und (17) einen Vorzug vor der andern hat, ist es sehr nahe liegend, weder (14) noch (17), sondern das arithmetische Mittel beider anzuwenden, oder was im Wesentlichen dasselbe ist, man berechnet $\cos M$ und $\cos S$ nach (11) und (12) oder den nachfolgenden Formeln (19), (20) oder (21), indem man dort unter H, h und D die arithmetischen Mittel aus den wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen versteht. Bei der Distanz, deren wahren Werth man noch nicht hat, muss man hiebei eine anderwärts hergenommene Näherung benutzen.

Wir haben also nun die Reductionsformel:

$$D' - D = \varDelta H \cos M_0 + \varDelta h \cos S_0 \tag{18}$$

wo M_0 und S_0 diejenigen Werthe der Winkel M und S sind, welche mit den arithmetischen Mitteln der wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen berechnet sind.

Was die Berechnung selbst betrifft, so haben wir für M und S verschiedene Formeln. Die zuerst aufgefundenen (11) und (12) eignen sich zur numerischen Anwendung nicht. Wenn die Distanz D und beide Höhen H und h gegeben sind, so rechnet man für M:

$$\cos (90^0 - h) = \cos D \cos (90^0 - H) + \sin D \sin (90^0 - H) \cos M$$

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \tag{19}$$

und entsprechend

$$\cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \tag{20}$$

Wenn alle vier Stücke H, h, D, Z gegeben sind, so rechnet man M und S am besten nach dem Sinussatz:

$$\sin M = \frac{\sin Z \cos h}{\sin D} \qquad \sin S = \frac{\sin Z \cos H}{\sin D} \tag{21}$$

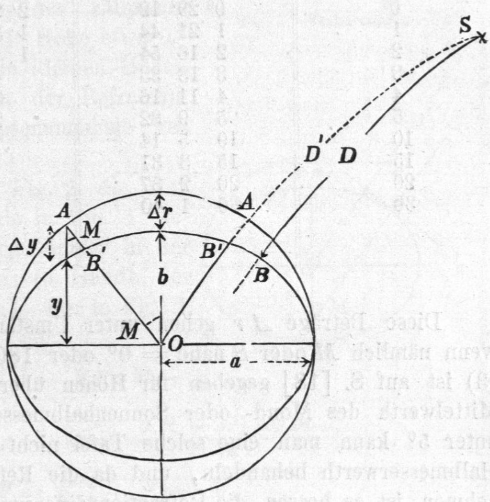
§ 60. Die Halbmesser-Correctionen.

Der Mondhalbmesser, wie er im Jahrbuch angegeben ist, bezieht sich auf den Mittelpunkt der Erde, und da von einem Punkt der Erdoberfläche aus der Mond im Allgemeinen grösser erscheint, als vom Erdmittelpunkt aus, bedarf der Jahrbuchs-Halbmesser einer positiven Correction, welche wir schon in § 8. S. 33—34 behandelt haben. Die zugehörige Tabelle findet sich auf S. [18] des Anhangs.

Eine zweite Halbmessercorrection, und zwar nicht blos für den Mond, sondern auch für die Sonne, entsteht aus der Wirkung der Strahlenbrechung. Ein Punkt erscheint um so mehr gehoben, je näher er dem Horizonte ist, also wird der Sonnen- oder Mondmittelpunkt relativ mehr in die Höhe gedrückt als der Oberrand, und die Folge davon ist, dass wir in der Nähe des Horizontes die Sonne und den Mond nicht kreisförmig, sondern in verticalem Sinne plattgedrückt erblicken. Insofern die Refractionsdifferenzen nahezu proportional den Höhendifferenzen sind, kann man die abgeplattete Sonnen- oder Mondscheibe als Ellipse behandeln, und findet dann die Halbmesserverkürzung in schiefer Richtung durch eine einfache Näherungsformel.

In Fig. 1. sei der um O gezogene Kreis die Gestalt des Mondes oder der Sonne, wie sie ohne Refraction erscheinen würde, dagegen die Ellipse um O die durch Refraction abgeplattete Mond- oder Sonnenform.

Fig. 1.
Verkürzung des Mond- und Sonnenhalbmessers durch Refraction.



Es handle sich um eine Distanz vom Punkte S aus, welche direct bis zum Mittelpunkt in dem Bogen SO gemessen würde, während der kürzeste Abstand von der Ellipse in dem Bogen SB gesucht werden muss, welcher die Ellipse in B rechtwinklig trifft. Mit Annahme der aus der Anschauung der Figur begründeten Näherung $SB + B'O = SO$ hat man die schiefe Verkürzung AB' zu bestimmen, um $SO = SB + (OA - AB')$ berechnen zu können. Zur Verdeutlichung ist auf dem linken Theil von Fig. 1. nochmals AB' gezeichnet mit der Kreisordinate $y + \varDelta y$ des Punktes A und der Ellipsenordinate y, welche A entspricht. Dann ist nach dem Ellipsengesetz:

$$\varDelta y : (y + \varDelta y) = \varDelta r : (b + \varDelta r) \text{ oder } = \varDelta r : a \tag{1}$$

$$\varDelta y = \varDelta r \frac{y + \varDelta y}{a} = \varDelta r \frac{y + \varDelta y}{OA} = \varDelta r \cos M \tag{2}$$

Zugleich ist hinreichend genähert:

$$AB' = \varDelta y \cos M$$

also nach (2):

$$AB' = \varDelta r \cos^2 M \tag{3}$$

d. h. man hat die Refractionsdifferenz $\varDelta r$ für Mitte und Oberrand mit $\cos^2$ des Winkels M zu multipliciren, welchen der Distanzbogen OS mit dem Verticalkreis des Mondes (oder der Sonne) macht.

Die Refractionsdifferenz $\varDelta r$ für Mitte und Oberrand, oder für Unterrand und Mitte, ist in der Nähe des Horizontes nicht unbeträchtlich, und kann beim Untergang oder Aufgang gut mit freiem Auge beobachtet, jedenfalls mit dem Sextanten gemessen werden.

Für den verticalen Halbmesser 15′ geben die Refractionstafeln:

Wahre Höhe des Mittelpunkts h	Scheinbare Höhe des Mittelpunkts H	Refractionsdifferenz Δr für h und $h - 15'$	$h + 15'$	
0°	0° 29′ 12″	2′ 20,8″	2′ 7,8″	(4)
1	1 21 44	1 36,2	1 24,8	
2	2 16 54	1 1,8	0 56,0	
3	3 13 33	43,9	39,4	
4	4 11 16	30,2	28,2	
5	5 9 32	23,4	21,5	
10	10 5 14	7,6	7,4	
15	15 3 31	3,5	3,5	
20	20 2 37	2,1	2,1	
30	30 1 40	1,0	1,0	

Diese Beträge Δr gehen unter Umständen ganz in die Distanz ein, wenn nämlich M oder S nahe $= 0^0$ oder 180^0 ist. Eine Tafel der Werthe (3) ist auf S. [18] gegeben für Höhen über 5^0, streng gültig für einen Mittelwerth des Mond- oder Sonnenhalbmessers $= 15' \, 40''$. Für Höhen unter 5^0 kann man eine solche Tafel nicht mehr mit einem constanten Halbmesserwerth behandeln, und da die Refractionen hier sehr rasch zunehmen, ist es besser, die Refractionsdifferenz für Mitte und Oberrand, bzw. für Unterrand und Mitte aus der Refractionstafel S. [13] zu entnehmen, und mit $\cos^2 M$ bezw. $\cos^2 S$ zu multipliciren.

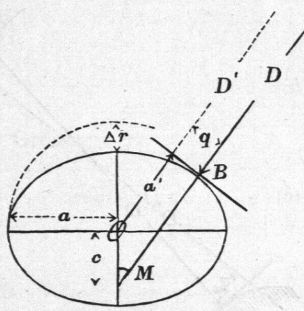
Die oben in der Formel (3) mit Fig. 1. gegebene Reduction des Mond- und Sonnenhalbmessers beruht auf verschiedenen Näherungs-Annahmen, welche wir nun noch genauer verfolgen wollen.

Zuerst entsteht die Frage, ob die zusammengedrückt erscheinende Sonnen- oder Mondscheibe hinreichend genau als Ellipse behandelt werden darf, d. h. ob die Refractionsdifferenzen der einzelnen Randpunkte gegen den Mittelpunkt hinreichend proportional den Höhendifferenzen sind. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir, für die Höhe $h = 1^0$ als wahre Mittelpunktshöhe, und für einen wahren Sonnen- oder Mondhalbmesser $= 15'$, folgende Tabelle zusammengestellt, in welcher Δr die Refractionsdifferenzen zwischen den einzelnen Randpunkten und der Mitte bezeichnen, und Δe die durch Proportionalvertheilung erhaltenen, also der Ellipsenform entsprechenden Refractionsdifferenzen bedeuten, wobei indessen für die untere und für die obere Hälfte der Sonnen- oder Mondscheibe zwei verschiedene Halbellipsen gelten.

Wahre Höhe h	Mittlere Refraction r	Refractions-Differenzen Δr	Ellipse Δe	Differenzen $\Delta e - \Delta r$
0° 45′	23′ 20,0″	1′ 35,7″	1′ 35,7″	0,0″
0 50	22 46,9	1 2,6	1 3,8	+ 1,2
0 55	22 15,0	0 30,7	0 31,9	+ 1,2
1 0	21 44,3	0 0,0	0 0,0	0
1 5	21 14,7	0 29,6	0 28,5	− 1,1
1 10	20 46,3	0 58,0	0 57,0	− 1,0
1 15	20 18,9	1 25,4	1 25,4	0,0

(5)

Fig. 2. Verkürzung $a - a'$.



Die Fehler gegenüber der Ellipsenannahme erreichen also bei 1° Höhe etwa 1″ und mit Rücksicht auf die in kleinen Höhen stattfindenden Unsicherheiten der Refraction selbst ist daher die Ellipsenannahme zulässig.

Nun betrachten wir in Fig. 2. die Verkürzung $a - a'$ genauer als in Fig. 1. geschehen ist, unter Benutzung einiger in der Geodäsie geläufiger Formeln. (J. Handb. der Vermessungskunde II. § 66.). Der in Fig. 2. mit c bezeichnete Abstand c ist:

$$c = R \cos M - y$$

wo

$$R = \frac{a}{W}, \quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \cos M}{W}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 M}$$

Dieses zusammen gibt:

$$c = \frac{a e^2 \cos M}{W} \tag{6}$$

$$a' = \frac{a}{W} - c \cos M = \frac{a}{W}(1 - e^2 \cos^2 M) = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 M}$$

$$a' = a\left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 M - \frac{e^4}{8} \cos^4 M\right)$$

$$a - a' = \frac{a e^2}{2} \cos^2 M + \frac{a e^4}{8} \cos^4 M \tag{7}$$

Nun ist:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad b = a - \Delta r$$

$$e^2 = \frac{2 a\, \Delta r - \Delta r^2}{a^2} = 2\,\frac{\Delta r}{a} - \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2 \tag{8}$$

$$e^4 = 4 \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2 + \ldots$$

Dieses in (7) eingesetzt und geordnet gibt:

$$a - a' = \Delta r \cos^2 M \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{a} \sin^2 M\right) \tag{9}$$

Für die wahre Höhe $h = 1^0$ und $a = 15' = 900''$ wird $\Delta r = 90''$ und nimmt man hiebei $M = 45^0$, so wird:

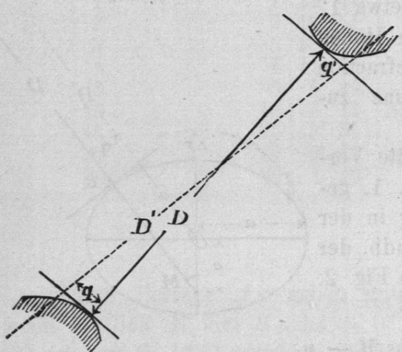
$$a - a' = 45'' - 1''$$

also die Näherung (3) hinreichend genau.

Zugleich nehmen wir aus Fig. 2. mit (6) und (8):

$$q = c \sin M = 2 \Delta r \sin M \cos M \tag{10}$$

Fig. 3. Distanzreduction $D - D'$.



Dieser Werth q wird nämlich gebraucht, wenn man nun nach Fig. 3. weiter überlegt, wie sich die wirklich gemessene Distanz, d. h. der kürzeste Berührungsabstand D beider Himmelskörper zu dem nach der Formel (9) auf die Ränder reducirten Mittelpunktsabstande verhält. Man wird dadurch auf eine Reduction von der Art wie die Reduction eines Winkels auf den Horizont (§ 40. Fig. 1. S. 207) geführt, welche zunächst zu erkennen gibt, dass die Reduction $D' - D$ nur dann von Belang sein kann, wenn D klein ist, und in diesem Falle kann man näherungsweise setzen:

$$D' - D = \frac{2 (\Delta r + \Delta r')^2 \sin^2 M \cos^2 M}{\varrho \sin D}$$

Man kann daraus entnehmen, dass nur bei sehr kleinen Distanzen unter 1^0 ein bemerkbarer Fehler aus der gewöhnlichen Reduction nach der auf die Anschauung von Fig. 1. gegründeten Näherung (3) entstehen kann.

Als allgemeines Resultat finden wir aus diesen Betrachtungen, dass die gewöhnliche Halbmesserreductionsmethode (3) S. 303 für alle praktischen Fälle der Monddistanz-Reduction genügend ist, dass sie aber auf extreme Fälle, kleine Distanzen sehr nahe am Horizont, nicht anzuwenden ist.

§ 61. Mondparallaxe mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde.

Die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt hat auf die Monddistanz-Reduction einen Einfluss, der $10''$—$20''$ erreichen kann, weshalb er bei genauen Berechnungen nicht vernachlässigt werden darf.