

Es mag hier auch noch eine andere Berechnung ihre Stelle finden, welche auf die 29 einzelnen Werthe (u) von (20) gegründet wurde (Phys. Geogr. und Met. d. lib. Wüste S. 24). Dieselbe gab folgende Correctionswerthe:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Sextantenablesung } (\alpha') & = & 0^\circ & 30^\circ & 60^\circ & 90^\circ & 120^\circ \\ \text{Correction } (\alpha) - (\alpha') & = & 0'' & -41'' & -1' 31'' & -2' 25'' & -3' 22'' \end{array} \quad (27)$$

Dieses stimmt mit (26) ziemlich überein.

Trotzdem führt die ganze Untersuchung und die Vergleichung ihrer Resultate mit anderen Fehlerbestimmungen zu dem Schluss, dass der eingeschlagene Weg der Excentricitätsbestimmung bei den grösseren Winkeln kaum auf 1' sichere Correctionen liefern kann.

Bei der Frage, ob dieses Urtheil sich auch auf andere Instrumente ausdehnen lässt, ist zwar zuzugeben, dass unser Instrument eine mangelhafte Theilung hat, wie aus den Ableisungen (20) zu ersehen ist, dass aber auch bei guter Theilung die Excentricitäts correctionen sich aus den Ableisungen der Nonienübertheilung höchstens auf 30'' genau werden bestimmen lassen.

Die Nonienübertheilungs-Ableisung eignet sich daher nur zur ersten Orientirung über etwaige sehr bedeutende Excentricitätsfehler.

§ 40. Terrestrische Winkelmessung mit dem Sextanten.

Für geodätische Zwecke ist der Sextant jetzt ausser Gebrauch gekommen, während noch am Anfang dieses Jahrhunderts z. B. Bohnenberger für seine erste Triangulirung von Württemberg viele Winkel mit dem Sextanten maass, und auch Benzenberg in dem Buche „Ueber das Cataster, Erstes Buch, Geschichte des Catasters, Bonn 1818“ auf S. 22 — 23 schrieb: „Für eine Landesvermessung ist der Spiegelsextant das bequemste Werkzeug, weil es nur sehr wenig Platz einnimmt, und weil es seiner Natur nach keinen festen Stand voraussetzt. Man kann daher sowohl in den höchsten Thurmspitzen, als in den Gipfeln hoher Eichen mit ihm messen.“

Da Landesvermessungen heutzutage nicht mehr „in den Gipfeln hoher Eichen“ gemacht werden, und auch für Recognoscirungs- und andere flüchtige Messungen ein kleiner Theodolit mit Bussole meist bessere Dienste leistet, als ein Sextant, so kommt die terrestrische Winkelmessung mit diesem Instrument praktisch fast nur noch zu Schiffe bei Küstenaufnahmen vor.

Im Vergleich mit dem Theodolit erfordern solche Messungen ein sehr gutes Auge, weil Kirchthürme etc., die sich nicht am Himmel abheben, in dem kleinen Sextantenfernrohr sehr schwer zu finden sind.

Versuchshalber machte ich auf einem Spaziergang auf dem Benthberg-Thurm bei Hannover eine pothenotische Bestimmung mit dem Sextanten von S. 157 (ohne Reduction der Winkel auf den Horizont). Es

wurden zwischen fünf im Mittel 7 Kilometer entfernten Punkten, deren Coordinaten auf S. 34 und 36 des von Wittstein herausgegebenen hannoverschen Coordinatenverzeichniss gegeben sind, die Winkel in verschiedenen Combinationen mit dem Sextanten gemessen, und zu einem Satze vereinigt, wie folgende Tabelle zeigt:

Zielpunkt	Gemessen α	Trigonom. berechnet α	$\alpha - a$
Hannover, Kreuzthurm (Coord. S. 36) . . .	64° 3' 40"	64° 4' 20"	+ 40"
" Neustädter Thurm (Coord. S. 36)	64 44 10	64 44 50	+ 40
" Markthurm (Coord. S. 36) . . .	65 37 30	65 37 30	0
" Aegidiusthurm (Coord. S. 36) .	67 51 40	67 51 20	- 20
Ronnenberg (Coord. S. 34)	130 58 20	130 58 20	0
Gehrden (Coord. S. 34)	200 53 0	200 53 0	0

Aus den Messungen für Markthurm, Ronnenberg und Gehrden sind die Coordinaten pothenotisch berechnet worden:

$$\text{Bentherberg-Thurm } y = - 22235,4 \text{ m } \alpha = + 90 175,3 \text{ m}$$

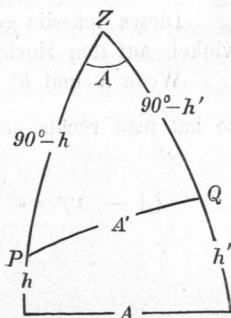
Mit diesen und den gegebenen Coordinaten sind die oben mitgetheilten α berechnet. Die gemessenen Winkel wurden auf die α möglichst orientirt und dann die Differenzen $\alpha - a$ gebildet, welche befriedigend sind. Eine genaue geodätische Bestimmung des Bentherberg-Thurms liegt noch nicht vor.

Wir betrachten das vorstehende Beispiel als Beweis, dass man Sextantenmessungen immer noch unter Umständen mit Vortheil zur Ergänzung der topographischen Karte gebrauchen kann.

Trotz des selten gewordenen Gebrauchs in der Geodäsie ist die Winkelmessung mit dem Sextanten auf Zielpunkte von einigen Kilometern Entfernung wieder andererseits eine wichtige Operation geworden, nämlich wegen der Vergleichung ihrer Resultate mit den Resultaten von Theodolitmessungen und dadurch gegebener Sextantenprüfung. Da aber der Sextant schiefe Positionswinkel und der Theodolit Horizontalwinkel und Vertikalwinkel misst, entsteht die Aufgabe, diese Winkel gegenseitig zu reduciren, und eine zweite Reduction entsteht wegen der Sextantenparallaxe.

Reduction eines Winkels auf den Horizont. In Fig. 1. sei A' ein mit dem Sextanten gemessener Positionswinkel zwischen den Zielpunkten P und Q und dessen Projection auf den Horizont sei $= A$, ein Winkel, der auch im Zenit Z zwischen den Verticalkreisen von P und Q auftritt. Die beiden Höhenwinkel von P und Q seien h und h' , und zwar seien dieses kleine Grössen. Fig. 1. gibt:

Fig. 1.
Reduction eines Winkels A' auf den Horizont A .



$$\begin{aligned} \cos A' &= \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - h') + \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - h') \cos A \\ \cos A' &= \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos A \end{aligned}$$

bis zur zweiten Potenz entwickelt:

$$\begin{aligned} \cos A' &= h h' + \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) \left(1 - \frac{h'^2}{2}\right) \cos A = h h' + \left(1 - \frac{h^2 + h'^2}{2}\right) \cos A \\ \cos A' - \cos A &= h h' - \frac{h^2 + h'^2}{2} \cos A \end{aligned} \quad (1)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} A' &= A - (A - A') \\ \cos A' &= \cos A + (A - A') \sin A + \dots \end{aligned}$$

also in Verbindung mit (1):

$$A - A' = \frac{h h'}{\sin A} - \frac{h^2 + h'^2}{2} \cotg A \quad (2)$$

wo rechts auch A' statt A gesetzt werden darf.

Diese Formel (2) lässt sich auch weiter umformen:

$$\begin{aligned} (h + h')^2 &= h^2 + 2 h h' + h'^2 \\ (h - h')^2 &= h^2 - 2 h h' + h'^2 \\ 2(h^2 + h'^2) &= (h + h')^2 + (h - h')^2 \\ 4 h h' &= (h + h')^2 - (h - h')^2 \end{aligned}$$

Dieses in (2) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} A - A' &= \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (h + h')^2 - (h - h')^2 - (h + h')^2 + (h - h')^2 \cos A \right\} \\ A - A' &= \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (h + h')^2 (1 - \cos A) - (h - h')^2 (1 + \cos A) \right\} \end{aligned}$$

Setzt man hier:

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}, \quad 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2},$$

so erhält man durch Zusammenfassung:

$$A - A' = \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \tan g \frac{A}{2} - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \cot g \frac{A}{2} \quad (3)$$

Dieses ist die gebräuchlichste Formel zur Reduction eines Sextantenwinkels auf den Horizont.

Wenn h und h' in Minuten und $A - A'$ in Secunden gezählt werden, so hat man rechts noch den Factor $\frac{60''}{\rho'}$ zuzusetzen, also:

$$\begin{aligned} (A - A')'' &= \frac{60''}{\rho'} \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \tan g \frac{A}{2} - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \cot g \frac{A}{2} \quad (4) \\ \log \frac{60''}{\rho'} &= 8.24188 \end{aligned}$$

Als Beispiel nehmen wir: Standpunkt Hannover, Technische Hochschule (Punkt E), die Theodolitmessung zwischen dem Markthurm und dem Lindener Wasserthurm gab:

$$A = 65^{\circ} 30' 20'' \quad h = 2^{\circ} 54' \quad h' = 1^{\circ} 4' \quad (5)$$

Die Sextantenmessung zwischen dem Markthurm und dem Lindener Wasserthurm gab:

$$A = 65^{\circ} 29' 38'' \text{ (bereits vom Indexfehler befreit)} \quad (6)$$

Die Berechnung nach (4) gibt:

$$\frac{A}{2} = 32^{\circ} 45', \quad h = 174'', \quad h' = 64'', \quad \frac{h + h'}{2} = 119'', \quad \frac{h - h'}{2} = 55'',$$

$$A - A' = + 159'' - 82'' = 77'' = 1' 7'' \quad (7)$$

Es ist also der Theodolitwinkel A auf den schiefen Winkel reducirt nach (3), (5) und (7): $A' = A - 1' 7'' = 65^{\circ} 29' 13''$.

Vergleicht man hiemit die Sextantenmessung (6) = $65^{\circ} 29' 38''$, so ist diese um $25''$ grösser. Fasst man den ganzen Versuch als eine Sextantenprobe auf, so hat man das Resultat, dass der Sextant einen Winkel von 65° um $25''$ zu gross misst, ein Resultat, das auch mit anderen Untersuchungen ähnlicher Art stimmt.

Indessen kommt zu der soeben berechneten Vergleichung noch eine kleine Reduction wegen Sextantenparallaxe, zu der wir nun übergehen:

So lange man den Sextanten in freier Hand hält, hat man, wegen der Schwankungen, kein innerhalb der Sextanten-Dimensionen bestimmtes Centrum, auf welches sich die zu messenden Winkel als Scheitel beziehen, und bei allen astronomischen Messungen ist das auch ganz gleichgültig. Hat man aber nähere terrestrische Zielpunkte, so muss man sich für ein Winkelcentrum entscheiden, und dieses kann kein anderes sein als das Centrum des Stativs, auf welches der Sextant in diesem Fall gesetzt wird, um überhaupt feste Punkte zu haben.

In Fig. 2. ist C dieses Centrum, die bei der Messung auftretenden Strahlen schneiden sich aber in F , und geben dort den am Sextanten abgelesenen Winkel α , welcher verschieden ist von dem in C erscheinenden Winkel α_0 . Zur Reduction brauchen wir die Excentricität e des Centrum C vom Fernrohr, nämlich e von C rechtwinklig zur Fernrohrachse gemessen, dann den Abstand $CS = d$ des Centrum C von der Mitte des grossen Spiegels S , und den Winkel δ , welchen die Verbindungsgerade CS mit der Fernrohrachse macht.

Damit hat man nach Fig. 2.:

$$\alpha_0 + \varepsilon_1 = \alpha + \varepsilon_2, \quad \alpha_0 = \alpha - \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

nun ist

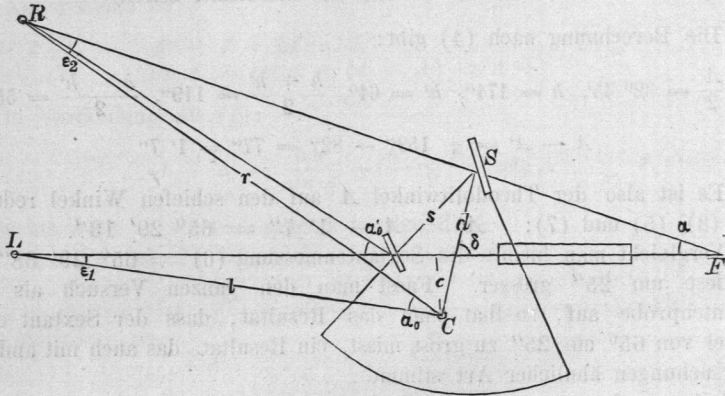
$$\varepsilon_1 = \frac{e}{l} \quad \varepsilon_2 = \frac{d \sin(RSC)}{r} = \frac{d \sin(\delta + \alpha)}{r}$$

also

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{e}{l} \varrho + \frac{d \sin(\delta + \alpha)}{r} \varrho \quad (8)$$

Die Constanten e und d kann man unmittelbar am Sextanten abmessen. In unserem Falle ist (Fig. 2.) $e = 31$ mm, $d = 63$ mm, $\delta = 82^\circ$.

Fig. 2. Parallaxe des Sextanten.



Da es sich immer um weite Entfernungen handeln wird, wollen wir die Abstände l und r der Zielpunkte links und rechts in Kilometern nehmen, und deswegen auch e und d in diesem Maasse einsetzen, d. h.:

$$e = 0,000031 \text{ km} \quad d = 0,000063 \text{ km}$$

Dieses in (8) gesetzt, gibt für unseren Sextanten:

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{6,4''}{l \text{ km}} + \frac{13,0''}{r \text{ km}} \sin(82^\circ + \alpha) \quad (9)$$

Im Falle unseres vorigen Beispiels hatte der Marktturm $l = 1,6$ km und der Wasserturm $r = 2,4$ km Entfernung, und da $\alpha = 65^\circ$ war, haben wir nach (9):

$$\alpha_0 = \alpha - 4,0'' + 2,9'' = \alpha - 1,1''$$

was an (6) noch anzubringen ist, und $A' = 65^\circ 29' 37''$, sowie schliesslich die Correction = $-24''$ statt früher $-25''$ gibt.

Je nach Umständen kann¹ man das Centrum vielleicht auch in dem kleinen Spiegel annehmen, und dann wird die Reduction einfacher, nämlich nach Fig. 2.:

$$\alpha_0' = \alpha + \frac{s}{r} \varrho \sin(2\beta + \alpha) \quad (10)$$

wo β der Schärftwinkel des Sextanten (§ 33.) ist.

Diese Formel führt zugleich auf die Eigenschaft des Sextanten als

Distanzmesser. Visirt man einen unendlich entfernten Punkt an, wie es bei der Bestimmung des Indexfehlers geschieht, so hat man $r = \infty$, also $\alpha_0' - \alpha = 0$. Nimmt man einen näher gelegenen Punkt, so dient $\alpha_0' - \alpha$, d. h. die vom Indexfehler befreite Ablesung, die wir nun ε nennen wollen, als Entfernungsmaass, denn

$$\varepsilon = \frac{s}{r} \rho \sin 2\beta \text{ gibt } r = s \frac{\rho}{\varepsilon} \sin 2\beta \quad (11)$$

Wegen der Kleinheit der Basis s ist aber die Anwendbarkeit auf sehr kurze Entfernungen beschränkt. Bei unserem Instrument ist $s = 0,059$ m und $2\beta = 32^\circ$ womit nach (11):

$$r = \frac{6449 \text{ m}}{\varepsilon},$$

also wenn $\varepsilon = 10''$, wird $r = 645$ m.

§ 41. Summarische Bestimmung der Sextantenfehler durch Fixsterndistanzen und terrestrische Distanzen.

Nachdem alle Einzelfehler des Sextanten untersucht und bestimmt sind, wie in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist, kann man daran denken, hieraus den Gesamtfehler zusammzusetzen, und zwar haben wir ausser den Blendungsfehlern (§ 32. S. 171), welche jedenfalls einzeln zu berücksichtigen sind, Folgendes:

§ 34. und 36. S. 190 Einfluss der Spiegel- und Fernrohrneigungen.

§ 38. S. 195 Prismatischer Fehler des grossen Spiegels.

§ 39. S. 199 Excentricitäts- und Theilungsfehler.

Indessen ist die Bestimmung der Excentricitäts- und Theilungsfehler nach § 39. so unsicher, nämlich nur etwa auf $1'$ genau, dass wir davon keinen Gebrauch für genaue Messungen, namentlich für Mondstrecken, machen können. Auch abgesehen hiervon ist die Einzelbestimmung aller dieser Fehler so mühsam, dass man sich nach einer bequemeren Methode umsehen muss. Diese bequemere und zugleich genaueste Methode der Sextantenuntersuchung besteht in der Vergleichung von Sextantenmessungen mit anderweitig genau bekannten Winkelwerthen.

Zuerst haben wir hierzu terrestrische Winkel, welche man mit dem Theodolit genau messen; auf schiefe Winkel reduciren und dann mit den Sextantenmessungen vergleichen kann, wie bereits in § 40. S. 209 an einem Beispiel gezeigt worden ist.

Eine astronomische Probe erhält man, indem man die Breite eines anderweitig schon genau bestimmten Punktes mit dem Sextanten über dem künstlichen Flüssigkeitshorizont misst. Macht man dieses zu verschiedenen Jahreszeiten mit der Sonne, so bekommt man die Sextantencorrection an allen beliebigen Stellen, etwa zwischen 40° und 120° .