Gemessener Winkel α	Fehler der Sextantenmessung (a) $i = \pm 30'$, $n = \pm 30'$	(b) $i = \pm 30'$, $n = \mp 30'$	Mittel $\frac{(a) + (b)}{2}$
0°	0″	0″	0″
30	4,1	21,0	13
60	8,4	46,0	27
90	13,1	1′ 21	47
120	18,5	2 20	1′ 19

Die in der dritten Spalte stehenden Mittelwerthe haben zugleich die Bedeutung der **mittleren Fehler** für die Annahme, dass man über die Vorzeichen von n und i und insbesondere darüber, ob dieselben gleich oder entgegengesetzt sind, nichts weiss.

Um auch noch den Einfluss verschiedener Schärfungswinkel β zu untersuchen, berechnen wir den Fall $n = 30'$ und $i = 30'$ für 4 verschiedene Werthe von β, und finden folgende Fehlerwerthe $\alpha - \alpha'$:

α	$i = \pm 30'$ $n = \pm 30'$ $\beta = 0°$	$\beta = 15°$	$\beta = 20°$	$\beta = 25°$	α	$i = \pm 30'$ $n = \mp 30'$ $\beta = 0°$	$\beta = 15°$	$\beta = 20°$	$\beta = 25°$
0°	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0°	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″
30	4,1	4,1	4,1	4,1	30	21,0	21,0	20,7	20,3
60	8,4	8,4	8,4	8,4	60	44,7	46,0	45,8	45,4
90	13,0	13,1	13,1	13,1	90	1′ 15,8	1′ 20,5	1′ 21,0	1′ 21,1
120	18,1	18,5	18,6	18,8	120	2 7,0	2 19,9	2 22,4	2 23,9
150	24,1	26,7			150	4 18,6	4 58,8		

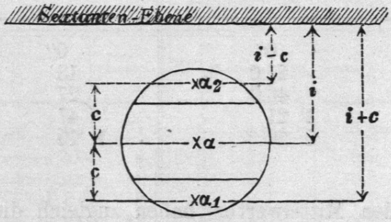
Die Aenderung von β hat, innerhalb der gewöhnlichen Grenzen, nur einen sehr geringen Einfluss auf die Genauigkeit. Immerhin erscheint es auch hier günstig, β möglichst klein zu machen, was mit der Bedingung, möglichst grosse Winkel α mit dem Sextanten zu messen, zusammentrifft. (Vgl. Fig. 1. S. 184 $\alpha = 2\gamma - 2\beta$, wo für γ der Grenzwerth $= 90°$ ist.)

§ 37. Indirecte Bestimmung der Fernrohr- und Spiegelneigung.

Nachdem der theoretische Zusammenhang zwischen den Neigungen n und i der Spiegel und des Fernrohrs mit dem gemessenen Winkel ermittelt ist, kann man durch Messungen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes, d. h. durch Aenderung der Neigung i, den Mittelwerth i und die Spiegelneigung n rückwärts berechnen.

Fig. 1. zeigt die Anordnung der Beobachtungen: In der Mitte des Gesichtsfeldes wird ein Winkel gemessen mit dem Resultat α, bringt man dann die beiden Bilder im unteren Segment des Gesichtsfeldes zur Deckung, so werde α_1 erhalten, und entsprechend oben α_2. Die Höhenlagen von α α_1 α_2 sind nur geschätzt, als Mitten der betreffenden Gesichtsfeldabschnitte. Zählt man die Neigung i von der Sextantenebene nach aufwärts, so hat man, nach der Annahme von Fig. 1. S. 184 die drei Neigungen $i - c$, i, $i + c$, im Ocular von Oben nach Unten zu zählen, wie in Fig. 1., welche den unmittelbaren Anblick im Fernrohr vorstellt, angegeben ist. Die Sextantenebene ist über das ganze Gesichtsfeld gelegt, damit alle drei Werthe $i - c$, i, $i + c$ in der Figur positiv erscheinen. Den Winkelabstand c zwischen je zwei Beobachtungsstellen kann man, wie den Fadenabstand selbst, entweder durch Visuren nach einer in bekannter Entfernung aufgestellten getheilten Latte, oder auch dadurch bestimmen, dass man, mit vertical gestellten Fäden, die beiden Bilder eines Zielpunktes an die Stellen von α_2 und α_1 bringt und dabei die Alhidade abliest. In unserem Falle fand sich so im Mittel die Ablesung $2^0\ 43' - 5'$ Index $= 2^0\ 38'$, also

Fig. 1. Gesichtsfeld des Sextantenfernrohrs.



$$c = 1^0\ 19' \tag{1}$$

Die Messungen α (bereits vom Indexfehler befreit) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Jeder Werth α_1 α α_2 ist das Mittel aus 8 Einzelablesungen. Als Zielpunkte dienten Kirchthürme, Kamine, Blitzableiter etc. der Stadt Hannover.

Nummer	unten α_1	mitten α	oben α_2	$\alpha_1 - \alpha = d_1$	$\alpha_2 - \alpha = d_2$
1.	53° 44′ 25″	53° 43′ 46″	53° 44′ 38″	+ 39″	+ 52″
2.	68 31 19	68 30 49	68 32 31	+ 30	+ 1′ 42
3.	90 17 35	90 16 49	90 18 52	+ 46	+ 2 3
4.	109 43 41	109 41 58	109 45 35	+ 1′ 43	+ 3 37
5.	120 38 33	120 37 9	120 41 33	+ 1 24	+ 4 24
6.	124 20 5	124 18 2	124 22 56	+ 2 3	+ 4 54
7.	132 5 22	132 3 11	132 8 42	+ 2 11	+ 5 31
8.	136 7 20	136 4 36	136 10 52	+ 2 44	+ 6 16

(2)

Nun hat man nach Gleichung (23) § 36. S. 188:

$$\alpha - \alpha' = n^2 (\ldots) + i^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2\, n\, i \, tang \, \frac{\alpha}{2} \, sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \tag{3}$$

Der Coefficient (. . .) ist ohne Belang, weil das Glied mit n^2 in den Differenzen d fortfällt.

Diese Formel (3) gelte für die Mitte des Gesichtsfeldes, dann hat man für die Messungen α_1 unten und α_2 oben, nach Fig. 1.:

$$\alpha_1 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i + c)^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2n \, (i + c) \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (4)$$

$$\alpha_2 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i - c)^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2n \, (i - c) \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (5)$$

Subtrahirt man (3) von (4) und von (5), so erhält man:

$$\alpha_1 - \alpha = d_1 = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} + 2 i c \, tang \frac{\alpha}{2} - 2 n c \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (6)$$

$$\alpha_2 - \alpha = d_2 = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2 i c \, tang \frac{\alpha}{2} + 2 n c \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (7)$$

(6) und (7) subtrahirt geben:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = d_1 - d_2 = 4 i c \, tang \frac{\alpha}{2} - 4 n c \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (8)$$

was auch unmittelbar aus (4) und (5) erhalten würde.

Zwei Gleichungen von der Form (8), mit möglichst verschiedenen Werthen α, würden hinreichen, die zwei Unbekannten i und c zu bestimmen. Da wir aber 8 Bestimmungsgleichungen dieser Art haben, fassen wir alle miteinander in eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, und lassen dann die Gleichungen (4) und (5) getrennt, behandeln sie auch als unabhängig, was insofern nicht ganz streng ist, als die Mittemessung α in beiden gemeinsam vorkommt. Es ist aber diese Messung α viel genauer als die aus der Mitte gerückten Messungen α_1 und α_2, weshalb das angegebene Verfahren wohl zulässig ist.

Wir bilden also aus (6) und (7) die Fehlergleichungen

$$v_1 = \quad a i - b n + l_1 \quad (9)$$

$$v_2 = - a i + b n + l_2 \quad (10)$$

wo a b und l folgende Bedeutungen haben:

$$a = 2 c \, tang \frac{\alpha}{2} = \frac{120}{\varrho'} \, c \, tang \frac{\alpha}{2} = [log = 0.440531] \, tang \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

$$b = 2 c \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) = [log = 0.440531] \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (12)$$

$$l_1 = D - d_1 \qquad l_2 = D - d_2 \quad (13)$$

wo $$D = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} = 60 \, \frac{c^2}{\varrho'} \, tang \frac{\alpha}{2} = [log = 2.03713] \, tang \frac{\alpha}{2}$$

Die Coefficienten sind so ausgerechnet, dass v d und l in Secunden, i und n in Minuten zu nehmen sind. Nach (1) ist $c = 79'$ eingesetzt worden.

Der Schärfungswinkel ist für unseren Sextanten nach § 33. S. 175 $\beta = 16^0$. Dieser Werth ist in (12) einzusetzen.

Hiernach ist Folgendes berechnet, und sofort auch die nach der Ausgleichung übrigbleibenden Fehler v_1 und v_2 beigefügt. Zugleich ist ein System v_1' v_2' beigesetzt, dessen Bedeutung nachher behandelt werden wird.

Nummer	a	b	D	d_1	d_2	l_1	l_2	v_1	v_2	v_1'	v_2'	
1_1 und 1_2	1,40	1,43	55″	39″	52″	+ 16″	+ 3″	− 3″	+22″	− 4″	+23″	
2_1 „ 2_2	1,88	1,96	74	30	102	+ 44	−28	+17	− 1	+17	− 1	
3_1 „ 3_2	2,77	2,98	109	46	123	+ 63	−14	+19	+30	+21	+28	
4_1 „ 4_2	3,92	4,32	155	103	217	+ 52	− 62	−10	− 0	− 8	− 2	(14)
5_1 „ 5_2	4,84	5,42	191	84	264	+107	−73	+29	+ 5	+31	+ 3	
6_1 „ 6_2	5,22	5,88	206	123	294	+ 83	−88	− 2	− 3	+ 6	− 6	
7_1 „ 7_2	6,20	7,07	245	131	331	+114	−86	+11	+17	+16	+12	
8_1 „ 8_2	6,84	7,84	270	164	376	−106	+106	− 8	+ 8	− 4	+ 4	
								$(v\,v) = 3561$		$(v'\,v') = 3602$		

Mit diesen Coefficienten a, b, l sind die 16 Fehlergleichungen von der Form (9) und (10) nach der M. d. kl. Q. behandelt worden, die Normalgleichungen wurden:

$$
\begin{array}{l}
+\ 328{,}88\, i - 370{,}52\, n + 5267{,}63 = 0 \\
\qquad\qquad\quad + 417{,}64\, n - 5938{,}81 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 87973
\end{array}
$$

Die Auflösung gab:

$$i = +\ 6' \pm 38' \qquad n = +\ 20' \pm 34' \tag{15}$$

$$(l\,l\,.\,2) = 3518 \qquad m = \sqrt{\frac{3518}{16-2}} = \pm\ 16'' \tag{16}$$

Dann die einzelnen v wie schon bei (14) angegeben mit einer Summe $(v\,v)$, welche hinreichend mit $(l\,l\ .\ 2)$ übereinstimmt. (Die v der Tabelle (14) sind etwas schärfer als mit den auf 1′ abgerundeten Werthen i und n von (15) berechnet.)

Während der mittlere Fehler $m = \pm\ 16''$ für eine Bestimmung von α wohl den Verhältnissen entspricht, denn die Messungen α_1 und α_2 (vgl. Fig. 1.) unten und oben im Gesichtsfeld, sind aus vielen Gründen viel unsicherer als die Messungen in der Mitte, könnte es auf den ersten Blick überraschend scheinen, dass die Neigungen i und n selbst nach (15) mit so grossen mittleren Fehlern $\pm\ 38'$ und $\pm\ 34'$ behaftet sind.

Diese Neigungen wurden in § 34. S. 177 und 180 direct bestimmt mit den Resultaten

$$i = -\ 3' \qquad n = +\ 14' \tag{17}$$

also beide erheblich kleiner als die Werthe (15), was der unvermeidlichen Unsicherheit des Systems (15) und (17) nicht widerspricht.

Man kann nun einen Versuch machen, dieses System (17) ebenfalls in die Fehlergleichungen (9) und (10) einzusetzen, und man findet dabei das in der Tabelle (14) mit v_1' v_2' bezeichnete Fehlersystem, welches von dem System v_1 v_2 wenig abweicht und fast dieselbe Quadratsumme gibt.

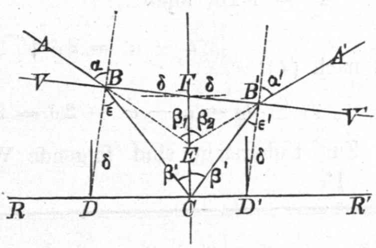
Auch die Fehlerberechnung nach der Formel (25) § 36. S. 188 gibt für beide Systeme von i und n nahezu dasselbe, z. B. für $\alpha = 90^0$ bzw. $\alpha - \alpha' = 10''$ und $8''$.

Die bedeutenden mittleren Fehler $\pm$ 38' und $\pm$ 34' des Systems (15) führen zu dem Schluss, dass die indirecte Methode der Bestimmung von i und n durch Messungsvergleichungen in verschiedenen Theilen des Gesichtsfeldes auch bei der sorgfältigsten Behandlung nach der Methode der kl. Q. die erhebliche dazu nöthige Beobachtungs- und Rechnungsmühe nicht wohl lohnt, dass man vielmehr auf dem directen Wege nach § 34. die Neigungen i und n rascher und genauer erhält. Zur weiteren theoretischen Bestätigung dieses Ergebnisses haben wir auch ausser den mittleren Fehlern von i und n den mittleren Fehler der Funktion von i und n berechnet, welche man nach (25) § 36. S. 188 zur Sextantencorrection braucht. Da das Resultat von derselben Art ist, wie die mittleren Fehler bei (15), theilen wir diese weiteren Rechnungen nicht mehr mit.

§ 38. Prismatischer Fehler des grossen Spiegels des Sextanten.

Die einfachen Reflexionsgesetze, welche für einen planparallelen an der Rückseite belegten Spiegel gelten, treffen nicht mehr zu, wenn die beiden Spiegelflächen nicht mehr eben und parallel sind. Wir untersuchen den Fall, dass die beiden Glasflächen zwar eben, aber nicht parallel seien.

Fig. 1. Convergenz der Spiegelebenen δ.



In Fig. **1.** sei VV' die Vorderfläche und RR' die mit Metall belegte Rückfläche eines solchen prismatischen Spiegels, dessen Convergenzwinkel $= \delta$ sei. $ABCB'A'$ sei der Weg eines an der Rückfläche reflectirten Lichtstrahls. Dann hat man mit den eingeschriebenen Winkeln α ε α' ε' und mit dem Brechungs-Coefficienten μ zunächst die zwei Gleichungen:

$$\text{Brechung in } B \qquad \sin\alpha = \mu \sin\varepsilon \tag{1}$$

$$\text{„ „ } B' \qquad \sin\alpha' = \mu \sin\varepsilon' \tag{2}$$

Mit dem an verschiedenen Stellen eingeschriebenen Convergenzwinkel δ hat man weiter: