kann, und bei diesen langen Vorbereitungen ist zu fürchten, dass die günstige Zeit unbenutzt verfliesst. Wenn einmal alle Vorbereitungen getroffen sind, geht allerdings die Messung vom Stativ aus rasch und elegant, lässt aber constante Einstellungsfehler bei den Randberührungen mehr befürchten als die Freihandmessung.

Uebergehend zu der Frage der nicht unregelmässigen, d. h. durch Beobachtungshäufung in der einzelnen Gruppe nicht zu verkleinernden Monddistanz-Fehler machen wir für Sextantenmessung folgende Schätzung:

| | |
|---|---|
| Indexcorrection . . . . . . . . . | $\pm$ 5″ |
| Blendgläser. . . . . . . . . . . | $\pm$ 2 |
| Excentricitäts- und Theilungsfehler | $\pm$ 10 |
| Optische Täuschung am Mondrand | $\pm$ 3 |

$$\sqrt{5^2 + 2^2 + 10^2 + 3^2} = \pm 12''$$

Weitere Genauigkeitssteigerung ist durch die neueren Prismenkreise mit Beachtung aller durch die Fehlertheorie gegebenen Winke und durch Gestirne links und rechts vom Mond zu erreichen.

## § 69. Ausgleichung zwischen Monddistanzen und Chronometergang.

Jede Monddistanz-Messung gibt eine Bestimmung der Greenwichzeit, und eine Reihe von Monddistanzen-Messungen an beliebigen Orten (auf einer Reise) gibt für das dabei benützte Chronometer das Material zur Bestimmung der Stand- und Gangcurve, ähnlich wie eine Reihe gewöhnlicher Ortszeitmessungen in Greenwich selbst, jedoch mit dem Unterschied, dass die aus Monddistanzen abgeleiteten Greenwichzeit-Bestimmungen weniger genau sind.

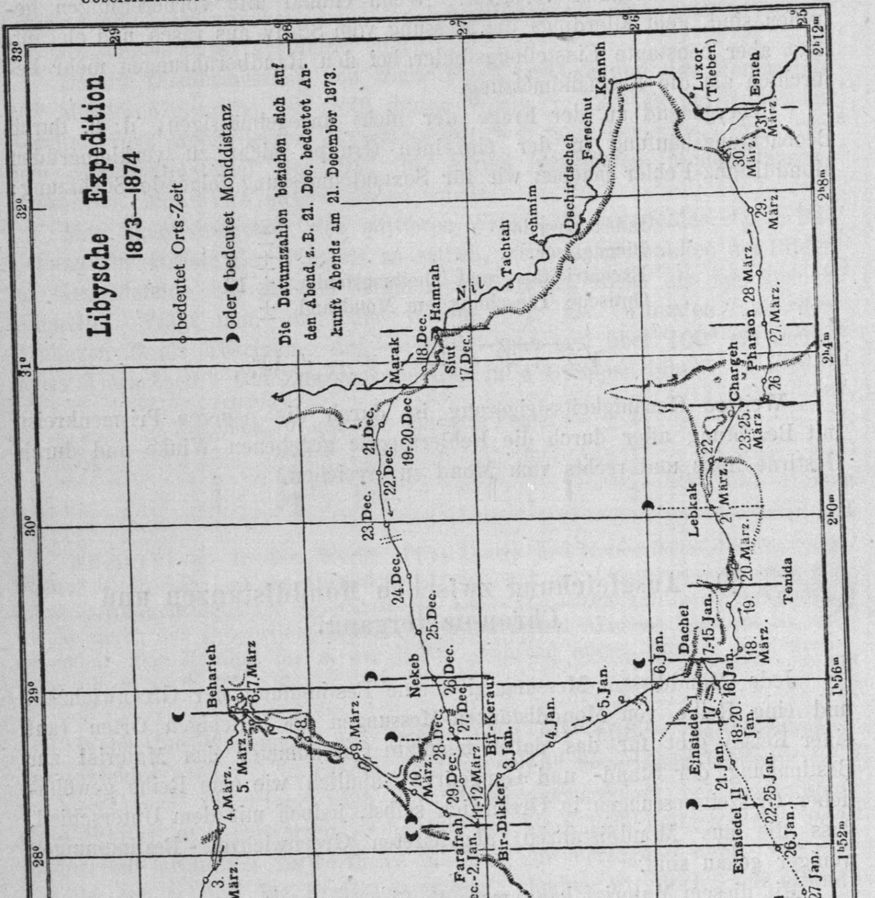
Mit diesem Material kann man die Stand- und Gangcurve des Chronometers auftragen, wie in unserem früheren Beispiel § 12. S. 53 für Hannover gezeigt worden ist.

Wegen der Ungenauigkeit der aus Monddistanzen erhaltenen Greenwichzeiten wird die directe Curve allerdings zunächst sehr unregelmässig verlaufen, und eine ausgleichende Curve wird nicht durch alle Punkte selbst gehen, sondern nur diesen Punkten sich thunlichst nähern können.

Nach dieser Methode (mit Benützung verschiedener Nebenumstände, Itinerar etc.) sind z. B. die geographischen Längen erhalten worden, welche ich kurz nach der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste, in Petermann's Geogr. Mittheilungen 1875, Heft VI., S. 201—214, mit der Karte Tafel 11. veröffentlicht habe.

Besser als solche graphische Ausgleichung, allerdings auch mühsamer, ist eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche wir nun auf das Material der libyschen Expedition von 1873—74 anwenden.

Fig. 1.
Uebersichtskarte der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste, Winter 1873—74.



Ein Uebersichtskärtchen jener Expedition ist auf S. 350 gegeben, woraus vermittelst der eingeschriebenen Tageszahlen der Verlauf der Reise, soweit sie das Mitglied Jordan betrifft, ersehen werden kann.

Der Ausgangspunkt vom Nil war Hamrah bei Siut, der erste Marschtag war der 17. December 1873. Von hier ging die Reise im Nilthal abwärts nach Marak, mit 1 Tag Aufenthalt daselbst, dann westwärts über eine vegetationslose Hochebene bis zum Oasenkessel von Farafrah, mit erstem Aufenthalt, 28. December, am Brunnen Bir-Keraui. Weiter nach Westen wurde am 30. December die Oase Farafrah erreicht, Aufenthalt daselbst bis 2. Januar, dann Weitermarsch südöstlich nach der Oase Dachel, mit Aufenthalt vom 7—15 Januar. Von Dachel nach Westen pfadloser Marsch über die Stapelplätze Einsiedel I. und Einsiedel II. nach Regenfeld, wo vom 28. Januar bis 5. Februar gelagert wurde. Dann 14tägiger Zug durch das Sandmeer mit 1 Tag Aufenthalt in Sandheim, Ankunft in Siuah (Jupiter-Ammons-Oase) am 20. Februar, Aufenthalt bis 24. Februar. Es folgt die Reise nach Südosten in 10 Tagen nach der Oase Beharieh, 1 Tag Aufenthalt, dann in 4 Tagen nach Farafrah, und nach 1 Tag Pause zweiter Weg von Farafrah nach Dachel, worauf vom 18. März an die Reise östlich gieng und, nach 1 Tag Aufenthalt in der Oase Chargeh, am 31. März den Abschlusspunkt Esneh am Nil erreichte.

Dieses Itinerar hat die für die Ortsbestimmung günstige Form zweier Knotenpunkte in den Oasen Farafrah und Dachel.

(Zahlenbeispiele verschiedener astronomischer Messungen und Berechnungen von dieser Expedition sind bereits mitgetheilt worden auf S. 61, 78, 83, 84, 98, 136, 316.)

Die Monddistanzen-Messungen sind bereits auf S. 347 erwähnt. Das Chronometer war ein Taschenchronometer von Kutter in Stuttgart, dessen Temperatur als nahe constant angenommen werden kann, da es fast immer (meist auch bei Nacht) am Leibe getragen wurde.

Die zur Ausgleichung erforderlichen astronomischen Messungen zeigt folgende Tabelle, in welcher auch noch (14 *a*) Chargeh, wo keine Monddistanzen gemessen sind, für spätere Vergleichungen mit aufgenommen ist. Bei (5 *a*) Dachel sind zwar auch keine Monddistanzen gemessen, die zugehörige Ortszeit ist aber für die Gangfunction des Chronometers deswegen von Wichtigkeit, weil Dachel ein Knotenpunkt des Itinerars ist.

Hiebei bedeutet $t$ die Zeit in Tagen, von der Mitte an rückwärts und vorwärts gezählt von $t = -54$ bis $t = +54$. Die Gesammtzeit $2 \times 54 = 108$ Tage ist verflossen von der Ortszeitbestimmung auf dem in Hinsicht auf geographische Länge fest gegebenen Ausgangspunkt Hamrah bis zur Ortszeitbestimmung auf dem ebenfalls unabänderlich gegebenen Abschlusspunkt Esneh.

Diese fest gegebenen Längen bzw. $2^h\ 4^m\ 48{,}4^s$ von Hamrah und $2^h\ 10^m\ 15{,}7^s$ von Esneh sind in der letzten Spalte der Tabelle (1) eingeschrieben. Mittelst der Ortszeiten und dieser gegebenen Längen hat man die in der Tabelle unterstrichenen Greenwichzeiten $G_0$ und $G_{15}$ am Anfang und am Ende. Die übrigen Greenwichzeiten $M$ sind aus den

Zusammenstellung der astronomischen Messungen. (1)

| Nummer | Ort | Tag 1873—1874 | Tag $t$ | Ortszeit — Chronometer $O$ | Monddistanzen-Resultat + Chronometer — Greenwichzeit | Monddistanzen-Resultat $v'$ | Gegebene Längen $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | Hamrah | 16. December | — 54 | $1^h\ 9^m\ 8{,}6^s$ | $G_0 = 0^h\ 55^m\ 39{,}8^s$ | | $2^h\ 4^m\ 48{,}4^s$ |
| (1) | Nekeb | 26. „ | — 44 | 1 0 20 | $M_1 = 0\ 55\ 51$ | 0,45 | |
| (2) | Bir-Keraui | 28. „ | — 42 | . . | $M_2 = 0\ 56\ 8$ | 0,35 | |
| (3) | „ „ | 28. „ | — 42 | . . | $M_3 = 0\ 55\ 24$ | 0,40 | |
| (4) | Farafrah | 2. Januar | — 37 | 0 56 35,8 | $M_4 = 0\ 55\ 16$ | 0,40 | |
| (5) | Dachel | 9. „ | — 30 | 1 0 22,2 | $M_5 = 0\ 55\ 39$ | 0,54 | |
| (6) | Einsiedel II. | 24. „ | — 15 | 0 57 39 | $M_6 = 0\ 56\ 32$ | 0,45 | |
| (7) | Regenfeld | 31. „ | — 8 | 0 55 5 | $M_7 = 0\ 55\ 27$ | 0,30 | |
| (8) | „ | 31. „ | — 8 | 0 55 5 | $M_8 = 0\ 53\ 35$ | 0,16 | |
| (9) | „ | 4. Februar | — 4 | 0 55 9 | $M_9 = 0\ 54\ 59$ | 0,37 | |
| (10) | Siuah | 22. „ | + 14 | 0 48 17 | $M_{10} = 0\ 52\ 31$ | 0,48 | |
| (11) | „ | 23. „ | + 15 | 0 48 18 | $M_{11} = 0\ 53\ 52$ | 0,32 | |
| (12) | Beharieh | 8. März | + 28 | 1 2 27 | $M_{12} = 0\ 53\ 3$ | 0,27 | |
| (13) | Farafrah | 12. „ | + 32 | 0 59 11,0 | $M_{13} = 0\ 53\ 19$ | 0,30 | |
| (5a) | Dachel | 17. „ | + 37 | 1 2 59,1 | . . | . . | |
| (14) | Lebkak | 21. „ | + 41 | . . | $M_{14} = 0\ 52\ 15$ | 0,53 | |
| (14a) | Chargeh | 24. „ | + 44 | 1 10 12 | . . | | |
| (15) | Esneh | 3. April | + 54 | 1 18 40,2 | $G_{15} = 0\ 51\ 35{,}5$ | | 2 10 15,7 |

Monddistanzen bestimmt, und die beigeschriebenen $v'$, welche nachher zur Gewichtsbestimmung gebraucht werden, sind die scheinbaren Distanz-Aenderungsgeschwindigkeiten, welche schon in § 68. S. 347 mitgetheilt worden sind.

Je zwei zusammengehörige Ortszeiten und Greenwichzeiten bestimmen eine Länge. Wir setzen:

$$O = \text{Ortszeit} - \text{Chronometer} \tag{2}$$

$$G = -\text{Greenwichzeit} + \text{Chronometer} \tag{3}$$

woraus folgt:

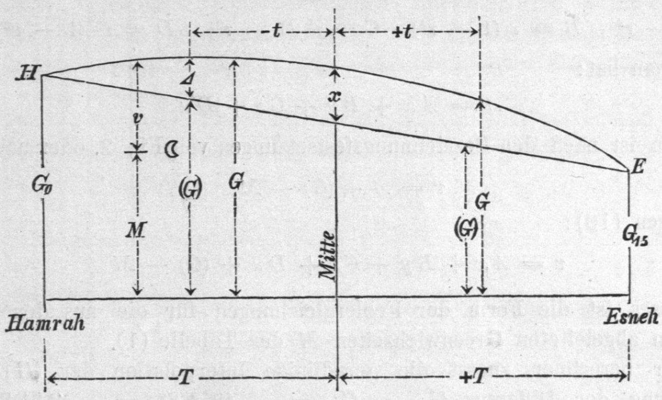
$$O + G = \lambda = \text{geographische Länge} \tag{4}$$

Die Vorzeichen in (2) und (3) sind so gewählt, dass in unserem Falle $O$ und $G$ immer positiv sind. (In anderen Fällen wäre es vielleicht bequemer, $G$ negativ und dann $\lambda = O - G$ zu nehmen.)

Von den wahren oder wahrscheinlichsten Werthen $G$ unterscheiden sich die durch Monddistanzen gewonnenen Werthe der Greenwichzeit, welche wir mit $M$ bezeichnet haben.

Zur Ausgleichung dieser beobachteten $M$ setzen wir nach Fig. 2. Folgendes fest: Als erste Näherung des Chronometergangs, zwischen dem

Fig. 2.




Anfangswerth $G_0$ in Hamrah und dem Endwerthe $G_{15}$ in Esneh, dient die der Zeit proportionale Vertheilung der Differenz $G_{15} - G_0$, d. h. in der Figur die Gerade $HE$, deren Ordinaten mit $(G)$ bezeichnet sein sollen. Der endgültig ausgeglichene Chronometergang sei durch die Curve zwischen $H$ und $E$ ausgedrückt, deren Ordinaten $G$ sind.

Die Differenz beider Ordinaten $G$ und $(G)$ sei $= \Delta$. Eine Monddistanz-Messung habe für die Zeit $t$ den Werth $M$ gegeben, welcher durch die Verbesserung $v$ auf $G$ gebracht wird, d. h.

$$G = (G) + \Delta = M + v \tag{5}$$

Es kommt nun zuerst darauf an, für $\Delta$ als Function der Zeit $t$ eine analytische Form anzunehmen.

Wir nehmen eine algebraische Reihe, welche nach Potenzen des Zeitquotienten

$$\frac{t}{T} = \tau \tag{6}$$

fortschreitet, nämlich:

$$\Delta = x + y\tau + z\tau^2 + u\tau^3 + u'\tau^4 + u''\tau^5 \tag{7}$$

Nach dem Anblick von Fig. 2. muss in zwei Fällen $\Delta = 0$ werden, erstens für $\tau = -1$ und zweitens für $\tau = +1$, also nach (7):

$$\begin{array}{ll} & 0 = x - y + z - u + u' - u'' \\ & 0 = x + y + z + u + u' + u'' \\ \text{Halbe Summe} & 0 = x \phantom{+y} + z \phantom{+u} + u' \\ \text{Halbe Differenz} & 0 = \phantom{x+} y \phantom{+z} + u \phantom{+u'} + u'' \end{array}$$

damit kann man $u'$ und $u''$ eliminiren, es ist nämlich:

$$u' = -(x + z)$$
$$u'' = -(y + u)$$

und setzt man dieses wieder in (7), so erhält man:

$$\Delta = x\,(1 - \tau^4) + y\tau\,(1 - \tau^4) + z\tau^2\,(1 - \tau^2) + u\tau^3\,(1 - \tau^2) \tag{8}$$

Zur Abkürzung sei geschrieben:

$$A = 1 - \tau^4 \quad B = \tau\,(1 - \tau^4) \quad C = \tau^2\,(1 - \tau^2) \quad D = \tau^3\,(1 - \tau^2) \tag{9}$$

womit man hat:

$$\Delta = Ax + By + Cz + Du \tag{10}$$

Nun ist nach den Bezeichnungsfestsetzungen von Fig. 2. oder nach (5):

$$v = \Delta + (G) - M$$

also wegen (10):

$$v = Ax + By + Cz + Du + (G) - M \tag{11}$$

Dieses ist die Form der Fehlergleichungen für die aus den Monddistanzen abgeleiteten Greenwichzeiten $M$ der Tabelle (1).

Wir berechnen zuerst die geradlinige Interpolation der $(G)$ durch Vertheilung der Differenz $G_{15} - G_0 = -4^m\,4{,}3^s = -244{,}3^s$ proportional der Zeit. Auf 108 Tage vertheilt, gibt diese Differenz einen täglichen Gang von $2{,}262^s$ verzögernd. Damit werden die Werthe $(G)$ der nachfolgenden Tabelle (12), S. 355, erhalten, welche dann auch mit Herübersetzen der $M$ aus Tabelle (1) die Widersprüche $(G)-M$ geben.

Die Coefficienten $A$ $B$ $C$ $D$ berechnet man nach (9), und nun kann man die Fehlergleichungen nach (11) anschreiben, welchen wir auch noch die Gewichtswurzeln $\sqrt{p} = 2v'$ beifügen.

Wenn wir hiernach die Gewichte $p$ lediglich proportional $v'^2$ annehmen, wo $v'$ die scheinbare Distanzänderungs-Geschwindigkeit nach § 66. S. 337 ist, ohne auf die Zahl der in den einzelnen Gruppen von Monddistanz-

Berechnung der Quotienten $\tau$ und der Absolutglieder $(G)—M$ (12)

| Ort | Nummer | $t$ | $\tau$ | $(G)$ | $M$ | $(G)—M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nekeb . . | 1. | — 44 | — 0,815 | $0^h\ 55^m\ 17,2^s$ | $0^h\ 55^m\ 51,0^s$ | — $33,8^s$ = — $0,563^m$ |
| Bir-Keraui | 2. | — 42 | — 0,778 | 0 55 12,7 | 0 56 8,0 | — 55,3 = — 0,922 |
| „ „ | 3. | — 42 | — 0,778 | 0 55 12,7 | 0 55 24,0 | — 11,3 = — 0,188 |
| Farafrah . | 4. | — 37 | — 0,685 | 0 55 1,3 | 0 55 16,0 | — 14,3 = — 0,238 |
| Dachel . . | 5. | — 30 | — 0,556 | 0 54 45,5 | 0 55 39,0 | — 53,5 = — 0,892 |
| Einsiedel II. | 6. | — 15 | — 0,278 | 0 54 11,6 | 0 56 32,0 | — 140,4 = — 2,340 |
| Regenfeld . | 7. | — 8 | — 0,148 | 0 53 55,7 | 0 55 27,0 | — 91,3 = — 1,522 |
| „ . | 8. | — 8 | — 0,148 | 0 53 55,7 | 0 53 35,0 | + 20,7 = + 0,345 |
| „ . | 9. | — 4 | — 0,074 | 0 53 46,7 | 0 54 59,0 | — 72,3 = — 1,205 |
| Siuah . . | 10. | + 14 | + 0,259 | 0 53 6,0 | 0 52 31,0 | + 35,0 = + 0,583 |
| „ . . | 11. | + 15 | + 0,278 | 0 53 3,7 | 0 53 52,0 | — 48,3 = — 0,805 |
| Beharieh . | 12. | + 28 | + 0,518 | 0 52 34,3 | 0 53 3,0 | — 28,7 = — 0,478 |
| Farafrah . | 13. | + 32 | + 0,593 | 0 52 25,3 | 0 53 19,0 | — 53,7 = — 0,895 |
| Dachel . . | 5a. | + 37 | + 0,685 | 0 52 14,0 | . . | . . . . |
| Lebkak . . | 14. | + 41 | + 0,759 | 0 52 4,9 | 0 52 15,0 | — 10,1 = — 0,168 |
| Chargeh . | 14a. | + 44 | + 0,815 | 0 51 58,1 | . . | . . . . |

Messungen vereinigten Einzelablesungen Rücksicht zu nehmen (welche übrigens nicht sehr verschieden ist), so wird das im Wesentlichen den am Schluss des vorigen § 68. S. 348—349 dargelegten Genauigkeitsverhältnissen entsprechen.

Als Normaldistanz, welche das Gewicht $p = 1$ haben soll, nehmen wir eine solche, deren Geschwindigkeit $v' = 0,50$ ist ($0,5' = 30''$ Distanzänderung in 1 Zeitminute) und damit wird

$$\sqrt{p} = \frac{v'}{0,5} = 2\,v' \qquad (13)$$

Nun haben wir die

Fehlergleichungen (14)

| | | | | | | | | $\sqrt{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nekeb . . . | $v_1$ | = | $+0,559\,x$ | $-0,456\,y$ | $+0,223\,z$ | $-0,182\,u$ | $-0,563$, | $\sqrt{p} = 0,90$ |
| Bir-Keraui . | $v_2$ | = | $+0,634\,x$ | $-0,493\,y$ | $+0,239\,z$ | $-0,186\,u$ | $-0,922$ | 0,70 |
| „ „ . | $v_3$ | = | $+0,634\,x$ | $-0,493\,y$ | $+0,239\,z$ | $-0,186\,u$ | $-0,188$ | 0,80 |
| Farafrah . . | $v_4$ | = | $+0,780\,x$ | $-0,534\,y$ | $+0,249\,z$ | $-0,171\,u$ | $-0,238$ | 0,80 |
| Dachel . . | $v_5$ | = | $+0,905\,x$ | $-0,503\,y$ | $+0,213\,z$ | $-0,118\,u$ | $-0,892$ | 1,08 |
| Einsiedel II. | $v_6$ | = | $+0,994\,x$ | $-0,276\,y$ | $+0,071\,z$ | $-0,020\,u$ | $-2,340$ | 0,90 |
| Regenfeld . | $v_7$ | = | $+1,000\,x$ | $-0,148\,y$ | $+0,021\,z$ | $-0,003\,u$ | $-1,522$ | 0,60 |
| „ . | $v_8$ | = | $+1,000\,x$ | $-0,148\,y$ | $+0,021\,z$ | $-0,003\,u$ | $+0,345$ | 0,32 |
| „ . | $v_9$ | = | $+1,000\,x$ | $-0,074\,y$ | $+0,006\,z$ | $-0,000\,u$ | $-1,205$ | 0,74 |
| Siuah . . . | $v_{10}$ | = | $+0,995\,x$ | $+0,258\,y$ | $+0,063\,z$ | $+0,016\,u$ | $+0,583$ | 0,96 |
| „ . . . | $v_{11}$ | = | $+0,994\,x$ | $+0,276\,y$ | $+0,071\,z$ | $+0,020\,u$ | $-0,805$ | 0,64 |
| Beharieh . | $v_{12}$ | = | $+0,928\,x$ | $+0,481\,y$ | $+0,197\,z$ | $+0,102\,u$ | $-0,478$ | 0,54 |
| Farafrah . | $v_{13}$ | = | $+0,877\,x$ | $+0,520\,y$ | $+0,228\,z$ | $+0,135\,u$ | $-0,895$ | 0,60 |
| Dachel . | ($v_{5a}$ | = | $+0,780\,x$ | $+0,534\,y$ | $+0,249\,z$ | $+0,171\,u$) | . . | . . |
| Lebkak . . | $v_{14}$ | = | $+0,667\,x$ | $+0,507\,y$ | $+0,244\,z$ | $+0,185\,u$ | $-0,168$ | 1,06 |
| Chargeh . . | ($v_{14a}$ | = | $+0,559\,x$ | $+0,456\,y$ | $+0,223\,z$ | $+0,182\,u$). | . . | . . |

Nun hätte man schlechthin diese 14 Fehlergleichungen (ohne 5 *a* und 14 *a*) nach den vier Unbekannten $x\ y\ z\ u$ nach der Methode d. kl. Q. aufzulösen, wenn die zwei Knotenpunkte Farafrah und Dachel nicht wären. Jeder dieser Knotenpunkte gibt aber mit den zugehörigen Ortszeitbestimmungen eine Bedingungsgleichung, die man durch Elimination der Länge $\lambda$ mittelst der Beziehungen zwischen $\lambda$, $G$ und $O$ herstellen kann.

Nach Fig. 2. ist:

$$\varDelta = G - (G) \tag{15}$$

und zwischen dem endgültigen $G$, der beobachteten Ortszeit $O$ und der Länge $\lambda$ besteht die Gleichung (4):

$$\lambda = O + G \tag{4}$$

was mit (15) zusammen gibt:

$$\lambda = \varDelta + O + (G) \tag{16}$$

Nach (10) und (11) ist $\varDelta$ nichts Anderes als der betreffende Werth $v$ der Tabelle (13) mit Weglassung des Absolutgliedes.

Wir können also aus (1), (12) und (14) die zwei auf den Knotenpunkt Farafrah bezüglichen Gleichungen von der Form (16) zusammensetzen:

$$\begin{aligned} &4)\ \lambda_F = +0{,}780\,x - 0{,}534\,y + 0{,}249\,z - 0{,}171\,u + 0^h\,56^m\,35{,}8^s + 0^h\,55^m\ \ 1{,}3^s \\ &13)\ \lambda_F = +0{,}877\,x + 0{,}520\,y + 0{,}228\,z + 0{,}135\,u + 0^h\,59^m\,11{,}0^s + 0^h\,52^m\,25{,}3^s \end{aligned}$$

Subtraction gibt:

$$0 = +\ 0{,}097\,x + 1{,}054\,y - 0{,}021\,z + 0{,}306\,u + 0^h\,2^m\,35{,}2^s - 0^h\,2^m\,36{,}0^s$$

d. h.:

$$0 = +\ 0{,}097\,x + 1{,}054\,y - 0{,}021\,z + 0{,}306\,u \qquad - 0{,}013^m \tag{17}$$

Ebenso bildet man die zwei Gleichungen von der Form (16) für den Knotenpunkt Dachel:

$$\begin{aligned} &5)\ \lambda_D = +0{,}905\,x - 0{,}503\,y + 0{,}213\,z - 0{,}118\,u + 1^h\,0^m\,22{,}2^s + 0^h\,54^m\,45{,}5^s \\ &5a)\ \lambda_D = +0{,}780\,x + 0{,}534\,y + 0{,}249\,z + 0{,}171\,u + 1^h\,2^m\,59{,}1^s + 0^h\,52^m\,14{,}0^s \end{aligned}$$

$$\text{Differenz}\ \Big\}\ 0 = -\,0{,}125\,x + 1{,}037\,y + 0{,}036\,z + 0{,}289\,u + 0^h\,2^m\,36{,}9^s - 0^h\ \ 2^m\,31{,}5^s$$

oder

$$0 = +\,0{,}125\,x + 1{,}037\,y + 0{,}036\,z + 0289\,u + 0{,}090^m \tag{18}$$

Die zwei Gleichungen (17) und (18) nimmt man zusammen, und löst sie nach $z$ und $u$ auf. Dieses gibt:

$$z = +\ 3{,}881\,x - 0{,}746\,y - 1{,}832 \tag{19}$$

$$u = -\ 0{,}051\,x - 3{,}496\,y - 0{,}083 \tag{20}$$

Dadurch, dass man diese Ausdrücke (19) und (20) für $z$ und $u$ in die Fehlergleichungen (14) einsetzt, eliminirt man dort $z$ und $u$, und erhält im folgenden:

**Die reducirten Fehlergleichungen:** (21)

| | | | | | | $\sqrt{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nekeb . . . . . . . . | $v_1$ | $= + 1{,}433\,x$ | $+ 0{,}011\,y$ | $- 0{,}956,$ | | $= 0{,}90$ |
| Bir-Keraui . . . . . | $v_2$ | $= + 1{,}571\,x$ | $- 0{,}024\,y$ | $- 1{,}345$ | | $0{,}70$ |
| " " . . . . . . . | $v_3$ | $= + 1{,}571\,x$ | $- 0{,}024\,y$ | $- 0{,}611$ | | $0{,}80$ |
| Farafrah . . . . . . | $v_4$ | $= + 1{,}755\,x$ | $- 0{,}126\,y$ | $- 0{,}681$ | | $0{,}80$ |
| Dachel . . . . . . . | $v_5$ | $= + 1{,}738\,x$ | $- 0{,}253\,y$ | $- 1{,}272$ | | $1{,}08$ |
| Einsiedel II. . . . . | $v_6$ | $= + 1{,}280\,x$ | $- 0{,}263\,y$ | $- 2{,}468$ | | $0{,}90$ |
| Regenfeld . . . . . | $v_7$ | $= + 1{,}082\,x$ | $- 0{,}154\,y$ | $- 1{,}560$ | | $0{,}60$ |
| " . . . . . . . | $v_8$ | $= + 1{,}082\,x$ | $- 0{,}154\,y$ | $+ 0{,}307$ | | $0{,}32$ |
| " . . . . . . . | $v_9$ | $= + 1{,}023\,x$ | $- 0{,}078\,y$ | $- 1{,}216$ | | $0{,}74$ |
| Siuah . . . . . . . | $v_{10}$ | $= + 1{,}238\,x$ | $+ 0{,}154\,y$ | $+ 0{,}467$ | | $0{,}96$ |
| " . . . . . . . | $v_{11}$ | $= + 1{,}269\,x$ | $+ 0{,}152\,y$ | $- 0{,}937$ | | $0{,}64$ |
| Beharieh . . . . . . | $v_{12}$ | $= + 1{,}687\,x$ | $- 0{,}026\,y$ | $- 0{,}846$ | | $0{,}54$ |
| Farafrah . . . . . . | $v_{13}$ | $= + 1{,}755\,x$ | $- 0{,}126\,y$ | $- 1{,}324$ | | $0{,}60$ |
| Dachel . . . . . . | $(v_{5a}$ | $= + 1{,}737\,x$ | $- 0{,}251\,y$ | $- 0{,}470)$ | | .. |
| Lebkak . . . . . . | $v_{14}$ | $= + 1{,}605\,x$ | $- 0{,}327\,y$ | $- 0{,}630$ | | $1{,}06$ |
| Chargeh . . . . . . | $(v_{14a}$ | $= + 1{,}424\,x$ | $- 0{,}346\,y$ | $- 0{,}425)$ | | .. |

Hieraus bildet man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrl} \underline{+\,19{,}250\,x} & -\,1{,}515\,y & -\,12{,}260 & = 0 \\ & \underline{+\,0{,}316\,y} & +\,1{,}432 & = 0 \\ & & \underline{+\,12{,}539} & \end{array}\right\} \qquad (21a)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$x = +\,0{,}45^{m} \pm 0{,}16^{m} \qquad y = -\,2{,}37^{m} \pm 1{,}24^{m} \qquad (22)$$

oder

$$x = +\,27^{s} \pm 10^{s} \qquad (22a)$$

wozu die Bedeutung von $x$ in Fig. 2. S. 353 von Interesse ist.

(21$a$) gibt auch:

$$(p\,v\,v) = 3{,}62 \qquad (23)$$

der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird also:

$$\mu = \sqrt{\frac{3{,}62}{14-2}} = \pm\,0{,}55^{m} \text{ oder } = \pm\,33^{s} \qquad (24)$$

Nach (13) gehört die Gewichtseinheit zu einer Monddistanz, welche die scheinbare Geschwindigkeit $v' = 0{,}5'$ oder $30''$ in 1 Zeitminute hat. Der Zeitfehler $33^{s}$ von (24) stellt also einen Distanzfehler von $16{,}5''$ vor, oder

$$M = \pm\,16{,}5'' \qquad (25)$$

Dieser Monddistanz-Messungsfehler $M$ gehört zu einer Gruppe von Einzelmessungen, und zwar, da auf S. 347 317 Messungen vorlagen, von welchen die 40 Messungen von Esneh in unserer gegenwärtigen Betrachtung nicht vertreten sind, sind im Mittel in einer Gruppe nahezu 20 Messungen enthalten (vgl. hiezu § 64. S. 321).

Nun kann man durch Einsetzen der $x$ und $y$ von (22) in die reducirten Fehlergleichungen (21) die einzelnen Zeitcorrectionen $v$ berechnen. Diese Werthe $v$, welche in (23) und (24) zusammenwirken, sind in der folgenden Tabelle einzeln aufgeführt. (Die Vertheilung dieser $v$ könnte in Verbindung mit S. 214 zu einigen Betrachtungen Veranlassung geben, auf welche wir aber hier nicht eingehen.) Quadrirt man die $v$ der Tabelle und bildet die Summe $(p\,v\,v)$, so bekommt man durch Vergleichung mit dem aus der Elimination erhaltenen $(p\,v\,v)$ in (23) eine Rechenprobe, welche genügend stimmt.

Nachdem die $v$ einzeln berechnet sind, hat man dieselben zu den Monddistanz-Zeiten $M$ hinzuzufügen, und erhält damit die ausgeglichenen Greenwichzeiten $G$. Diese endlich zu den Ortszeiten $O$ hinzugefügt, geben die Greenwichlängen $\lambda$ nach der Gleichung (4) oder (16). Man kann auch die Greenwichzeiten $G$ durch Vermittlung der geradlinig interpolirten $(G)$ berechnen, was z. B. für 5*a*, Dachel, und 14*a*, Chargeh, nöthig war, weil eine Monddistanzzeit hier nicht vorlag; es ist dann $(G)$ an Stelle von $M$ und $\varDelta$ statt $v$ eingesetzt.

Alles dieses enthält unsere folgende, letzte, Tabelle:

Bildung der Schlussresultate. (26)

| Nummer | Ort | $M$ | $v$ | $G$ | $O$ | $\lambda$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Nekeb | $0^h\,55^m\,51^s$ | $-20^s$ | $0^h\,55^m\,31^s$ | $1^h\,0^m\,20^s$ | $1^h\,55^m\,51^s$ | |
| 2. | Bir-Keraui | 0 56 8 | −34 | 0 55 34 | . . | | |
| 3. | „ „ | 0 55 24 | + 9 | 0 55 33 | . . | | |
| 4. | Farafrah | 0 55 16 | +24 | 0 55 40 | 0 56 36 | 1 52 16 | $\pm 13^s$ |
| 5. | Dachel | 0 55 39 | + 6 | 0 55 45 | 1 0 22 | 1 56 7 | $\pm 16^s$ |
| 6. | Einsiedel II. | 0 56 32 | −76 | 0 55 16 | 0 57 39 | 1 52 55 | |
| 7. | Regenfeld | 0 55 27 | −44 | 0 54 43 | 0 55 5 | 1 49 48 | $1^h\,49^m\,45^s$ |
| 8. | „ | 0 53 35 | +70 | 0 54 45 | 0 55 5 | 1 49 50 | $\pm 9^s$ |
| 9. | „ | 0 54 59 | −32 | 0 54 27 | 0 55 9 | 1 49 36 | |
| 10. | Siuah | 0 52 31 | +39 | 0 53 10 | 0 48 17 | 1 41 27 | $1^h\,41^m\,26^s$ |
| 11. | „ | 0 53 52 | −44 | 0 53 8 | 0 48 18 | 1 41 26 | $\pm 18^s$ |
| 12. | Beharieh | 0 53 3 | − 1 | 0 53 2 | 1 2 27 | 1 55 29 | $\pm 15^s$ |
| 13. | Farafrah | 0 53 19 | −13 | 0 53 6 | 0 59 11 | 1 52 17 | $\pm 13^s$ |
| 5*a*. | Dachel | (0 52 14) | (+54) | 0 53 8 | 1 2 59 | 1 56 7 | $\pm 16^s$ |
| 14. | Lebkak | 0 52 15 | +52 | 0 53 7 | . . | . . | |
| 14*a*. | Chargeh | 0 51 58 | +62 | 0 53 0 | 1 10 12 | 2 3 12 | $\pm 21^s$ |

Wir haben den ausgeglichenen Längen der 6 Hauptpunkte sofort auch ihre der Ausgleichung entsprechenden mittleren Fehler beigeschrieben, welche so erhalten worden sind:

Wenn es sich um eine Function

$$F = f_1 x + f_2 y \tag{27}$$

der ausgeglichenen Unbekannten $x$ und $y$ handelt, so ist das Gewicht $P$ dieser Function mit Anwendung bekannter Bezeichnungen bestimmt durch

$$\frac{1}{P} = (\alpha\alpha)\, f_1^2 + 2(\alpha\beta)\, f_1 f_2 + (\beta\beta)\, f_2^2 \tag{28}$$

oder

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{(aa.1)} + \frac{2 f_1 f_2}{(ab.1)} + \frac{f_2^2}{(bb.1)} \tag{28a}$$

Die Coefficienten $(\alpha\alpha) = \dfrac{1}{(aa.1)}$ u. s. w. werden bei Gelegenheit der Elimination aus den Normalgleichungen (21 $a$) erhalten, in unserem Falle wurde:

$$\left.\begin{array}{ll} (aa.1) = p_x = +\,11{,}987 & (ab.1) = +\,2{,}500 \\ & (bb.1) = p_y \;= +\,0{,}197 \end{array}\right\} \tag{29}$$

Nun ist z. B. für Farafrah nach der Tabelle (21):

$$v_4 = v_{13} = +\,1{,}755\,x - 0{,}126\,y + \cdots$$

also für (27):

$$f_1 = +\,1{,}755 \qquad f_2 = -\,0{,}126 \tag{30}$$

Setzt man dieses, (30) nebst (29), in (28$a$) und rechnet dann:

$$M_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P}}$$

wozu $\mu$ in (24) gegeben ist, so erhält man:

$$\text{Farafrah } M_F = \pm\, 13^s$$

wie auch in der Schlusstabelle S. 358 beigeschrieben ist. Ebenso wurden auch die übrigen dort beigeschriebenen mittleren Fehler berechnet.

Die Länge von Farafrah kommt unter 4. und 13. genügend übereinstimmend heraus, wie es nach der Einführung der Knotenpunktsgleichung für Farafrah sein muss; ebenso erhält auch Dachel bei 5. und 5$a$. gleiches $\lambda$. Auffällig ist dagegen, dass Regenfeld aus den drei Ortszeit-Bestimmungen drei Längen erhält, welche bis zu $14^s$ differiren. Da die aus 7. 8. 9. folgende Bedingung für den Chronometergang in der Ausgleichung nicht aufgenommen wurde, müssen auch die entsprechenden $\lambda$ nicht gleich werden. Es wäre hiernach anzunehmen, dass während des Aufenthalts in Regenfeld das Chronometer einen anderen Gang hatte, als während der vorhergehenden und nachfolgenden Märsche.

Das führt nun aber weiter zu der Bemerkung, dass wir die in der Schlusstabelle (26) erhaltenen Längen $\lambda$ sachlich überhaupt nicht als Schlussresultate betrachten. Die ganze Berechnung dieses Paragraphen hat vielmehr nur die Bedeutung eines formellen Ausgleichungsbeispiels für den Fall, dass keine anderen Messungen als die hier benützten vorliegen, und dann noch die Bedeutung einer Studie über den relativen Werth von Monddistanzen im Vergleich mit Itineraren, zu welchen wir nun übergehen.