

Mittlere Ortszeit	Differenz	Distanz	Differenz
9h 31m 20s		76° 46' 30"	— 0' 0"
9 32 55	1m 35s	76 46 30	— 0 30
9 34 10	1 15	76 46 0	— 1 30
9 35 28	1 18	76 44 30	— 0 50
9 36 35	1 7	76 43 40	— 1 40
9 37 58	1 23	76 42 0	
Aenderungen 6m 38s	= 398s	4' 30"	= 270"

$$v' = \frac{270}{398} = 0,68 \quad (44)$$

während nach dem Nautical Almanac 1883 S. 140 der Prop. Log. für diese Distanz = 0.3474 ist, also:

$$v = 0,45 \quad (45)$$

Obgleich wir diese zwei letzten Beispiele (42) und (44) nicht mehr durch Ausrechnung mit der Formel (31) verglichen haben, dienen sie auch in dieser Form zur allgemeinen Bestätigung der Theorie der Formel (31).

Weitere Beispiele der Vergleichung von  $v$  und  $v'$  wird die Genauigkeitstabelle von § 68. geben. Die Mittelwerthe sind daselbst  $v = 0,52$  und  $v' = 0,38$ , also  $v'$  kleiner als  $v$ , was in der Mehrzahl aller Fälle stattfindet.

## § 67. Näherungswerthe der Mondsdistanz-Reduction.

Für viele Zwecke ist es erwünscht, die Reduction einer Distanz auf den Erdmittelpunkt rasch wenigstens genähert zu haben, z. B. um für die genauere Reductionsberechnung das Mittel der scheinbaren und der wahren Distanz einführen zu können, ohne zuvor die Jahrbuchsdistanzen zu benutzen, ferner zur Entscheidung, ob eine grobe Missstimmigkeit in der Messung oder in der Berechnung ihren Grund hat u. s. w.

Die Reductionsformel heisst nach (14) und (16) § 59. S. 291 in ihren Hauptgliedern, für die wahre Distanz  $D$  und die scheinbare Distanz  $D'$ :

$$A = D - D' = - \Delta H \cos M - \Delta h \cos S$$

oder nach (2) und (3) § 59. S. 289:

$$A = - (\pi \cos H - r) \cos M + r' \cos S \quad (1)$$

Dabei ist nach (19) und (20) § 59. S. 292:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \quad \cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \quad (2)$$

Mit dem Mittelwerth  $\pi = 57'$ , welchen wir fürs Folgende annehmen wollen, hat man für (1) folgende Zahlenwerthe:

$H$ oder $h$	$\pi \cos H$	$r$ oder $r'$	$(\pi \cos H - r)$	$\frac{\log}{(\pi \cos H - r)}$	$\log r'$
0°	57,0'	34,9'	22,1'	1.3444	1.5428
5	56,8	9,8	47,0	1.6721	0.9912
10	56,1	5,3	50,8	1.7059	0.7243
15	55,0	3,5	51,5	1.7118	0.5441
20	53,6	2,6	51,0	1.7076	0.4150
30	49,4	1,7	47,7	1.6875	0.2304
40	43,7	1,2	42,5	1.6284	0.0792
50	36,6	0,8	35,8	1.5539	9.9031
60	28,5	0,6	27,9	1.4456	9.7782
70	19,5	0,4	19,1	1.2810	9.6021
80	9,9	0,2	9,7	0.9868	9.3010

(3)

Nach den Formeln (1), (2) und der Tabelle (3) sind die Tabellenwerthe von S. [22] und [23] berechnet worden, so weit es sich um kleine Höhen unter 10° handelt. Insbesondere, wenn die eine Höhe  $H$  oder  $h = 0$  wird, vereinfacht sich die Berechnung von  $M$  und  $S$  nach [2]:

$$h = 0 \text{ gibt } \cos M = - \operatorname{tang} H \operatorname{cotg} D \quad \cos S = \frac{\sin H}{\sin D} \quad (4)$$

$$H = 0 \text{ gibt } \cos M = \frac{\sin h}{\sin D} \quad \cos S = - \operatorname{tang} h \operatorname{cotg} D \quad (5)$$

Auch der besondere Fall gleicher Höhen gibt eine Berechnungserleichterung. Setzt man nämlich  $h = H$ , so wird nach (2):

$$\cos M = \cos S = \operatorname{tang} H \operatorname{tang} \frac{D}{2} \quad (6)$$

wie sich auch unmittelbar geometrisch einsehen lässt, indem dann das Distanzdreieck symmetrisch wird. Da in diesem Falle auch  $r' = r$ , so wird (1):

$$A = (-\pi \cos H + 2r) \operatorname{tang} \frac{D}{2} \operatorname{tang} H \quad (7)$$

Hiernach sind die auf S. [22] und [23] in den Diagonalen stehenden Reductionswerthe berechnet.

Für Höhen von 10° an aufwärts ist es bequemer und völlig ausreichend, die Refraction nach der Näherungsformel von § 8. S. 31 in Rechnung zu bringen, nämlich:

$$r = \alpha \operatorname{cotg} H \quad r' = \alpha \operatorname{cotg} h \quad (8)$$

wo die Constante ist:

$$\alpha = 57'' = 0,95'$$

Setzt man dieses in (1), so wird:

$$\pi \cos H - r = \pi \cos H - \alpha \operatorname{cotg} H$$

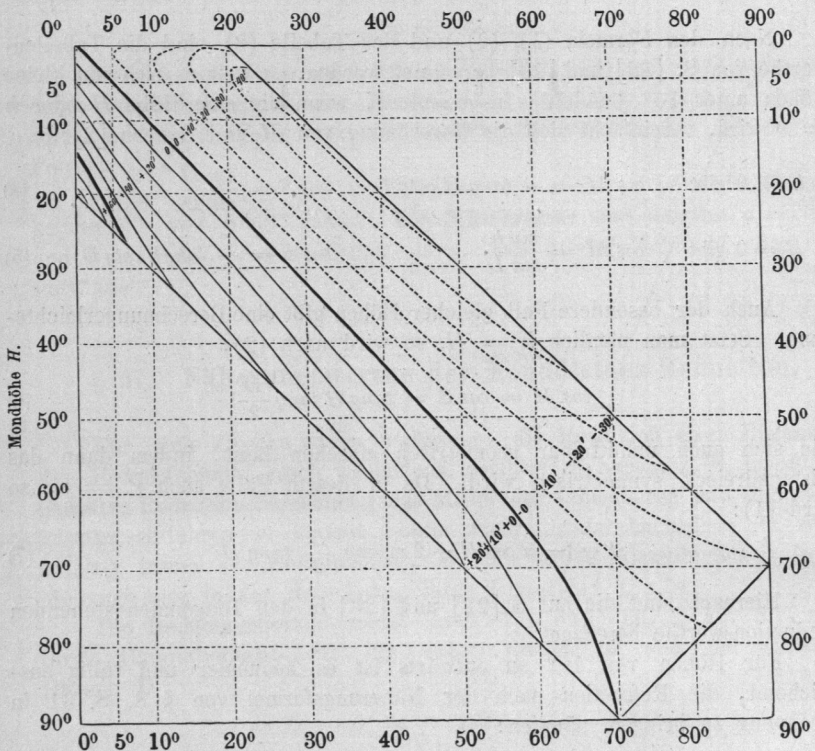
also jetzt nach (1) und (2):

$$\Delta = \frac{1}{\sin D} \left( -\frac{(\pi \sin H - \alpha)}{\sin H} (\sin h - \sin H \cos D) + \frac{\alpha}{\sin h} (\sin H - \sin h \cos D) \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin D} \left\{ -\pi \sin h + \pi \sin H \cos D - 2\alpha \cos D + \alpha \left( \frac{\sin H}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin H} \right) \right\} \quad (9)$$

Diese Formel, deren zweiten Theil wir schon in (4) § 41. S. 212 entwickelt haben, ist für unseren Zweck insofern günstiger, als die ursprünglichen (1) und (2), weil sich die einzelnen Bestandtheile leicht tabellarisch darstellen lassen, so dass dann zur Bildung der Reductionen  $\Delta$  nicht mehr viel anderes zu thun ist, als eine Zusammensetzung der einzelnen Tabellenwerthe.

Fig. 1. Schichtentafel für Mondstanz-Reduction  $D - D' = \Delta$ .  
Mondstanz =  $20^\circ$ , vgl. S. [22].  
Sonnen- oder Sternhöhe  $h$ .



Auf S. [21] haben wir die fraglichen vier Hülftafeln mitgetheilt nebst Gebrauchsanweisung, wozu man z. B. berechnet:

$$\text{Beispiel: } D = 50^\circ \quad H = 10^\circ \quad h = 40^\circ$$

$$\text{I.} = -36,6' \quad \text{II.} = +6,4' \quad \text{III.} = -1,2' \quad \text{IV.} = +3,8'$$

$$\Delta = 1,31 (-36,6' + 6,4' - 1,2' + 3,8') = 1,31 (-27,6') = -36,2'$$

Werden  $H$  und  $h$  vertauscht, so wird:

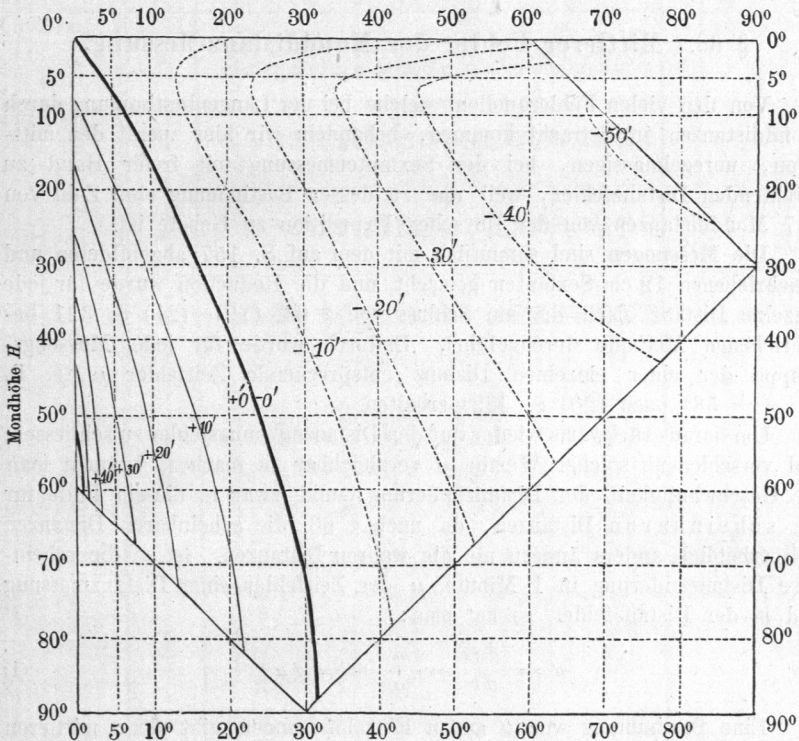
$$\Delta = 1,31 (-9,9' + 23,6' - 1,2' + 3,8') = 1,31 (+16,3') = +21,4'$$

Wenn die Mondparallaxe nicht die der Tafel S. [21] zu Grunde gelegte  $\pi = 54'$ , sondern eine andere ist, so hat man die Werthe I. und II. proportional zu ändern (mit dem Rechenschieber, ebenso wie auch die Division mit  $\sin D$  am bequemsten mit dem Rechenschieber gemacht wird).

Auf diese Art sind die Tafelwerthe von S. [22] und [23] berechnet worden, welche nicht bereits bei (4) bis (7) besonders erwähnt worden sind.

Im Ganzen ist mehr als die Hälfte aller Tafelwerthe von S. [22] und [23] direct nach den angegebenen Formeln berechnet worden, die übrigen wurden graphisch interpolirt.

Fig. 2. Schichtentafel für Mondstanz-Reduction  $D - D' = \Delta$ .  
Mondstanz =  $60''$ , vgl. S. [23].  
Sonnen- oder Sternhöhe  $h$ .



Zum Theil konnte auch eine ähnliche Tafel von Weyr im VIII. Jahrgang, 1880, der „Annalen der Hydrographie“, S. 500, zur controllirenden Vergleichung zugezogen werden, wobei aber zu bemerken ist, dass die Weyr'sche Tafel sich auf den Mond-Parallaxenwerth  $\pi = 53'$  gründet, während unsere Tafel  $\pi = 57'$  zu Grunde legt. Auch hat die Weyr'sche

Tafel die Minimalhöhen  $5^{\circ}$ , während in unserer Tafel die Höhen mit  $0^{\circ}$  beginnen, damit der Gesamtverlauf der Reductionsfunction ersehen werden kann.

Die Nulllinie, d. h. die Grenze zwischen positiver und negativer Reduction, geht immer durch den Punkt für  $H = 0$  und  $h = 0$ .

Den besten Ueberblick über diesen Functionsverlauf erhält man durch Aufzeichnen der Curven für constante Reductionen  $\Delta$ , d. h. sogenannter Schichtentafeln, deren wir zwei, für  $D = 20^{\circ}$  und für  $D = 60^{\circ}$  in Fig. 1. (S. 344) und in Fig. 2. (S. 345) vorlegen.

Der Charakter dieser Curven bleibt auch bei allen anderen Distanzen bestehen, und die Form der Schichtentafeln ist schon durch die Zahlentafeln S. [22] und [23] gegeben, z. B. für  $D = 90^{\circ}$  wird ein nach der Diagonale zerschnittenes halbes Quadrat ausgefüllt und bei  $D = 120^{\circ}$  ist nur noch ein kleines Dreieck vorhanden.

### § 68. Mittlerer Fehler der Mondstanz-Messung.

Von den vielen Fehlerquellen, welche bei der Längenbestimmung durch Mondstanz in Betracht kommen, behandeln wir hier zuerst den mittleren, unregelmässigen, bei der Sextantenmessung mit freier Hand zu fürchtenden Distanzfehler, weil uns zu dessen Bestimmung eine Zahl von 317 Mondstanz von der libyschen Expedition zu Gebote ist.

Die Messungen sind sämmtlich mit dem auf S. 157 abgebildeten und beschriebenen 12 cm-Sextanten gemacht, und die Reduction wurde für jede einzelne Distanz nach der am Schluss von § 64. (19)–(21) S. 321 beschriebenen Methode durchgeführt. Dadurch wurde für jede Messungsgruppe der einer einzelnen Distanz entsprechende Zeitfehler  $\mu$  (z. B.  $\mu = \pm 58^s$  nach (20) S. 322) erhalten.

Um daraus rückwärts wieder auf den Distanzmessungsfehler zu schliessen, und verschiedene solcher Werthe  $\mu$  vergleichbar zu machen, braucht man die Geschwindigkeit der Distanzänderung, und zwar in diesem Falle für die scheinbaren Distanzen, da nach § 66. die scheinbaren Distanzen sich erheblich anders ändern als die wahren Distanzen. Ist  $v'$  die scheinbare Distanzänderung in 1 Minute,  $\mu$  der Zeitfehler einer Distanzmessung und  $m$  der Distanzfehler, so hat man:

$$v' = \frac{dD}{dt} = \frac{m}{\mu}, \quad m = v'\mu \quad (1)$$

Eine Bestimmung von  $\mu$  aus  $n$  Einzelmessungen gibt dem mittleren Fehlerquadrat  $m^2$  das Gewicht  $= n - 1$ , und hiernach lässt sich ein Mittelwerth aus zahlreichen Einzelbestimmungen  $m$  bilden, wie in folgender Tabelle geschieht, in welcher die zweite Spalte das Seitencitat aus dem schon mehrfach citirten Werke „Phys. Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ ist, und die Ortsbezeichnungen der dritten Spalte zu dem Kärtchen von § 69. S. 350 in Beziehung stehen.