buchs treten auf bei Sternen, die weit von der Mondbahn abliegen, namentlich Fomalhaut, mit 30° südlicher Declination.

Es erhellt aus diesen bedeutenden Unterschieden der Distanzänderungen, dass es sich wohl lohnt, vor Beginn der Messungen zu überlegen, ob der Mond gerade in langsamer oder rascher Bewegung ist, und welche Distanzen zu gegebener Zeit die günstigsten sind (die kleinsten Prop. Log. haben). Später werden wir noch andere Umstände ähnlicher Art kennen lernen (§ 66.), von denen wir zum Voraus bemerken, dass man den Mond im Meridian vermeiden soll.

Die Mondhorizontal-Parallaxe, das wichtigste Element der Reductionsberechnung, schwankt zwischen ziemlich weiten Grenzen, nämlich zwischen 61′ 24″ und 53′ 56″, das Mittel ist = 57′ 40″, also die grösste Abweichung vom Mittel = 6 %. Die in die Reductionsrechnung eingehenden Höhendifferenzen des Mondes stellen wir, um einen Ueberblick ihres Verlaufes zu erhalten, in runden Zahlen in folgender Tabelle zusammen:

Scheinbare Höhe H	Refraction r	$\pi \cos (H - r) - r$		
		Maximum	Mittel	Minimum
0°	34,9′	26,5′	22,8′	19,0′
2	18,1	43,3	39,5	35,8
5	9,8	51,4	47,7	44,0
10	5,3	55,2	51,5	47,8
15	3,5	55,8	52,2	48,6
20°	2,6′	55,1′	51,6′	48,1′
25	2,0	53,7	50,3	46,9
30	1,7	51,5	48,3	45,0
35	1,3	49,0	45,9	42,9
40	1,1	46,0	43,1	40,2
45°	1,0	42,4′	39,8′	37,1′
60	0,5	30,2	28,3	26,5
75	0,2	15,8	14,8	13,8
90	0,0	0,0	0,0	0,0

Die Function $\pi \cos (H - r) - r$ hat ein sehr flaches Maximum mit geringer Aenderung zwischen 5° und 35°. In Hinsicht auf die Functionsgrösse ist hier der Werth von π selbst wichtiger als der Höhenwinkel H.

§ 64. Beispiel einer Monddistanz-Reduction.

In der Oase Dachel der libyschen Wüste machte ich am 9. Januar 1874, Vormittags, mit dem auf S. 157 gezeichneten Sextanten folgende 13 Distanzmessungen zwischen dem Mond und der Sonne. Der Mond stand rechts, die Sonne links, der Sextant musste daher verkehrt gehalten werden. Der Mond wurde ohne Blendung, die Sonne mit dem stark rothen Glas [[1] S. 173] vor dem grossen Spiegel beobachtet.

Nummer	Chronometer 9. Januar 1874, Vormittag	Abgelesene Distanz		
1.	$8^h\ 57^m\ 52^s$	$106^0\ 18'\ 0''$		
2.	8 59 2	106 17 30		
3.	8 59 50	106 16 40	Lufttemperatur	
4.	9 3 10	106 14 30	$= 17^0$ C.	
5.	9 5 55	106 13 20		(1)
6.	9 7 30	106 12 50		
7.	9 8 23	106 12 0	Barometerstand	
8.	9 9 3	106 12 0	$= 756$ mm	
9.	9 9 58	106 11 40		
10.	9 10 41	106 12 0		
11.	9 11 42	106 11 0		
12.	9 12 28	106 10 0		
13.	9 13 15	106 10 20		
Mittel	$9^h\ 6^m\ 50^s$	$106^0\ 13'\ 13''$		

Aus 14 Einstellungen der Sonne mit Ocularblendung ergab sich die Indexcorrection $= -7'\ 17''$, hiezu kommt für die Distanzen noch der Einfluss der Blendung vor dem grossen Spiegel, nämlich nach S. 173 (Bestimmung von 1874), $[1] = -24''$, ferner für Excentricität und Theilung, nach S. 214, $-36''$ und endlich noch eine besondere Correction von $-7''$ für den Mondort, welche, als nachträgliche Correction zu den Angaben des Nautical Almanac für 1874, von Greenwich mitgetheilt war, also zusammen:

$$\text{Correction} = -7'\ 17'' \quad -24'' \quad -36'' \quad -7'' = -8'\ 24'' \qquad (2)$$

bringt man dieses an dem Mittel der Messungen (1) an, so hat man:

$$\text{Chronometer} = 9^h\ 6^m\ 50^s \qquad \text{Distanz} = 106^0\ 4'\ 49'' \qquad (3)$$

oder für astronomische Zeitzählung (S. 16):

$$\text{8. Januar 1874:} \quad \text{Chronometer} = 21^h\ 6^m\ 50^s \qquad \text{Distanz} = 106^0\ 4'\ 49'' \qquad (3a)$$

Indem wir es vorerst unentschieden lassen, ob man so lange Reihen, wie die obige (1), schlechthin in arithmetische Mittel zusammenfassen, und dann wie *eine* Beobachtung weiter behandeln darf, führen wir die Reductionsberechnung für das Mittel (3) nun aus.

Da die Höhen nicht gemessen sind, brauchen wir zu deren Berechnung die Breite, die Ortszeit und die genäherte Länge. Die Breite wurde mit dem Theodolit von S. 38 durch Polarsternhöhen und Sonnenmittagshöhen gefunden, wie schon auf S. 136 angegeben ist, nämlich im Mittel:

$$\text{Dachel:} \quad \varphi = 25^0\ 42'\ 0'' \qquad (4)$$

die Ortszeit durch correspondirende Sonnenhöhen:

$$\text{Ortszeit} = \text{Chronometer} + 1^h\,0^m\,22^s \qquad (5)$$

Endlich die geographische Länge, theils aus älteren Karten, theils aus dem Itinerar, vorläufig genähert:

$$\lambda = 1^h\,56^m\,0^s \text{ östlich von Greenwich} \qquad (6)$$

Es folgt jetzt die Entnahme von Rectascension und Declination der beiden Gestirne aus dem Jahrbuch, und die Berechnung der Stundenwinkel. Man hat zuerst für den Mond mit allen Einzelheiten:

Chronometer 1874, 8. Januar	$21^h\ 6^m\ 50^s$	
Reduction auf Ortszeit nach (5)	$+\ 1^h\ 0^m\ 22^s$	
Mittlere Ortszeit t'	$22^h\ 7^m\ 12^s$	(7)
Genäherte Länge gegen Greenwich (6)	$-\ 1^h\ 56^m\ 0^s$	
Genäherte mittlere Greenwicher Zeit.	$20^h\ 11^m\ 12^s$	(8)

Damit geht man in den Nautical Almanac ein und entnimmt durch Interpolation zwischen die Angaben für 8. Januar 20^h und 8. Januar 21^h:

Rectascension des Mondes	$\alpha = 12^h\ 15^m\ 40^s$	(9)
Declination des Mondes	$\delta = +\ 1^0\ 49'\ 18''$	(10)

Mit der Ortszeit (7) rechnet man weiter nach S. 21—22:

Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag, 8. Januar. . .	$19^h\ 11^m\ 28^s$	
$(\varDelta\lambda)$ für $\lambda = 1^h\ 56^m$ nach der Hülfstafel S. [4] I.	$-\ 19^s$	
	$19^h\ 11^m\ 9^s$	
Mittlere Ortszeit nach (7)	$22^h\ 7^m\ 12^s$	
Zur Verwandlung in Sternzeit nach S. [4] I.	$+\ 3^m\ 38^s$	
Ortssternzeit =.	$41^h\ 21^m\ 59^s$	
Oder mit Abzug von 24^h Sternzeit = ...	$17^h\ 21^m\ 59^s$	(11)
Die Rectascension (9) abgezogen	$-\ 12^h\ 15^m\ 40^s$	
Stundenwinkel des Mondes t = ...	$5^h\ 6^m\ 19^s$	
Oder in Bogen verwandelt nach S. [2] t = ...	$76^0\ 34'\ 45''$	
	$\frac{t}{2} = 38^0\ 17'\ 22''$	(12)

Dieselbe Rechnung macht man auch für das zweite Gestirn, doch kann man, wenn, wie in unserem Fall, dieses zweite Gestirn die Sonne ist, den Stundenwinkel auch mittelst der Zeitgleichung bestimmen, dieselbe findet sich für die Greenwicher Zeit (8) $g = +\ 7^m\ 22^s$, und subtrahirt man dieses von der mittleren Ortszeit (7), so bekommt man die wahre Ortszeit oder den Stundenwinkel der Sonne, nämlich:

$$\text{Sonne } t = 21^h\,59^m\,50^s = 329^0\,57'\,30'' \qquad \frac{t}{2} = 164^0\,58'\,45'' \qquad (13)$$

Hiezu auch die Declination der Sonne

$$\delta = -\ 22^0\ 6'\ 52'' \qquad (14)$$

Nun folgt nach dem Muster von § 4. S. 13 die Berechnung der Höhen und Azimute beider Gestirne, nur auf 1′ genau. In unserem Fall hat man für den Mond gegeben (4), (10), (12) und für die Sonne (4), (14) und (13), die Resultate sind:

	Mond	Sonne	
Wahre Höhen	$H = 12^0\ 52'$	$h = 34^0\ 1'$	(15)
Azimute	$a = 85^0\ 46'$	$a_s = 325^0\ 58'$	(16)

$$Z = a - a_s = (360^0 + 85^0\ 46') - 325^0\ 58' = 119^0\ 48' \qquad (17)$$

Diese Höhen und Azimute werden in dem Schema von S. 319 an ihren Stellen unter (*b*), (*a*) und (*e*) eingetragen.

Dieses Schema S. 319 enthält die ganze Monddistanz-Reductions-Berechnung, welche wir nun in ihren einzelnen Theilen verfolgen.

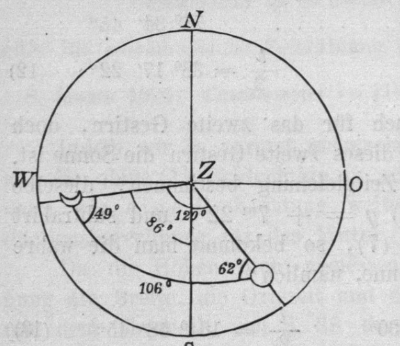
Mit den bei (15), (16) und (17) angegebenen Höhen und Azimuten zeichnet man zuerst die Figur 1. (s. unten) in nahezu richtigen Verhältnissen.

Nun entnehmen wir vollends alle aus dem Nautical Almanac nöthigen Zahlenwerthe und setzen sie auf S. 319 an die mit * bezeichneten Stellen, nämlich vom Nautical Almanac 1874, S. 4 die Mondparallaxe $\pi = 54'\ 12''$ und den Mondhalbmesser 14′ 47″, vom Nautical Almanac 1874, S. 2 den Sonnenhalbmesser 16′ 18″, zugleich auch vom Nautical Almanac S. 15 die nächst vorhergehende Nautical Almanac-Distanz für XVIII^h 107^0 3′ 13″ mit dem Proportional-Logarithmus 0.3483.

Die Berechnung von S. 319 beginnt oben bei (*a*) mit der Höhenparallaxe *p* des Mondes nach S. [19].

Mit vorläufiger Uebergehung von (*c*) und (*d*) kommt dann in (*e*) die Einsetzung der Refractionen aus den Tafeln S. [5]—[13], die Zufügung der Höhenparallaxen, und damit die Berechnung der Höhendifferenzen $\varDelta H$ und $\varDelta h$ nach (2) und (3) § 59. S. 289.

Fig. 1.



Indem man die bei (*e*) auftretenden scheinbaren Höhen 12^0 3′ und 24^0 2′ nach (*b*) hinauf an ihre Stellen setzt, hat man dort nun alles ausgefüllt bis auf die Spalte mit den Distanzen D, D' und D_0. Um diese vorerst auf etwa 1′ genau zu erhalten, muss man die Berechnungen (*f*) vorläufig ausfüllen, womit $D' = 106^0\ 36'$ in (*b*) eingesetzt werden kann. Um auch die wahre Distanz D vorläufig auf 1′ genau zu erhalten, muss man entweder die Berechnung (*c*) vorläufig machen oder die Berechnung (*h*) mit einer vorläufig angenommenen Länge λ rückwärts ausführen bis zum Werthe 106^0 4′, den man als D nach (*b*) hinaufsetzt.

Reduction einer Monddistanz.

Oase Dachel. 9. Januar 1874, Vormittag. $\varphi = 25^0\ 42'$.

Hor. Parallaxe des Mondes*	$\pi = 54'\ 12'' = 3252''$	$\log \pi$	3.51215	
Wahre Höhe des Mondes	$H = .\ 12^0\ 52'$	$\log \cos H''$ . . .	9.99040	
Correction S. [19] I.	$-\ p_0 = -\ 53'$	Correct. S. [19] II.	9.99973	
$H' =$	$11^0\ 59'$	$\log p$	3.50228	(a)
Correction S. [19] III. . . .	$+\ 1'$	$p =$	$3179''$	
$H'' =$	$12'\ 0''$	$p =$	$52'\ 59''$	

	Distanz	Mondhöhe	Sonnenhöhe			
wahr D	$106^0\ 4'$	$12^0\ 52'$	$34^0\ 1'$	Azimut-Mond	$85^0\ 46'$	
scheinbar D'	$106^0\ 36'$	$12^0\ 3'$	$34^0\ 2'$	Azimut-Sonne	$325^0\ 58'$	(b)
Mittel $D_0 =$	$106^0\ 20'$	$H_0 = 12^0\ 28'$	$h_0 = 34^0\ 2'$	Zenitwinkel $Z =$	$119^0\ 48'$	

$\log \sin Z$	9.93840		$\log \sin Z$ . . .	9.93840		
$Erg. \log \sin D_0$.	0.01781		$Erg. \log \sin D_0$	0.01781		
$\log \cos h_0$	9.91840		$\log \cos H_0$ . .	9.98964		
$\log \sin M$	9.87461	$M = 48^0\ 31'$	$\log \sin S$ . . .	9.94585	$S = 51^0\ 59'$	(c)
$\log \cos M$	9.82112		$\log \cos S$ . . .	9.67161		
$\log \Delta H$	3.46538		$\log \Delta h$	1.88081_n		
$\log \Delta H \cos M$ . .	3.28650		$\log \Delta h \cos S$.	1.55266_n		

$m = +\ 1934'' = +\ 32'\ 14''$, $s = -\ 36$, $(m + s = +\ 31'\ 38'')$ (d)

	Mond		Sonne		
Wahre Höhen		$12^0\ 52'\ 0''$		$34^0\ 1'\ 0''$	
Höhenparallaxen (s. o. (a) u. S. [7])		$-\ 52'\ 59''$		$-\ 8''$	
Wahre Höhen für Refraction . .		$11^0\ 59'\ 1''$		$34^0\ 0'\ 52''$	
Mittlere Refraction S. [13] . .	$4'\ 24''$		$1'\ 25''$		
Correction für 17^0 S. [9] . . .	$-\ 7''$	$+\ 4'\ 19''$	$-\ 2''$	$+\ 1'\ 24''$	(e)
Correction für 756 mm S. [11] .	$+\ 2''$		$+\ 1''$		
Scheinbare Höhen		$12^0\ 3'\ 20''$		$34^0\ 2'\ 16''$	
Höhendifferenzen		$\Delta H = +\ 48'\ 40''$		$\Delta h = -\ 1'\ 16''$	
		$= +\ 2920''$		$= -\ 76''$	

			Zusammenfassung	
Gemessene Randdistanz . . .	$106^0\ 13'\ 13''$			
Indexcorrection etc. — . . .	$8'\ 24''$		$-\ 8'\ 24''$	
Scheinbare Randdistanz . . .	$106^0\ 4'\ 49''$		$+\ 14'\ 48''$	
			$+\ 16'\ 18''$	
Mondhalbmesser* . . $14'\ 47''$			$-\ 31'\ 38''$	(f)
Correction S. [18] I. $+\ 3''$		$+\ 14'\ 48''$	$-\ 6''$	
Correction S. [18] II. $-\ 2''$			$+\ 31'\ 6''\ -\ 40'\ 8''$	
Sonnenhalbmesser* . $16'\ 18''$		$+\ 16'\ 18''$		
Correction S. [18] II. $-\ 0''$			$y = -\ 9'\ 2''$	

Mittelpunktsdistanz $D' =$ . . .	$106^0\ 35'\ 55''$	
S. oben bei (d): $-\ (m + s) =$	$-\ 31'\ 38''$	
	$106^0\ 4'\ 17''$	(g)
Correct. f. Seitenparallaxe S. [20]	$-\ 6''$	
Reducirte Distanz $D =$ . . .	$106^0\ 4'\ 11''$	

Nächst vorhergehende Nautical Almanac-Distanz* .	$107^0\ 3'\ 13''$	für $XVIII^h$ Prop. Log.*	0.34830	
ΔD	$0^0\ 59'\ 2'' = 3542''$	$\log \Delta D$ . .	3.54925	
		$\log \Delta T$ . .	3.89755	
$\Delta T = 7899 =$	$2^h\ 11^m\ 39^s$			(h)
Correct. f. zweite Diff. nach S. 307	0^s			
Gr.-Zeit $= XVIII + \Delta T =$	$20^h\ 11^m\ 39^s$	. . . .	$20^h\ 11^m\ 39^s$	
Mittlere Ortszeit (7) S. 317 . .	$22^h\ 7^m\ 12^s$	Chronometer	$21^h\ 6^m\ 50^s$	
Länge östl. von Greenw., $\lambda =$	$1^h\ 55^m\ 33^s$	Gr.-Zeit — Chron. $=$	$-\ 0^h\ 55^m\ 11^s$	

(Fortsetzung von S. 318.)

Zur Controlle kann man auch aus den Tafeln [22] und [23] die Differenz $D - D'$ näherungsweise nachsehen.

Nun folgt die Berechnungsgruppe (*c*) nach den Formeln (21) und (15) § 59. S. 291—292 mit dem Resultat (*d*).

Bei (*c*) hat man als Nebenresultat auch die Winkel *M* und *S* erhalten, und kann damit die Halbmesser-Correctionen für Refraction bei (*f*), welche bei der ersten vorläufigen Durchrechnung noch übergangen wurden, nach S. [18] II. endgültig einsetzen, worauf auch die übrige Berechnung (*g*) und (*h*) keine Schwierigkeit mehr bietet.

So umständlich auch diese Rechnung nach dem Schema S. 319 auf den ersten Blick zu sein scheint, so ist sie doch, sobald man einmal den Gang im Kopfe hat, und sich eines autographirten Schemas bedient, sehr kurz und übersichtlich; die verschiedenen indirecten Rechnungen treten in einem solchen Schema gar nicht besonders auf, denn man schreibt nur einmal definitiv (mit Tinte) und füllt, so lange ein Werth erst genähert bekannt ist, seine Spalte vorläufig (mit Blei) aus. Die Rechnung entsteht also nicht in der Aufeinanderfolge des Schemas, wie wir schon in der Anleitung S. 318 angegeben haben.

Reduction der Einzeldistanzen. Die in dem bisher behandelten Beispiel vorgenommene Zusammenfassung einer grossen Gruppe von Messungen (13) in ein arithmetisches Mittel gibt wohl rasch ein Schlussresultat, es ist aber, namentlich bei kleinen Höhen, nicht unbedenklich, die hiebei nöthige Annahme zu machen, dass die Reduction proportional der Zeit verläuft. Auch lässt man sich bei solcher Zusammenfassung die Genauigkeitsprobe entgehen, welche in der Vergleichung verschiedener Reductionsberechnungen liegt.

Besser als ein Gruppenmittel sind mehrere Gruppen von je 2—4 Einzelmessungen.

Man kann aber auch, ohne viel mehr Reductionsarbeit als bei der Bildung von solchen Partialmitteln, alle einzelnen Distanzen reduciren, indem man so verfährt: Man wählt für jede grosse Gruppe 3—4 Zeiten aus, z. B. in gleichen Intervallen, ohne dass gerade auf diese Zeiten auch Messungen fallen. Man betrachtet nun nicht die reducirte Distanz selbst, sondern die Reductionsdifferenz als Ziel der Reductionsrechnung, wozu ja eine beiläufige Distanz (auf 1′) genügt. Hat man dann durch 3—4 solcher Rechnungen die Reduction als Function der Zeit dargestellt, so kann man die Reduction für jede Zwischenzeit angeben und folglich jede einzelne Distanz reduciren.

Für das vorgelegte Beispiel (S. 319) von der Oase Dachel, nebst einer zweiten nach einer Pause von sechs Minuten darauf folgenden Gruppe, sind folgende Reductionen (einschliesslich Index, Blendung etc. nach der Zusammenfassung bei (*f*) auf S. 319) berechnet worden, deren Vertheilung eine durch den allmäligen Gang der Rechnung erzeugte ungleichförmige ist.

Nummer	Chronometer	$\varDelta t$	Reduction y	$\varDelta y$	$\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$	
1.	$9^h\ 0^m\ 0^s$		$-9'\ 2''$			
		$3^m\ 5^s = 3{,}08^m$		$-1''$	$-0{,}3''$	
2.	9 3 5		$-9\ 3$			
		$3\ 45 = 3{,}75$		$+1$	$+0{,}3$	
3.	9 6 50		$-9\ 2$			
		$4\ 23 = 4{,}38$		$+3$	$+0{,}7$	(19)
4.	9 11 13		$-8\ 59$			
		$11\ 5 = 11{,}08$		$+23$	$+2{,}1$	
5.	9 22 18		$-8\ 36$			
		$3\ 9 = 3{,}15$		$+11$	$+3{,}5$	
6.	9 25 27		$-8\ 25$			
		$3\ 10 = 3{,}17$		$+14$	$+4{,}4$	
7.	9 28 37		$-8\ 11$			
		$1\ 23 = 1{,}38$		$+7$	$+5{,}1$	
8.	9 30 0		$-8\ 4$			

Der Verlauf der Differenzen oder besser noch eine graphische Darstellung der Function y, zeigt, dass keine unregelmässigen Fehler in der Rechnung sind, sie zeigt aber auch, dass im Verlauf der halben Stunde die Reductionen sich nichts weniger als gleichförmig ändern (die Mondhöhe fiel von 14^0 auf 7^0, die Sonnenhöhe stieg von 33^0 auf 37^0), die Curve der y hat in der Mitte eine Pfeilhöhe von $20''$. Innerhalb 10 Minuten darf man wohl Alles proportional rechnen, denn hier würde die Pfeilhöhe nur $\frac{20''}{3^2} = 2''$, was nach (10) § 15. S. 69—70 ganz unschädlich wäre.

Die Einzelheiten der Reduction sämmtlicher 13 Distanzen der Gruppe (1) S. 316, welche auf die erste Hälfte von (19) fallen, brauchen wir nun nicht weiter vorzuführen, zumal in dieser ersten Hälfte von (19) die Reduction fast constant bleibt (zwischen $9'\ 2''$ und $8'\ 59''$, im übrigen haben wir die Einzelreductionen stets graphisch aus der Curve der y bestimmt). Nachdem dann noch für jede so reducirte Distanz mit Benützung des Proportional-Logarithmus die Greenwichzeit berechnet ist, hat man folgende Einzelresultate nebst Mittelbildung und Genauigkeitsberechnung.

Nummer	Greenwichzeit — Chronometer	v	v^2
1.	$-0^h\ 56^m\ 31^s$	$+79$	6241
2.	56 54	$+102$	10404
3.	55 51	$+39$	1521
4.	54 22	-50	2500
5.	54 29	-43	1849
6.	54 58	-14	196
7.	54 1	-71	5041
8.	54 43	-29	841
9.	54 55	-17	289
10.	56 24	$+72$	5184
11.	55 16	$+4$	16
12.	53 50	-82	6724
13.	55 24	$+12$	144
Mittel	$-0^h\ 55^m\ 12^s$		40950

Mittlerer Fehler einer Bestimmung $\mu = \sqrt{\frac{40950}{12}} = \pm 58^s$ (20)

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels $\mu' = \frac{\mu_1}{\sqrt{13}} = \pm 16^s$.

Also Gesammtresultat:

$$\text{Greenwichzeit} = \text{Chronometer} - 0^h\,55^m\,12^s \pm 16^s \tag{21}$$

(vorbehältlich Berücksichtigung constanter Fehler).

§ 65. Weitere Entwicklung der Distanz-Reductionsformel.

Die Distanz-Reductionsformel (14) oder (16) § 59. S. 291 wurde dort nur bis auf Glieder der ersten Potenz von $\varDelta H$ oder $\varDelta h$ entwickelt, und die Einführung von Mittelwerthen M_0 und S_0 in (18) S. 292 wurde dort zwar plausibel gemacht, aber nicht mathematisch streng begründet.

Wir werden nun die Entwicklung von S. 292 fortsetzen zu zwei Zwecken:

1) Es soll die Einführung der Mittelwerthe M_0 und S_0 mathematisch begründet werden.

2) Es soll der nach Einführung der Mittelwerthe der Formel noch anhaftende Fehler bestimmt werden.

Hiezu brauchen wir den Taylor'schen Satz für zwei Veränderliche, welcher mit den üblichen Bezeichnungen bis zur dritten Potenz lautet:

$$\left.\begin{aligned} f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) &= f(x,y) + \varDelta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varDelta y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varDelta x^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2\,\varDelta x\,\varDelta y \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} + \varDelta y^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(\varDelta x^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} + 3\,\varDelta x^2\,\varDelta y \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial^2 x\,\partial y}\right. \\ &\left. + 3\,\varDelta x\,\varDelta y^2 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\,\partial y^2} + \varDelta y^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir wenden diesen Satz an auf die Function:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \tag{2}$$

und erhalten:

$$\frac{\partial \cos D}{\partial H} = \cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial \cos D}{\partial h} = \sin H \cos h - \cos H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} = - \sin H \sin h - \cos H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H\,\partial h} = \cos H \cos h + \sin H \sin h \cos Z$$