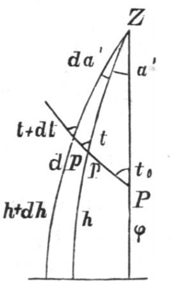
§ 25. **Höhere Glieder der Reihen für Azimut und Höhe des Polarsterns.**

Die Reihenentwicklungen von § 23. und § 24., welche bis zur dritten Potenz des Polabstands geführt sind, reichen unbedingt aus, so lange man nur etwa auf 0,5'' genau rechnen will; und wenn, wie in unseren Messungs- und Berechnungsbeispielen, die tägliche Aberration vernachlässigt wird, welche bis zu 0,3'' beträgt, so ist kein sachlicher Grund vorhanden, genauer zu rechnen.

Indessen, wenn man auch nur bis p^2 und p^3 gehen will, ist unter Umständen statt des schrittweisen Vorgehens, zuerst bis p^2 und dann bis p^3, welches in § 23. und § 24. als elementarste und anschaulichste Methode gewählt wurde, ein allgemeineres Verfahren, welches leicht beliebig weit fortgesetzt werden kann, erwünscht.

Man kann zu diesem Zweck die Gleichung (1) § 23. S. 121 und die Formel für *sin h* nach (1) § 24. S. 132 nach der Methode der unbestimmten Coefficienten entwickeln, was, wie wir uns überzeugt haben, ziemlich rasch zum Ziele führt; besser noch ist eine Entwicklung nach dem Maclaurin'schen Satz, welche auch bei der entsprechenden geodätischen Aufgabe, der sphärischen Breiten- und Längenübertragung anzuwenden ist.

Fig. 1. Polaris-Differentiale.



Wir betrachten in Fig. 1. den Pol P und das Zenit Z, dann einen mit dem Stundenwinkel t_0 von P ausgehenden Bogen von der Länge p, der in seiner Richtung die Zunahme dp erfährt. Dieser Zunahme dp entspricht eine Azimutänderung da' und eine Höhenänderung dh, ferner eine Aenderung dt des Winkels t zwischen dem Bogen p und dem Höhenkreis h. (t entspricht dem Azimut bei der sphärisch-geodätischen Aufgabe.) Aus der Figur entnimmt man nach Anleitung von S. 50:

$$dp \cos t = dh \tag{1}$$

$$dp \sin t = da' \sin (90^0 - h) = da' \cos h \tag{2}$$

$$dt = da' \cos (90^0 - h) = da' \sin h \tag{3}$$

oder in Form von Differentialquotienten:

$$\frac{dh}{dp} = \cos t \tag{4}$$

$$\frac{da'}{ap} = \frac{\sin t}{\cos h} \tag{5}$$

$$\frac{dt}{dp} = \sin t \tang h \tag{6}$$

Nun gibt der Maclaurin'sche Satz:

$$h - \varphi = \left.\frac{dh}{dp}\right] p + \left.\frac{d^2 h}{dp^2}\right] \frac{p^2}{2} + \left.\frac{d^3 h}{dp^3}\right] \frac{p^3}{6} + \left.\frac{d^4 h}{dp^4}\right] \frac{p^4}{24} + \ldots \tag{7}$$

$$a' = \left.\frac{da'}{dp}\right] p + \left.\frac{d^2 a'}{dp}\right] \frac{p^2}{2} + \left.\frac{d^3 a'}{dp^3}\right] \frac{p^3}{6} + \left.\frac{d^4 a'}{dp^4}\right] \frac{p^4}{24} + \ldots \quad . \tag{8}$$

wo das Zeichen] andeuten soll, dass nach der Ausführung der Differentiirungen $h = \varphi$ und $t = t_0$ gesetzt werde.

Aus (4) und (6) bildet man:

$$\frac{d^2 h}{d p^2} = - \sin t \frac{d t}{d p} = - \sin^2 t \operatorname{tang} h \tag{9}$$

$$\frac{d^3 h}{d p^3} = -2 \sin t \cos t \frac{d t}{d p} \operatorname{tang} h - \sin^2 t \, \frac{1}{\cos^2 h} \frac{d h}{d p}$$

Dieses gibt mit (4) und (6) zusammengefasst:

$$\frac{d^3 h}{d p^3} = - \sin^2 t \cos t \, (1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \tag{10}$$

In gleicher Weise wird weiter differentiirt und erhalten:

$$\frac{d^4 h}{d p^4} = \operatorname{tang} h \left\{ \sin^4 t \, (1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) - 4 \sin^2 t \cos^2 t \, (2 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \right\} \tag{11}$$

Ferner nach (5) mit (4) und (6):

$$\frac{d^2 a'}{d p^2} = \frac{\cos t}{\cos h} \frac{d t}{d p} + \frac{\sin h}{\cos^2 h} \frac{d h}{d p} \sin t$$

$$= 2 \sin t \cos t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h} \tag{12}$$

Auf gleichem Wege erhält man auch:

$$\frac{d^3 a'}{d p^3} = 2 \sin t \cos^2 t \frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 h}{\cos h} - 2 \sin^3 t \frac{\operatorname{tang}^2 h}{\cos h} \tag{13}$$

$$\frac{d^4 a'}{d p^4} = 8 \sin t \cos^3 t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h} (2 + 3 \operatorname{tang}^2 h) - 8 \sin^3 t \cos t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h} (1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \tag{14}$$

Indem wir nun die Reihen (7) und (8) zusammensetzen, nehmen wir wieder, wie früher, zur Abkürzung:

$$p \cos t] = p \cos t_0 = u \qquad p \sin t] = p \sin t_0 = v \tag{15}$$

ferner

$$\operatorname{tang} h] = \operatorname{tang} \varphi \tag{16}$$

Auch schreiben wir noch die Glieder fünfter Ordnung, deren Differentialquotienten oben nicht aufgeführt sind, mit hinzu, weil diese Ausdehnung auf dem angegebenen Wege keine Schwierigkeiten hat.

Die Resultate sind, mit Zufügung der nöthigen ϱ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = h - u &+ \frac{v^2}{2 \varrho} \operatorname{tang} \varphi + \frac{u v^2}{6 \varrho^2} (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \\ &+ \frac{u^2 v^2}{6 \varrho^3} \operatorname{tang} \varphi \, (2 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) - \frac{v^4}{24 \varrho^3} (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \\ &+ \frac{u^3 v^2}{30 \varrho^4} (2 + 15 \operatorname{tang}^2 \varphi + 15 \operatorname{tang}^4 \varphi) - \frac{u v^4}{120 \varrho^4} (1 + 30 \operatorname{tang}^2 \varphi + 45 \operatorname{tang}^4 \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$a = 360^0 - a'$$

$$\left.\begin{aligned}
a \cos\varphi = & - v - \frac{u\,v}{\varrho} \, tang\,\varphi - \frac{u^2\,v}{3\,\varrho^2}(1 + 3\,tang^2\,\varphi) + \frac{v^3}{3\,\varrho^2}\,tang^2\,\varphi \\
& - \frac{u^3\,v}{3\,\varrho^3}\,tang\,\varphi\,(2 + 3\,tang^2\,\varphi) + \frac{u\,v^3}{3\,\varrho^3}\,tang\,\varphi\,(1 + 3\,tang^2\,\varphi) \\
& - \frac{u^4\,v}{15\,\varrho^4}(2 + 15\,tang^2\,\varphi + 15\,tang^4\,\varphi) - \frac{v^5}{15\,\varrho^4}\,tang^2\,\varphi\,(1 + 3\,tang^2\,\varphi) \\
& + \frac{u^2\,v^3}{15\,\varrho^4}(1 + 20\,tang^2\,\varphi + 30\,tang^4\,\varphi)
\end{aligned}\right\}(18)$$

Wenn man auf 0,01″ genau rechnen will, so genügt (in unseren Breiten) bei der Breite die vierte Ordnung, beim Azimut die fünfte Ordnung.

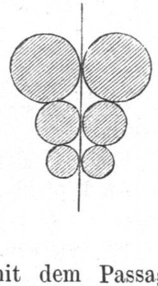
Man kann unsere Formeln (17) und (18) durch die Vergleichung mit Helmert, Höhere Geodäsie I S. 298, controlliren, indem man dort $\delta = 0$ setzt, $u = -u$ nimmt, und beim Azimut a auch noch im Ganzen das Zeichen ändert.

§ 26. Gnomon und Dipleidoskop.

Die einfachste und für alle bürgerlichen Zwecke hinreichende tägliche Mittagszeitbestimmung erhält man durch eine unter dem Namen „Gnomon“ schon im Alterthum und im Mittelalter bekannte Vorrichtung, welche in den Instrumentensälen in Karlsruhe und in Hannover in folgender einfacher Form von uns angeordnet wurde:

Auf dem Fussboden ist eine 1 cm breite Meridianlinie gezogen (2 mm tief in den Boden mit Nuthobel eingehobelt) und an dem Fenster, welches gegen Süden in diesem Meridian liegt, sind in der Höhe von 4 Meter mehrere aus schwarzem Papier ausgeschnittene Kreise von 10—20 cm Durchmesser in der Anordnung von Fig. 1. auf die Glasscheibe aufgeklebt. Diese Kreise mit ihren Zwischenräumen geben eine symmetrische Schattenfigur, deren Bewegung, über die Meridianlinie hinweg, auf dem Fussboden beobachtet wird. Wenn die Schattenfigur symmetrisch zum Meridian liegt, ist wahrer Mittag.

Fig. 1.
Schattenwerfende Figur.



Allerdings ist die Schattenfigur wegen des Halbschattens sehr verschwommen, doch lässt sich eine Genauigkeit von einigen Zeitsecunden leicht erreichen, wie aus den nachher mitzutheilenden Vergleichungen mit dem Passage-Instrument hervorgehen wird.

Was die Ziehung der Meridianlinie auf dem Fussboden betrifft, so besteht das nächstliegende astronomische Mittel darin, dass man anderwärts, z. B. aus einzelnen Sonnenhöhen oder aus correspondirenden Sonnenhöhen (§ 13. und § 16.), die Zeit bestimmt, mit dieser Zeitbestimmung und mit der Zeitgleichung den Uhrstand berechnet, welcher der Culmi-