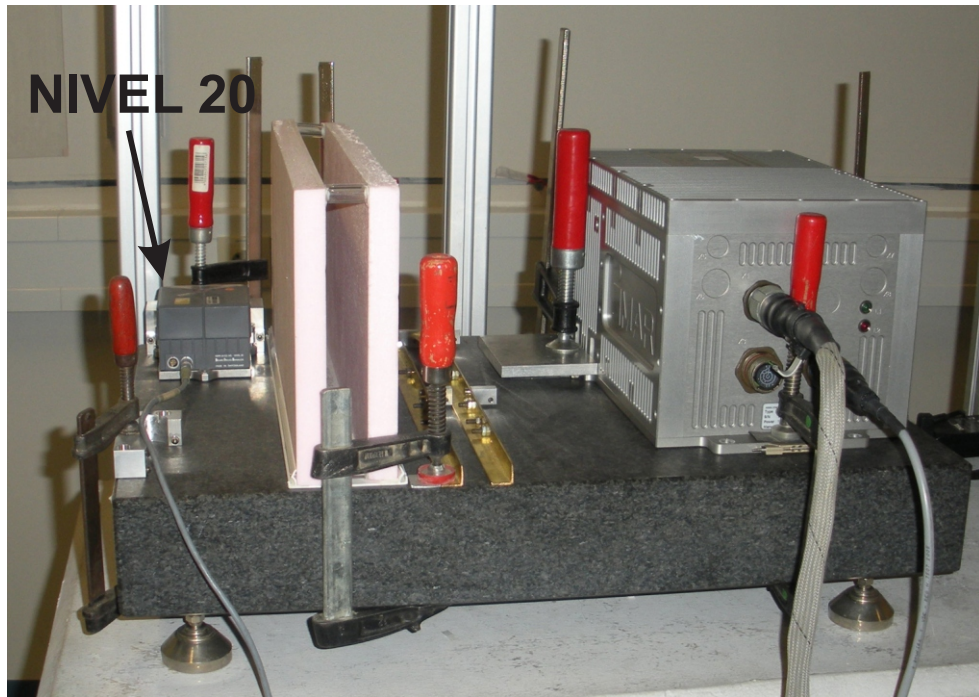
(a) Schwerestörung aus IMU Messdaten



(b) Neigungsdaten vom NIVEL 20

**Abbildung 7.2:** Langzeitmessung im Labor

Um jeglichen Zweifel zu beseitigen, wurden zusätzliche Messungen durchgeführt, bei denen unter die IMU ein 0.1 mm dicker bzw. ein 0.05 mm dicker Metallstreifen gelegt wurde, um zu sehen, ob dies in den Messdaten des Z-Accelerometers zu sehen ist. Durch das Anheben der IMU um einen Millimeter entsteht bereits eine Neigungsänderung von  $0.2^\circ$  (Länge der IMU: 30 cm). Selbst diese Neigungsänderung innerhalb weniger Sekunden konnte nicht in den Daten des Z-Accelerometers aufgelöst werden, wodurch sich bestätigt, dass die Effekte zu Beginn der Langzeitmessung rein den Accelerometern der IMU zuzuschreiben und nicht bewegungsinduziert sind. Als Ergänzung soll hier erwähnt werden, dass die Horizontalaccelerometer sehr wohl die Bewegung und auch die Neigungsänderung durch den Metallstreifen



**Abbildung 7.3:** Messaufbau der Langzeitmessung

registrieren und auflösen können.

Um die Ergebnisse der Langzeitmessung zu kontrollieren, wurde eine zweite 15-stündige Messung durchgeführt, die ähnliche Effekte zu Beginn zeigt (siehe Anhang A5). Daraus folgt, dass der Großteil der Aufwärmeeffekte in den ersten 1.5 Stunden auftritt. Weiters treten Variationen im Bereich weniger mGal bis zu 6 Stunden nach Messbeginn auf, die für die Gravimetrie nicht vernachlässigbar sind. Nach 1.5 Stunden ergibt sich eine maximale Drift von 5 mGal/h bzw. nach 6 Stunden von 0.1 mGal/h. Diese Ergebnisse bedeuten, dass man um störungsfreie Messdaten zu erhalten 6 Stunden Vorlaufzeit berücksichtigen sollte.

Wie sehr sich die Akklimatisierungseffekte und Variationen aufgrund von Temperatureffekten und Erschütterungen ändern, müssen weitere Untersuchungen zeigen. Dazu sind Messungen in einer Klimabox sowie Messungen mit zwischenzeitlichen Erschütterungen z. B. durch einen Shaker geplant.

Die Abschätzung der optimalen Beobachtungsdauer ist schwer. Betrachtet man die Standardabweichungen in den Tabellen 7.2 und 7.3, so können keine wesentlichen Verbesserungen in der Schätzung der Schwerestörung durch eine Verlängerung der Messzeit von 15 auf 30 und mehr Minuten erzielt werden. Daher wird als geeignete Messdauer eine Zeit von ca. 15 Minuten empfohlen.

# 8 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

Im folgenden Abschnitt werden die Untersuchungen dieser Masterarbeit zusammengefasst und die wesentlichen Ergebnisse präsentiert. Im daran anschließenden „Ausblick“ werden Ideen für zukünftige Untersuchungen und Weiterentwicklungen aufgezeigt.

## 8.1 Zusammenfassung und Diskussion

Das Ziel dieser Masterarbeit war es, das Strapdown INS iMar iNav-RQH-003 zu untersuchen, um anschließend geeignete Algorithmen zur Navigation sowie zur Moving-Base Gravimetry umzusetzen. Die Untersuchungen fanden im Rahmen des Projekts Gravis statt, welches am Institut für Navigation und Satellitengeodäsie (INAS) der TU Graz bearbeitet und von der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft (FFG) im Rahmen des Austrian Space Applications Programmes (ASAP) gefördert wurde.

Die Untersuchungen der Messdaten ergaben, dass diese maßgeblich durch die Schwingungsanregung der Gyros beeinflusst sind. Die Frequenzen der Anregung wurden sowohl in den Gyro- als auch in den Accelerometerdaten mittels Fourier Analyse nachgewiesen. Durch die Gyroanregung wurde eine Vergrößerung der Rauschamplitude der Accelerometerdaten um den Faktor 8 bis 12 festgestellt. Die Variationen der Accelerometer Biases und der Gyro Drifts wurden überprüft, die Spezifikationen konnten bei allen Accelerometern und einem Gyro erreicht werden, die zwei weiteren Gyros wiesen eine geringfügig größere Streuung auf. Untersuchungen zeigten, dass die Variationen auch dann auftreten, wenn die IMU nur für wenige Augenblicke ausgeschaltet wird. Die Akklimatisierungszeit der IMU beträgt bis zu 1.5 Stunden bei einem Kaltstart, beim Neustart eines bereits akklimatisierten Instruments konnten Einlaufeffekte von bis zu 20 Minuten festgestellt werden. Im Motorbetrieb wurde eine weitere Verschlechterung des Signal-zu-Rausch Verhältnisses der Accelerometermessdaten um den Faktor 1.2 bis 3.75 festgestellt, die Motordrehzahl hat dabei nur einen geringen Einfluss auf das Ausmaß der Verschlechterung.

Als Nächstes sollten verschiedene Alignment und Strapdown Algorithmen implementiert werden. Die Untersuchungen zeigten, dass das Alignmentergebnis das ausschlaggebendste Kriterium für die spätere Positionsgenauigkeit darstellt. Auswertungen ergaben, dass das



beste Ergebnis dann erzielt wird, wenn der Motor nicht in Betrieb ist und sich keine Personen im Fahrzeug befinden. Weiters ist es wesentlich, den Beginn und das Ende der Alignmentphase richtig zu definieren. Wird die statische Phase so definiert, dass sie Bewegungen beinhaltet, verfälschen diese das Ergebnis. Geringere Ungenauigkeiten ergeben sich, wenn die Alignmentperiode zu kurz definiert wird, sodass die Messdaten der statischen Phase aufintegriert werden. Auswertungen zeigten für diesen Fall einen Positionsfehler von 9 cm und ein Misalignment von  $0.0012^\circ$  nach 30 Sekunden bzw. 1.4 m und  $0.0027^\circ$  nach 120 Sekunden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Coarse Alignment Algorithmen und ein Fine Alignment Algorithmus implementiert. Der Fine Alignment Algorithmus zeigte im Vergleich die besten Ergebnisse. Dieser beruht auf einem Kalman Filter und einem reduzierten PSI-Angle Fehlermodell. Die Horizontierung konnte mithilfe des Fine Alignments auf wenige  $1/1000^\circ$  genau durchgeführt, die Nordrichtung jedoch nur auf wenige  $1/10^\circ$  bestimmt werden. Die geringe Genauigkeit des Yaw-Winkels resultiert aus dem schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnisses der Gyromessdaten. Zusätzlich stellte es ein großes Problem dar, die richtige initiale Kovarianz des Yaw-Winkels beim Kalman Filter zu finden, da diese entscheidend für das Endresultat ist. Ein weiteres Kriterium für die Positionsgenauigkeit ist die Integrationsmethode des Strapdown Algorithmus. Die besten Ergebnisse wurden mit der Simpsonintegration erzielt, Integrationsverfahren höherer Ordnung brachten keine zusätzlichen Verbesserungen. Auswertungen zeigten, dass eine Optimierung möglich ist, wenn die Messdaten nicht mit der maximalen Aufzeichnungsrate von 2000 Hz, sondern mit 400 Hz prozessiert werden. Dies könnte mit der Bandbreite der Sensoren von 400 Hz zu tun haben, kann jedoch eher ausgeschlossen werden, da eine vergleichbare Filterung der Messdaten keine Verbesserungen im Vergleich zu den Auswertungen mit 2000 Hz brachten. Der Versuch, die Daten mittels Filterung von der Kreiselanregung (520 - 625 Hz) zu befreien, ergab ebenfalls keine Verbesserung. In beiden Fällen wurden mehrere phasentreue Low-Pass und Band-Stop FIR Filter getestet. Vergleicht man die Ergebnisse der eigenen Strapdown Routine mit jenen der kommerziellen Software Inertial Explorer 8.2, so können keine Genauigkeitsunterschiede bei reiner Forward-Auswertung trotz besserer Fehlermodellierung des Inertial Explorers in den Alignmentphasen festgestellt werden. In beiden Fällen betrug der Positionsfehler etwa 215 m nach 18 Minuten. Bei der Prozessierung der Daten mit 400 Hz mit der selbst entwickelten Software konnte der Fehler auf 207 m reduziert werden. Aktiviert man jedoch beim Inertial Explorer die automatische ZUPT-Erkennung und betrachtet die kombinierte Vorwärts-Rückwärts-Lösung, dann erzielt der Inertial Explorer entsprechend bessere Ergebnisse.

Zuletzt wurden Untersuchungen zur terrestrischen skalaren Moving-Base Gravimetry durchgeführt. Dabei konzentrierten sich die Untersuchungen auf den Stop-and-Go Modus. Die ersten Messungen zeigten, dass sich die Einschaltvariationen der Accelerometer Biases im Bereich von  $\pm 60$  mGal bewegen, welche die Absolutgravimetrie unmöglich machen. Daher konzentrierten sich die weiteren Untersuchungen auf die Relativgravimetrie. Die ersten Messungen fanden noch ohne Messfahrzeug und ohne Kinematik statt. Sie wiesen Stan-

Standardabweichungen von  $\leq 3$  mGal und eine Wiederholgenauigkeit zwischen den einzelnen Messepochen von  $\pm 2$  mGal auf. Zwischen den Messepochen wurde die IMU leicht bewegt und in ihrer Ausrichtung verändert. Die Untersuchungen zeigen für kürzere oder längere Zeiträume starke Driften, die die Messergebnisse verfälschen. Als Grund dafür werden Temperatureffekte vermutet, welche als Driften in den Accelerometer Biases sichtbar werden. Langzeitmessungen unter konstanten klimatischen Bedingungen zeigen, dass die IMU nach ca. 1.5 Stunden akklimatisiert ist, dass jedoch bis zu 6 Stunden nach Messbeginn Variationen von bis zu 5 mGal in den Accelerometerdaten auftreten. Nach 6 Stunden betragen die Driften weniger als 0.1 mGal in der Stunde. Zur Untersuchung der relativen Moving-Base Gravimetry wurden zwei Testfahrten mit dem Auto durchgeführt, bei denen sechsmal die Differenz der Schwerstörungen zwischen zwei Punkten mit einer Distanz von 7.5 Kilometern und einem Höhenunterschied von 260 Metern bestimmt wurde. Die Messungen stimmten auf  $\pm 2.3$  mGal untereinander überein (ein Ausreißer wurde eliminiert) und wiesen Standardabweichungen  $< 5.6$  mGal auf. Die mittlere Differenz ergab  $35.6 \pm 2.4$  mGal und weicht somit um  $4.2 \text{ mGal} \pm 3.7 \text{ mGal}$  vom Referenzwert ( $31.4 \pm 2.8$  mGal) ab. Diese Abweichung ist unter Berücksichtigung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.3% ( $3\sigma$ ) nicht signifikant.

## 8.2 Ausblick

Aufgrund der Tatsache, dass die Anwendung der Inertialnavigation sehr umfangreich ist, bestehen zahlreiche Möglichkeiten, die implementierten Algorithmen weiter zu optimieren. Da das Alignment den größten Einfluss auf die Positionsgenauigkeit hat, wäre als Nächstes die Umsetzung von umfangreicheren Fehlermodellen im Self-Alignment sowie die Implementierung eines kinematischen Alignments geplant gewesen. Zur Optimierung des Strapdown Algorithmus stünde zunächst die Umsetzung von Coning und Sculling Algorithmen auf dem Programm.

Im Bereich der Moving-Base Gravimetry sind weitere Untersuchungen zur Temperatur- und Erschütterungsabhängigkeit der Sensoren anhand von Messungen in einer Klimakammer und mithilfe eines Shakers oder Ähnlichem geplant. Zusätzlich könnte die IMU so montiert werden, dass der X-Accelerometer nach unten zeigt, da dieser aufgrund seiner Aufhängung im Inneren der IMU die größte Sensitivität aufweist. Für den Stop-and-Go Modus wäre es außerdem von Vorteil, die Gyroanregung zu deaktivieren, um das Signal-zu-Rausch Verhältnis der Accelerometer zu verbessern. In Hinblick auf die Absolutgravimetrie muss der Stop-and-Go Modus verworfen werden, da in statischen Phasen die Sensorfehler sehr schwer bis unmöglich zu bestimmen sind. Daher würde hier als Nächstes die Sensorintegration mit GNSS und entsprechender INS Fehlerschätzung auf dem Programm stehen.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematischer Aufbau eines Open-Loop-Feder-Accelerometers . . . . .	7
2.2	Schematischer Aufbau eines Closed-Loop-Pendel-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004) . . . . .	8
2.3	Schematischer Aufbau eines Glasfaser-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004) . . . . .	8
2.4	Schematischer Aufbau eines Oberflächenwellen-Accelerometers nach Titterton und Weston (2004) . . . . .	9
2.5	Mechanische Gyros nach von Fabeck (1980) bzw. Titterton und Weston (2004)	11
2.6	Mechanischer Gyro mit Drehmomentgeber nach von Fabeck (1980) . . . . .	12
2.7	Ringinterferometer nach Lawrence (1998) . . . . .	13
2.8	Schematischer Aufbau eines Ring Laser Gyros nach Hofmann-Wellenhof et al. (2003) . . . . .	14
2.9	Schematischer Aufbau eines faseroptischen Gyros nach Hofmann-Wellenhof et al. (2003) . . . . .	14
2.10	Wichtige Sensorfehler . . . . .	17
3.1	Sensorentwicklung mit einigen Anwendungen nach Titterton und Weston (2004)	21
3.2	Schematische Darstellung eines kardanischn gelagerten Systems nach Jekeli (2001) . . . . .	22
3.3	Schematische Darstellung eines Strapdown Systems nach Jekeli (2001) . . . . .	23
3.4	Koordinatensysteme . . . . .	25
3.5	Body Frame . . . . .	25
3.6	Koordinaten . . . . .	28
3.7	Attitudewinkel Roll, Pitch und Yaw . . . . .	31
3.8	Schema der Strapdown Auswertung . . . . .	39
4.1	Schema eines SISG Systems . . . . .	53
5.1	Abbildung des INS iMAR iNav-RQH-003 . . . . .	57
5.2	Body Frame des iMAR iNav-RQH-003 . . . . .	59
5.3	Montage im Messlabor . . . . .	59
5.4	Messungen im Messlabor . . . . .	61
5.5	Detailansicht der Messungen im Messlabor . . . . .	61
5.6	Frequenzanalyse der Messungen im Messlabor . . . . .	63

---

5.7	Einlaufeffekt durch kurzes Ausschalten der IMU . . . . .	64
5.8	Messaufbau am Auto . . . . .	66
5.9	Motoreinfluss auf das Messrauschen im Zeitbereich . . . . .	67
5.10	Motoreinfluss auf das Amplitudenspektrum beim Gyro . . . . .	68
5.11	Motoreinfluss auf das Amplitudenspektrum beim Accelerometer . . . . .	68
5.12	Vergleich von Messdaten einer statischen und kinematischen Phase im Zeitbereich . . . . .	69
5.13	Vergleich von Messdaten einer statischen und kinematischen Phase im Spektralbereich . . . . .	70
6.1	Adaption des Körperkoordinatensystems . . . . .	71
6.2	Ergebnisse des Coarse Alignments . . . . .	74
6.3	Ergebnisse des Coarse Alignments bei gefilterten Messdaten . . . . .	75
6.4	Ergebnisse des Coarse Alignments mit Mittelwertfilterung . . . . .	76
6.5	Ergebnisse des Coarse Alignments mit Polynomannpassung . . . . .	77
6.6	Ergebnisse des Fine Alignments . . . . .	79
6.7	Ergebnisse des Fine Alignments vom Inertial Explorer . . . . .	80
6.8	Schätzung der Accelerometer Biases vom Inertial Explorer . . . . .	80
6.9	GPS und INS Trajektorie von Stainz . . . . .	83
6.10	Vergleich der Integrationsverfahren . . . . .	84
6.11	Vergleich der Navigationsergebnisse bei unterschiedlichen Alignmentverfahren . . . . .	85
6.12	Vergleich der Navigationsergebnisse mit dem Inertial Explorer . . . . .	86
6.13	Vergleich des Positionsfehlers mit den Spezifikationen . . . . .	87
6.14	Ergebnis der Kaiser Low-Pass Filterung . . . . .	87
6.15	Vergleich der Navigationsergebnisse bei Datenreduktion . . . . .	88
7.1	Labormessung 3 zur Driftveranschaulichung . . . . .	90
7.2	Langzeitmessung im Labor . . . . .	95
7.3	Messaufbau der Langzeitmessung . . . . .	96
A1	Dachmessung 1 . . . . .	A3
A2	Dachmessung 2 . . . . .	A3
A3	Dachmessung 3 . . . . .	A3
A4	Dachmessung 4 . . . . .	A4
A5	Dachmessung 5 . . . . .	A4
A6	Dachmessung 6 . . . . .	A4
A7	Langzeitmessung 1, X-Accelerometer . . . . .	A5
A8	Langzeitmessung 1, Y-Accelerometer . . . . .	A5
A9	Langzeitmessung 1, Z-Accelerometer . . . . .	A5
A10	Langzeitmessung 2, Schwerestörung aus IMU Messdaten . . . . .	A6
A11	Langzeitmessung 2, Neigungsdaten vom NIVEL 20 . . . . .	A6

# Tabellenverzeichnis

2.1	Kategorien von inertialen Sensoren . . . . .	5
3.1	Genauigkeitsklassen von INS . . . . .	49
5.1	iNav-RQH Spezifikationen . . . . .	58
5.2	Variationen in den Anregungsfrequenzen . . . . .	62
5.3	Variationen im Accelerometer Bias und Gyro Drift . . . . .	65
6.1	Ergebnisse der verschiedenen Alignmentvarianten . . . . .	81
6.2	Wiederholbarkeit der Alignmentergebnisse . . . . .	82
6.3	Vergleich der Integrationsvarianten anhand der Trajektorie von Stainz . . . . .	83
6.4	Fehler durch die Aufintegration von statischen Messungen . . . . .	85
7.1	Schwerestörungen der Labormessungen . . . . .	90
7.2	Schwerestörungen der Dachmessungen . . . . .	92
7.3	Schwerestörungen der Testfahrten . . . . .	93
7.4	Reproduzierbarkeit der Messungen der Stainz-Fahrten . . . . .	93
7.5	Ergebnisse der Relativgravimetrie der Stainz-Fahrten . . . . .	94
7.6	Referenzwerte . . . . .	94
A1	Parameter des GRS80 . . . . .	A1

# Literaturverzeichnis

- Bartsch, H.-J. (2004). *Taschenbuch Mathematischer Formeln, 20. Auflage*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag.
- Bruton, A. M. (2000). *Improving the Accuracy and Resolution of SINS/DGPS Airborne Gravimetry*. Dissertation, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary.
- Cali, de Saint Jean, Duquenne, Verdun, Melachroinos und Barriot (2005). *A new strapdown system for moving gravimetry*. *American Geophysical Union, Fall Meeting 2005*.
- Chatfield, A. B. (1997). *Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation*. American Institute of Astronautics and Aeronautics, Inc.
- Hofmann-Wellenhof, Legat und Wieser (2003). *Navigation - principles of positioning and guidance*. Springer-Verlag Wien New York.
- Hofmann-Wellenhof, B. und Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer-Verlag Wien New York.
- Jekeli, C. (2001). *Inertial Navigation systems with geodetic applications*. de Gruyter.
- Lü, S., Xie, L. und Chen, J. (2008). *Reduced-order kalman filter for rlg sins initial alignment*. *Chinese Control and Decision Conference*.
- Landfahrer, K. (2009). *Attitude determination using a GPS multi antenna array*. Diplomarbeit, Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Technische Universität Graz.
- Lawrence, A. (1998). *Modern Inertial Technology - Navigation, Guidance, and Control*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.
- Li, X. (2007). *Moving Base INS/GPS Vector Gravimetry on a Land Vehicle*. Dissertation, Geodetic Science and Surveying division, The Ohio State University.
- Pail, R. (2008). *Time Series Analysis and Filtering*. Skriptum, Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Technische Universität Graz.
- Pail, R., Kühtreiber, N., Lackner, B., Of, G., Preimesberger, T., Steinbach, O. und Wiesenhofer, B. (2007). *GEOnAUT: The Austrian Geoid 2007*. Final Report, Institut für Navigation und Satellitengeodäsie, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz.

- Savage, P. G. (2007). *Strapdown Analytics, 2nd Edition*. Strapdown Associates, Inc., Maple Plain, Minnesota.
- Schwarz, K. P. und Wei, M. (1994). *Some unsolved problems in airborne gravimetry*. In *Gravity and Geoid*, Band 113 von *International Association of Geodesy Symposia*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Titterton, D. H. und Weston, J. L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology, Second Edition*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- von Fabeck, W. (1980). *Kreiselgeräte*. Vogel-Verlag.
- Wei, M. und Schwarz, K. P. (1998). *Flight test results from a strapdown airborne gravity system*. *Journal of Geodesy*, 72(6):323–332.
- Zarchan, P. und Musoff, H. (2005). *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach, 2nd Edition*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics.

# Anhang

## A1 GRS80 Parameter

GRS80 steht für Geodetic Reference System 1980. Es wurde im Jahr 1979 von der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG) definiert und ersetzte damals das GRS67. Es war das erste Referenzsystem, das zusätzlich zur Geometrie eine physikalische Definition erhielt. Die 4 bestimmenden Parameter sind  $a$ ,  $GM$ ,  $J_2$  und  $\omega_E$ . Alle anderen Größen lassen sich von diesen 4 Parametern mathematisch ableiten. Die Formeln sind z. B. in Hofmann-Wellenhopf und Moritz (2005) zu finden. In der folgenden Tabelle sind zu Beginn die 4 definierenden Parameter aufgelistet gefolgt von weiteren Parametern, die für die Berechnung der Normalschwere benötigt werden.

**Tabelle A1:** Parameter des GRS80

	Zahlenwert	Bezeichnung
$a$	$= 6378137 \text{ m}$	große Halbachse
$GM$	$= 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$	geozentrische Gravitationskonstante
$J_2$	$= 108263 \cdot 10^{-8}$	dynamischer Formfaktor
$\omega_E$	$= 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$	mittlere Erdrotationsgeschwindigkeit
$f$	$= 3.35281068118 \cdot 10^{-3}$	Abplattung
$m$	$= 3.44978600308 \cdot 10^{-3}$	Hilfsgröße $m = \omega_E^2 a^2 b / (GM)$
$\gamma_a$	$= 9.7803267715 \text{ m/s}^2$	Normalschwere am Äquator
$\gamma_b$	$= 9.8321863685 \text{ m/s}^2$	Normalschwere am Pol



## A2 Spezifikation iMAR iNav-RQH-003

Data Output:	Heading, Roll, Pitch, Angular Velocity, Velocity (body and world), Position, Raw data, internal status information, tbd	
Range:	$\pm 500$ deg/s (no angle limitation) $\pm 7$ g	
True Heading:	$< 0.05$ deg/s(lat); $0.01$ deg with DGPS (motion dependent)	
Attitude Accuracy:	$< 0.02$ deg ( $< 0.01$ deg with DGPS)	
Position Accuracy:	$0.8$ nm/h (unaided)	
Velocity Accuracy:	$5$ mm/s (aided with DGPS receiver)	
Alignment Time:	$< 15$ minutes	
Drift (unaided) / Offset:	$< 0.003$ deg/h	$< 60$ $\mu$ g
Random Walk:	$< 0.0025$ deg/ $\sqrt{h}$	$< 8$ $\mu$ g/ $\sqrt{Hz}$
Resolution:	$0.0003$ deg ( $1.13''$ ), $0.001$ deg/s	$< 1$ $\mu$ g
Linearity Error:	$< 10$ ppm	$< 20$ $\mu$ g/g <sup>2</sup> ( $< 100$ ppm)
Data Output Rate:	$1 \dots 2000$ Hz	
Data Latency:	$< 2$ ms	
Output (options):	RS232/422, Ethernet TCP/IP or UDP, CAN	
Inputs:	RTK-GPS (option: GPS/GLONASS integrated) , event trigger (option)	
Synchronization:	Input for pulse-per-second (PPS or SYNC)	
Power:	$11 \dots 34$ V DC	
Temperature:	$-20 \dots +55$ C, $-40 \dots +85$ C(not operating)	
Rel. Humidity:	$8 \dots 100$ %, IP67	
Magnetic. Insens.:	$< 500$ $\mu$ Tesla (5 Gauss)	
MTBF / MTTR:	$> 25000$ h (estimated for surveying applications) / $< 30$ minutes	
Shock:	$25$ g, $11$ ms; $60$ g, $5$ ms (operating)	
Weight:	approx. $9.5$ kg	
Size:	approx. $350 \times 211 \times 179$ mm	

## A3 Dachmessungen

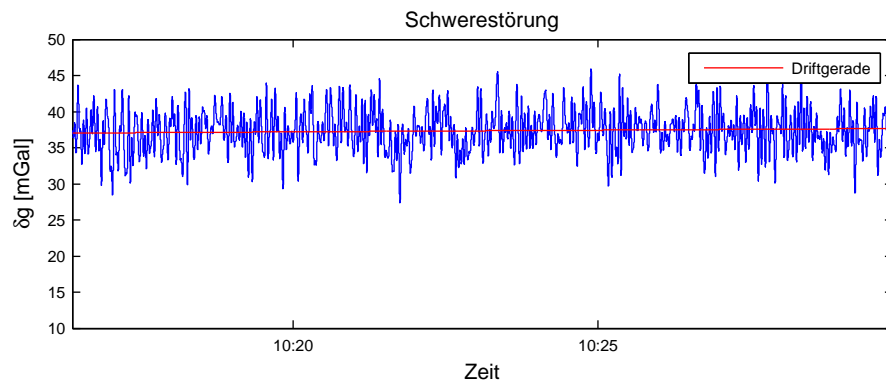


Abbildung A1: Dachmessung 1

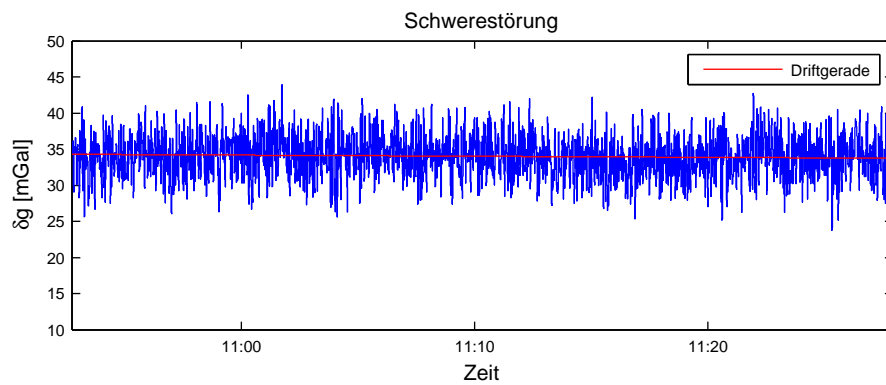


Abbildung A2: Dachmessung 2

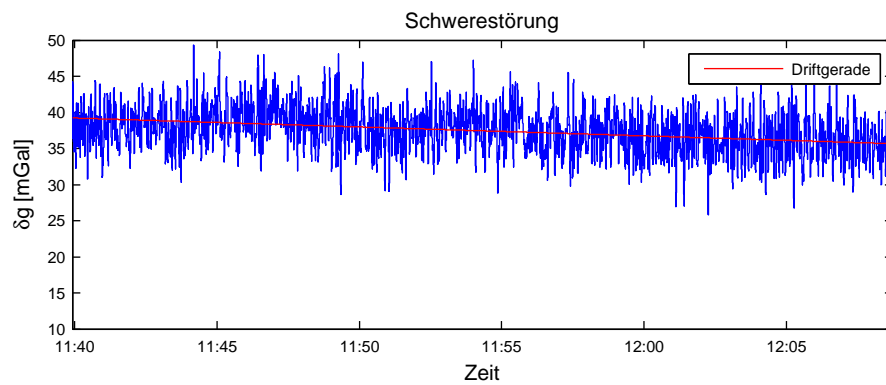


Abbildung A3: Dachmessung 3

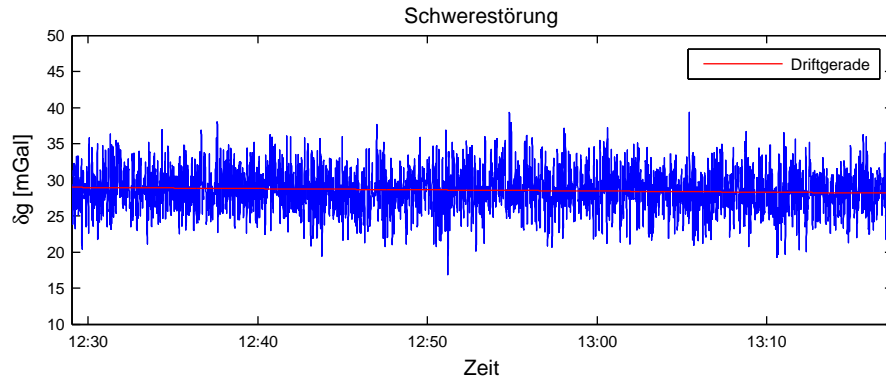


Abbildung A4: Dachmessung 4

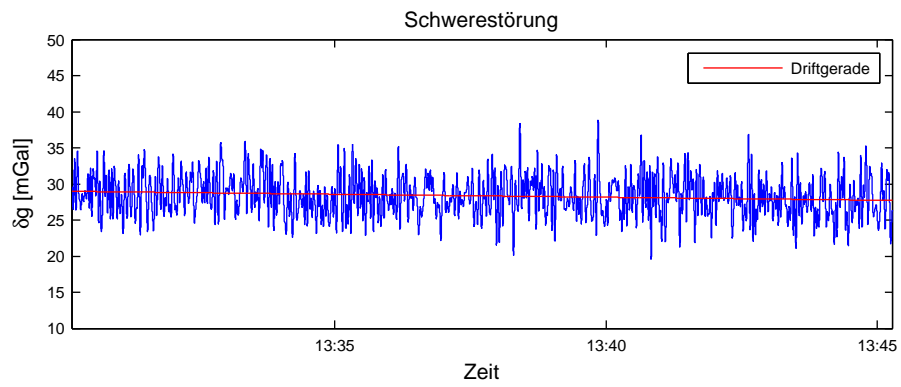


Abbildung A5: Dachmessung 5

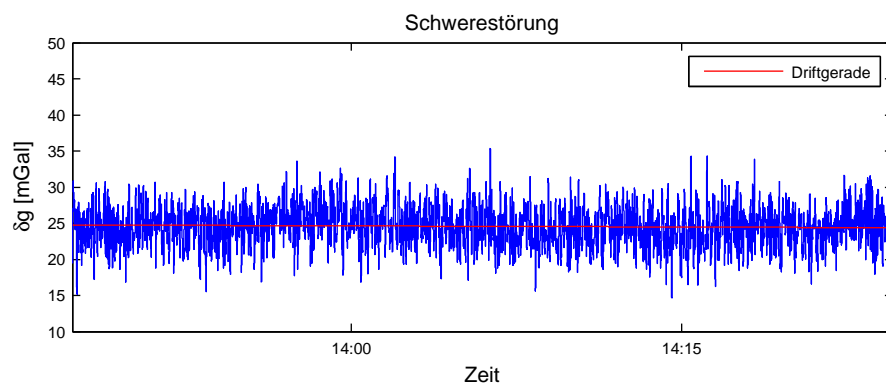


Abbildung A6: Dachmessung 6

## A4 Langzeitmessung 1 im Messlabor

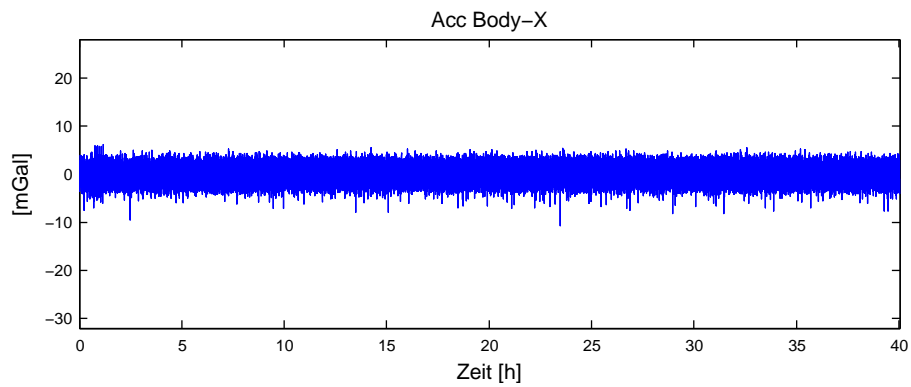


Abbildung A7: Langzeitmessung 1, X-Accelerometer

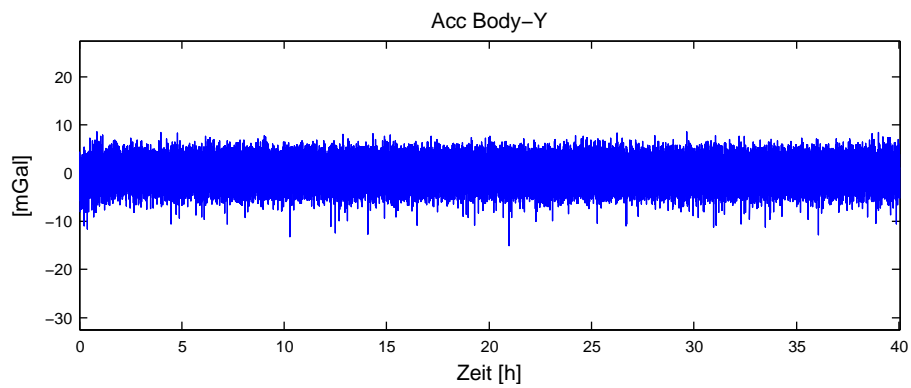


Abbildung A8: Langzeitmessung 1, Y-Accelerometer

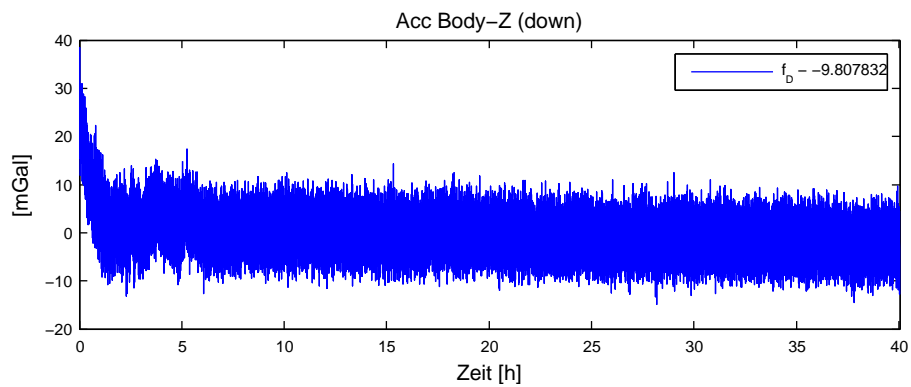


Abbildung A9: Langzeitmessung 1, Z-Accelerometer

## A5 Langzeitmessung 2 im Messlabor

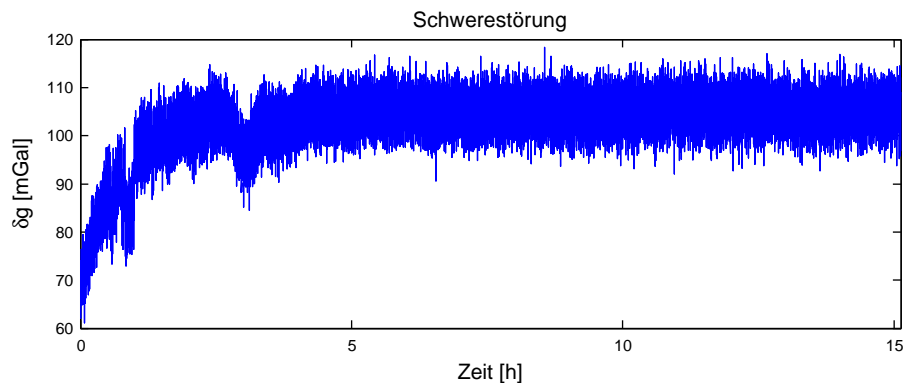


Abbildung A10: Langzeitmessung 2, Schwerestörung aus IMU Messdaten

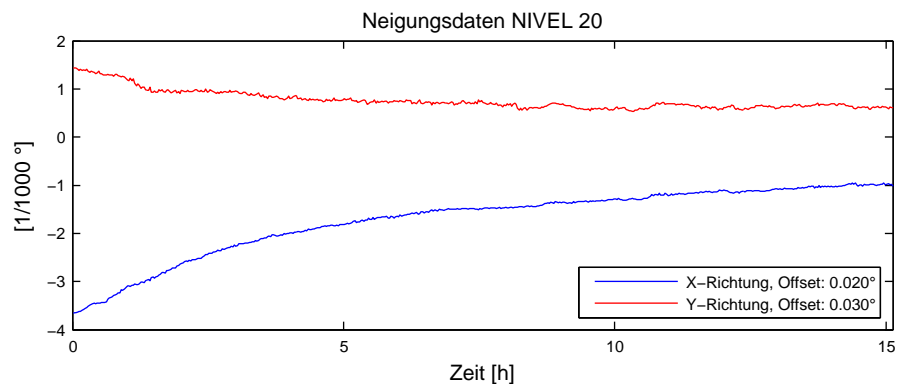


Abbildung A11: Langzeitmessung 2, Neigungsdaten vom NIVEL 20