maass für die gewöhnliche Distanz-Reductionsberechnung mit Mittelhöhen nach der Formel (23) gelten lassen.

Wir entnehmen daraus, dass diese Berechnung meist innerhalb 1″ genau ist, zumal Distanzen unter 20° (welche im Nautical Almanac nicht vorkommen) selten angewendet werden.

Als Beispiel einer kleinen Distanz nehmen wir 8° bis 9°, was ich in der Oase Farafrah am 2. Januar 1874, Abends, zwischen dem Mond und dem Fixstern Pollux maass (s. o. S. 311). Diese Distanz kommt nicht im Nautical Almanac, da sie aber sehr bequem zu messen war, und bei kleinen Distanzen die Instrumentenfehler von wenig Einfluss sind, wurde sie im Verlauf von zwei Stunden 24 Mal gemessen. Es fragt sich nun, ob die gewöhnliche Reductionsrechnung noch zulässig war? Zur Anwendung unserer Formel (53) haben wir aus der Reductionsberechnung:

$$D_0 = 8' \, 36'' \qquad M = 163^0 \, 26'$$

$$\varDelta H = +\, 25' \, 14'' = +\, 1514'' \qquad \varDelta h = -\, 40'' \qquad \varDelta H - \varDelta h = +\, 1554''$$

Damit gibt die Formel (53):

$$\varDelta'' = -\, 0{,}04''$$

Es ist also in Hinsicht auf die Schärfe der Reductionsrechnung von dieser kleinen Distanz nichts zu fürchten.

Solche kleine Distanzen geben allerdings meist auch sehr ungleiche Differenzen, z. B. in diesem Falle:

Greenwichzeit 6^h	$D = 9^0 \, 59' \, 43''$		
		$-\, 31' \, 53''$	
7	$9 \quad 27 \quad 50$		$+\, 8''$
		$-\, 31 \quad 45$	
8	$8 \quad 56 \quad 5$		$+\, 6$
		$-\, 31 \quad 39$	
9	$8 \quad 24 \quad 26$		

Wenn man aber überhaupt auf Jahrbuchsdistanzen verzichtet und seine Distanzen (wie diese) selbst rechnet, so wird man das Intervall eng nehmen und kann dann die zweiten Differenzen leicht berücksichtigen.

§ 66. Geschwindigkeit der Monddistanz-Aenderung.

Die Aenderung der wahren, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen, Monddistanz ist durch den im astronomischen Jahrbuch zwischen je zwei Distanzen angegebenen Proportional-Logarithmus gegeben. Nach § 63. S. 314 schwankt diese Aenderung etwa zwischen 0,4° und 0,6° in einer Stunde und ist im Mittel etwa 0,5° = 30′ in 1 Stunde oder 30″ in 1 Minute. Die durch die Differenzen der Proportional-Logarithmen ausgedrückte Beschleunigung der Distanzänderung ist im Allgemeinen klein, so dass man innerhalb 10—15 Minuten die Distanzänderung als gleichförmig, d. h. proportional der Zeitänderung annehmen darf.

Das bezieht sich aber alles nur auf „wahre“ Distanzen, wie sie einem im Erdmittelpunkt befindlichen Beobachter erscheinen würden, dagegen zeigen die „scheinbaren" Distanzen, welche man an der Erdoberfläche beobachtet, grossentheils ein anderes Verhalten in Bezug auf Geschwindigkeit und Beschleunigung ihrer Aenderung, und leider meist in ungünstigem Sinne. Die Geschwindigkeit der Aenderung der gemessenen Distanzen, wovon die Genauigkeit der Längenbestimmung in erster Linie abhängt, ist nämlich im Mittel nur etwa 20″ auf 1 Minute, gegen 30″ bei den wahren Distanzen, und auch die Ungleichförmigkeit der Aenderung ist bei den von Refraction und Parallaxe beeinflussten scheinbaren Distanzen viel grösser als bei den wahren Distanzen. Man darf deshalb, namentlich bei geringen Höhen, nicht unbedingt Gruppen von Messungen in der Zeit von 10—15 Minuten in ein arithmetisches Mittel zusammen fassen, was bei wahren Distanzen zulässig wäre.

Wir betrachten zuerst das Hauptglied der Distanzreduction, nämlich das von der Mondparallaxe herrührende. Dasselbe ist nach (2) § 59. S. 289:

$$\pi \cos H \cos M \tag{1}$$

Hiebei ist nach (19) § 59. S. 292:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\cos H \sin D} \tag{2}$$

also

$$\pi \cos H \cos M = \pi \, \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D} = m' \tag{3}$$

Für die Reductionsänderung braucht man den Differentialquotienten von (3), und hierin kann die Distanz D als constant behandelt werden im Vergleich mit der von der täglichen Drehung des Himmelsgewölbes abhängigen Aenderung der Höhen H und h. Sind T und t die Stundenwinkel des Mondes und des Sterns, so hat man für die Höhen H und h (nach (1) § 4. S. 11) die Gleichungen:

$$\text{Mond} \quad \sin H = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T \tag{4}$$

$$\text{Stern} \quad \sin h = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos t \tag{5}$$

Die Aenderungen dT und dt sind gleich, es ist dt die Zeitänderung überhaupt, also:

$$d \sin H = - \cos \varphi \cos \delta \sin T dt$$
$$d \sin h = - \cos \varphi \cos \delta' \sin t dt$$

Dieses in das Differential von (3) gesetzt gibt:

$$\frac{dm'}{dt} = \pi \, \frac{\cos \varphi}{\sin D} (- \cos \delta' \sin t + \cos \delta \sin T \cos D) \tag{6}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn δ und $\delta' = 0$ werden, und da es sich doch nur um Gestirne innerhalb der Wendekreise handelt, für welche $\cos \delta$ immer zwischen $\cos 23^0 = 0{,}92$ und $\cos 0^0 = 1{,}00$ schwankt, so kann die Weiterrechnung mit $\delta = \delta' = 0$ wohl als gute Näherung für irgend welchen Distanzfall genommen werden, d. h. wir haben nach dieser Annahme aus (6):

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = \pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\,(-\sin t + \sin T \cos D)$$

mit $\cos D = 1 - 2\sin^2\frac{D}{2}$ gibt dieses:

$$\frac{d\,m'}{t\,d} = 2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\left(\sin\frac{T-t}{2}\cos\frac{T+t}{2} - \sin^2\frac{D}{2}\sin T\right) \tag{7}$$

Die vereinfachende Annahme $\delta = \delta' = 0$ verlegt beide Gestirne auf den Aequator, es ist also dann die Distanz D gleich der Differenz der Stundenwinkel, d. h.:

$$D = (t - T) \qquad \text{oder} \qquad D = (T - t) \tag{8}$$

je nachdem der Mond links oder rechts steht. Man sieht dieses aus den zwei Figuren 1. und 2., indem man sich aus (4) und (5) erinnert, dass T

Fig. 1.
Monddistanz mit Mond links.

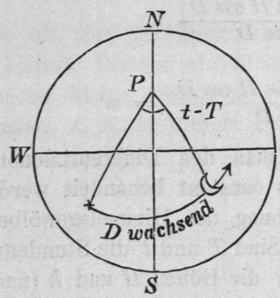
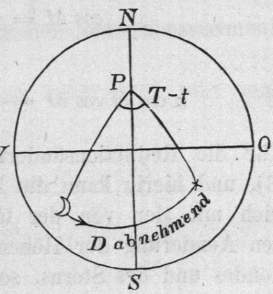


Fig. 2.
Monddistanz mit Mond rechts.



der Stundenwinkel des Mondes und t der Stundenwinkel des Sternes ist. (8) in (7) gesetzt gibt, wenn der Mond links steht:

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -\,2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\left(\cos\frac{T+t}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin T\right) \tag{9}$$

Wir wollen t eliminiren und haben hiezu nach (8) für links:

$$t = T + D$$

$$T + t = 2\,T + D, \qquad \frac{T+t}{2} = T + \frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -\,2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\left(\cos T\cos\frac{D}{2} - \sin T\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin T\right)$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -\,2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\cos T\cos\frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -\,\pi\cos\varphi\cos T \text{ (Mond links)} \tag{10}$$

Der zweite Fall mit Mond rechts gibt aus (7) mit $D = T - t$ nach (8):

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = 2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\,\sin\frac{D}{2}\left(\cos\frac{T+t}{2} - \sin\frac{D}{2}\,\sin T\right)$$

$$t = T - D$$

$$T + t = 2\,T - D \qquad \frac{T+t}{2} = T - \frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = 2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\,\sin\frac{D}{2}\left(\cos T\cos\frac{D}{2} + \sin T\sin\frac{D}{2} - \sin\frac{D}{2}\,\sin T\right)$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = +\,2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\,\sin\frac{D}{2}\,\cos T\,\cos\frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = +\,\pi\,\cos\varphi\,\cos T \text{ (Mond rechts)} \tag{11}$$

(10) und (11) unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

In dem Falle Fig. 1. mit Mond links ist die Distanz wachsend, und im Falle Fig. 2. ist sie abnehmend, weil die Eigenbewegung des Mondes immer nach Osten geht.

Wir wollen zur Geschwindigkeit der Distanzänderung übergehen, und zwar sei:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Wahre Distanz } D & \text{mit Geschwindigkeit der Distanzänderung } \dfrac{d\,D}{d\,t} = v \\ \text{Scheinbare Distanz } D' & \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \dfrac{d\,D'}{d\,t} = v' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Indem wir hier nur den Einfluss der Mondparallaxe betrachten, haben wir nach (16) § 59. S. 291:

$$D' - D = m'$$

$$\frac{d\,D'}{d\,t} - \frac{d\,D}{d\,t} = \frac{d\,m'}{d\,t} \tag{13}$$

Die Differentialquotienten $\frac{d\,D'}{d\,t}$ und $\frac{d\,D}{d\,t}$ sind die in (12) mit v' und v bezeichneten Geschwindigkeiten, und zwar $+\,v'$, $+\,v$ oder $-\,v'$, $-\,v$, je nachdem die Distanz wachsend oder abnehmend ist, was gerade den zwei Fällen Fig. 1. mit Mond links und Fig. 2. mit Mond rechts entspricht, weil die Eigenbewegung des Mondes immer nach Osten geht. Man hat also nach (12) und (13), mit Rückschau nach (10) und (11):

Fig. 1. Mond links $v' = v - \pi\cos\varphi\cos T$

Fig. 2. Mond rechts $-\,v' = -\,v + \pi\cos\varphi\cos T$

oder absolut genommen in beiden Fällen:

$$v - v' = \pi\cos\varphi\cos T \tag{14}$$

Nehmen wir als Zeiteinheit $d\,t = 1$ Minute, so muss $\pi\cos\varphi\cos T$ in (14) (vermöge der Herkunft aus (10) und (11)) zur Herstellung richtigen Maasses noch multiplicirt werden mit

$$\frac{dt}{\varrho''} = \frac{1^m}{\varrho''} = \frac{60^s}{\varrho''} = \frac{900''}{\varrho''} = \frac{1}{229{,}2}$$

also

$$v - v' = \frac{\pi}{229{,}2} \cos\varphi \cos T \tag{15}$$

Setzen wir als Maximalwerth $\pi = 1^0 = 3600''$ und für den extremen Fall $\varphi = 0$, $T = 0$, so wird:

$$(v - v')_{\max} = 16''$$

Die minutliche Aenderung v der wahren Distanz ist, wie wir gesehen haben, im Mittel etwa $= 30''$, also im äussersten Fall:

$$v' = 30'' - 16'' = 14'' \tag{16}$$

In diesem extremen Falle, nämlich Beobachtungspunkt im Aequator ($\varphi = 0$) und Mond im Meridian ($T = 0$), beträgt also die Aenderung der scheinbaren Distanz nur noch etwa die Hälfte der Aenderung der wahren Distanz. Den besonderen Fall der Gleichung (16), nämlich für einen Punkt des Aequators und den Mond im Meridian, hat Bremiker in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1875, S. 77, zuerst behandelt, indem er eine einfache mechanische Erklärung der Geschwindigkeitsreduction darin findet, dass ein Punkt des Erdäquators bei culminirendem Mond, selbst, in Folge der Erddrehung, eine nicht unerhebliche Bewegung in demselben Sinne wie der Mond besitzt, wodurch die scheinbare Mondgeschwindigkeit gegen den Fixsternhimmel verkleinert wird.

Wir wollen die Formel (15) an dem Zahlenbeispiel von § 64. (Monddistanz in der Oase Dachel) erproben. Die erste und die letzte Messung der Gruppe (1) § 64. S. 316 geben die scheinbare Geschwindigkeit:

erste Messung	$8^h\ 57^m\ 52^s$	$106^0\ 18'\ 0''$
letzte „	$9\ \ 13\ \ 15$	$106\ \ 10\ \ 20$
Differenzen	$15^m\ 23^s = 15{,}4^m$	$7'\ 40'' = 460''$

$$v' = \frac{460''}{15{,}4} = 30''$$

Der Proportional-Logarithmus ist nach S. 319 unten $= 0.34830$, also nach § 63. S. 314 $v = 27''$.

Ferner ist nach S. 319 $\varphi = 25^0\ 42'$ und nach (12) § 63. S. 317 der Stundenwinkel des Mondes (dort mit t bezeichnet) $T = 76^0\ 35'$, endlich die Mondparallaxe $\pi = 54'\ 12'' = 3252''$, also ausgerechnet nach (15): $v - v' = 3{,}0''$, was mit $v' = 30''$ und $v = 27''$ vollständig stimmt.

Man zieht aus der Formel (14) die praktische Regel, dass man es vermeiden soll, Monddistanzen zu messen, wenn der Mond nahe dem Meridian steht.

Alles Bisherige bezieht sich nur auf die Parallaxe, bei kleinen Höhen erzeugt die **Refractionsänderung**, zu welcher wir jetzt übergehen, noch ganz andere Abweichungen von dem Verhalten der wahren Distanzen.

Namentlich unter niederen Breiten, wo die Gestirne nahezu senkrecht aufsteigen, kann die Distanzänderung, wenn die Refraction ihr entgegenwirkt, erheblich vermindert, aufgehoben, ja sogar in ihr Gegentheil umgeändert werden.

Die erste Erfahrung dieser Art machte ich auf einer Station (Regenfeld, Breite $= 25^0\ 11'$) der libyschen Wüste. Es wurde am 31. Januar 1874, Abends, die Distanz zwischen dem schon hochstehenden Mond und dem eben aufgehenden Arctur gemessen, welche, nach dem Prop. Log. des Nautical Almanac zu schliessen, ziemlich rasch abnehmend sein sollte, es zeigte sich aber eine ungemein langsame Abnahme, z. B.:

	$10^h\ 53^m\ 37^s$		$76^0\ 37'\ 40''$	
		$5^m\ 58^s$		$0'\ 40''$
	10 59 35		76 37 0	
		5 24		0 40
	10 4 59		76 36 20	
Aenderungen	$11^m\ 22^s = 11{,}37^m$		$1'\ 20'' = 1{,}33'$	

$$v' = -\frac{1{,}33}{11{,}37} = 0{,}12', \tag{17}$$

während die Aenderung der wahren Distanz beträgt:

$$v = 0{,}45' \text{ pro 1 Minute} \tag{17a}$$

Der Grund dieser zuerst auffallenden Erscheinung wurde nach einiger Ueberlegung darin gefunden, dass der aufgehende Arctur allmälig kleinere Refractionen bekam, wodurch die Distanz gegen den bereits höher stehenden Mond vergrössert, oder die vermöge der Mondbewegung normal abnehmende Distanz zu einer sehr schwach abnehmenden gemacht wurde.

Nachdem durch dieses Beispiel klar gemacht ist, um was es sich handelt, gehen wir zur mathematischen Behandlung der Sache über.

Der von der Refraction r herrührende Reductionsbetrag ist für den Mond oder den Stern bezw. Sonne:

$$r \cos M \text{ oder } r \cos S \tag{18}$$

Dieser Betrag wirkt der Parallaxe entgegen, was zu beachten sein wird, wenn wir zunächst nur den absoluten Werth von (17) untersuchen, ihn aber nachher mit dem früheren (15) zusammen nehmen werden. Da die Behandlung für M oder S dieselbe ist, bleiben wir bei M stehen, und haben aus (17):

$$\frac{d\,(r \cos M)}{dt} = r\,\frac{d\,(\cos M)}{dt} + \cos M\,\frac{dr}{dt} \tag{18a}$$

Wenn überhaupt die Refractionsänderung von Belang ist, so kann die Höhe H nur klein sein, und dann kann man mit $\cos H = 1$ statt (2) schreiben:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D} \tag{19}$$

und damit erhält man für das erste Glied von (18a) dieselbe Entwicklung wie früher (3) bis (11), und statt (10) und (11) bekommt man jetzt:

$$r\,\frac{d\,(\cos M)}{dt} = \mp\, r\cos\varphi\cos T \quad \left(\mp \text{ für Mond } \begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right) \tag{20}$$

Den zweiten Theil von ($18a$) muss man, da die Refraction r nur als Function der Höhe bekannt ist, zunächst so schreiben:

$$\cos M\,\frac{dr}{dt} = \cos M\,\frac{dr}{dH}\,\frac{dH}{dt}$$

Dabei ist nach (4):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{T} = -\cos\varphi\cos\delta\,\frac{\sin T}{\cos H} \tag{21}$$

also:

$$\cos M\,\frac{dr}{dt} = -\,\frac{dr}{dH}\cos M\cos\varphi\cos\delta\,\frac{\sin T}{\cos H} \tag{22}$$

Wenn aber H sehr klein ist, so darf auch für $\cos M$ nach (19) noch genähert geschrieben werden:

$$\cos M = \frac{\sin h}{\sin D}$$

und der nur zwischen 0,9 und 1,0 schwankende Factor $\cos\delta$ kann, da ohnehin Näherungen eingeführt sind, $= 1$ gesetzt werden, folglich aus (22):

$$\cos M\,\frac{dr}{dt} = -\,\frac{dr}{dH}\cos\varphi\sin T\,\frac{\sin h}{\sin D} \tag{23}$$

Aus (20) und (23) kann man ($18a$) zusammensetzen:

$$\frac{d\,(r\cos M)}{dt} = \mp\, r\cos\varphi\cos T - \frac{dr}{dH}\cos\varphi\sin T\,\frac{\sin h}{\sin D} \tag{24}$$

Um auf minutliche Aenderung in Einheiten von $1''$ zu reduciren, muss man im ersten Glied den Factor $\dfrac{900''}{\varrho''} = \dfrac{1}{229}$ zusetzen, ebenso wie bei (14) und (15) geschehen ist; und im zweiten Glied ist zu setzen:

$$\frac{dr}{dH} = -\,15\,(\varDelta r_1) \tag{25}$$

wo $(\varDelta r_1)$ die Refractionsänderung ist, welche einer Höhenänderung von $1'$ entspricht, und zwar ist hiebei die wahre Höhe als Argument zu nehmen, d. h. es ist $(\varDelta r_1)$ aus der Tafel S. [13] und nicht aus der Tafel S. [5] bis [6] zu entnehmen.

Man hat also jetzt das Resultat:

$$\frac{d\,(r\cos M)}{dt} = \mp\,\frac{r}{229}\cos\varphi\cos T + 15\,(\varDelta r_1)\cos\varphi\sin T\,\frac{\sin h}{\sin D} \tag{26}$$

$\mp$ gilt, wenn der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Für den Stern oder die Sonne stellt sich die Vorzeichenfrage umgekehrt, weil für die Distanzänderung nach Fig. 1. und 2. die Mondbewegung maassgebend ist, nämlich:

$$\frac{d(r' \cos S)}{dt} = \pm \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t + 15\,(\Delta r_1) \cos\varphi \sin t \,\frac{\sin H}{\sin D} \tag{27}$$

$\pm$ gilt, wenn der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Zur Bildung der Gesammtformel für Geschwindigkeit der Distanzänderung, in Hinsicht auf Parallaxe und Refractionen haben wir die Grundlage (nach (2), (3), (16) und Fig. 4. § 59. S. 291):

$$D' - D = \pi \cos H \cos M - r \cos M + \pi' \cos h \cos S - r' \cos S$$

Die Parallaxe π' für die Sonne oder einen Planeten hat verschwindenden Einfluss, es ist also:

$$\frac{dD'}{dt} - \frac{dD}{dt} = \frac{d(\pi \cos H \cos M)}{dt} - \frac{d(r\cos M)}{dt} - \frac{d(r'\cos S)}{dt}$$

oder theilweise mit anderen Bezeichnungen (m' nach (3) S. 331):

$$v' - v = \frac{dm'}{dt} - \frac{d(r\cos M)}{dt} - \frac{d(r'\cos S)}{dt} \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf die verschiedenen Vorzeichenfragen gibt dieses, durch Einsetzen von (10) und (11), (26) und (27):

1. Wenn der Mond links steht, also die Distanz wachsend ist:

$$\left.\begin{aligned} v' - v = -\frac{\pi}{229}\cos\varphi\cos T + \frac{r}{229}\cos\varphi\cos T - 15\,(\Delta r_1)\cos\varphi\,\frac{\sin h}{\sin D}\sin T \\ -\frac{r'}{229}\cos\varphi\cos t - 15\,(\Delta r'_1)\cos\varphi\,\frac{\sin H}{\sin D}\sin t \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

2. Wenn der Mond rechts steht, also die Distanz abnehmend ist:

$$\left.\begin{aligned} -v' + v = +\frac{\pi}{229}\cos\varphi\cos T - \frac{r}{229}\cos\varphi\cos T - 15\,(\Delta r_1)\cos\varphi\,\frac{\sin h}{\sin D}\sin T \\ +\frac{r'}{229}\cos\varphi\cos t - 15\,(\Delta r'_1)\cos\varphi\,\frac{\sin H}{\sin D}\sin T \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

also zusammengefasst:

$$\left.\begin{aligned} v' = v - \frac{\pi - r}{229}\cos\varphi\cos T - \frac{r'}{229}\cos\varphi\cos t \mp (\Delta r_{15})\cos\varphi\,\frac{\sin h}{\sin D}\sin T \\ \mp (\Delta r'_{15})\cos\varphi\,\frac{\sin H}{\sin D}\sin t \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hiebei gilt $\mp$ wenn die Distanz $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\\text{abnehmend}\end{matrix}\right\}$ ist, oder der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Die Bedeutung aller hier vorkommenden Zeichen ist:

- v' Geschwindigkeit der beobachteten Distanz, in Secunden pro 1 Zeitminute,
- v Geschwindigkeit der wahren Distanz, in Secunden pro 1 Zeitminute,
- π die Horizontalparallaxe des Mondes,
- r die Refraction des Mondes,

r' die Refraction des Sternes (oder der Sonne),

$(\varDelta r_{15})$ die Aenderung der Refraction r für 15′ wahre Höhe, absolut genommen,

$(\varDelta r'_{15})$ die Aenderung der Refraction r' für 15′ wahre Höhe, absolut genommen,

H die Höhe des Mondes,

h die Höhe des Sterns (oder der Sonne),

T der Stundenwinkel des Mondes,

t der Stundenwinkel des Sterns (oder der Sonne),

φ die Breite des Beobachtungsortes.

Die Ausrechnung der Formel (29), (30) bezw. (31) ist meist einfacher als es auf den ersten Blick aussieht, denn die von der Refraction herrührenden Glieder kommen nur für dasjenige Gestirn in Betracht, welches sehr tief steht; dass beide Gestirne nahe am Horizont wären, das eine aufgehend, das andere untergehend, wird wohl sehr selten vorkommen, und dann fallen die Glieder mit $\sin H$ und $\sin h$ auch fort.

Wir betrachten das Hauptrefractionsglied in (31):

$$(\varDelta r_{15}) \cos \varphi \frac{\sin h}{\sin D} \sin T \tag{32}$$

Es sei unter dem Aequator ($\varphi = 0$) der Mond nahe am Horizont, der Stern nahe am Zenit ($h = 90^0$, $D = 90^0$), zugleich $T = 90^0$, d. h. der Maximalwerth von (32):

$$(32)_{\max} = (\varDelta r_{15})$$

Nach S. [13] ist die Refractionsänderung am Horizont für 10′ Aenderung der wahren Höhe:

$$(\varDelta r_{10}) = 90'' = 1' \, 30''$$

also
$$(\varDelta r_{15} = 1{,}5 \, (\varDelta r_{10}) = 135'' = 2' \, 15''$$

Dieses ist eine Aenderung, welche die minutliche Eigenbewegung des Mondes etwa vierfach übertrifft.

Um die Formel (31) durch Anwendung auf eine Beobachtungsreihe zu erproben, nehmen wir Folgendes: In Niendorf (s. S. 287) maass ich am 13. Juli 1883 Abends, bei untergehender Sonne und hochstehendem Mond, mit dem Sextanten von S. 175, eine Reihe von 16 Distanzen, welche theils zu zweien, theils zu dreien in einzelne Mittel zusammengefasst wurden und damit die 6 folgenden Werthe ergaben:

Niendorf, $\varphi = 53^0 \, 59' \, 50''$, $\lambda = 0^h \, 43^m \, 18^s$ von Greenw.

Mittlere Ortszeit t'	$\varDelta t'$	Gemessene Randdistanz D_1'	$\varDelta D_1'$	$\frac{\varDelta D'}{\varDelta t'}$
$8^h \; 8^m \; 26^s$	$+ \, 119^s$	$105^0 \, 35' \; 1''$	$+ \, 10''$	0,08
8 10 25	+ 123	105 35 11	+ 18	0,15
8 12 28	+ 96	105 35 29	+ 0	0,00
8 14 4	+ 94	105 35 29	+ 24	0,26
8 15 38	+ 112	105 35 53	+ 16	0,14
8 17 30		105 36 9		
$9^m \; 4^s$	$= 544^s$	$1' \; 8''$	$+ \, 68''$	$+ 0{,}125 = v'$

Die scheinbare Distanzänderung ist also sehr gering, nämlich:

$$v' = 0{,}125' \text{ pro } 1^s \text{ oder } v' = 7{,}5'' \text{ pro 1 Zeitminute} \tag{33}$$

Es wurden nun zunächst diese sechs beobachteten Distanzen nach § 64. auf den Erdmittelpunkt reducirt, wozu noch die Lufttemperatur 16° und der Barometerstand 755 mm gebraucht wurden. Die Resultate hievon und ihre Vergleichung mit den wahren aus dem Nautical Almanac interpolirten Distanzen (vgl. § 6. S. 24) sind folgende:

Reducirte Distanz D	Nautical Almanac D_n	Differenz
106° 6′ 11″	106° 7′ 11″	— 1′ 0″
106 6 57	106 8 6	— 1 9
106 7 53	106 9 2	— 1 9
106 8 29	106 9 45	— 1 16
106 9 27	106 10 28	— 1 1
106 10 20	106 11 19	— 0 59
		Mittel — 1′ 6″

Unsere Distanzmessungen waren also um etwa 1′ zu klein. Es interessiren uns aber in diesem Falle nicht die absoluten Fehler, sondern nur deren relativer Verlauf, und dieser ist befriedigend.

Nach Nautical Almanac 1883 S. 122 ist der Prop. Log. = 0.3424 oder nach § 63. S. 314 die wahre Geschwindigkeit:

$$v = 27{,}3'' \text{ pro 1 Zeitminute} \tag{34}$$

Es fragt sich nun, ob die Differenz zwischen (33) und (34) durch unsere Formel (31) genügend dargestellt wird.

Die Formel (31) lautet in unserem Fall, da die Sonne das niedere Gestirn war:

$$\left. v' - v = -\frac{\pi - r}{229} \cos\varphi \cos T - \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t - 1{,}5 (\varDelta r_{10}') \cos\varphi \frac{\sin H}{\sin D} \sin t \right\} \tag{35}$$

Aus der Reductionsberechnung entnimmt man im Mittel für den Mond:

$$\pi = 54{,}3' \qquad H = 19^0\, 52' \qquad r = 2{,}7' \qquad T = 1^h\, 19^m = 19^0\, 45' \tag{36}$$

Die Reductionselemente für die Sonne, als niederes Gestirn, sind sehr veränderlich, nämlich:

$t =$	$8^h\,2^m\,57^s$	$8^h\,4^m\,56^s$	$8^h\,6^m\,59^s$	$8^h\,8^m\,35^s$	$8^h\,10^m\,9^s$	$8^h\,12^m\,1^s$
Wahre Höhe h =	1° 14′ 40″	1° 0′ 40″	0° 46′ 40″	0° 35′ 20″	0° 24′ 40″	0° 11′ 20″
Scheinb. Höhe h' =	1 34 24	1 21 39	1 9 4	0 59 4	0 49 38	0 37 46
Refraction r' =	19 52	21 7	22 32	23 52	25 6	26 34

Wir nehmen im Mittel für die Sonne:

$$t = 8^h\,7^m\,29^s = 121^0\,52' \qquad h = 0^0\,43' \qquad r' = 23{,}2' \qquad (\varDelta r_{10}') = 1{,}1' \tag{37}$$

Setzt man diese Werthe (36) und (37) in (35) ein, so erhält man:

$$v' - v = -\,0{,}125 + 0{,}031 - 0{,}291 = -\,0{,}385' = -\,23{,}1'' \tag{38}$$

während die Beobachtung nach (33) und (34) gab:

$$v' - v = -\,19{,}8'' \tag{39}$$

Mit Rücksicht auf alle Nebenumstände ist die Uebereinstimmung zwischen (38) und (39) genügend.

Zur Gewinnung einer Gesammtübersicht über den Einfluss der Parallaxe und der Refraction auf die Distanzgeschwindigkeit wollen wir nun 4 extreme Fälle betrachten:

Fall	Mond	Sonne oder Stern	Distanz	Wirkung	
I.	aufgehend	hochstehend	wachsend	günstig	(40)
II.	untergehend	hochstehend	abnehmend	günstig	
III.	hochstehend	aufgehend	abnehmend	ungünstig	
IV.	hochstehend	untergehend	wachsend	ungünstig	

Zur Berechnung machen wir folgende einfache Annahmen: Die Declinationen beider Gestirne seien $=$ Null, die Breite $\varphi = 45^0$, also auch die beiden Meridianhöhen H oder $h = 45^0$. Wenn in jedem Falle ein Gestirn aufgeht oder untergeht und das andere im Meridian steht, so ist der Stundenwinkel T oder t für den Aufgang $= -\,90^0$, für den Untergang $= +\,90^0$ und für die Culmination $= 0^0$. Die Distanz ist stets $= 90^0$.

Mit diesen runden Annahmen ist es wohl verträglich (da wir nur eine Uebersichtsrechnung haben wollen), dem auf- oder untergehenden Gestirn nicht genau die Höhe 0^0, sondern die wahre Höhe 2^0 zu geben (weil bei 0^0 die Refractionswirkung zu krass wird). Für 2^0 wahre Höhe ist nach S. [13] die Refraction $= 16'\,54'' = 16{,}90'$ und die Refractionsänderung für $10'$ Höhe ist $= 39'' = 0{,}65'$, also $(\varDelta r_{15})$ bzw. $(\varDelta r'_{15}') = 0{,}98'$. Für die Meridianhöhe 45^0 ist nach S. [7] die Refraction $= 0'\,58'' = 0{,}97'$ und die Refractionsänderung kommt hier nicht in Betracht. Die Mondparallaxe soll $\pi = 57'$ genommen werden, also für niederstehenden Mond $\pi - r = 40{,}10'$ und für hochstehenden Mond $\pi - r = 56{,}03'$.

Wenn man diese Zahlenwerthe in die Formel (31) für die vier Fälle von (40) einsetzt, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\text{I.} & v' - v = -\,0 & -\,0{,}003 & +\,0{,}490 & -\,0 & = +\,0{,}487 \\
\text{II.} & v' - v = +\,0 & -\,0{,}003 & +\,0{,}490 & +\,0 & = +\,0{,}487 \\
\text{III.} & v' - v = -\,0{,}124 & -\,0 & +\,0 & -\,0{,}490 & = -\,0{,}614 \\
\text{IV.} & v' - v = -\,0{,}124 & -\,0 & -\,0 & -\,0{,}490 & = -\,0{,}614
\end{array}\right\} \tag{41}$$

Nimmt man für die Geschwindigkeit der wahren, geocentrischen Distanzänderung im Mittel $v = 0{,}50$, so zeigt sich, dass im I. und II. unserer extremen Fälle die scheinbare Geschwindigkeit v' nahezu doppelt so gross ist, als die wahre v, und in den beiden letzten Fällen III. und IV. wird die scheinbare Geschwindigkeit v' der wahren Geschwindigkeit v sogar entgegen gesetzt.

Von unseren bisher betrachteten Beobachtungen extremer Distanzänderungen trifft das erste Beispiel (17) und (17 *a*) S. 335, Mond über dem aufgehenden Arctur, nahezu auf den Fall III. Das ausführlich behandelte Beispiel von Niendorf (33), (34) mit untergehender Sonne und hochstehendem Mond trifft nahezu auf den Fall IV.

Nachdem wir somit zwei Beobachtungsbeispiele für ungünstige Wirkung vorgelegt haben, mag noch eine Reihe mit günstiger Distanzänderung hergesetzt werden, entsprechend dem Falle I., aufgehender Mond und hochstehender Stern.

Niendorf, 17. August 1883.

Distanz des Sterns Arctur vom diesseitigen Mondrand. Lufttemperatur $= 9^0$. 10 Einzelmessungen sind in 3 Gruppenmittel zusammengezogen:

	Mittlere Ortszeit	Differenz	Distanz	Differenz
	$10^h\ 18^m\ 43^s$		$107^0\ 21'\ 55''$	
	10 22 38	$3^m\ 55^s$	107 23 46	$+ 1'\ 51''$
	10 26 11	3 33	107 26 11	$+ 2'\ 25$
Aenderungen	$7^m\ 28^s$	$= 448^s$	$4'\ 16''$	$= 256''$

$$v' = \frac{256}{448} = 0{,}57 \tag{42}$$

Die Distanz kommt nicht im Jahrbuch und wird berechnet:

Greenwichzeit	Wahre Distanz	
9^h	$106^0\ 59'\ 42''$	
10	107 29 5	$29'\ 23'' = 0{,}49^0$ für 1 Stunde
11	107 58 27	$29'\ 22$

$$v = 0{,}49 \tag{43}$$

(42) und (43) zeigen eine Zunahme $v' - v = 0{,}08$.

Endlich geben wir der Vollständigkeit wegen noch ein Beispiel für den Fall II., untergehender Mond und hochstehender Stern α aquilae, in 5 einzelnen Distanzen, am 10. August 1883 in Niendorf (Lufttemperatur $= 12^0$ C):

Mittlere Ortszeit	Differenz	Distanz	Differenz
$9^h\ 31^m\ 20^s$		$76^0\ 46'\ 30''$	$-\ 0'\ 0''$
9 32 55	$1^m\ 35^s$	76 46 30	— 0 30
9 34 10	1 15	76 46 0	— 1 30
9 35 28	1 18	76 44 30	— 0 50
9 36 35	1 7	76 43 40	— 1 40
9 37 58	1 23	76 42 0	
Aenderungen $6^m\ 38^s$	$= 398^s$	$4'\ 30''$	$= 270''$

$$v' = \frac{270}{398} = 0{,}68 \tag{44}$$

während nach dem Nautical Almanac 1883 S. 140 der Prop. Log. für diese Distanz = 0.3474 ist, also:

$$v = 0{,}45 \tag{45}$$

Obgleich wir diese zwei letzten Beispiele (42) und (44) nicht mehr durch Ausrechnung mit der Formel (31) verglichen haben, dienen sie auch in dieser Form zur allgemeinen Bestätigung der Theorie der Formel (31).

Weitere Beispiele der Vergleichung von v und v' wird die Genauigkeitstabelle von § 68. geben. Die Mittelwerthe sind daselbst $v = 0{,}52$ und $v' = 0{,}38$, also v' kleiner als v, was in der Mehrzahl aller Fälle stattfindet.

§ 67. Näherungswerthe der Monddistanz-Reduction.

Für viele Zwecke ist es erwünscht, die Reduction einer Distanz auf den Erdmittelpunkt rasch wenigstens genähert zu haben, z. B. um für die genauere Reductionsberechnung das Mittel der scheinbaren und der wahren Distanz einführen zu können, ohne zuvor die Jahrbuchsdistanzen zu benutzen, ferner zur Entscheidung, ob eine grobe Missstimmigkeit in der Messung oder in der Berechnung ihren Grund hat u. s. w.

Die Reductionsformel heisst nach (14) und (16) § 59. S. 291 in ihren Hauptgliedern, für die wahre Distanz D und die scheinbare Distanz D':

$$\Delta = D - D' = -\,\Delta H \cos M - \Delta h \cos S$$

oder nach (2) und (3) § 59. S. 289:

$$\Delta = -\,(\pi \cos H - r) \cos M + r' \cos S \tag{1}$$

Dabei ist nach (19) und (20) § 59. S. 292:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \qquad \cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \tag{2}$$