Setzt man den Werth (4) hier ein, so wie die Abkürzung h_m für den Mittelwerth aus h_1 und h_2, wie bei Fig. 1. beigeschrieben ist, und bringt man zugleich die nöthigen Maassumwandlungen an, so erhält man:

$$(h_0 - h_m)^{('')} = (\Delta t^{(s)})^2 \frac{225}{8\,\varrho''} \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos t}{\cos} - \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\cos h} \right)^2 \tang h \right) \quad (5)$$

$\frac{(h_0 - h)\varrho}{\varrho} = \frac{(\Delta t\, 15\, \varrho)^2}{\varrho}$ $(\Delta t \cdot 15)^2$

hiebei ist

$$\log \frac{225}{8\,\varrho''} = 6.13467 - 10$$

Für ein Zeitintervall von 10 Minuten, welches wir der nachfolgenden Tafel zu Grunde legen, hat man in (5) einzusetzen

$\Delta t^{(s)} = 600$, womit man erhält

$$h_0 - h_m = 49{,}09'' \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos t}{\cos h} - \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\cos h} \right)^2 \tang h \right) \quad (6)$$

Wenn die Werthe Δh nach (3) bereits berechnet vorliegen, wie in unserer vorstehenden Tabelle I., so kann man sie zur Berechnung einer Tabelle für $h_0 - h_m$ benützen, aus (5) und (3) findet man nämlich:

$$(h_0 - h_m)^{('')} = \frac{15}{8\,\varrho''} \Delta t^{(s)}\ \Delta h^{('')} \operatorname{cotg} t - \frac{(\Delta h^{('')})^2}{8\,\varrho''} \tang h \quad (7)$$

Wenn man hier ein Zeitintervall von 10 Minuten einführen will, so ist $\Delta t^{(s)} = 600$ zu setzen, und wenn man unter $\Delta h^{('')}$ die Werthe der Tabelle I. verstehen will, welche selbst zu einem Zeitwerth 1^s gehören, so ist auch für $\Delta h^{('')}$ der Factor 600 zuzusetzen, und damit erhält man aus (7):

$$h_0 - h_m = 3{,}2732''\ \Delta h^{('')} \operatorname{cotg} t - 0{,}2182''\ (\Delta h^{('')})^2 \tang h$$

wo $\Delta h^{('')}$ aus der Tabelle I. zu entnehmen ist.

Für $t = 0$ versagt indessen diese Formel, weil hier $\Delta h = 0$ ist. In diesem Falle hat man wieder nach (5), mit $h = 90^0 - (\varphi - \delta)$:

$$h_0 - h_m = \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$$

$$(h_0 - h_m)^{('')} = \frac{225}{8\,\varrho''} 600^2 \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} = 40{,}99'' \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \quad (8)$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Tafel II. berechnet worden.

II. Höhendifferenz $h_0 - h_m$ für ein Zeitintervall $\Delta t = 10$ Minuten nach Fig. 1. und Formel (5) bis (8), für die Breite $\varphi = 50^0$ (Functionswerth C für die Gleichung (10))

Jahreszeit	Declination δ	Stundenwinkel t								
		0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h
22. Juni	$+23^0\ 27'$	+65"	+49"	+25"	+11"	+ 3"	−2"	−6"	−10"	−15"
20. Mai u. 24. Juli	$+20^0$	+59"	+48"	+27"	+13"	+ 4"	−1"	−5"	−10"	
16. April u. 27. Aug.	$+10^0$	+48"	+42"	+28"	+16"	+ 8"	+2"	−3"	− 7"	
20. März u. 23. Sept.	0^0	+40"	+35"	+26"	+18"	+11"	+8"			
23. Febr. u. 19. Oct.	-10^0	+36"	+33"	+27"	+20"	+13"	+7"			
20. Jan. u. 21. Nov.	-20^0	+32"	+30"	+25"	+20"	+14"				
21. December	$-23^0\ 27'$	+30"	+29"	+25"	+20"	+14"				

Die Vergleichung dieser Tafel II. mit der früheren Tafel I. zeigt, dass die Beschleunigung gleich Null wird, wenn die Geschwindigkeit ihr Maximum erreicht, dieses wird nachher noch theoretisch klarer gemacht werden. Zuvor ist die praktische Bedeutung der Tabellenwerthe II. zu untersuchen, wozu das Beispiel von § 13. (S. 57) dienen mag. Es wurden am 4. Juli Vormittags $7^h\ 50^m$ zwei Höhen mit der Zwischenzeit $\varDelta t = 1^m\ 47^s$ combinirt. Die Tafel II. gibt mit $t = 4^h\ 10^m$ (nämlich $12^h - 7^h\ 50^m$) im Juli etwa $h_0 - h_m = 4''$, gültig für $\varDelta t = 10^m$, also, da $h_0 - h_m$ mit dem Quadrate des Zeitintervalls wächst, kommt auf $1^m\ 47^s$ $= 1{,}8^m$ nur $\left(\frac{1{,}8}{10}\right)^2 4'' = 0{,}1''$, oder es war die Mittelbildung auf S. 57 unbedingt zulässig, während in der Nähe des Mittags auch bei diesem kleinen Zeitintervall doch schon $h_0 - h_m$ den Werth von $1''$ erreicht haben würde.

Wir betrachten noch die Mittelbildung aus Gruppen mehrerer Messungen. Es seien z. B. 4 Höhen $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ auf das Gesammtintervall $\varDelta t$ gleich vertheilt. Ist $\varDelta t$ in Einheiten von 10 Minuten gezählt, und C der Tafelwerth II., so hat man zur Reduction des Mittels aus h_1 und h_4 (Fig. 2.):

$$h' = \frac{h_1 + h_4}{2} + C\,(\varDelta t)^2$$

ferner zur Reduction des Mittels aus h_2 und h_3:

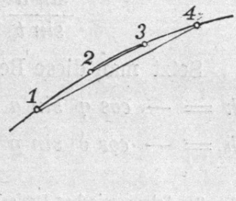
$$h'' = \frac{h_2 + h_3}{2} + C\left(\frac{\varDelta t}{3}\right)^2$$

Also Gesammtmittel

$$h_0 = \frac{h' + h''}{2} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} + \frac{5}{9}\,C\,(\varDelta t)^2 \tag{9}$$

Wenn man diese Betrachtung von 4 Höhen auf allgemein n gleichförmig vertheilte Höhen ausdehnt, so findet man das Resultat, dass das arithmetische Mittel t_0 der n Zeitbeobachtungen und das arithmetische Mittel h_m der Höhenbeobachtungen nicht unmittelbar zusammengehören, sondern es gehört zu der Mittelzeit t_0 eine Mittelhöhe h_0, welche aus dem arithmetischen Mittel h_m und dem Gesammt-Intervall berechnet wird durch die Formel

Fig. 2.
Mittelbildung aus 4 Höhen.



$$h_0 - h_m = \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n-1}\,C\,(\varDelta t)^2 \tag{10}$$

wo C der Werth der Tabelle II. und $\varDelta t$ in Einheiten von 10 Minuten zu nehmen ist. Insbesondere ist:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Für } n = 2 & \frac{1}{3}\frac{n+1}{n-1} = & 1 & = 1{,}00 \\
n = 3 & \quad " & \frac{2}{3} & = 0{,}67 \\
n = 4 & \quad " & \frac{5}{9} & = 0{,}56 \\
n = 5 & \quad " & \frac{1}{2} & = 0{,}50 \\
n = 6 & \quad " & \frac{7}{15} & = 0{,}47 \\
n = 7 & \quad " & \frac{4}{9} & = 0{,}44 \\
n = 8 & \quad " & \frac{3}{7} & = 0{,}43 \\
n = 9 & \quad " & \frac{5}{12} & = 0{,}42 \\
n = 10 & \quad " & \frac{11}{27} & = 0{,}41
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Man habe z. B. am 20. Mai nahe am Mittag in der Zeit von 5 Minuten rasch hintereinander 5 Sonnenhöhen gemessen, und das arithmetische Mittel der Zeiten t_0 sowie das arithmetische Mittel der Höhen h_m berechnet. Die Tafel II. gibt $C = 59''$, es ist also nach (10) und (11) mit $n = 5$:

$$h_0 - h_m = 0{,}50 \times 59'' \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 7{,}4'' \qquad (12)$$

d. h. das arithmetische Mittel h_m der 5 gemessenen Höhen ist wegen der Krümmung der Sonnenbahn um $7''$ zu klein. Es ist zwar immer viel besser, schon wegen der Genauigkeits-Uebersicht, alle Höhen einzeln auszurechnen, als Mittel zu bilden; wenn man aber wegen der Rechnungserleichterung zur Mittelbildung sich entschliesst, so gibt vorstehende Theorie wenigstens die Möglichkeit, die dadurch begangenen Fehler zu schätzen und summarisch zu verbessern.

Umformung der Höhengeschwindigkeits-Formel.

Unsere oben gefundene Differentialformel (2), nämlich

$$dh = -\cos\varphi \cos\delta \frac{\sin t}{\cos h} dt \qquad (13)$$

lässt sich in zweifacher Weise umformen. Wir nehmen hiezu in Fig. 3. das astronomische Dreieck von § 4. S. 11 Fig. 3. nochmals vor; dasselbe gibt die Sinusbeziehungen

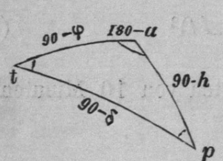
$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\cos\delta}{\cos h} \text{ und } \frac{\sin t}{\sin p} = \frac{\cos h}{\cos\varphi} \qquad (14)$$

Setzt man diese Beziehungen in (13), so erhält man zwei neue Formen:

$$dh = -\cos\varphi \sin a\, dt \text{ oder } \Delta h^{(')} = -15 \cos\varphi \sin a\, \Delta t^{(m)} \qquad (15)$$

$$dh = -\cos\delta \sin p\, dt \text{ oder } \Delta h^{(')} = -15 \cos\delta \sin p\, \Delta t^{(m)} \qquad (16)$$

Fig. 3. Astronomisches Dreieck.



Die Formel (15) sagt, dass die Höhengeschwindigkeit an einem Orte (φ constant) nur von dem Azimut a abhängt und für $a = 90^0$, d. h. im ersten Vertical, ihr Maximum erreicht. Für Zeitbestimmungen aus Sonnenhöhen ist es daher von Wichtigkeit, zu wissen, wann die Sonne in den ersten Vertical kommt. Setzt