und $\gamma_1 = \gamma_2$, während im Falle einer Unsymmetrie δ (Fig. 1.) die Formeln und Resultate (1) bis (10) gelten.

Jedenfalls ist:

$$\alpha_1 = 180^0 - (\beta_1 + \beta_2) \qquad \alpha_2 = 180^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 360^0 - (\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2) \tag{11}$$

$$\varphi = 90^0 - \beta_1 + 90^0 - \gamma_2 = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_2) \tag{12}$$

$$\alpha = 2\,\varphi + (\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) \tag{13}$$

d. h. im Falle der Prismensymmetrie ist $\alpha = 2\,\varphi$.

Wenn dagegen die Prismen nicht genau symmetrisch sind, und das eine die Unsymmetrie δ, das andere die Unsymmetrie δ' hat, so ist nach (9 a):

$$\beta_2 - \beta_1 = 2\,\delta\,(\beta) \qquad \gamma_2 - \gamma_1 = 2\,\delta'\,(\gamma) \tag{14}$$

Nun sollen beide Prismen in Bezug auf δ gleich sein (was dadurch erreicht wird, dass man ein Prisma in zwei Theile zerschneidet), dann wird $\delta' = \delta$, und (14) in (13) eingesetzt gibt:

$$\alpha = 2\,\varphi + 2\,\delta\,((\gamma) - (\beta)) \tag{15}$$

(γ) und (β) sind die durch (9) bestimmten Functionen von β und γ; wenn also $\beta = \gamma$ wird, so ist auch $(\beta) = (\gamma)$ und (15) geht üder in:

$$\alpha = 2\,\varphi \tag{16}$$

d. h. in Worten: Wenn man zwei gleiche Prismen in gegenseitig symmetrischer Stellung nach Fig. 2. mit $\beta = \gamma$ zur Winkelmessung anwendet, so wird die Unsymmetrie δ der Prismen eliminirt.

Man kann dieses Princip auch noch weiter ausdehnen: Wenn man mit beliebigen Winkeln β und γ eine Messung nach Fig. 2. macht, und dann eine zweite Messung, bei welcher das linke Prisma nun den Winkel γ des rechtsseitigen Prismas annimmt und umgekehrt, so wird in dem arithmetischen Mittel aus beiden Messungen ebenfalls die Unsymmetrie δ eliminirt.

§ 52. Pyramidenform des Glasprismas.

Es kann noch die Frage aufgeworfen werden, welche Ablenkungen entstehen, wenn die drei Ebenen des Prismas sich nicht in drei parallelen Geraden schneiden, oder wenn — sozusagen — das Prisma im geometrischen Sinne überhaupt kein wahres Prisma, sondern eine (abgestumpfte) Pyramide ist. Die aus guten Werkstätten gelieferten Prismen lassen in dieser Hinsicht keine Fehler fürchten, welche nachtheiligen Einfluss auf die Verwendung zu Reflexionswerkzeugen ausüben könnten; trotzdem behandeln wir diese Frage hier theoretisch, zumal weil dadurch auch die Betrachtungen von § 46. nochmals zum Theil neue Beleuchtung erfahren.

Wir behandeln die Pyramidenfrage gemeinsam mit der Annahme schief eintretender Lichtstrahlen.

Fig. 1. zeigt das richtige Prisma rechtwinklig auf der Grundebene stehend, der Weg eines Lichtstrahls, welcher parallel mit der Grundebene eintritt, ist:

$$PACBQ$$

K_1 und K_2 sind die Kathetennormalen und H (bzw. CH) ist die Hypotenusennormale. P' und Q' sind Auswärtsverlängerungen der im Innern des Prismas liegenden Strahlen CA und CB.

Fig. 1. Querschnitt des Prismas.

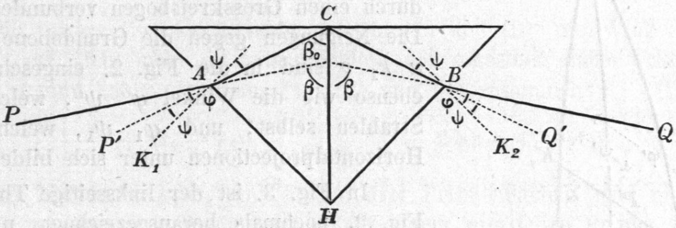
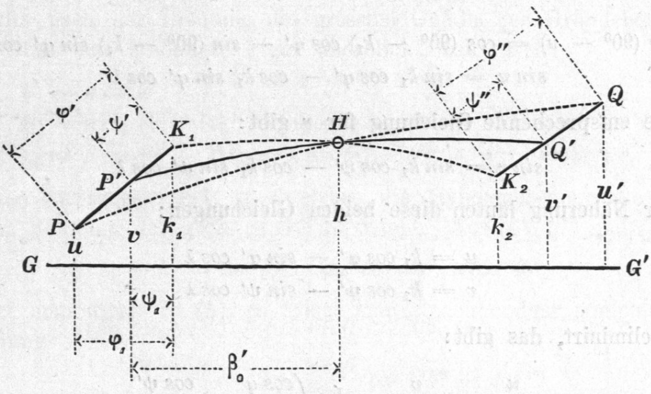


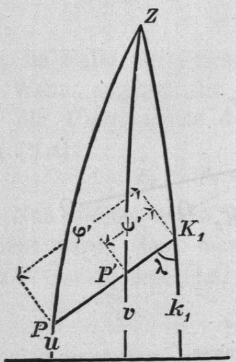
Fig. 2. Veranschaulichung aller geneigten Strahlen.



Es sollen nun die drei Prismenebenen gegen die Grundebene schiefe Stellungen einnehmen oder es sollen die Normalen K_1 K_2 und H der drei Prismenebenen nicht mehr parallel der Grundebene sein, und auch der Eintrittsstrahl PA soll eine Neigung gegen die Grundebene annehmen; dann treten die verschiedenen Strahlen, welche in Fig. 1. in einer Ebene lagen, aus einer Ebene heraus, und wir veranschaulichen diese Strahlen durch Fig. 2., welche ein Theil einer Kugel sein soll, in deren Mittelpunkt alle Strahlen, mit sich selbst parallel, verlegt worden sind (vgl. Fig. 1. und 2. § 46. S. 237). Jeder Punkt von Fig. 2. stellt also einen Strahl vor, und die Gerade GG' ist Darstellung der Grundebene, auf welche die Strahlen projicirt werden.

Wegen der Brechung in A ist der Bogen PK_1P' in Fig. 3. ein grösster Kreisbogen, ebenso auch QK_2Q', ebenso ist wegen der Reflexion an der Hypotenuse $P' H Q'$ ein Bogen, dagegen kann $K_1 H K_2$ nur dann ein Bogen, ohne Knick in H, sein (wie in Fig. 2. § 46, S. 237), wenn die drei Normalen K_1 H und K_2 in einer Ebene liegen, d. h. wenn man es mit einem wirklichen Prisma und nicht mit einer Pyramide zu thun hat.

Fig. 3. Linksseitiger Theil von Fig. 2.



Wir betrachten vorerst den linksseitigen Theil von Fig. 2. und insbesondere die drei Strahlen P K_1 P', welche nach dem Brechungsgesetz in einer Ebene liegen, weshalb wie schon erwähnt, in Fig. 2. die drei Punkte $P K_1 P'$ durch einen Grosskreisbogen verbunden sind. Die Neigungen gegen die Grundebene, bzw. u k_1 v sind in die Fig. 2. eingeschrieben, ebenso wie die Winkel φ'' ψ'', welche die Strahlen selbst, und φ_1 ψ_1, welche ihre Horizontalprojectionen unter sich bilden.

In Fig. 3. ist der linksseitige Theil von Fig. 2. nochmals herausgezeichnet, und der Winkel λ bei K_1 vorübergehend eingeführt. Nun ist in dem sphärischen Dreieck $Z P K_1$

$$\cos(90^0 - u) = \cos(90^0 - k_1) \cos\varphi' - \sin(90^0 - k_1) \sin\varphi' \cos\lambda$$

$$\sin u = \sin k_1 \cos\varphi' - \cos k_1 \sin\varphi' \cos\lambda$$

Die entsprechende Gleichung für v gibt:

$$\sin v = \sin k_1 \cos\psi' - \cos k_1 \sin\psi' \cos\lambda$$

in erster Näherung lauten diese beiden Gleichungen:

$$u = k_1 \cos\varphi' - \sin\varphi' \cos\lambda$$

$$v = k_1 \cos\psi' - \sin\psi' \cos\lambda$$

λ wird eliminirt, das gibt:

$$\frac{u}{\sin\varphi'} - \frac{v}{\sin\psi'} = k_1 \left(\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\cos\psi'}{\sin\psi'}\right)$$

$$= k_1 \frac{\sin(\psi' - \varphi')}{\sin\varphi' \sin\psi'}$$

$$u - v\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = k_1 \frac{\sin(\psi' - \varphi')}{\sin\psi'}$$

Nun ist aber wegen der Brechung

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \mu = \text{Brechungscoefficient, also:}$$

$$u - \mu v = k_1 \frac{\sin(\psi' - \varphi')}{\sin\varphi'} \mu$$

oder

$$v = \frac{u}{\mu} + k_1 \frac{\sin(\varphi' - \psi')}{\sin\varphi'} \tag{1}$$

Nun gilt im rechtsseitigen Theil von Fig. 2. dieselbe Beziehung, d. h.

$$v' = \frac{u'}{\mu} + k_2 \frac{\sin(\varphi'' - \psi'')}{\sin \varphi''} \tag{2}$$

Für die Reflexion an der Hypotenuse haben wir nach (3) S. 182:

$$v + v' = 2\,h \cos \beta_0$$

nach Fig. 1. ist

$$\beta_0 = 45^0 + \psi \quad \text{sowie auch} \quad \beta = 45^0 + \varphi \tag{3}$$

also

$$v + v' = 2\,h \cos(45^0 + \psi) \tag{4}$$

Für unsere Zwecke braucht man in (1) und (2) die Winkel φ' ψ, und φ'' ψ'' nicht mehr zu unterscheiden, wir schreiben daher schlechthin φ und ψ und haben dann aus (1), (2) und (4) zusammen:

$$\frac{u + u'}{\mu} + (k_1 + k_2) \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi} = 2\,h \cos(45^0 + \psi) \tag{5}$$

Die Neigungen k_1 k_2 und h der drei Prismenflächen sind nicht von einander unabhängig. Wenn man es mit einem wirklichen Prisma zu thun hat, so ergeben sich einfache Beziehungen zwischen den drei Neigungen h k_1 und k_2 einerseits, und der Maximalneigung n, welche in dem Prismenquerschnitt nach der Richtung des grössten Gefälls zur Grundebene stattfindet. Ohne eine besondere Figur überblickt man rasch:

$$h = n \cos w \tag{6}$$

$$k_1 = n \cos(w + 45^0) = n \cos w \cos 45^0 - n \sin w \sin 45^0 \tag{7}$$

$$k_2 = n \cos(w - 45^0) = n \cos w \cos 45^0 + n \sin w \sin 45^0 \tag{8}$$

wo w der Richtungswinkel ist, welchen die Hypotenusennormale mit der genannten Richtung des grössten Gefälls macht. Aus (6), (7) und (8) folgt:

$$k_1 + k_2 = 2\,n \cos w \cos 45^0 = 2\,h \cos 45^0 \tag{9}$$

und setzt man dieses in (5), so kriegt man, nach einiger goniometrischer Entwicklung:

$$\frac{u + u'}{\mu} = 2\,h \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \cos(45^0 + \psi) \tag{10}$$

es ist aber wegen der Brechung

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\mu} \tag{11}$$

und mit Zuziehung von (3) wird dann (10):

$$u + u' = 2\,h \cos(45^0 + \varphi) \text{ oder } = 2\,h \cos \beta \tag{12}$$

d. h. dieselbe Formel, welche in (1) § 46. S. 238 auf viel kürzerem geometrischem Wege gefunden worden ist.

Wenn nun aber der brechende Glaskörper nicht die Form eines Prismas hat, so gelten die Gleichungen (6), (7), (8) nicht mehr, sondern es kommt noch irgend ein Werth k' hinzu, welcher auch in (9) eingeht, d. h. man hat dann:

$$k_1 + k_2 = 2\,h \cos 45^0 + k' \tag{13}$$

und die Weiterrechnung hiemit gibt statt (12):

$$u + u' = 2h \cos\beta - k' \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\psi} \tag{14}$$

Bei den Prismen, welche zu mathematischen Instrumenten verwendet werden, ist der Pyramidalfehler k' jedenfalls viel kleiner als die Neigungen u u' und h, welch letztere auch bei berichtigten Instrumenten 5'—10' betragen können, während k' unter 1' gehalten werden kann. Wir werden daher den Pyramidalfehler k' des Prismas nicht weiter berücksichtigen.

Aehnlich wie dieser Pyramidalfehler wirkt auch die Combination der Unsymmetrie δ des Prismas (vgl. Fig. 1. S. 252) mit den Neigungsfehlern. Die Berücksichtigung der Unsymmetrie δ in den Gleichungen (7) und (8) würde nur Correctionsglieder von der Ordnung $n\,\delta$ ergeben, welche zu vernachlässigen sind.

§ 53. Der Prismenkreis von Steinheil.

Der Erfinder dieses Instruments hat dasselbe durch eine Abhandlung in den Astronom. Nachrichten, 11. Band (1834) S. 43 u. ff. eingeführt, aus welcher wir Folgendes citiren:

„Der in dem Berliner Jahrbuch für 1830 enthaltene schöne Aufsatz des Herrn Professor Encke über Spiegelsextanten, und das ungünstige Ergebniss einer genauen Prüfung dieses wichtigen Instrumentes in demselben, hat mich seiner Zeit veranlasst nachzudenken, ob nicht diesen Mängeln zu begegnen wäre. Es schien mir der grösste Fehler des Sextanten darin zu liegen, dass die Undeutlichkeit des doppelt reflectirten Bildes mit der Grösse des zu messenden Winkels zunimmt. Ein zweiter Mangel desselben ist, dass er nicht auf alle Winkel angewendet werden kann. Diese Fehler sind aber so wesentlich mit Newtons Princip der Reflexion verknüpft, dass man, um sie zu heben, genöthigt ist, von jenem Princip abzugehen."

Steinheil construirt nun sein neues Instrument durch Uebereinandersetzen zweier rechtwinklig-gleichschenkliger Glasprismen, deren Hypotenusenebenen wie ebene Spiegel wirken. Die gegenseitige Drehung beider Prismen wird auf einem Theilkreis gemessen.

Was dann die unvermeidlichen Formfehler der Prismen (Unsymmetrie) betrifft, so hat Steinheil die daraus entspringenden Winkelmessungsfehler dadurch eliminirt, dass er zwei wenigstens unter sich ganz gleiche Prismen sich durch Zerschneiden eines Prismas von doppelter Höhe verschaffte, und diese beiden Prismen symmetrisch anwandte. (§ 51. S. 253.)

Trotz dieses sinnreichen Gedankens und des Vorzugs der Winkelmessung in der Gegend von 180° ist der Steinheil'sche Prismenkreis bis heute nicht zu allgemeiner Anwendung in der Praxis gelangt, wahrscheinlich deswegen, weil man bei der elegantesten Anwendung desselben das Fernrohr weder nach dem einen noch nach dem anderen Zielpunkt, sondern in der Mitte zwischen beiden hindurch zu richten hat, was allerdings