

ein Resultat, welches durch einige ähnliche Versuche innerhalb einiger Minuten bestätigt wurde.

Dieser Winkel  $m$  ist nun nicht der Winkel zwischen der Normalen des grossen Spiegels und der Sextantenebene, sondern der Winkel zwischen dieser Spiegelnormale und der Fernrohrachse; nachdem aber die Fernrohrneigung  $i$  bereits bestimmt ist, hat man nun auch die reine Spiegelneigung

$$n = m + i$$

d. h. nach (5) und (1) hat man für unseren Fall:

$$n = 17' - 3' = + 14' \quad (6)$$

### § 35. Geneigter Spiegel und geneigte Lichtstrahlen.

Als Vorbereitung der Fehlertheorie des Sextanten, in Bezug auf die Neigungen der Spiegel und der Fernrohrachse, betrachten wir in Fig. 1. den Weg eines Lichtstrahls, welcher unter einem kleinen Winkel  $u$  gegen die Sextantenebene geneigt, auf einen Spiegel trifft, welcher selbst um den kleinen Winkel  $v$  gegen die Normallage geneigt ist.

Es ist zunächst für ein fehlerfrei angenommenes Instrument

$S_1 N_0 S_2$  die Sextantenebene,

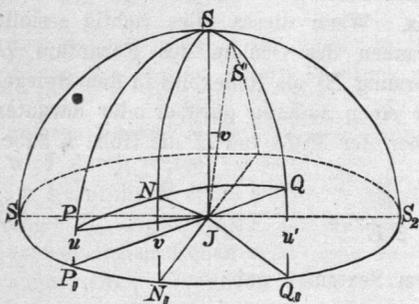
$S_1 S S_2$  die Ebene eines darauf rechtwinkligen Spiegels, und

$J N_0$  die in der Sextantenebene liegende Spiegelnormale.

Nun soll aber der Spiegel rückwärts nach  $S'$  geneigt werden, wodurch die Spiegelnormale  $J N_0$  nach  $J N$  gehoben wird, dabei kommt die Spiegelneigung  $v$  als Bogen  $SS'$  oder als  $N_0 N$  zur Anschauung.

Ferner treffe ein Lichtstrahl  $PJ$  mit einer Neigung  $u$  auf den geneigten Spiegel, und werde von demselben nach  $Q$  reflectirt. Dann liegen nach dem Reflexionsgesetze  $JP$  und  $JQ$  in einer Ebene mit der Spiegelnormale  $JN$ , weshalb in unserer Hilfskugel Fig. 1.  $PNQ$  ein grösster Kreisbogen sein muss, auf welchem  $PN = NQ$  ist.

Fig. 1.  
Spiegelneigung =  $v$   
Strahlenneigungen =  $u$  und  $u'$



Es interessirt uns nun, zu wissen:

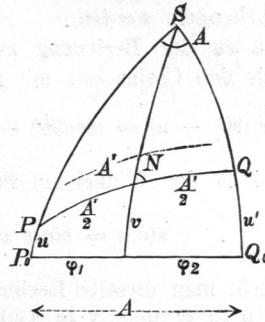
1) Welche Differenz zwischen dem Bogen  $PQ$  und seiner Projection  $P_0 Q_0$  besteht.

2) Unter welcher Neigung  $u'$  der Strahl  $JQ$  austritt.

3) Welche Differenz zwischen  $P_0 N_0$  und  $N_0 Q_0$  besteht, denn es ist zwar  $PN = NQ$ , aber die Projectionen  $P_0 N_0$  und  $N_0 Q_0$  sind im Allgemeinen einander nicht gleich.

Zur Beantwortung dieser drei Fragen zeichnen wir in Fig. 2. die in Betracht kommenden Theile von Fig. 1. nochmals besonders heraus, und fügen die Bezeichnungen  $A A'$   $\varphi_1 \varphi_2$  bei. Nun ist zuerst:

Fig. 2. Mitteltheil von Fig. 1.



$$\begin{aligned} \cos PQ &= \cos A' = \cos(90^\circ - u) \cos(90^\circ - u') + \sin(90^\circ - u) \sin(90^\circ - u') \cos A \\ \cos A' &= \sin u \sin u' + \cos u \cos u' \cos A \end{aligned}$$

bis zur zweiten Potenz entwickelt:

$$\begin{aligned} \cos A' &= uu' + \left(1 - \frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \cos A \\ \cos A' - \cos A &= uu' - \frac{u^2 + u'^2}{2} \cos A \end{aligned}$$

Andererseits ist genähert:

$$\begin{aligned} \cos A' - \cos A &= (A - A') \sin A, \text{ also} \\ A - A' &= \frac{uu'}{\sin A} - \frac{u^2 + u'^2}{2} \cotg A \end{aligned} \tag{1}$$

worin rechts auch  $A'$  statt  $A$  gesetzt werden darf.

Diese Formel (1) lässt sich auch noch weiter umformen,

$$\begin{aligned} \frac{(u + u')^2}{(u - u')^2} &= \frac{u^2 + 2uu' + u'^2}{u^2 - 2uu' + u'^2} \\ \frac{2(u^2 + u'^2)}{4uu'} &= \frac{(u + u')^2 + (u - u')^2}{(u + u')^2 - (u - u')^2} \end{aligned}$$

Dieses in (1) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} A - A' &= \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (u + u')^2 - (u - u')^2 - (u + u')^2 \cos A - (u - u')^2 \cos A \right\} \\ A - A' &= \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (u + u')^2 (1 - \cos A) - (u - u')^2 (1 + \cos A) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Wegen } 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}, \quad 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}, \quad \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

geht dieses über in:

$$A - A' = \left(\frac{u + u'}{2}\right)^2 \tan \frac{A}{2} - \left(\frac{u - u'}{2}\right)^2 \cotg \frac{A}{2} \tag{2}$$

worin rechtseitig auch  $A'$  statt  $A$  gesetzt werden darf.

Die Formel (2) enthält dieselben Beziehungen wie die bekannte Reduktion eines schiefgemessenen Winkels auf den Horizont, welche wir in § 40. behandeln werden.

Um zu der Beziehung zwischen  $u$  und  $u'$  zu gelangen, nehmen wir nochmals den Cosinussatz mit Fig. 2.:

$$\cos(90^\circ - u) = \cos(90^\circ - v) \cos \frac{A'}{2} + \sin(90^\circ - v) \sin \frac{A'}{2} \sin N$$

wenn mit  $N$  der Winkel am Punkt  $N$  bezeichnet wird, also:

$$\sin u = \sin v \cos \frac{A'}{2} + \cos v \sin \frac{A'}{2} \cos N$$

Macht man dieselbe Rechnung für den rechtseitigen Theil von Fig. 2., so geht  $u$  in  $u'$  und  $N$  in  $180^\circ - N$  über, also:

$$\sin u' = \sin v \cos \frac{A'}{2} - \cos v \sin \frac{A'}{2} \cos N$$

woraus in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$\sin u + \sin u' = 2 \sin v \cos \frac{A'}{2}$$

oder, da  $u$ ,  $u'$  und  $v$  sehr klein sind:

$$u + u' = 2 v \cos \frac{A'}{2} \quad (3)$$

Zur Beantwortung der dritten Frage, betreffend die Differenz  $\varphi_1 - \varphi_2$  wenden wir die Formel (1) auf den linkseitigen und auf den rechtseitigen Theil von Fig. 2. getrennt an, und erhalten:

$$\varphi_1 - \frac{A'}{2} = \frac{uv}{\sin \varphi_1} - \frac{u^2 + v^2}{2} \cotg \varphi_1$$

$$\varphi_2 - \frac{A'}{2} = \frac{u'v}{\sin \varphi_2} - \frac{u'^2 + v^2}{2} \cotg \varphi_2$$

Man kann hier, ebenso wie bei (1) und (2), rechts statt  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  auch  $\frac{A'}{2}$  setzen oder auch schlechthin einen Mittelwerth  $\varphi$  annehmen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(u - u')v}{\sin \varphi} - \frac{u^2 - u'^2}{2} \cotg \varphi$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{u - u'}{\sin \varphi} \left( v - \frac{u + u'}{2} \cos \varphi \right) \quad (4)$$

Nun sind aber  $u$ ,  $v$ ,  $u'$  durch die Gleichung (3) verbunden, was wir dazu benutzen, um  $u'$  zu eliminiren, (3) gibt für uns:

$$u + u' = 2v \cos \varphi \quad u' = -u + 2v \cos \varphi$$

also

$$u - u' = 2(u - v \cos \varphi)$$

Die Einsetzung in (4) gibt:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2(u - v \cos \varphi)}{\sin \varphi} (v - v \cos^2 \varphi)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2v \sin \varphi (u - v \cos \varphi) \quad (5)$$

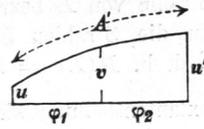
Zur Veranschaulichung der Resultate (3) und (5) ist Fig. 3. gezeichnet.

Als einfachsten Fall der Formel (3) betrachten wir  $A' = 0$ , dieses gibt:

$$u + u' = 2v \quad \text{oder} \quad \frac{u + u'}{2} = v$$

d. h. eine Beziehung, deren Richtigkeit unmittelbar eingesehen wird

Fig. 3. (zu S. 182.)  
Spiegelneigung =  $v$ .  
Strahlenneigungen =  $u$  und  $u'$ .



### § 36. Fehlertheorie der Fernrohr- und Spiegelneigungen des Sextanten.

Wenn die Fernrohrachse parallel der Sextantenebene ist, und die beiden Spiegel rechtwinklig zur Sextantenebene sind, so bleiben alle bei Messungen in Betracht kommenden Lichtstrahlen parallel der Sextantenebene; oder da es sich nur um Richtungen handelt, kann man sagen: alle Strahlen bleiben in einer durch die Fernrohrmitte parallel zur physischen Sextantenebene gelegten Messungsebene, welche wir für unsere Theorie die wahre Sextantenebene nennen wollen.

Wenn dagegen jene Voraussetzungen nicht erfüllt sind, so treten die Messungsstrahlen aus dieser Sextantenebene heraus und alle Winkel dieser Strahlen ändern sich.

Die drei Formeln (2), (3) und (5) des vorigen § 35. (S. 181—182) geben vollständigen Anschluss über den Weg des dort betrachteten Lichtstrahls  $PQ$ , und da der Weg eines Lichtstrahls bei der Sextantenmessung nichts anderes ist als die zweifache Reflexion von derselben Art wie bei  $PQ$ , so können wir jetzt zur Sextantenfehlertheorie übergehen.

In Fig. 1. (welche im Wesentlichen dieselben Bezeichnungen enthält, wie die Sextantenfigur S. 155) bedeutet  $S$  den grossen Spiegel,  $s$  den kleinen Spiegel,  $F$  das Fernrohr,  $L$  und  $R$  sind die Strahlen nach dem linken und rechten Zielpunkt,  $N$  und  $N'$  sind die Normalen des grossen und des kleinen Spiegels.

Wenn ein Winkel  $\alpha$  zwischen  $L$  und  $R$  gemessen wird, so macht  $R$  den Weg  $RSsF$  und fällt im letzten Theil mit  $Ls$  zusammen. Da es uns nur auf die Richtungen ankommt, denken wir uns alle Strahlen mit sich selbst parallel in einen Punkt verlegt, und zwar in die Mitte des grossen Spiegels  $S$ , in welcher ohnehin schon die Mehrzahl der Linien sich schneidet. Es wird also  $sL$  nach  $S(L)$  und  $sN'$  nach  $S(N')$  verlegt, dabei bleiben auch die Neigungen gegen die Sextantenebene ungeändert. Diese in Fig. 1. durch Pfeile bezeichneten Neigungen sind:  $a$   $b$  und  $i$  die Neigungen der Lichtstrahlen,  $n$  und  $n'$  die Neigungen der Normalen der beiden Spiegel. Der Pfeil soll jeweils die Neigung der Geraden von der Sextantenebene aufwärts bezeichnen.