Der Generalbericht der Europäischen Gradmessung für 1880, Anhang III. S. 30 gibt:

$$\text{Berlin-Greenwich} = 0^h\,53^m\,34{,}870^s = 13^0\,23'\,43{,}05'' \qquad (37)$$

(Dieses ist der berechnete, ausgeglichene Werth, wobei zu beachten ist, dass auf S. 30, Anhang III. des Gen.-Ber. der Europ. Gradm. durch einen Druckfehler oben „Berechnete Länge" und „Beobachtete Länge" verwechselt sind.)

Aus (36) und (37) zusammen folgt, dass die Geodätischen Längen der Preussischen Landesaufnahme in astronomische Greenwicher Länge verwandelt werden durch die Zufügung von

$$-\,1^h\,10^m\,39{,}880^s = -\,17^0\,39'\,58{,}20'' \qquad (38)$$

dieses differirt um $0{,}5^s = 7{,}2''$ gegen (34).

Da wir diese Vergleichung nur aus theoretischem Interesse so scharf durchgeführt haben, haben wir, in der Länge jedenfalls auf 1^s genügend, für unseren mehrfach benutzten Beobachtungspunkt Niendorf, Strandhütte Schröder, am westlichen Ende des Dorfes nach (35):

$$\text{Niendorf} \quad \varphi = 53^0\,59'\,40'' \qquad \lambda = 0^h\,43^m\,18^s \text{ von Greenwich} \qquad (39)$$

Mit diesem geodätisch übertragenen Resultat stimmt unsere mit dem Sextanten aus Sonnenhöhen erhaltene astronomische Breite von § 21. (16) S. 116:

$$\varphi = 53^0\,59'\,52'' \pm 4'' \qquad (40)$$

innerhalb der allen Umständen entsprechenden Genauigkeit überein (für welche der früher zu $\pm\,4''$ berechnete mittlere Fehler kein genügendes Maass ist).

§ 59. Monddistanzen. Grundgedanke und Grundformeln.

Die Eigenbewegung des Mondes am Himmel ist so bedeutend, nämlich etwa 13^0 in 1 Tag, dass diese Bewegung zur Bestimmung absoluter Zeit, — im Gegensatz zur Ortszeit — benutzt werden kann; so dass aus der Vergleichung jener absoluten Zeit mit einer Ortszeit die geographische Länge des Ortes bestimmt wird.

Das Himmelsgewölbe mit seinen Sternen und dem darauf wandelnden Monde stellt gewissermaassen eine grosse Weltuhr vor; der Himmel ist das Zifferblatt, die Sterne sind die Ziffern, der Mond ist der Zeiger, und ohne Messinstrumente könnte man unter Umständen diese Weltuhr benutzen um das Datum eines Tages zu bestimmen, wenn man die in den astronomischen Jahrbüchern voraus berechneten Abstände des Mondes von einzelnen Sternen kennt. Man habe z. B. im Frühling 1884 am Anfang April eines Abends beobachtet, dass der Mond nahe der Mitte zwischen den beiden hellen Planeten Venus und Jupiter stand, jedoch etwa 1 Handbreit näher an Jupiter als an Venus; am folgenden Tage Abends war der Mond um eine starke Handbreite mehr nach links (gegen Osten) dem Jupiter zu gerückt, und hatte seinen Abstand der Venus gegenüber um ebensoviel vergrössert. Schlagen wir das astronomische Jahrbuch nach, so ergibt sich unzweifelhaft, dass der erste genannte Tag der 1. April gewesen sein muss, denn um 9 Uhr Abends am 1. April war die Monddistanz nach rechts gegen Venus $= 34^0$ und nach links gegen Jupiter $= 26^0$.

Was wir durch dieses Beispiel der Abstände zwischen Mond und Jupiter oder Mond und Venus im Groben zu veranschaulichen gesucht haben, das soll die mathematische Monddistanzenmessung im Feinen weiter verfolgen. An Stelle der groben Abstandsschätzung nach Handbreiten (eine ausgestreckte Hand deckt etwa 10^0) tritt die Distanzmessung mit dem Sextanten oder anderen Reflexionsinstrumenten; und an Stelle der Entscheidung, ob die fragliche Distanz am 1. oder 2. April stattgefunden hat, tritt die Frage: Wie viel Uhr (nach Stunden, Minuten, Secunden) war es an der Sternwarte des benutzten Jahrbuchs (Greenwich) in dem Moment, als der Mond einen gewisssen gemessenen Abstand von einem Stern (oder der Sonne) hatte?

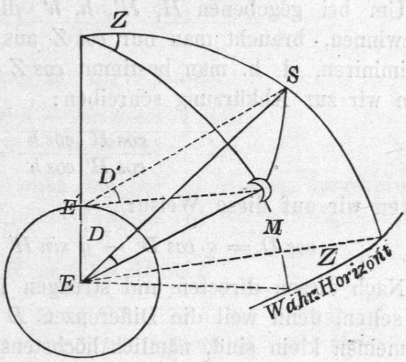
Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob hiezu nichts nöthig wäre, als die Vergleichung der gemessenen Distanz mit den im Jahrbuch von 3 zu 3 Stunden mitgetheilten Distanzen, und entsprechende Zeitbestimmung durch Interpolation; allein die Jahrbuchsdistanzen beziehen sich auf den Mittelpunkt der Erde, und da der Mond eine beträchtliche Parallaxe hat und auch die Refraction hiebei wirksam wird, erscheint eine Monddistanz von einem Punkt der Erdoberfläche aus gesehen, wesentlich anders (im Mittel etwa um $20'$ verschieden, und in der Mehrzahl der Fälle grösser) als vom Mittelpunkt der Erde. Zur Messung der Distanz tritt daher noch die Reduction derselben auf den Erdmittelpunkt hinzu, und diese „Reduction" bildet einen der wesentlichsten Theile der bei der Längenbestimmung durch Monddistanzen auftretenden Rechnungen.

Die Genauigkeit, mit welcher Zeitbestimmung durch Monddistanzen erreicht werden kann, lässt sich nach dem Grundgedanken der Methode summarisch schätzen: Die Umlaufszeit des Mondes (der siderische Monat) beträgt 27 Tage 8 Stunden; in dieser Zeit werden 360^0 durchlaufen, es kommt also auf 1 Tag im Mittel $360^0 : 27{,}3 = 13{,}2^0$, d. h. auf 1 Stunde $33'$, auf 1 Minute $33''$. Schätzt man also eine Distanzmessungs-Genauigkeit von $15''$, so erhält man eine Zeit- oder Längen-Genauigkeit von etwa $^1/_2$ Zeitminute oder 30 Zeitsecunden. Aus verschiedenen Gründen wird diese rohe Genauigkeitsschätzung noch manche Aenderung erfahren und zwar meist in dem für die Genauigkeit ungünstigen Sinn; bis zur endgültigen Erörterung aller Fehlerursachen werden wir diese erste Schätzung vorläufig beibehalten.

Indem wir die Erde vorerst als kugelförmig voraussetzen, können wir die Grundformel für Distanzreduction rasch bilden.

Die unmittelbare Messung kann sich zwar nicht auf die Mittelpunktsdistanz erstrecken, sondern nur auf die Randdistanz, da man aber den Mondhalbmesser (nebst seiner Parallaxenvergrösserung § 8. S. 33—34) in Rechnung bringen kann, so nehmen wir in Fig. 1. an, es sei in E', einem Punkte der Erdoberfläche, die scheinbare Mittelpunktsdistanz D' durch Messung bestimmt, und es soll die wahre Distanz D, vom Erdmittelpunkt aus gesehen, berechnet werden. Hiezu braucht man die beiden Höhen der Gestirne, und zwar sowohl die scheinbaren, als die wahren. Wir setzen hier voraus, es seien die scheinbaren Höhen gleichzeitig mit der Distanz gemessen worden, was etwa von drei Beobachtern gemeinsam geschehen sein kann.

Fig. 1.
Scheinbare Monddistanz D'.
Wahre Monddistanz D.



Wenn H' die scheinbare Mondhöhe ist, so hat man nach S. 33 die wahre Höhe H:

$$H = H' - \text{Refraction} + \text{Höhenparallaxe}$$

$$H = H' - r + \pi \cos H' \tag{1}$$

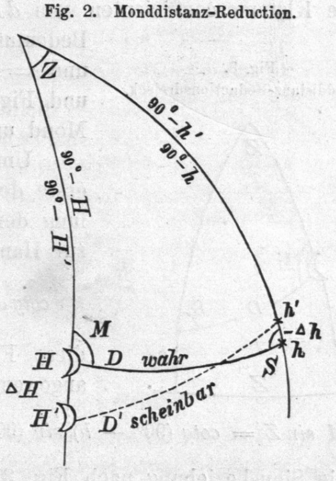
$$H - H' = \pi \cos H' - r = \varDelta H \text{ (Mond)} \tag{2}$$

desgleichen für den Stern oder die Sonne:

$$h - h' = \pi' \cos h' - r' = \varDelta h \text{ (Stern oder Sonne)} \tag{3}$$

beim Mond ist die durch (2) eingeführte Höhenreduction $\varDelta H$ immer positiv, wegen des grossen Werthes der Parallaxe π (nahezu 1^0), dagegen bei der Sonne und den Planeten überwiegt die Refraction über die kleine Höhenparallaxe, und vollends bei Fixsternen verschwindet die Parallaxe, es ist also die Grösse $\varDelta h$ nach (3) negativ.

Fig. 2. Monddistanz-Reduction.



Wir wollen nun die wahren und die scheinbaren Höhen und Distanzen in einer Figur vereinigen, welche dadurch entsteht, dass man die von E und E' (Fig. 1.) ausgehenden Strahlen parallel in einen Punkt verlegt, und dann durch eine Kugel von beliebigem Halbmesser schneidet. So entsteht Fig. 2., welche folgende zwei Gleichungen bietet:

$$\cos D = \cos(90^0 - H)\cos(90^0 - h) + \sin(90^0 - H)\sin(90^0 - h)\cos Z$$
$$\cos D' = \cos(90^0 - H')\cos(90^0 - h') + \sin(90^0 - H')\sin(90^0 - h')\cos Z$$

oder mit Weglassung der 90^0:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \tag{4}$$
$$\cos D' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos Z \tag{5}$$

Um bei gegebenen H, H', h, h' die Beziehung zwischen D und D' zu gewinnen, braucht man nur $\cos Z$ aus beiden Gleichungen (4) und (5) zu eliminiren, d. h. man bestimmt $\cos Z$ aus (5) und setzt es in (4) ein. Indem wir zur Abkürzung schreiben:

$$\frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} = q \tag{6}$$

erhalten wir auf diese Weise:

$$\cos D = q \cos D' - q \sin H' \sin h' + \sin H \sin h \tag{7}$$

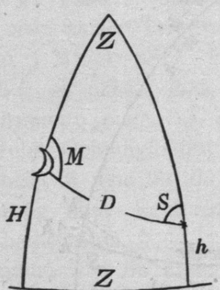
Nach diesen directen und strengen Formeln (6) und (7) rechnet man aber selten, denn weil die Differenzen $D - D'$, $H - H'$, $h - h'$ im Allgemeinen klein sind, nämlich höchstens etwa $= 1^0$, so empfiehlt es sich, durch Reihenentwicklung unmittelbar auf die Differenz $D - D'$ auszugehen.

Zu diesem Zweck wird die Gleichung (4) nach D, H und h differentiirt, und gibt:

$$\left.\begin{aligned} -\sin D\, dD &= \cos H \sin h\, dH + \cos h \sin H\, dh \\ &\quad - \sin H \cos h \cos Z\, dH - \sin h \cos H \cos Z\, dh \\ -dD &= \left(\frac{\cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z}{\sin D}\right) dH \\ &\quad + \left(\frac{\cos h \sin H - \sin h \cos H \cos Z}{\sin D}\right) dh \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Klammercoefficienten von dH und dh haben hier geometrische Bedeutungen, sie sind nämlich bezw. $= \cos M$ und $= \cos S$, wenn M und S, wie in Fig. 2. und Fig. 3. eingeschrieben, die Winkel am Mond und am Stern (oder Sonne) sind.

Fig. 3.
Monddistanz-Reductionsdreieck.



Um dieses zu beweisen, nehmen wir die erste der Formeln (8) von der Formelsammlung der sphärischen Trigonometrie § 1. S. 2 zur Hand, nämlich:

$$\cot g\, \alpha \sin \gamma = \cot g\, a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

diese Formel auf das Dreieck von Fig. 3. angewendet gibt:

$$\cot g\, M \sin Z = \cot g\,(90^0 - h)\sin(90^0 - H) - \cos(90^0 - H)\cos Z \tag{9}$$

hiezu die Sinusbeziehung nach Fig. 3.:

$$\frac{\sin Z}{\sin D} = \frac{\sin M}{\sin (90^0 - h)} \tag{10}$$

(9) und (10) zusammen geben:

$$\cotg M \sin D \frac{\sin M}{\cos h} = \tang h \cos H - \sin H \cos Z$$

woraus:

$$\cos M = \frac{\sin h \cos H - \sin H \cos h \cos Z}{\sin D} \tag{11}$$

Die hiezu symmetrische Formel für $\cos S$ lautet:

$$\cos S = \frac{\sin H \cos h - \sin h \cos H \cos Z}{\sin D} \tag{12}$$

Wir haben also, wie schon oben bei (8) in Worten ausgesprochen wurde, durch Einsetzen von (11) und (12) in (8) die wichtige Distanz-Reductionsformel:

$$-dD = dH \cos M + dh \cos S \tag{13}$$

Gibt man den Differentialen dD, dH und dh die Bedeutung, dass sie den Uebergang von (4) auf (5) vermitteln sollen, so wird (13):

$$-(D - D') = (H - H') \cos M + (h - h') \cos S$$

oder wegen (2) und (3):

$$D - D' = - \varDelta H \cos M - \varDelta h \cos S \tag{14}$$

Dieses ist die gebräuchlichste Näherungsformel für die Distanzreduction. Die geometrische Deutung dieser Formel ist in Fig. 4. gegeben, wo

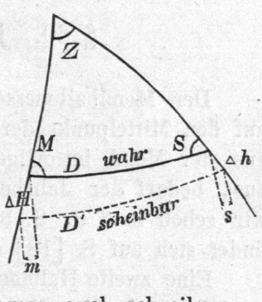
$$\varDelta H \cos M = m \qquad \varDelta h \cos S = s \tag{15}$$

also:

$$D' - D = \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S = m + s \tag{16}$$

In Fig. 4. ist angenommen, dass $\varDelta H$ und $\varDelta h$, und entsprechend auch m und s, gleiche Zeichen haben, was nach der bei (3) gemachten Bemerkung im Allgemeinen nicht der Fall ist. In Fig. 4. handelt es sich nur um eine geometrische Veranschaulichung der allgemein algebraisch gültigen Formel (16), welcher durch eine einzelne Annahme von $\varDelta H$ und $\varDelta h$ nicht vorgegriffen wird.

Fig. 4.
Distanzreduction $D' - D = m + s$.



Unsere Entwicklung gibt keine Auskunft über die Genauigkeit der Näherungsformel (14). Mit demselben Rechte wie bei (14) könnte man auch schreiben:

$$D - D' = - \varDelta H \cos M' - \varDelta h \cos S' \tag{17}$$

wo M' und S' die Winkel in dem zur scheinbaren Distanz D' (Fig. 2.) gehörigen Dreieck bedeuten, und da keine von den beiden Formeln (14) und (17) einen Vorzug vor der andern hat, ist es sehr nahe liegend, weder (14) noch (17), sondern das arithmetische Mittel beider anzuwenden, oder was im Wesentlichen dasselbe ist, man berechnet *cos* M und *cos* S nach (11) und (12) oder den nachfolgenden Formeln (19), (20) oder (21), indem man dort unter H, h und D die arithmetischen Mittel aus den wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen versteht. Bei der Distanz, deren wahren Werth man noch nicht hat, muss man hiebei eine anderwärts hergenommene Näherung benutzen.

Wir haben also nun die Reductionsformel:

$$D' - D = \Delta H \cos M_0 + \Delta h \cos S_0 \tag{18}$$

wo M_0 und S_0 diejenigen Werthe der Winkel M und S sind, welche mit den arithmetischen Mitteln der wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen berechnet sind.

Was die Berechnung selbst betrifft, so haben wir für M und S verschiedene Formeln. Die zuerst aufgefundenen (11) und (12) eignen sich zur numerischen Anwendung nicht. Wenn die Distanz D und beide Höhen H und h gegeben sind, so rechnet man für M:

$$\cos(90^0 - h) = \cos D \cos(90^0 - H) + \sin D \sin(90^0 - H) \cos M$$

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \tag{19}$$

und entsprechend

$$\cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \tag{20}$$

Wenn alle vier Stücke H, h, D, Z gegeben sind, so rechnet man M und S am besten nach dem Sinussatz:

$$\sin M = \frac{\sin Z \cos h}{\sin D} \qquad \sin S = \frac{\sin Z \cos H}{\sin D} \tag{21}$$

§ 60. Die Halbmesser-Correctionen.

Der Mondhalbmesser, wie er im Jahrbuch angegeben ist, bezieht sich auf den Mittelpunkt der Erde, und da von einem Punkt der Erdoberfläche aus der Mond im Allgemeinen grösser erscheint, als vom Erdmittelpunkt aus, bedarf der Jahrbuchs-Halbmesser einer positiven Correction, welche wir schon in § 8. S. 33—34 behandelt haben. Die zugehörige Tabelle findet sich auf S. [18] des Anhangs.

Eine zweite Halbmessercorrection, und zwar nicht blos für den Mond, sondern auch für die Sonne, entsteht aus der Wirkung der Strahlenbrechung. Ein Punkt erscheint um so mehr gehoben, je näher er dem Horizonte ist, also wird der Sonnen- oder Mondmittelpunkt relativ mehr in die Höhe gedrückt als der Oberrand, und die Folge davon ist, dass wir in der Nähe des Horizontes die Sonne und den Mond nicht kreis-