Tafel die Minimalhöhen 5^0, während in unserer Tafel die Höhen mit 0^0 beginnen, damit der Gesammtverlauf der Reductionsfunction ersehen werden kann.

Die Nulllinie, d. h. die Grenze zwischen positiver und negativer Reduction, geht immer durch den Punkt für $H = 0$ und $h = 0$.

Den besten Ueberblick über diesen Functionsverlauf erhält man durch Aufzeichnen der Curven für constante Reductionen Δ, d. h. sogenannter Schichtentafeln, deren wir zwei, für $D = 20^0$ und für $D = 60^0$ in Fig. 1. (S. 344) und in Fig. 2. (S. 345) vorlegen.

Der Charakter dieser Curven bleibt auch bei allen anderen Distanzen bestehen, und die Form der Schichtentafeln ist schon durch die Zahlentafeln S. [22] und [23] gegeben, z. B. für $D = 90^0$ wird ein nach der Diagonale zerschnittenes halbes Quadrat ausgefüllt und bei $D = 120^0$ ist nur noch ein kleines Dreieck vorhanden.

§ 68. Mittlerer Fehler der Monddistanz-Messung.

Von den vielen Fehlerquellen, welche bei der Längenbestimmung durch Monddistanzen in Betracht kommen, behandeln wir hier zuerst den mittleren, unregelmässigen, bei der Sextantenmessung mit freier Hand zu fürchtenden Distanzfehler, weil uns zu dessen Bestimmung eine Zahl von 317 Monddistanzen von der libyschen Expedition zu Gebote ist.

Die Messungen sind sämmtlich mit dem auf S. 157 abgebildeten und beschriebenen 12 cm-Sextanten gemacht, und die Reduction wurde für jede einzelne Distanz nach der am Schluss von § 64. (19)—(21) S. 321 beschriebenen Methode durchgeführt. Dadurch wurde für jede Messungsgruppe der einer einzelnen Distanz entsprechende Zeitfehler μ (z. B. $\mu = \pm 58^s$ nach (20) S. 322) erhalten.

Um daraus rückwärts wieder auf den Distanzmessungsfehler zu schliessen, und verschiedene solcher Werthe μ vergleichbar zu machen, braucht man die Geschwindigkeit der Distanzänderung, und zwar in diesem Falle für die scheinbaren Distanzen, da nach § 66. die scheinbaren Distanzen sich erheblich anders ändern als die wahren Distanzen. Ist v' die scheinbare Distanzänderung in 1 Minute, μ der Zeitfehler einer Distanzmessung und m der Distanzfehler, so hat man:

$$v' = \frac{dD}{dt} = \frac{m}{\mu}, \; m = v'\mu \tag{1}$$

Eine Bestimmung von μ aus n Einzelmessungen gibt dem mittleren Fehlerquadrat m^2 das Gewicht $= n - 1$, und hiernach lässt sich ein Mittelwerth aus zahlreichen Einzelbestimmungen m bilden, wie in folgender Tabelle geschieht, in welcher die zweite Spalte das Seitencitat aus dem schon mehrfach citirten Werke „Phys. Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ ist, und die Ortsbezeichnungen der dritten Spalte zu dem Kärtchen von § 69. S. 350 in Beziehung stehen.

Monddistanzen der libyschen Expedition.

Nummer	Lib. Exped. Seite	Ort	Distanz	D	n	μ	v'	v	$v'\mu$	$(v'\mu)^2$	$(n-1)$	$(n-1)(v'\mu)^2$
1.	33	Nekeb	Aldebaran-Mond	63°	6	± 42s	0,45	0,58	± 19″	361	5	1 805
2.	33	Bir-Keraui	"	35	10	40	0,35	0,56	14	196	9	1 764
3.	33	"	Pollux-Mond	78	9	49	0,40	0,58	20	400	8	3 200
4.	34	Farafrah	"	9	12	57	0,44	0,52	25	625	11	6 875
5.	34	"	"	8	12	70	0,37	0,52	26	676	11	7 436
6.	35	Dachel	Sonne-Mond	106	13	58	0,51	0,45	30	900	12	10 800
7.	35	"	"	106	11	63	0,57	0,45	36	1296	10	12 960
8.	36	Einsiedel II	Mond-Sonne	84	40	42	0,45	0,54	19	361	39	14 079
9.	37	Regenfeld	Jupiter-Mond	56	17	76	0,28	0,52	21	441	16	7 056
10.	37	"	"	56	20	55	0,33	0,52	18	324	19	6 156
11.	38	"	Arctur-Mond	76	20	64	0,16	0,45	10	100	19	1 900
12.	39	"	Jupiter-Mond	7	14	67	0,37	0,49	25	625	13	8 125
13.	39	Siuah	Regulus-Mond	93	20	50	0,48	0,57	24	576	19	10 944
14.	40	"	"	80	14	48	0,32	0,56	15	225	13	2 925
15.	40	Beharieh	Sonne-Mond	126	13	65	0,27	0,45	18	324	12	3 888
16.	41	Farafrah	"	80	10	41	0,28	0,50	11	121	9	1 089
17.	41	"	"	79	10	28	0,32	0,50	9	81	9	729
18.	41	Lebkak	Regulus-Mond	99	26	46	0,53	0,60	24	576	25	14 400
19.	42	Esneh	Mond-Jupiter	29	20	70	0,31	0,50	22	484	19	9 196
20.	42	"	"	40	20	70	0,37	0,50	26	676	19	12 844
					317		0,38	0,52			297	138 171
							(Mittel)					

Mittlerer Fehler einer Distanzmessung $$m = \pm \sqrt{\frac{138\,171}{297}} = \pm 22'' \qquad (2)$$

Die Zeichen n, μ, v' und v der Tabelle sind durch das Vorstehende erklärt und es ist nur noch zu v' zu bemerken, dass diese Quotienten aus den Messungen selbst abgeleitet sind.

Da die Distanzmessung von freier Hand geschah und der Nonius nur 20″ abzulesen gestattet, so stellt dieser Werth $\pm$ 22″ ein befriedigendes Resultat vor, über dessen Zuverlässigkeit wir noch bemerken, dass von dem Gesammtmaterial der 317 in Afrika gemachten Monddistanzen-Messungen nicht eine ausgeschieden wurde.

Man kann versuchen, den mittleren Winkel-Messungsfehler $v'\mu$ in Beziehung zur Grösse des Winkels zu setzen, weil das Schwanken der Bilder im Gesichtsfelde bei grossen Winkeln schädlicher wirkt als bei kleinen Winkeln. Trägt man aber die Werthe $v'\mu$ als Ordinaten, zu den Distanzen D als Abscissen, auf, so findet man erst über 100° ein merkliches Anwachsen. Die Zusammenfassung in 4 Gruppen gibt:

Zwischen	0° und	30°	mittlerer	Fehler	$= \pm$ 24″
„	30 „	60	„	„	20
„	60 „	90	„	„	15
„	90 „	126	„	„	27

Anmerkung. In dem Werke „Phys. Geogr. und Meteorologie der libyschen Wüste“ S. 43 habe ich zur Genauigkeitsberechnung der Distanzmessung nicht die scheinbare Geschwindigkeit v', sondern die wahre (geocentrische) Geschwindigkeit v, welche durch den Proportionallogarithmus des Nautical Almanac bestimmt ist, angewendet. Das Resultat für m war $\pm$ 29″, während unsere bessere Neuberechnung nun $m = \pm$ 22″ gibt.

Wenn für Messungen aus freier Hand der mittlere unregelmässige Distanzfehler nach (2) in runder Zahl $= \pm$ 20″ zuverlässig bestimmt ist, so bleibt noch die Frage nach der Messungsgenauigkeit bei Anwendung eines Stativs zu beantworten. Obgleich uns hiezu kein umfangreiches und rechnerisch gründlich verwerthetes Material zur Verfügung steht, wie die Tabelle von S. 347 für Freihandmessung, glauben wir doch, auf Grund einiger Messungsreihen, von denen eine beispielshalber auf S. 272 unten mitgetheilt ist, den mittleren Distanz-Messungsfehler in diesem Falle kleiner, nämlich etwa $= \pm$ 10″ schätzen zu können.

Nimmt man Reihen von 10 bis 20 Einzelbeobachtungen, so kann also bei der Freihandmessung der mittlere unregelmässige Fehler eines Reihenmittels auf etwa 5″ und bei der Stativmessung auf 2″—3″ herabgebracht werden.

(Im folgenden § 69. (25) S. 357 werden wir durch Chronometerausgleichung den mittleren Distanzfehler einer Gruppe von 20 Monddistanzen $= \pm$ 17″ finden.)

Dass die Stativmessung unbedingt zu empfehlen wäre, folgt aus dieser Vergleichung nicht.

Erstlich verlangt die Monddistanz-Messung auf dem Stativ so viele Vorbereitungen, bis man endlich beide Gestirne im Gesichtsfeld hat, dass ein geübter Freihandbeobachter inzwischen eine Reihe von Distanzen messen kann, und bei diesen langen Vorbereitungen ist zu fürchten, dass die günstige Zeit unbenutzt verfliesst. Wenn einmal alle Vorbereitungen getroffen sind, geht allerdings die Messung vom Stativ aus rasch und elegant, lässt aber constante Einstellungsfehler bei den Randberührungen mehr befürchten als die Freihandmessung.

Uebergehend zu der Frage der nicht unregelmässigen, d. h. durch Beobachtungshäufung in der einzelnen Gruppe nicht zu verkleinernden Monddistanz-Fehler machen wir für Sextantenmessung folgende Schätzung:

Indexcorrection	$\pm$ 5″
Blendgläser	$\pm$ 2
Excentricitäts- und Theilungsfehler	$\pm$ 10
Optische Täuschung am Mondrand	$\pm$ 3

$$\sqrt{5^2 + 2^2 + 10^2 + 3^2} = \pm 12''$$

Weitere Genauigkeitssteigerung ist durch die neueren Prismenkreise mit Beachtung aller durch die Fehlertheorie gegebenen Winke und durch Gestirne links und rechts vom Mond zu erreichen.

§ 69. Ausgleichung zwischen Monddistanzen und Chronometergang.

Jede Monddistanz-Messung gibt eine Bestimmung der Greenwichzeit, und eine Reihe von Monddistanzen-Messungen an beliebigen Orten (auf einer Reise) gibt für das dabei benützte Chronometer das Material zur Bestimmung der Stand- und Gangcurve, ähnlich wie eine Reihe gewöhnlicher Ortszeitmessungen in Greenwich selbst, jedoch mit dem Unterschied, dass die aus Monddistanzen abgeleiteten Greenwichzeit-Bestimmungen weniger genau sind.

Mit diesem Material kann man die Stand- und Gangcurve des Chronometers auftragen, wie in unserem früheren Beispiel § 12. S. 53 für Hannover gezeigt worden ist.

Wegen der Ungenauigkeit der aus Monddistanzen erhaltenen Greenwichzeiten wird die directe Curve allerdings zunächst sehr unregelmässig verlaufen, und eine ausgleichende Curve wird nicht durch alle Punkte selbst gehen, sondern nur diesen Punkten sich thunlichst nähern können.

Nach dieser Methode (mit Benützung verschiedener Nebenumstände, Itinerar etc.) sind z. B. die geographischen Längen erhalten worden, welche ich kurz nach der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste, in Petermann's Geogr. Mittheilungen 1875, Heft VI., S. 201—214, mit der Karte Tafel 11. veröffentlicht habe.

Besser als solche graphische Ausgleichung, allerdings auch mühsamer, ist eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche wir nun auf das Material der libyschen Expedition von 1873—74 anwenden.