$$\text{Mittlerer Fehler einer Bestimmung } \mu = \sqrt{\frac{40950}{12}} = \pm 58^s \tag{20}$$

$$\text{Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels } \mu' = \frac{\mu_1}{\sqrt{13}} = \pm 16^s$$

Also Gesammtresultat:

$$\text{Greenwichzeit} = \text{Chronometer} - 0^h\, 55^m\, 12^s \pm 16^s \tag{21}$$

(vorbehältlich Berücksichtigung constanter Fehler).

§ 65. Weitere Entwicklung der Distanz-Reductionsformel.

Die Distanz-Reductionsformel (14) oder (16) § 59. S. 291 wurde dort nur bis auf Glieder der ersten Potenz von $\varDelta H$ oder $\varDelta h$ entwickelt, und die Einführung von Mittelwerthen M_0 und S_0 in (18) S. 292 wurde dort zwar plausibel gemacht, aber nicht mathematisch streng begründet.

Wir werden nun die Entwicklung von S. 292 fortsetzen zu zwei Zwecken:

1) Es soll die Einführung der Mittelwerthe M_0 und S_0 mathematisch begründet werden.

2) Es soll der nach Einführung der Mittelwerthe der Formel noch anhaftende Fehler bestimmt werden.

Hiezu brauchen wir den Taylor'schen Satz für zwei Veränderliche, welcher mit den üblichen Bezeichnungen bis zur dritten Potenz lautet:

$$\left.\begin{aligned} f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) &= f(x,y) + \varDelta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varDelta y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varDelta x^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2\,\varDelta x\, \varDelta y \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} + \varDelta y^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(\varDelta x^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} + 3\,\varDelta x^2\, \varDelta y \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial^2 x\, \partial y}\right. \\ &\left. + 3\,\varDelta x\, \varDelta y^2 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\, \partial y^2} + \varDelta y^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir wenden diesen Satz an auf die Function:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \tag{2}$$

und erhalten:

$$\frac{\partial \cos D}{\partial H} = \cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial \cos D}{\partial h} = \sin H \cos h - \cos H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} = -\sin H \sin h - \cos H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H\, \partial h} = \cos H \cos h + \sin H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2} = - \sin H \sin h - \cos H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} = - \cos H \sin h + \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial^3 H \partial h} = - \sin H \cos h + \cos H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \partial h^2} - \cos H \sin h + \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3} = - \sin H \cos h + \cos H \sin h \cos Z$$

Nach (11) und (12) § 59. S. 291 bestehen die zwei Gleichungen:

$$\cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z = \sin D \cos M \tag{3}$$

$$\sin H \cos h - \cos H \sin h \cos Z = \sin D \cos S \tag{4}$$

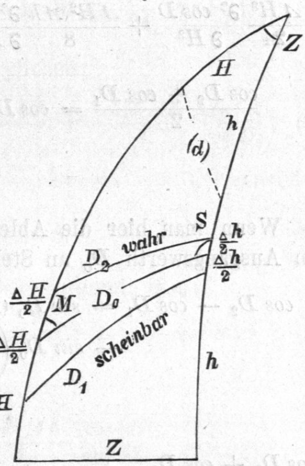
Ferner setzen wir:

$$\left.\begin{aligned}\cos H \cos h + \sin H \sin h \cos Z \\ = \cos (d)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo (d) die Bedeutung einer Distanz hat, welche zu Z und den Complementen $90^0 - H$, $90^0 - h$ als Höhen gehört, wie in Fig. 1. angedeutet ist.

Fig. 1. **Monddistanzreduction.**

$$D_1 - D_2 = \varDelta \qquad \frac{D_1 + D_2}{2} = D \qquad D - D_0 = x$$



$$\varDelta H \cos M = m \qquad \varDelta h \cos S = s$$
$$\varDelta H \sin M = m' \qquad \varDelta h \sin S = s'$$

Benützt man ausser (3), (4) und (5) auch die ursprüngliche Gleichung (2), so kann man alle oben angegebenen 9 Differentialquotienten bequem umformen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \cos D}{\partial H} &= \sin D \cos M \\ \frac{\partial \cos D}{\partial h} &= \sin D \cos S\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} &= - \cos D \\ \frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2} &= - \cos D\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H \partial h} = \cos (d) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} = - \sin D \cos M \qquad \frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3} = - \sin D \cos S \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2 \partial h} = - \sin D \cos S \qquad \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \partial h^2} = - \sin D \cos M \tag{10}$$

Nun wird die Reihe (1) auf die Function (2) angewendet, und zwar nach Fig. 1. auf den Uebergang von D_0 auf D_2:

$$\left.\begin{aligned}\cos D_2 = \cos D_0 &+ \frac{\varDelta H}{2}\frac{\partial \cos D}{\partial H} + \frac{\varDelta h}{2}\frac{\partial \cos d}{\partial h}\\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varDelta H}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} + 2\,\frac{\varDelta H}{2}\,\frac{\varDelta h}{2}\,\frac{\partial^2 \cos H}{\partial h\,\partial H} + \left(\frac{\varDelta h}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2}\right.\\ &+ \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\varDelta H}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} + 3\left(\frac{\varDelta H}{2}\right)^2 \frac{\varDelta h}{2}\,\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2\,\partial h}\right.\\ &\qquad\left. + 3\,\frac{\varDelta H}{2}\left(\frac{\varDelta h}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H\,\partial h^2} + \left(\frac{\varDelta h}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3}\right)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Wenn man ebenso auch den Uebergang von D_0 nach D_1 behandelt, so bekommt man dieselben Coefficienten wie in (11), jedoch entsteht bei den Gliedern der ersten und der dritten Ordnung ein Zeichenwechsel, d. h.:

$$\cos D_1 = \cos D_0 - \frac{\varDelta H}{2}\ldots \quad - \frac{\varDelta h}{2}\ldots \quad + \frac{1}{2}(\ldots \quad) \quad - \frac{1}{6}(\ldots \quad) \quad (12)$$

und wenn man jetzt aus (11) und (12) die Differenz und das Mittel bildet, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\cos D_2 - \cos D_1 = \varDelta H\,\frac{\partial \cos D}{\partial H} + \varDelta h\,\frac{\partial \cos D}{\partial h}\\ &+ \frac{\varDelta H^3}{24}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} + \frac{\varDelta H^2\,\varDelta h}{8}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2\,\partial h} + \frac{\varDelta H \varDelta h^2}{8}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H\,\partial h^2} + \frac{\varDelta h^3}{24}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3}\end{aligned}\right\}(13)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D_0 &+ \frac{\varDelta H^2}{8}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} + \frac{\varDelta H\,\varDelta h}{4}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H\,\partial h}\\ &+ \frac{\varDelta h^2}{8}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Wenn man hier die Ableitungen (6) bis (10) einsetzt, und zwar mit dem Ausgangswerth D_0 an Stelle des allgemeinen D, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\cos D_2 - \cos D_1 &= \sin D_0\,(\varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S)\\ &- \sin D_0\left(\frac{\varDelta H^3}{24}\cos M + \frac{\varDelta H^2\,\varDelta h}{8}\cos S\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\varDelta H\,\varDelta h^2}{8}\cos M + \frac{\varDelta h^3}{24}\cos S\right)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D_0 - \left(\frac{\varDelta H^2}{8} + \frac{\varDelta h^2}{8}\right)\cos D_0 + \frac{\varDelta H\,\varDelta h}{4}\cos(d) \quad (16)$$

Um von $\cos D$ auf D selbst zu kommen, muss auch $\cos D$ entwickelt werden. Wir setzen hiezu:

$$D_1 - D_2 = \varDelta \quad (17)$$

und

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = D \quad (18)$$

wo das arithmetische Mittel D zwar sehr nahe mit D_0 von Fig. 1. übereinstimmt, aber innerhalb der Genauigkeit dritter Ordnung nicht mit D_0 verwechselt werden darf. Mit diesen Bezeichnungen ist:

$$D_1 = D + \frac{\varDelta}{2}$$

$$\cos D_1 = \cos D - \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{1}{2}\left(\frac{\varDelta}{2}\right)^2 \cos D + \frac{1}{6}\left(\frac{\varDelta}{2}\right)^3 \sin D$$

$$\cos D_1 = \cos D - \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D + \frac{\varDelta^3}{48} \sin D$$

ebenso

$$\cos D_2 = \cos D + \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D - \frac{\varDelta^3}{48} \sin D$$

$$\cos D_2 - \cos D_1 = \sin D \left(\varDelta - \frac{\varDelta^3}{24}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D \tag{20}$$

(15) und (19) werden verglichen und geben:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} = \frac{\sin D_0}{\sin D} \Big(& \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S - \frac{\varDelta H^3}{24} \cos M \\ & - \frac{\varDelta H^2\, \varDelta h}{8} \cos S - \frac{\varDelta H\, \varDelta h^2}{8} \cos M - \frac{\varDelta h^3}{24} \cos S\Big) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ebenso werden auch (16) und (20) verglichen:

$$\cos D \left(1 - \frac{\varDelta^2}{8}\right) = \cos D_0 \left(1 - \frac{\varDelta H^2 + \varDelta h^2}{8} + \frac{\varDelta H\, \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D_0}\right) \tag{22}$$

In erster Näherung ist nach (21):

$$\varDelta = \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S \tag{23}$$

was mit dem früheren (14) § 59. S. 291 übereinstimmt, also:

$$\varDelta^2 = \varDelta H^2 \cos^2 M + 2\, \varDelta H\, \varDelta h \cos M \cos S + \varDelta h^2 \cos^2 S \tag{24}$$

Dieses in (22) gesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 & - \frac{\varDelta H^2}{8} - \frac{\varDelta h^2}{8} + \frac{\varDelta H\, \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D_0} \\ & + \frac{\varDelta H^2}{8} \cos^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \cos^2 S + \frac{\varDelta H\, \varDelta h}{4} \cos M \cos S \end{aligned}$$

$$\frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 - \frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M - \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S + \frac{\varDelta H\, \varDelta h}{4} \left(\frac{\cos (d)}{\cos D_0} + \cos M \cos S\right) \tag{25}$$

Zur Vorbereitung von (21) gehen wir von dem Cosinusquotienten in (25) zum Sinusquotienten über, und setzen zunächst:

$$D = D_0 + x \tag{26}$$

$$\cos D = \cos D_0 - x \sin D_0, \qquad \sin D = \sin D_0 + x \cos D_0$$

$$\frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 - x \operatorname{tang} D_0 \qquad \frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + x \operatorname{cotg} D_0$$

$$x = \left(1 - \frac{\cos D}{\cos D_0}\right) \cotg D_0 \tag{27}$$

$$\frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + \left(1 - \frac{\cos D}{\cos D_0}\right) \cotg^2 D_0 \tag{28}$$

also nach (25):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + \Big\{ & \frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S \\ & - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \left(\frac{\cos (d)}{\cos D_0} + \cos M \cos S\right)\Big\} \cotg^2 D_0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Es empfiehlt sich nun, Abkürzungen einzuführen:

$$\varDelta H \cos M = m \qquad \varDelta h \cos S = s \tag{30}$$

$$\varDelta H \sin M = m' \qquad \varDelta h \sin S = s' \tag{31}$$

auch ist in den höheren Gliedern D und D_0 nicht mehr zu unterscheiden.

Damit werden (21) und (29):

$$\varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} = \frac{\sin D_0}{\sin D} \left(m + s - \frac{\varDelta H^2}{24} (m + 3\,s) - \frac{\varDelta h^2}{24} (s + 3\,m)\right)$$

$$\frac{\sin D_0}{\sin D} = 1 - \left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{m\,s}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D}\right) \cotg^2 D$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen zusammen, bis zur dritten Potenz einschliesslich genau:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} = m + s - \frac{\varDelta H^2}{24} (m + 3\,s) - \frac{\varDelta h^2}{24} (s + 3\,m) \\ - (m + s) \left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{m\,s}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D}\right) \cotg^2 D \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Das Glied $\varDelta^3$ links wird nach rechts hinüber gebracht in der Form

$$\varDelta^3 = (m + s)^3 = m^3 + 3\,m^2\,s + 3\,m\,s^2 + s^3 \tag{33}$$

$$\frac{\varDelta^3}{24} = \frac{m^2}{24} (m + 3\,s) + \frac{s^2}{24} (s + 3\,m)$$

Indem man dieses mit der ersten Linie von (32) zusammen nimmt, und nach (30) und (31) berücksichtigt, dass

$$\varDelta H^2 - m^2 = m'^2 \qquad \text{sowie} \qquad \varDelta h^2 - s^2 = s'^2$$

hat man:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = m + s - \frac{m'^2}{24} (m + 3\,s) - \frac{s'^2}{24} (3\,m + s) \\ - (m + s) \left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{m\,s}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D}\right) \cotg^2 D \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

oder in anderer Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = m + s - \frac{1 + 2\cos^2 D}{24 \sin^2 D}\,(m\,m'^2 + s\,s'^2) \\ + \frac{1}{8 \sin^2 D}\Big(- m'^2 s - m\,s'^2 + 2\,m\,s\,(m + s)\cos^2 D \\ + 2\,(m + s)\,\varDelta H\,\varDelta h \cos(d) \cos D\Big) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Glieder dritter Ordnung, welche in (34) und (35) auf $m + s$ folgen, stellen den Fehler der nach der gewöhnlichen Mittelhöhenformel (23) reducirten Distanz vor.

Für gelegentliche Controllrechnung stellen wir auch die Formel für die Differenz x zwischen dem Mittel der Distanzen und der Mitteldistanz nach (27) und (25) auf:

$$\left.\begin{aligned} D - D_0 = x = \operatorname{cotg} D \Big(\frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S \\ - \frac{\varDelta H\,\varDelta h}{4}\Big(\frac{\cos(d)}{\cos D} + \cos M \cos S\Big)\Big) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

oder mit den Abkürzungen (30) und (31):

$$x = \frac{\operatorname{cotg} D}{8}\Big(m'^2 + s'^2 - 2\,m\,s - 2\,\varDelta H\,\varDelta h\,\frac{\cos(d)}{\cos D}\Big) \quad (37)$$

Dieses kann man auch wieder in (34) einsetzen, und hat damit:

$$\varDelta = m + s - \frac{m'^2}{24}(m + 3\,s) - \frac{s'^2}{24}(3\,m + s) - (m + s)\,x \operatorname{cotg} D \quad (38)$$

Zu einem **Zahlenbeispiel** wählen wir die Verhältnisse so, dass die Glieder höherer Ordnung möglichst gross werden, nämlich:

	Mond	Stern oder Sonne	
Scheinbare Höhen	$H_1 = 10^0\ 0'$	$h_1 = 1^0\ 0'$	(39)
Wahre Höhen	$H_2 = 10^0\ 54'$	$h_2 = 0^0\ 36'$	
Differenzen	$\varDelta H = +\ 54'$	$\varDelta h = -\ 24'$	
Mittlere Höhen	$H_0 = 10^0\ 27'$	$h_0 = 0^0\ 48'$	

Die scheinbare Distanz sei:

$$D_1 = 15^0\ 0' \quad (40)$$

Damit berechnet man den Zenitwinkel Z:

$$\cos Z = \frac{\cos D_1 - \sin H_1 \sin h_1}{\cos H_1 \cos h_1} \qquad Z = 12^0\ 4'\ 6{,}54'' \quad (41)$$

Damit, nebst den unter (39) gegebenen Höhen, findet man auch die übrigen Distanzen:

$$D_2 = 15^0\ 48'\ 26{,}22'' \qquad D_0 = 15^0\ 23'\ 43{,}04'' \quad (42)$$

Ferner:

$$M = 128^0\ 2'\ 54'' \qquad S = 50^0\ 45'\ 36'' \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \Delta H \cos M = -\ 1996{,}90'' = -\ 33'\ 16{,}90'' \\ s &= \Delta h \cos S \ = -\ \ 910{,}90'' = -\ 15'\ 10{,}90'' \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$m + s = -\ 2907{,}80'' = -\ 48'\ 27{,}80'' \tag{45}$$

Alles dieses ist streng sphärisch berechnet. Nun bildet man folgende Vergleichung:

Scheinbare Distanz $D_1 = 15^0\ 0'\ 0''$ $\qquad \dfrac{D_1 + D_2}{2} = D = 15^0\ 24'\ 13{,}11''$

Wahre Distanz $D_2 = 15^0\ 48'\ 26{,}22''$ $\qquad D_0 = 15^0\ 23'\ 43{,}04''$

Differenz $D - D_0 = x = +\ 30{,}07''$ (46)

Andererseits findet man nach (37):

$$x = +\ 14{,}33'' + 2{,}74'' - 8{,}01'' + 21{,}00'' = +\ 30{,}06'' \tag{47}$$

was mit (46) genügend stimmt. Diesen Werth x kann man in (38) setzen oder auch unmittelbar die Formel (35) anwenden.

In beiden Fällen erhält man:

$$D_1 - D_2 = \Delta = -\ 48'\ 27{,}80'' + 1{,}58'' = -\ 48'\ 26{,}22'' \tag{48}$$

was mit der Vergleichung von (40) und (42) vollständig stimmt.

Die Glieder dritter Ordnung oder der Fehler, den man begeht, wenn man schlechthin nach der Mittelhöhenformel (23)

$$\Delta = \Delta H \cos M + \Delta h \cos S$$

rechnet, betragen also in diesem Falle nach (48) immerhin $1{,}58''$ oder rund $2''$, indessen ist dieser Betrag ein ausnahmsweise hoher, der Fehler wird im Allgemeinen $1''$ nicht überschreiten.

Betrachten wir, um dieses zu untersuchen, die Gleichung (35) näher, so fällt zuerst auf, dass die Correctionsglieder sämmtlich $\sin^2 D$ im Nenner haben, d. h. die einfache Formel (23) ist ganz unzulässig, wenn die Distanz nahezu $= 0^0$ oder nahezu $= 180^0$ wird.

Um den Grössenbetrag der Correction summarisch zu schätzen, kann man zunächst das Hauptglied $m m'^2$ von (35) ins Auge fassen, denn wegen der grossen Mondparallaxe sind die Glieder m und m' (vgl. (30) und (31)) im Allgemeinen erheblich grösser als die Glieder s und s'.

Wir nehmen also nach (35) die Function in Betracht:

$$f = \frac{1 + 2 \cos^2 D}{24 \sin^2 D}\, m m'^2 \quad \text{wo} \quad m m'^2 = \Delta H^3 \cos M \sin^2 M \tag{49}$$

$M = 0^0$ und $M = 90^0$ macht diese Function $= 0$ und durch Differentiiren findet man, dass $\cos M \sin^2 M$ sein Maximum erreicht mit $M = 54^0\ 44'$ oder $M = 125^0\ 16'$, und zwar ist dann $\cos M \sin^2 M = 0{,}385$, also:

$$f_{\max} = 0{,}385\ \frac{1 + 2 \cos^2 D}{24 \sin^2 D}\ \frac{\Delta H^3}{\varrho^2} \tag{50}$$

Der Maximalwerth von $\varDelta H$ ist nach S. 315 rund $= 55' = 3300''$, und setzt man dieses nebst $\varrho = 206\,265''$ ein, so erhält man:

$$f_{\max} = 0{,}01355'' \,\frac{1 + 2\cos^2 D}{\sin^2 D}$$

Hiernach wird berechnet:

$$\left.\begin{array}{rr} D = 1^0 & f_{\max} = 133'' \\ 2 & 33 \\ 5 & 5 \\ 10 & 1{,}3 \\ 15 & 0{,}6 \\ 20 & 0{,}3 \end{array}\right\} \tag{51}$$

Wenn man die Annahme macht, dass die Distanz D klein ist, so dass $\cos D = 1$ gesetzt werden kann, dann vereinfacht sich die Formel (35) noch sehr erheblich. Wir wollen $\varDelta = m + s + \varDelta''$ setzen, dann ist nach (35) mit $\cos D = 1$ und auch $\cos(d) = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta'' = -\dfrac{1}{8\sin^2 D}\,(m m'^2 + s s'^2 + m'^2 s + m s'^2 - 2 m^2 s - 2 m s^2 \\ \qquad\qquad + 2 m\,\varDelta H \varDelta h + 2 s\,\varDelta H \varDelta h) \end{array}\right\} \tag{52}$$

Nachdem man aber $\cos D = 1$ gesetzt hat, ist es ebenso erlaubt zu setzen:

$$S = 180^0 - M \qquad \cos S = -\cos M \qquad \sin S = \sin M$$

Folglich nach (30) und (31):

$$m = \varDelta H \cos M \qquad s = -\varDelta h \cos M$$
$$m' = \varDelta H \sin M \qquad s' = \varDelta h \sin M$$

und wenn man dieses in (52) setzt, so findet man erhebliche Vereinfachung und Zusammenziehung, aus welcher schliesslich hervorgeht:

$$\varDelta'' = -\frac{\cos M \sin^2 M}{8\sin^2 D}\,\frac{(\varDelta H - \varDelta h)^3}{\varrho^2} \tag{53}$$

Dieses ist eine ganz gute Näherungsformel zur Schätzung des Fehlers, welcher bei der gewöhnlichen Mittelhöhenrechnung nach (23) begangen wird. Wir erproben die Formel (53) an dem Zahlenbeispiel (39) bis (48), nämlich:

$$M = 128^0\ 3',\quad 180^0 - S = 129^0\ 14',\ \text{also jetzt im Mittel } M = 128^0\ 38'$$
$$D = 15^0\ 24',\quad \varDelta H - \varDelta h = 54' - (-24') = 78' = 4680''$$

Dieses in (53) eingesetzt gibt:

$$\varDelta'' = +1{,}6''$$

was in der That mit dem zweiten Gliede von (48) stimmt.

Die Formel (53) führt mit $\varDelta h = 0$ im Wesentlichen wieder auf die Function f in (49) zurück, wenn dort $\cos D = 1$ gesetzt wird, und da das nur von Refraction herrührende $\varDelta h$ in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle das von der Mondparallaxe abhängige $\varDelta H$ nicht erheblich vergrössert, so kann man die kleine Tabelle (51) wohl als Fehler-maass für die gewöhnliche Distanz-Reductionsberechnung mit Mittelhöhen nach der Formel (23) gelten lassen.

Wir entnehmen daraus, dass diese Berechnung meist innerhalb 1″ genau ist, zumal Distanzen unter 20° (welche im Nautical Almanac nicht vorkommen) selten angewendet werden.

Als Beispiel einer kleinen Distanz nehmen wir 8° bis 9°, was ich in der Oase Farafrah am 2. Januar 1874, Abends, zwischen dem Mond und dem Fixstern Pollux maass (s. o. S. 311). Diese Distanz kommt nicht im Nautical Almanac, da sie aber sehr bequem zu messen war, und bei kleinen Distanzen die Instrumentenfehler von wenig Einfluss sind, wurde sie im Verlauf von zwei Stunden 24 Mal gemessen. Es fragt sich nun, ob die gewöhnliche Reductionsrechnung noch zulässig war? Zur Anwendung unserer Formel (53) haben wir aus der Reductionsberechnung:

$$D_0 = 8' \, 36'' \qquad M = 163^0 \, 26'$$

$$\varDelta H = + 25' \, 14'' = + 1514'' \qquad \varDelta h = - 40'' \qquad \varDelta H - \varDelta h = + 1554''$$

Damit gibt die Formel (53):

$$\varDelta'' = - 0{,}04''$$

Es ist also in Hinsicht auf die Schärfe der Reductionsrechnung von dieser kleinen Distanz nichts zu fürchten.

Solche kleine Distanzen geben allerdings meist auch sehr ungleiche Differenzen, z. B. in diesem Falle:

Greenwichzeit 6^h	$D = 9^0 \, 59' \, 43''$		
		$- 31' \, 53''$	
7	9 27 50		$+ 8''$
		$- 31 \; 45$	
8	8 56 5		$+ 6$
		$- 31 \; 39$	
9	8 24 26		

Wenn man aber überhaupt auf Jahrbuchsdistanzen verzichtet und seine Distanzen (wie diese) selbst rechnet, so wird man das Intervall eng nehmen und kann dann die zweiten Differenzen leicht berücksichtigen.

§ 66. Geschwindigkeit der Monddistanz-Aenderung.

Die Aenderung der wahren, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen, Monddistanz ist durch den im astronomischen Jahrbuch zwischen je zwei Distanzen angegebenen Proportional-Logarithmus gegeben. Nach § 63. S. 314 schwankt diese Aenderung etwa zwischen 0,4° und 0,6° in einer Stunde und ist im Mittel etwa 0,5° = 30′ in 1 Stunde oder 30″ in 1 Minute. Die durch die Differenzen der Proportional-Logarithmen ausgedrückte Beschleunigung der Distanzänderung ist im Allgemeinen klein, so dass man innerhalb 10—15 Minuten die Distanzänderung als gleichförmig, d. h. proportional der Zeitänderung annehmen darf.

Das bezieht sich aber alles nur auf „w a h r e“ Distanzen, wie sie einem im Erdmittelpunkt befindlichen Beobachter erscheinen würden, dagegen