

die Fehlergleichungen (9) und (10) einzusetzen, und man findet dabei das in der Tabelle (14) mit  $v_1' v_2'$  bezeichnete Fehlersystem, welches von dem System  $v_1 v_2$  wenig abweicht und fast dieselbe Quadratsumme gibt.

Auch die Fehlerberechnung nach der Formel (25) § 36. S. 188 gibt für beide Systeme von  $i$  und  $n$  nahezu dasselbe, z. B. für  $\alpha = 90^\circ$  bzw.  $\alpha - \alpha' = 10''$  und  $8''$ .

Die bedeutenden mittleren Fehler  $\pm 38'$  und  $\pm 34'$  des Systems (15) führen zu dem Schluss, dass die indirecte Methode der Bestimmung von  $i$  und  $n$  durch Messungsvergleichungen in verschiedenen Theilen des Gesichtsfeldes auch bei der sorgfältigsten Behandlung nach der Methode der kl. Q. die erhebliche dazu nöthige Beobachtungs- und Rechnungsmühe nicht wohl lohnt, dass man vielmehr auf dem directen Wege nach § 34. die Neigungen  $i$  und  $n$  rascher und genauer erhält. Zur weiteren theoretischen Bestätigung dieses Ergebnisses haben wir auch ausser den mittleren Fehlern von  $i$  und  $n$  den mittleren Fehler der Funktion von  $i$  und  $n$  berechnet, welche man nach (25) § 36. S. 188 zur Sextanten-correctio braucht. Da das Resultat von derselben Art ist, wie die mittleren Fehler bei (15), theilen wir diese weiteren Rechnungen nicht mehr mit.

### § 38. Prismatischer Fehler des grossen Spiegels des Sextanten.

Die einfachen Reflexionsgesetze, welche für einen planparallelen an der Rückseite belegten Spiegel gelten, treffen nicht mehr zu, wenn die beiden Spiegelflächen nicht mehr eben und parallel sind. Wir untersuchen den Fall, dass die beiden Glasflächen zwar eben, aber nicht parallel seien.

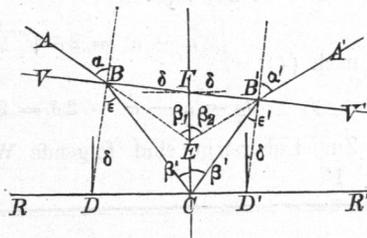
In Fig. 1. sei  $VV'$  die Vorderfläche und  $RR'$  die mit Metall belegte Rückfläche eines solchen prismatischen Spiegels, dessen Convergenzwinkel  $= \delta$  sei.  $ABCB'A'$  sei der Weg eines an der Rückfläche reflectirten Lichtstrahls. Dann hat man mit den eingeschriebenen Winkeln  $\alpha \ \epsilon \ \alpha' \ \epsilon'$  und mit dem Brechungs-Coefficienten  $\mu$  zunächst die zwei Gleichungen:

$$\text{Brechung in } B \quad \sin \alpha = \mu \sin \epsilon \quad (1)$$

$$\text{„ „ } B' \quad \sin \alpha' = \mu \sin \epsilon' \quad (2)$$

Mit dem an verschiedenen Stellen eingeschriebenen Convergenzwinkel  $\delta$  hat man weiter:

Fig. 1. Convergenz der Spiegelebenen  $\delta$ .



$$\begin{array}{l} \text{aus Dreieck } BDC \quad \varepsilon + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \beta') = 180^\circ \\ \text{ " " } B'D'C \quad \varepsilon' + (90^\circ + \delta) + (90^\circ - \beta') = 180^\circ \\ \text{hieraus} \quad \varepsilon - \varepsilon' = 2\delta \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \text{aus Dreieck } BEF \quad (90^\circ - \alpha) + \beta_1 + (90^\circ + \delta) = 180^\circ \\ \text{ " " } B'EF \quad (90^\circ - \alpha') + \beta_2 + (90^\circ - \delta) = 180^\circ \\ \text{hieraus} \quad \beta_1 - \beta_2 = (\alpha - \alpha') - 2\delta \end{array} \quad (4)$$

Um für gegebene Verhältnisse  $\alpha - \alpha'$  oder  $\beta_1 - \beta_2$  zu berechnen, könnte man ein gegebenes  $\alpha$  in (1) einsetzen, und mit  $\mu$ , das etwa = 1,5 ist,  $\varepsilon$  berechnen, dann  $\varepsilon' = \varepsilon - 2\delta$  nach (3) und  $\alpha'$  aus (2) berechnen; indessen da  $\alpha - \alpha'$  immer ein kleiner Werth ist, empfiehlt es sich, eine Näherungsformel hiefür zu entwickeln:

Die Gleichungen (2) und (3) geben:

$$\sin \alpha' = \mu \sin (\varepsilon - 2\delta) = \mu \sin \varepsilon - 2\mu \delta \cos \varepsilon$$

Dieses mit (1) verglichen gibt:

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = 2\mu \delta \cos \varepsilon$$

Andererseits ist:

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = (\alpha - \alpha') \cos \alpha$$

also zusammen

$$\alpha - \alpha' = 2\mu \delta \frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha} \quad (5)$$

um hierin auch  $\varepsilon$  in  $\alpha$  auszudrücken, hat man nach (1)

$$\cos \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu^2}}$$

Dieses in (5) eingesetzt gibt nach kurzer Umformung:

$$\alpha - \alpha' = 2\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \alpha} \quad (6)$$

Der Brechungs-Coefficient ist für Glas in runder Zahl  $\mu = 1,5$ , also  $\mu^2 - 1 = 1,25$ , folglich:

$$\alpha - \alpha' = 2\delta \sqrt{1 + 1,25 \sec^2 \alpha} \quad (7)$$

und nach (4):

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha - \alpha' - 2\delta = 2\delta (\sqrt{1 + 1,25 \sec^2 \alpha} - 1) \quad (8)$$

Zur Uebersicht sind folgende Werthe berechnet, mit der Annahme  $\delta = 1'$ .

$\alpha$	$\alpha - \alpha'$	$\beta_1 - \beta_2$	$\alpha$	$\alpha - \alpha'$	$\beta_1 - \beta_2$
0°	3,0'	1,0'	60°	4,9'	2,9'
10	3,0	1,0	70	6,9	4,9
20	3,1	1,1	80	13,0	11,0
30	3,3	1,3	85	25,7	23,7
40	3,5	1,5	89	2° 8,1	2° 6,1
50	4,0	2,0	90	∞	∞

(9)

Diese Werthe  $\alpha - \alpha'$  oder  $\beta_1 - \beta_2$  zeigen die Unsymmetrie der Reflexion, denn bei einem planparallelen Spiegel wäre sowohl  $\alpha - \alpha'$  als auch  $\beta_1 - \beta_2 = 0$ . Ob man den einen oder anderen Werth als Maass des prismatischen Einflusses nimmt, ist für die nachher zu machende Anwendung gleichgültig, weil sich beide nur um eine Constante  $2\delta$  unterscheiden,  $\alpha - \alpha'$  bezieht sich auf die Normale der Vorderfläche,  $\beta_1 - \beta_2$  auf die Normale der Hinterfläche. Die Tabelle (9) zeigt, dass die Unsymmetrie der Reflexion, namentlich bei flachem Auffallen der Lichtstrahlen, sehr erheblich werden kann.

Wenn der Sextant planparallele Spiegel hat, so besteht die Gleichung:

$$\alpha = 2\gamma - 2\beta \quad (10)$$

wenn dagegen die Spiegel prismatisch sind, so soll nach Fig. 2. eine Gleichung bestehen:

$$\alpha' = \gamma + \gamma' - (\beta + \beta') \quad (11)$$

Die Differenz zwischen (10) und (11) ist:

$$\alpha - \alpha' = \gamma - \gamma' - (\beta - \beta') \quad (12)$$

Nun ist nach (6):

$$\gamma - \gamma' = 2\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \gamma} \quad (13)$$

$$\beta - \beta' = 2\delta' \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \beta} \quad (14)$$

Diese Werthe (13) und (14) in (12) gesetzt geben:

$$\alpha - \alpha' = 2\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \gamma} - 2\delta' \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \beta} \quad (15)$$

Am kleinen Spiegel ist  $\beta$  constant, und da ein constanter Fehler in den Indexfehler eingeht, den wir überhaupt hier ausser Betracht lassen, so kann man das zweite Glied von (15) weglassen. Ausserdem ist von (15) noch so viel zu subtrahiren, als das erste Glied für  $\alpha = 0$ , d. h. für  $\gamma = \beta$ , ausmacht, d. h. die Correctionsformel lautet, indem zugleich

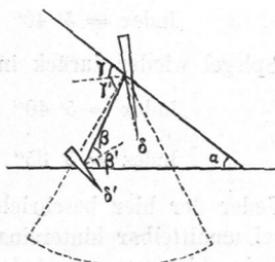
$\gamma = \beta + \frac{\alpha}{2}$  gesetzt wird:

$$\alpha - \alpha' = 2\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} - 2\delta' \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \beta} \quad (16)$$

$$\text{wo } \mu = 1,5, \mu^2 - 1 = 1,25$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet, mit  $\beta = 15^\circ$  und  $\delta = 1'$ :

Fig. 2. Sextant mit prismatischen Spiegeln.



$\alpha$	$2\sqrt{\dots}$	$(\alpha - \alpha')_1$	Differenz	$\alpha$	$2\sqrt{\dots}$	$(\alpha - \alpha')_1$	Differenz
0°	3' 3,6"	0"	3	70°	4' 0,7"	57"	22
10	3 6,5	3	4	80	4 22,9	1' 19	31
20	3 10,4	7	5	90	4 54,0	1 50	46
30	3 16,0	12	7	100	5 39,4	2 36	71
40	3 23,0	19	10	110	6 50,3	3 47	122
50	3 32,3	29	12	120	8 52,1	5 49	249
60	3 44,5	41	16	130	13 1,9	9 58	762
70	4 0,7	57		140	25 44,0	22 40	
				150	$\infty$	$\infty$	

(17)

Man kann den Prismenwinkel  $\delta$  des grossen Spiegels durch Umsetzen dieses Spiegels in seiner Fassung bestimmen, indem man einen grossen Winkel zuerst mit der Normallage des Spiegels und dann mit der umgekehrten Lage misst. Die Differenz beider Messungen ist dann der doppelte Fehlereinfluss des Prismenwinkels  $\delta$ . Die Operation des Spiegelumsetzens ist etwas umständlich, weil man nachher auch den Indexfehler wieder von Neuem bestimmen muss, und auch die Parallelität beider Spiegel in verticalem Sinn, welche durch das Umsetzen wohl verloren geht, wieder herstellen muss. Folgendes ist ein solcher Versuch mit unserem Sextanten:

Index = 5' 15"

Winkelmessung I = 109° 14' 55"

Index = 5' 20"

Spiegel umgesetzt.

Index = 5' 50"

Winkelmessung II = 109° 15' 30"

Index = 5' 35"

Winkelmessung II = 109° 15' 35"

Index = 5' 40"

Spiegel wieder zurück in die Normallage.

Index = 5' 40"

Winkelmessung I = 109° 15' 20"

Index = 5' 35"

Jeder der hier beschriebenen Messungswerthe ist selbst das Mittel aus je zwei unmittelbar hintereinander genommenen Ablesungen.

Subtrahirt man von jeder Messung das Mittel derjenigen zwei Indexbestimmungen, zwischen welche sie fällt, so hat man:

	I	II	II-I
I = 109° 14' 55"	- 5' 17,5 =	109° 9' 37,5"	
II = 109 15 30	- 5 42,5 =	109° 9' 47,5"	+ 10,0"
II = 109 15 35	- 5 37,5 =	109 9 57,5	+ 15,0
I = 109 15 20	- 5 37,5 =	109 9 42,5	
		Mittel	II-I = + 12"

Dieser Versuch wurde mit 4 verschiedenen Winkeln wiederholt, wie folgende Reihe zeigt, in welcher  $(\alpha - \alpha')_1$  den aus der Tabelle (17) interpolirten Werth der Funktion (16) für  $\delta = 1'$  bedeutet.

$\alpha$	II-I	$(\alpha - \alpha')_1$	$\frac{II-I}{(\alpha - \alpha')_1}$
81° 40'	+ 37''	1' 24''	0,44
93 52	+ 8	2 7	0,06
109 10	+ 12	3 40	0,05
113 3	+ 32	4 24	0,12
Einfaches Mittel			0,16

Wenn man keine grösseren Differenzen bekommt, als diese, II - I, so kann man den Spiegel für gut planparallel erklären. Der hiezu noch ausgerechnete Mittelwerth des Quotienten  $(II - I) : (\alpha - \alpha')_1 = 0,16$  deutet an, dass der Prismenwinkel  $\delta$  nur etwa  $0,08' = 5''$  beträgt. (Zu genauerer Bestimmung sollten den Differenzen II - I Gewichte gegeben werden, welche mit  $\alpha$  wachsen.)

### § 39. Excentricität und Theilungsfehler des Sextanten.

Die Ablesungen an dem Nonius des Sextanten sind mit dem Fehler-einfluss der Excentricität der Alhidade behaftet, welcher trotz aller Sorgfalt der mechanischen Centrirung leicht auf  $1'$  anwachsen kann.

An dem Sextanten selbst, ohne Hülfe von Messungen mit anderen Instrumenten, hat man nur ein Mittel, die Excentricität einigermaassen zu bestimmen, nämlich die Führung des Nonius durch die ganze Theilung, und Beobachtung der Nonienübertheilung von Strecke zu Strecke. Zwar ist dieses Mittel für den Zweck genauer Excentricitätsbestimmung, wie wir sehen werden, nicht genügend; allein da man dadurch immerhin rasch einen ersten Aufschluss über die Grössenordnung der Excentricitätseinflüsse erhält, und da man zugleich auf diesem Wege einen Einblick in die Güte der Theilung gewinnt, so behandeln wir diese Methode ausführlich an dem Beispiel unseres Sextanten (S. 157).

In Fig. 1. ist  $C'$  der Limbusmittelpunkt des Sextanten, und  $C$  der Alhidadendrehpunkt; die Excentricität ist  $C'C = e$ . Die Verbindungslinie  $C'O$  macht mit dem Nullhalbmesser  $C'O$  der Theilung den Winkel  $\varphi'$  und

Fig. 1. Excentricität des Sextanten.

