woraus man findet:

$$\sin \frac{D_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin \dfrac{D + (H - H')}{2} \, \sin \dfrac{D - (H - H')}{2}}{\cos H \cos H'}} \tag{9}$$

Um zu sehen, ob diese stengere Rechnung ein merklich anderes Resultat gibt als das frühere (7), nehmen wir nun auch die Höhe H'. Es wurde nämlich mit dem Sextanten die Höhe der Kirchthurmspitze über der freien Kimm $= 16' \, 37''$ gemessen, die Kimm selbst hat bei 4 m Aughöhe nach S. 35 eine Tiefe von $3' \, 36''$, es ist also die scheinbare Höhe $H' = 0^0 \, 13' \, 1''$. Setzt man dieses ein, so bekommt man aus (8) und (9) übereinstimmend:

$$D_0 = 60^0 \, 17' \, 2'' \qquad 52^0 \, 31' \, 19''$$

Dieses zu den Sonnenazimuten (2) addirt gibt:

$$\text{Azimut Neustadt} = 177^0 \, 17' \, 55'' \qquad 117^0 \, 16' \, 26''$$

$$\text{Mittel} \quad 177^0 \, 17' \, 10'' \tag{10}$$

Dieses genauere Resultat weicht von dem genäherten (7) um $1' \, 32''$ ab, man hat also immerhin mit der Näherung (4) vorsichtig zu sein, wenn man im Azimut auch nur auf $1'$ genau rechnen will.

Anhang zu § 58.

Rückwärtseinschneiden durch zwei Azimute (s. o. Fig. 1. S. 281). Ausser dem Azimut nach Neustadt wurde in Niendorf auch der Winkel zwischen Gömnitzerberg und Neustadt mit dem Sextanten gemessen, es ist nämlich Gömnitzerberg ein hochgelegener Thurm, welcher ebenso, wie der Kirchthurm Neustadt, trigonometrischer Punkt der Landesaufnahme ist. Es bietet dieses eine Gelegenheit, im Anschluss an die vorstehende astronomische Azimutmessung, auch das geodätische Rückwärtseinschneiden durch zwei Azimute zu behandeln.

Nach Mittheilung der trigonometrischen Abtheilung der preussischen Landesaufnahme sind durch die Triangulirung von Schleswig - Holstein folgende geographische Coordinaten bestimmt worden:

$$\text{Gömnitzer Berg} \ldots \varphi_3 = 54^0 \, 6' \, 43{,}888'' \qquad \lambda_3 = 28^0 \, 24' \, 39{,}286'' \tag{11}$$

$$\text{Neustadt, Kirchthurm} \; \varphi_2 = 54^0 \, 6' \, 30{,}589'' \qquad \lambda_2 = 28^0 \, 28' \, 54{,}954'' \tag{12}$$

(Der von Niendorf aus ebenfalls sichtbare Leuchtthurm Pelzerhagen, ist leider kein trigonometrischer Punkt der Landesaufnahme.) Für den Standpunkt Niendorf wurden aus der topographischen Karte folgende Näherungs-Coordinaten entnommen:

$$\text{Niendorf, Näherung,} \; (\varphi) = 53^0 \, 59' \, 50'' \qquad (\lambda) = 28^0 \, 29' \, 20'' \tag{13}$$

Aus der oben behandelten astronomischen Messung nebst der Winkelmessung zwischen Gömnitzerberg und Neustadt wurden folgende Azimute erhalten:

Azimut Niendorf-Gömnitzerberg $= 158^0\ 1'$ von Süd über West
„ „ Neustadt (s. o. (10)) $= 177^0\ 17'$ „ „ „ „
„ „ Pelzerhagen $= 195^0\ 46'$ „ „ „ „

Es ist uns jedoch dieses Mal bequemer, die Azimute von Nord nach West (linksseitig) zu zählen (vgl. Fig. 3.), d. h.:

$$\text{Gömnitzerberg } \alpha_1' = 21^0\ 59' \text{ von Nord über West} \tag{14}$$

$$\text{Neustadt } \alpha_1 = 2^0\ 43' \text{ „ „ „ „} \tag{15}$$

Wenn die Azimute, welche (nach (10) zu schliessen) etwa auf 30″ thatsächlich genau sind, hier auf 1′ abgerundet werden, so dürfte man die geographischen Coordinaten, entsprechend (11) und (12), auf 0,1″ abrunden (1′ Azimutfehler auf 13 km Entfernung gibt 4 m, und 0,1″ Breite ist = 3 Meter Erdbogen). Wir rechnen jedoch genauer, um ein formell consequentes Beispiel zu haben.

Die Beziehungen zwischen den Breiten φ_1 φ_2 zweier Punkte des Erdellipsoids nebst ihrem Längenunterschied $\Delta\lambda$ einerseits, und der Entfernung s nebst den Azimuten α_1 und α_2 andererseits (vgl. Fig. 3.) werden geodätisch so dargestellt:

Man setze:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha = \text{Mittelazimut} \tag{16}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = c = \text{Meridianconvergenz} \tag{17}$$

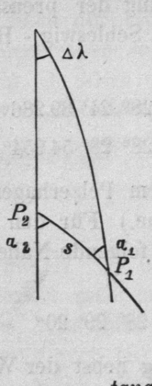
$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = \text{Mittelbreite} \tag{18}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{Breitendifferenz} \tag{19}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda = \text{Längendifferenz von West nach Ost} \tag{20}$$

$$\frac{\varrho}{R_m} = (1) \text{ und } \frac{\varrho}{R_n} = (2) \text{ (Geodätische Hauptcoefficienten)} \tag{21}$$

Fig. 3. Geodätische Uebertragung von Breite, Länge und Azimut.



wo R_m der Meridiankrümmungshalbmesser und R_n der Querkrümmungshalbmesser für die Mittelbreite φ ist, $\varrho = 206\,265''$, und *log* (1) und *log* (2) aus den „Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme“ zu entnehmen sind. (In des Verfassers „Handb. d. Verm.“ II S. 286 — 287 sind diese *log* (1) und *log* (2) mit *log* M und *log* N bezeichnet, und auf S. 424—427 sind sie, nach Gauss verwechselt, mit *log* (2) und *log* (1) bezeichnet.) Damit hat man:

$$tang\, \alpha = \frac{\dfrac{\Delta\lambda}{(2)} \cos\varphi}{\dfrac{\Delta\varphi}{(1)}} = \frac{(1)}{(2)} \frac{\Delta\lambda \cos\varphi}{\Delta\varphi} \tag{22}$$

$$s = \frac{\varDelta\lambda \cos\varphi}{(2) \sin\alpha} = \frac{\varDelta\varphi}{(1) \cos\alpha} \tag{23}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = c = -\varDelta\lambda \sin\varphi \text{ (wenn } + \varDelta\lambda \text{ von West nach Ost geht)} \tag{24}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{c}{2} \qquad \alpha_1 = \alpha - \frac{c}{2} \tag{25}$$

Nun besteht die Auflösung unserer Aufgabe darin, dass man mit den Näherungen (13), nebst den gegebenen Coordinaten (11) und (12) die diesseitigen Azimute α_1 und α_1' nach den Bezeichnungen und Formeln (16) bis (25) berechnet, und zusieht, ob diese Azimute mit den astronomisch gemessenen Azimuten (14) und (15) stimmen.

(Das Formelsystem (16) bis (25) ist daher zweimal anzuwenden, wobei für Gömnitzerberg α_1' an Stelle von α_1 und überall $_3$ an Stelle von $_2$ tritt.)

Aus der Vergleichung der so berechneten Azimute mit den bei (14) und (15) angegebenen astronomisch gemessenen Azimuten kann man auf die Verbesserungen der Näherungs-Coordinaten (φ) und (λ) von (13) schliessen, indem man die Azimutformel (22) nach φ und nach λ differentiirt. Dieses gibt:

$$d \tang \alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(1)}{(2)} \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi} d\varDelta\lambda - \frac{(1)}{(2)} \frac{\varDelta\lambda \cos\varphi}{\varDelta\varphi^2} d\varDelta\varphi$$

oder wegen (23), mit Zusetzung von ϱ für $d\alpha$ in Secunden:

$$d\alpha = \frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi \, d\varDelta\lambda - \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varDelta\varphi \tag{26}$$

Wenn man die Bedeutungen von $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\lambda$ nach (19) und (20) nebst Fig. 3. ins Auge fasst, und wenn man nun bestimmt, dass die Aenderungen $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\lambda$ nur auf den diesseitigen Punkt $P_1 =$ Niendorf (Fig. 1. und Fig. 3.) fallen sollen, so ist in (26) zu setzen:

$$d\varDelta\varphi = -d\varphi \qquad d\varDelta\lambda = +d\lambda$$

also statt (26):

$$d\alpha = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi \, d\lambda \tag{27}$$

Auch die Meridianconvergenz nach (24) ändert sich ein wenig:

$$dc = -d\lambda \sin\varphi \tag{28}$$

Die Aenderungen $d\alpha_2$ und $d\alpha_1$ von α_2 und α_1 setzen sich ebenso aus (27) und (28) zusammen, wie sich α_2 und α_1 selbst nach (25) zusammensetzen, d. h.:

$$d\alpha_2 = d\alpha + \frac{dc}{2} = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \left(\frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{2}\right) d\lambda$$

$$d\alpha_1 = d\alpha - \frac{dc}{2} = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \left(\frac{\varrho}{(2)} \cos\alpha \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{2}\right) d\lambda \tag{29}$$

Für jedes der beiden vorhandenen Azimute (14) und (15) schreibt man die Gleichung (29) an, löst diese beiden Gleichungen nach $d\varphi$ und $d\lambda$ auf, und fügt diese Correctionen den Näherungen (13) hinzu.

Mit (11), (12) und (13) berechnet man zu diesem Zweck:

$$\text{Niendorf-Gömnitzerberg. Näherung } \log s' = 4.139207 \qquad \alpha_1' = 21^0\ 44'\ 48'' \qquad (30)$$

$$\text{„ Neustadt „ } \log s = 4.093159 \qquad \alpha_1 = 2^0\ 6'\ 24'' \qquad (31)$$

Die Vergleichung mit (14) und (15) gibt:

$$d\,\alpha_1' = +\ 14'\ 12'' = +\ 852'' \qquad d\,\alpha_1 = +\ 36'\ 36'' = +\ 2196''$$

und wenn man auch noch die Coefficienten nach (29) ausrechnet, erhält man die zwei Gleichungen:

$$+\ 852'' = 170{,}5\ d\,\varphi + 253{,}8\ d\,\lambda$$
$$+\ 2196'' = 19{,}0\ d\,\varphi + 303{,}4\ d\,\lambda$$

Deren Auflösung gibt:

$$d\,\varphi = -\ 6{,}370'' \qquad d\,\lambda = +\ 7{,}638$$

Diese Correctionen werden zu den Näherungsannahmen (13) hinzugefügt und geben:

$$\text{Niendorf } \varphi_1 = 53^0\ 59'\ 43{,}630'' \qquad \lambda_1 = 28^0\ 29'\ 27{,}638''$$

Wiederholt man damit die Azimutberechnung, so findet man noch kleine (sachlich unerhebliche) Widersprüche, welche man durch eine zweite Gleichungsauflösung vollends zum Verschwinden bringen kann, deren Resultat ist:

$$\text{Niendorf endgültig (Preuss.) } \varphi_1 = 53^0\ 59'\ 43{,}583'' \qquad \lambda_1 = 28^0\ 29'\ 27{,}779'' \qquad (32)$$

Diese Coordinaten beziehen sich auf das geodätische System der Preussischen Landesaufnahme. Zur Reduction auf astronomische Werthe können wir die Angaben der Grossherzoglich Mecklenburgischen Landesvermessung benutzen, deren „Verzeichniss von geographischen Positionen, rechtwinkligen Coordinaten und Höhen, Schwerin 1882" (C. Tafeln S. 8 und 9) Folgendes gibt (auf 0,1" abgerundet):

$$\text{Mecklenburgische astron. Breite} = \text{Preuss. Breite} - 3{,}4'' \qquad (33)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Preussische Länge} = 29^0\ 5'\ 0'' + 14{,}5'' - \text{Mecklenburgische Länge} \\ \text{Greenwicher „} = 11^0\ 25'\ 1'' + 14{,}5'' - \text{„ „} \end{array}\right\}$$

also:

$$\text{Greenwicher Länge} = -\ 17^0\ 39'\ 51'' + \text{Preussische Länge} \qquad (34)$$

Fügt man diese Correctionen (33) und (34) zu (32), so erhält man:

$$\text{Niendorf } \varphi = 53^0\ 59'\ 40{,}2'' \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda = 10^0\ 49'\ 36{,}8'' \text{ östlich von Greenw.} \\ \quad = 0^h\ 43^m\ 18{,}453^s \text{ „ „ „} \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Die Länge von Greenwich ist hier „nach dem System der deutschen Küstenkarten" gezählt.

Eine andere Längenreduction erhält man auch durch Vergleichung der Preussischen geodätischen Fundamentallänge, nämlich Berliner Sternwarte, Annahme vom Jahre 1865:

$$\text{Berlin} = 2^h\ 4^m\ 14{,}75^s = 31^0\ 3'\ 41{,}25'' \text{ östlich von Ferro} \qquad (36)$$

Der Generalbericht der Europäischen Gradmessung für 1880, Anhang III. S. 30 gibt:

$$\text{Berlin - Greenwich} = 0^h\,53^m\,34{,}870^s = 13^0\,23'\,43{,}05'' \qquad (37)$$

(Dieses ist der berechnete, ausgeglichene Werth, wobei zu beachten ist, dass auf S. 30, Anhang III. des Gen.-Ber. der Europ. Gradm. durch einen Druckfehler oben „Berechnete Länge" und „Beobachtete Länge" verwechselt sind.)

Aus (36) und (37) zusammen folgt, dass die Geodätischen Längen der Preussischen Landesaufnahme in astronomische Greenwicher Länge verwandelt werden durch die Zufügung von

$$-\,1^h\,10^m\,39{,}880^s = -\,17^0\,39'\,58{,}20'' \qquad (38)$$

dieses differirt um $0{,}5^s = 7{,}2''$ gegen (34).

Da wir diese Vergleichung nur aus theoretischem Interesse so scharf durchgeführt haben, haben wir, in der Länge jedenfalls auf 1^s genügend, für unseren mehrfach benutzten Beobachtungspunkt Niendorf, Strandhütte Schröder, am westlichen Ende des Dorfes nach (35):

$$\text{Niendorf} \quad \varphi = 53^0\,59'\,40'' \qquad \lambda = 0^h\,43^m\,18^s \text{ von Greenwich} \qquad (39)$$

Mit diesem geodätisch übertragenen Resultat stimmt unsere mit dem Sextanten aus Sonnenhöhen erhaltene astronomische Breite von § 21. (16) S. 116:

$$\varphi = 53^0\,59'\,52'' \pm 4'' \qquad (40)$$

innerhalb der allen Umständen entsprechenden Genauigkeit überein (für welche der früher zu $\pm\,4''$ berechnete mittlere Fehler kein genügendes Maass ist).

§ 59. Monddistanzen. Grundgedanke und Grundformeln.

Die Eigenbewegung des Mondes am Himmel ist so bedeutend, nämlich etwa 13^0 in 1 Tag, dass diese Bewegung zur Bestimmung absoluter Zeit, — im Gegensatz zur Ortszeit — benutzt werden kann; so dass aus der Vergleichung jener absoluten Zeit mit einer Ortszeit die geographische Länge des Ortes bestimmt wird.

Das Himmelsgewölbe mit seinen Sternen und dem darauf wandelnden Monde stellt gewissermaassen eine grosse Weltuhr vor; der Himmel ist das Zifferblatt, die Sterne sind die Ziffern, der Mond ist der Zeiger, und ohne Messinstrumente könnte man unter Umständen diese Weltuhr benutzen um das Datum eines Tages zu bestimmen, wenn man die in den astronomischen Jahrbüchern voraus berechneten Abstände des Mondes von einzelnen Sternen kennt. Man habe z. B. im Frühling 1884 am Anfang April eines Abends beobachtet, dass der Mond nahe der Mitte zwischen den beiden hellen Planeten Venus und Jupiter stand, jedoch etwa 1 Handbreit näher an Jupiter als an Venus; am folgenden Tage Abends war