§ 47. Theorie der Fernrohr-Spiegel- und Prismen-Neigungen des Pistor-Martins'schen Reflexionskreises.

Die Behandlung folgt im Wesentlichen dem Vorgang des Sextanten (§ 36.). Wir nehmen zunächst den Fall I. ebenso wie in Fig. 5. § 45. S. 233.

Fig. 1. ist so gezeichnet, dass die Normale N' des Prismas nach rückwärts gerichtet genommen ist, wie früher beim Sextanten.

Fig. 2. ist eine sphärische Figur zur Veranschaulichung der in verschiedenen Ebenen liegenden Lichtstrahlen.

Fig. 1.

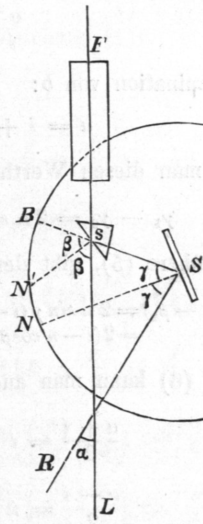
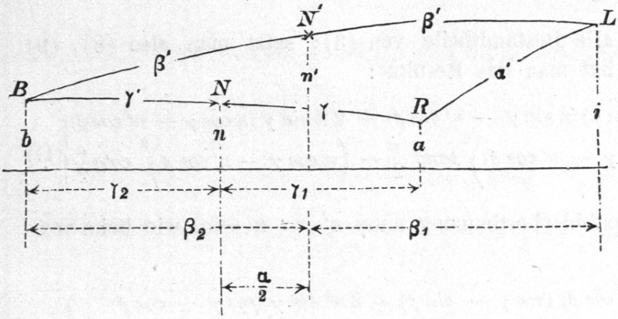


Fig. 2.



Diese Fig. 2. gibt den Winkel, welchen die Projectionen der beiden Spiegelnormalen einschliessen:

$$\frac{\alpha}{2} = \beta_2 - \gamma_2 \quad \text{oder} \quad \alpha = 2\beta_2 - 2\gamma_2 \tag{1}$$

Die Projection des zu messenden Winkels α' ist $= (\beta_1 + \beta_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)$, die begrenzenden Neigungen sind a und i, also nach dem Projectionssatze (2) § 35. S. 181:

$$\Big((\beta_1 + \beta_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)\Big) - \alpha' = \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) bildet man:

$$\alpha - \alpha' = (\gamma_1 - \gamma_2) - (\beta_1 - \beta_2) + \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Nach (2) oder (2 a) § 46. S. 238 sind die Projectionsdifferenzen:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\,n \sin\gamma\,(a - n\cos\gamma) \tag{4}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\,n' \sin\beta\,(i - n'\cos\beta) \tag{5}$$

und nach (1) oder (1 a) § 46. S. 238:

$$a + b = 2\,n\cos\gamma$$
$$i + b = 2\,n'\cos\beta$$

also mit Elimination von b:

$$a = i + 2\,n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta \tag{6}$$

Indem man diesen Werth a in (4) einsetzt, hat man:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\,n \sin\gamma\,(i + n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta \tag{7}$$

hiezu das frühere (5), gibt den ersten Theil von (3):

$$\begin{aligned}(\gamma_1 - \gamma_2) - (\beta_1 - \beta_2) &= 2\,n\sin\gamma\,(i + n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta) - 2\,n'\sin\beta\,(i - n'\cos\beta)\\ &= 2(i - n'\cos\beta)(n\sin\gamma - n'\sin\beta) + 2\,n\sin\gamma\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta)\end{aligned} \tag{8}$$

Mittelst (6) kann man auch die zwei letzten Glieder von (3) bilden:

$$\frac{a+i}{2} = i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{9}$$

$$\frac{a-i}{2} = n\cos\gamma - n'\cos\beta \tag{10}$$

Jetzt hat man alle Bestandtheile von (3); setzt man also (8), (9) und (10) in (3), so hat man das Resultat:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - \alpha') = {} & 2\,(i - n'\cos\beta)(n\sin\gamma - n'\sin\beta) + 2\,n\sin\gamma\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta)\\ & + \Big(i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta)\Big)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \Big(n\cos\gamma - n'\cos\beta\Big)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wegen der Indexfehlerbestimmung muss $n' = n$ sein, wie beim Sextanten, dieses gibt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha - \alpha' = {} & 2\,n\,(i - n\cos\beta)\,(\sin\gamma - \sin\beta) + 2\,n^2\sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta)\\ & + \Big(i + n\,(\cos\gamma - \cos\beta)\Big)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - n^2\Big(\cos\gamma - \cos\beta\Big)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wenn man nach Potenzen von i und n ordnet, so erhält man:

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' = {} & i^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + 2\,i\,n\left((\sin\gamma - \sin\beta) + (\cos\gamma - \cos\beta)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)\\ & + n^2\Big(-2\cos\beta\,(\sin\gamma - \sin\beta) + 2\sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta)\\ & \qquad + (\cos\gamma - \cos\beta)^2\,\Big(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\Big)\Big)\end{aligned}$$

und wenn man in dem Gliede mit n^2 die Functionen von α anders zusammenfasst:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2 tang\frac{\alpha}{2} + 2\,i\,n\,sec\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}(sin\gamma - sin\beta) + (cos\gamma - cos\beta)\,sin\frac{\alpha}{2}\right)\\ + 2n^2\,cosec\,\alpha\left(-sin\,\alpha\,cos\,\beta\,(sin\,\gamma - sin\,\beta) + sin\,\alpha\,sin\,\gamma\,(cos\,\gamma - cos\,\beta)\right.\\ \left. - (cos\,\gamma - cos\,\beta)^2\,cos\,\alpha\right)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

γ muss eliminirt werden mittelst der Gleichung (1):

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \beta - \frac{\alpha}{4} \qquad \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha}{4} \tag{15}$$

$$sin\,\beta - sin\,\gamma = 2\,sin\frac{\beta-\gamma}{2}\,cos\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\,sin\frac{\alpha}{4}\,cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) \tag{16}$$

$$cos\,\gamma - cos\,\beta = 2\,sin\frac{\beta-\gamma}{2}\,sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\,sin\frac{\alpha}{4}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) \tag{17}$$

$$\beta = \left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) + \frac{\alpha}{4} \qquad \gamma = \left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) - \frac{\alpha}{4}$$

$$cos\,\beta = cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)cos\frac{\alpha}{4} - sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)sin\frac{\alpha}{4} \tag{18}$$

$$sin\,\gamma = sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)cos\frac{\alpha}{4} - cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)sin\frac{\alpha}{4} \tag{19}$$

$$sin\,\alpha = 2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2} = 4\,sin\frac{\alpha}{4}\,cos\frac{\alpha}{4}\,cos\frac{\alpha}{2} \tag{20}$$

Setzt man (16) bis (20) in (13), so wird:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2 tang\frac{\alpha}{2} + 4\,i\,n\,sec\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\alpha}{4}\left(-cos\frac{\alpha}{2}\,cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) + sin\frac{\alpha}{2}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\right)\\ + 8n^2\,cosec\,\alpha\,sin^2\frac{\alpha}{4}\left(2\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos^2\frac{\alpha}{4} - 2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\right.\\ \left. - cos\,\alpha\,sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\right)\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Das erste und das letzte Glied der Klammer von n^2 geben:

$$\begin{aligned}2\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos^2\frac{\alpha}{4} - cos\,\alpha\,sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ = cos\frac{\alpha}{2}\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}\right)sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ = cos\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}\,cos^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) + sin^2\frac{\alpha}{2}\,sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder hievon mit dem Mittelglied der letzten Klammer in (21) geben ein volles Quadrat, nämlich das Quadrat von:

$$cos\frac{\alpha}{2}\,cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) - sin\frac{\alpha}{2}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)$$

und dieser Ausdruck, welcher auch im zweiten Glied von (21) vorkommt, hat die goniometrische Bedeutung

$$= cos \left((\beta - \frac{\alpha}{4}) + \frac{\alpha}{2} \right) = cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4} \right)$$

Der Ausdruck (21) ist also jetzt umgeformt in:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha' = i^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 4 \, i n \, sec \frac{\alpha}{2} \, sin \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4} \right) \\ + 8 \, n^2 \, cosec \, \alpha \, sin^2 \frac{\alpha}{4} \left(cos \frac{\alpha}{2} + cos^2 (\beta + \frac{\alpha}{4}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

oder auch:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha' = i^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2 \, i n \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4} \right) \\ + 2 \, n^2 \, sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left(cos \frac{\alpha}{2} + cos^2 (\beta + \frac{\alpha}{4}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Vergleicht man diese Formel mit der für den Sextanten gültigen (22) und (23) § 36. S. 188, so findet man ganz gleichen Bau, und nur den einzigen Unterschied, dass $+ \beta$ an die Stelle von $- \beta$ getreten ist.

Die Formel (23) lässt sich ebenso wie beim Sextanten (24) S. 188 in eine mehr geschlossene Form bringen:

$$\alpha - \alpha' = 2 \, sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left\{ n^2 \, cos \frac{\alpha}{2} + \left(n \, cos \, (\beta + \frac{\alpha}{4}) - i \, cos \frac{\alpha}{4} \right)^2 \right\} \quad (24)$$

Man könnte nun daran denken, auch den Fall II der Messung mit dem Pistor-Martins-Kreis ebenso zu behandeln wie den Fall I, allein man überzeugt sich bald, dass dieses nicht nöthig ist, denn Fall II unterscheidet sich von I nur dadurch, dass γ negativ wird, γ wird aber schliesslich wieder eliminirt, und es gelten daher die Formeln (22) bis (24) für beide Fälle des fraglichen Reflexionsinstrumentes.

Während beim Sextanten $\alpha - \alpha'$ stets positiv war, wird beim Spiegelprismenkreis $\alpha - \alpha'$ in der zweiten Hälfte des Kreises ($\alpha > 180^0$) negativ.

Wir heben, wie früher bei der Sextantenformel, die Coefficienten von (23) heraus und schreiben:

$$\alpha - \alpha' = [1] \, i^2 + [2] \, i n + [3] \, n^2 \quad (25)$$

wo

$$[1] = \frac{60}{\varrho'} \, tang \frac{\alpha}{2} \qquad \left(log \frac{60}{\varrho'} = 8.24188 \right)$$

$$[2] = - \frac{60}{\varrho'} \, 2 \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$[3] = \frac{60}{\varrho'} \, 2 \, sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left(cos \frac{\alpha}{2} + cos^2 (\beta + \frac{\alpha}{4}) \right)$$

Diese Coefficienten sind so gewählt, dass i und n in Minuten einzusetzen sind, und $\alpha - \alpha'$ in Secunden erhalten wird.

Hiernach ist, mit einem runden Werth $\beta = 70^0$, Folgendes berechnet:

Coefficienten der Formel (22) und (23) bezw. (25).

$\beta = 70^0$

α	*log* [1]	*log* [2]	*log* [3]	100 [1]	100 [2]	100 [3]
30⁰	7.6699	7.3100$_n$	7.6829	+ 0,47″	— 0,20″	+ 0,48″
60	8.0033	7.2597$_n$	7.9748	+ 1,01	— 0,18	+ 0,94
90	8.2419	7.2170	8.1613	+ 1,75	+ 0,16	+ 1,45
120	8.4804	8.0836	8.3298	+ 3,02	+ 1,21	+ 2,14
150	8.8138	8.6935	8.5580	+ 6,51	+ 4,93	+ 3,61
170	9.2999	9.3162	8.9332	+ 19,95	+ 20,71	+ 8,57
180	∞	∞	∞	∞	∞	∞
190	9.2999$_n$	9.4357$_n$	8.7411$_n$	— 19,95″	— 27,27″	— 5,51″
210	8.8138$_n$	9.0606$_n$	7.7201$_n$	— 6,51	— 11,50	— 0,52
240	8.4804$_n$	8.8906$_n$	8.0211	— 3,02	— 7,78	+ 1,05
270	8.2419$_n$	8.8277$_n$	8.2897	— 1,75	— 6,73	+ 1,95
300	8.0033$_n$	8.8047$_n$	8.4674	— 1,01	— 6,37	+ 2,93
320	7.8030$_n$	8.8018$_n$	8.6016	— 0,64	— 6,34	+ 4,00

Man kann nun nach den vorstehenden Formeln und Tabellen für beliebige Annahmen von i und n die Fehler berechnen, und mit den Sextantenfehlern (§ 36. S. 190) vergleichen wie folgt:

Gemessener Winkel α	$i = \pm 10'$ und $n = \pm 10'$		$i = \pm 10'$ und $n = \mp 10'$	
	Sextant	Spiegel-Prismenkreis	Sextant	Spiegel-Prismenkreis
30⁰	+ 0,5″	+ 0,7″	+ 2,3″	+ 1,2″
60	+ 0,9	+ 1,8	+ 5,1	+ 2,1
90	+ 1,5	+ 3,4	+ 8,9	+ 3,0
120	+ 2,1	+ 6,4	+ 15,5	+ 3,9
150	+ 3,0	+ 15,1	+ 33,3	+ 5,2
170		+ 49,2		+ 7,8
180		± ∞		± ∞
190		— 52,7″		+ 1,8″
210		— 18,5		+ 4,5
240		— 9,7		+ 5,8
270		— 6,5		+ 6,9
300		— 4,5		+ 8,3
320		— 3,0		+ 9,7

Innerhalb des vergleichbaren Intervalls sind die Fehler beider Instrumente nahezu von gleicher Grössenordnung. Wenn i und n ungleiches Zeichen haben, ist der Sextant im Nachtheil.

In der Gegend von 180⁰ wird der Spiegel-Prismenkreis in der von uns betrachteten Anordnung ($n' = n$ für $\alpha = 0$, s. o. bei (11)) zur Winkelmessung ungeeignet.