§ 24. Breitenbestimmung durch den Polarstern.

Aehnlich wie das Azimut durch Beobachtung des Polarsterns in horizontalem Sinn gefunden wurde, (§ 23.) kann auch die Breite, oder Polhöhe, durch Messung eines Höhenwinkels auf den Polarstern bestimmt werden. Man hat dann nur diese Höhe des Sterns auf die Höhe des Pols zu reduciren, und die Refraction anzubringen, um die wahre Polhöhe als Resultat zu erhalten.

Zur strengen Berechnung hat man nach Fig. 1. § 23. S. 121 zunächst ebenso wie beim Azimut:

$$tang\ u = tang\ p\ \cos t \tag{1}$$

dann $\cos (90^0 - h) = \cos (90^0 - (\varphi + u)) \cos v = \sin (\varphi + u) \cos v$

und

$$\cos p = \cos u\ \cos v$$

woraus zusammen:

$$\sin (\varphi + u) = \frac{\sin h}{\cos p} \cos u \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe.

Um eine Reihenentwicklung bis zur zweiten Potenz zu erhalten, bildet man aus (2):

$$\sin (\varphi + u) = \frac{\sin h}{1 - \frac{p^2}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{2}\right) = \sin h \left(1 + \frac{p^2}{2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{2}\right)$$

$$= \sin h \left(1 + \frac{p^2 - u^2}{2}\right)$$

$$\sin (\varphi + u) - \sin h = \sin h \left(\frac{p^2 - u^2}{2}\right)$$

Es ist in erster Näherung nach (1):

$$u = p \cos t, \tag{3}$$

also $$\sin (\varphi + u) - \sin h = \sin h \frac{p^2}{2} (1 - \cos^2 t) \tag{4}$$

links kann man, weil $\varphi + u$ und h nahezu gleich sind, ohne weiteren Genauigkeitsverlust setzen:

$$\sin (\varphi + u) - \sin h = (\varphi + u - h) \cos h$$

also nach (4):

$$\varphi + u - h = \frac{p^2}{2} tang\ h \sin^2 t + p^4 \ldots \tag{5}$$

Wenn man u nach (3) einsetzt, so hat man jetzt auf p^2 einschliesslich genau:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2\varrho} \tang h \sin^2 t \tag{6}$$

indem zugleich im quadratischen Glied der Nenner ϱ zugesetzt wurde.

Wenn man bis zur dritten Potenz entwickeln will, so hat man für u, wie schon beim Azimut ((9) S. 123) gefunden wurde:

$$u = p \cos t + \frac{p^3}{3} \cos t \sin^2 t + p^4 \ldots \tag{7}$$

Die Gleichung (5) ist auch auf p^3 einschliesslich genau, es soll aber jetzt in derselben h durch φ ersetzt werden, d. h. nach (6)

$$h = \varphi + p \cos t + \ldots$$

$$\tang h = \tang \varphi + \frac{p \cos t}{\cos^2 \varphi}$$

Setzt man dieses in (5), so hat man

$$\varphi + u - h = \frac{p^2}{2} \tang \varphi \sin^2 t + \frac{p^3}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sin^2 t \cos t$$

und wenn man hier noch u aus (7) einsetzt, und nach Potenzen von p ordnet, so hat man:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2} \sin^2 t \tang \varphi + \frac{p^3}{6} \sin^2 t \cos t \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - 2\right)$$

Die letzte Klammer kann man noch goniometrisch umformen, und zugleich hat man die verschiedenen ϱ zuzusetzen, woraus das Resultat entsteht:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2\varrho} \sin^2 t \tang \varphi + \frac{p^3}{6\varrho^2} \sin^2 t \cos t (1 + 3 \tang^2 \varphi) \tag{8}$$

$$p = 1^0\ 18' = 78' = 4680'' \text{ gibt } \log \frac{p^3}{6\varrho^2} = 9.60374$$

$$\varphi = 52^0\ 23' \text{ gibt } \log (1 + 3 \tang^2 \varphi) = 0.78194.$$

Das letzte Glied der Reihe (8) gibt für $\varphi = 52^0\ 23'$ (Hannover) und $p = 1^0\ 18'$ folgende Werthe:

$t =$	0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h
letztes Glied von (8):	0,00″	0,16″	0,53″	0,86″	0,91″	0,59″	0,00″

Bei Berechnung von Messungen für nautische und ähnliche Zwecke wird dieses Glied vernachlässigt.

In den höheren Gliedern ist bei Anwendung der Reihe (8) für φ, welches selbst erst bestimmt werden soll, eine erste Näherung zu setzen. Man könnte statt φ auch die Höhe h in diesen Gliedern einführen, wie in der That bei der ersten Formel (6) geschehen ist, indessen ist es bequemer, das unbekannte φ in der Rechnung zu haben als das bekannte h, weil letzteres in einer Beobachtungsreihe stets wechselt.

Für das zweite Glied in (8) hat man in den nächsten 5 Jahren:

Jahr	$log\ \frac{p^2}{2\varrho}$ in Minuten	$log\ \frac{p^2}{2\varrho}$ in Secunden
1885	9.9498	1.7280
1886	9.9463	1.7245
1887	9.9428	1.7209
1888	9.9392	1.7174
1889	9.9357	1.7138
1890	9.9321	1.7102

Als Beispiel nehmen wir die Polaris - Breitenmessung in der Oase Farafrah vom 30. December 1873 Abends in der Dämmerung mit dem Theodolit Fig. 1. S. 38:

	Chronometer	Fernrohrlage I	Fernrohrlage II
	$4^h\ 31^m\ 8^s$	Non. links $118^0\ 26'\ 40''$ Non. rechts $298\ \ 21\ \ 20$	
	$4^h\ 34^m\ 4^s$		Non. links $241^0\ 40'\ 0''$ Non. rechts $61\ \ 37\ \ 20$
Mittel	$4^h\ 32^m\ 36^s$	$I = 298^0\ 24'\ 0''$	$II = 241^0\ 38'\ 40''$

$$I - II = 56^0\ 45'\ 20''$$

$$\frac{I - II}{2} = 28^0\ 22'\ 40''$$

Indem die Fernrohrlagen I und II so verbunden werden, erhält man die Höhe $28^0\ 22'\ 40''$ sofort vom Indexfehler des Höhenkreises befreit.

Das Mittel der Chronometerablesungen $4^h\ 32^m\ 36^s$ wird auf mittlere Ortszeit reducirt durch correspondirende Sonnenhöhen, welche die Standcorrection $+\ 0^h\ 56^m\ 33^s$ ergaben, d. h. die mittlere Ortszeit der Polarismessung ist $= 4^h\ 32^m\ 36^s + 0^h\ 56^m\ 33^s = 5^h\ 29^m\ 9^s$. Solcher Messungen wurden in der Dämmerung 3 vollständige erhalten, wie im Folgenden angegeben ist.

Mittlere Ortszeit	$5^h\ 29^m\ 9^s$	$5^h\ 34^m\ 18^s$	$5^h\ 38^m\ 41^s$	(9)
Scheinbare Höhen Polaris	$28^0\ 22'\ 40''$	$28^0\ 23'\ 12''$	$28^0\ 23'\ 57''$	(10)

Lufttemperatur $= 11^0$ C., Barometer $= 764$ mm, folglich nach S. [7]—[11]:

Mittlere Refraction S. [7]	$1'\ 47''$	$1'\ 47''$	$1'\ 47''$	
Correction für 11^0 S. [9]	$-\ 1$	$-\ 1$	$-\ 1$	
Correction für 764 mm S. [11]	$+\ 2$	$+\ 2$	$+\ 2$	
Wahre Refraction	$1'\ 48''$	$1'\ 48''$	$1'\ 48''$	
Wahre Höhen $h =$	$28^0\ 20'\ 52''$	$28^0\ 11'\ 24''$ 21	$28^0\ 22'\ 9''$	(11)

Der Nautical Almanac für 1873 gibt auf S. 223 für 30. December die Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag $= 18^h\ 35^m\ 59^s$.

Die Länge von Farafrah ist $\lambda = 1^h\ 52^m$ östlich von Greenwich, also nach der Tafel S. [4] I, $(\varDelta\lambda) = -\ 0^h\ 18^s$, also (nach S. 22.) die Sternzeit im mittleren Farafrah-Mittag $= 18^h\ 35^m\ 59^s - 0^m\ 18^s = 18^h\ 35^m\ 41^s$. Der Nautical Almanac für 1883 gibt ferner auf S. 336, 30. December, für den Polarstern:

Rectascension $\alpha = 1^h\ 12^m\ 27^s$ und Declination $\delta = 88^0\ 38'\ 33''$, d. h.

$$\alpha = 1^h\ 12^m\ 27^s \qquad p = 90^0 - \delta = 1^0\ 21'\ 27'' = 4887'' \tag{12}$$

Nun rechnen wir mit (9) weiter:

Mittlere Ortszeit $t' =$	$5^h\ 29^m\ 9^s$	$5^h\ 34^m\ 18^s$	$5^h\ 38^m\ 41^s$
Zuschlag für Sternzeit S. [4], I:	0 54	0 55	0 56
Sternzeit im mittleren Far. Mittag (s. o.)	18 35 41	18 35 41	18 35 41
Ortssternzeit	$24^h\ 5^m\ 44^s$	$24^h\ 10^m\ 54^s$	$24^h\ 15^m\ 18^s$
Rectascension nach (12) . . .	1 12 27	1 12 27	1 12 27
Stundenwinkel t	$22^h\ 53^m\ 17^s$	$22^h\ 58^m\ 27^s$	$23^h\ 2^m\ 51^s$
Nach S. [3] in Bogen $t =$ . .	$343^0\ 19'\ 15''$	$344^0\ 36'\ 45''$	$345^0\ 42'\ 45''$
Nach (12) $p = 4887''$ $log\, p$.	3.68904	3.68904	3.68904
$log\, cos\, t$	9.98133	9.98415	9.98636
$log\, p\, cos\, t$	3.67037	3.67319	3.67540
$p\, cos\, t =$.	$4681'' = 1^0\ 18'\ 1''$	$4712'' = 1^0\ 18'\ 32''$	$4736'' = 1^0\ 18'\ 56''$

Dieses zu (11) genommen gibt:

$$h - p\cos t = \varphi_1 = \ldots \quad 27^0\ 2'\ 51'' \quad 27^0\ 2'\ 52'' \quad 27^0\ 3'\ 13'' \tag{13}$$

Damit haben wir die zwei ersten Glieder der Formel (6) oder (8) berechnet, und wir können den Mittelwerth $\varphi_1 = 27^0\ 3'$ in dem quadratischen Glied von (8) für φ benutzen. Indessen, da wir das letzte Glied von (8) überhaupt nicht mehr benutzen wollen, könnten wir auch das dritte Glied von (6) nehmen, welches sich von dem quadratischen Glied von (8) nur durch *tang h* statt *tang φ* unterscheidet.

Wir schreiben zur vorübergehenden Abkürzung das quadratische Glied von (8) in die Form $A\ sin^2\ t$ und berechnen $log\ A$:

Nach (12) ist $p = 4887''$ $\qquad log\, p = 3.6890$

$log\, p^2$	7.3780
Erg. log 2	9.6990
Erg. log ϱ	4.6856
$log\, tang\, \varphi$	9.7081
$log\, A$	1.4707

Damit folgt weiter:

$t =$	$343^0\ 19'$	$344^0\ 37'$	$345^0\ 43'$
$log\, sin\, t$	9.4580_n	9.4237_n	9.3922_n
$log\, sin^2\, t$	8.9160	8.8474	8.7844
$log\, A$	1.4707	1.4707	0.4707
$log\, III$	0.3867	0.3181	0.2551
$III =$	2,4″	2,1″	1,8″

Diese Correctionen zu (13) hinzugefügt, geben die drei Resultate:

$$\varphi = 27^0\ 2'\ 53'' \qquad 27^0\ 2'\ 54'' \qquad 27^0\ 3'\ 15''$$

$$\text{Mittel } \varphi = 27^0\ 3'\ 1'' \pm 7'' \tag{14}$$

Der beigesetzte mittlere Fehler $\pm\ 7''$ ist aus den Abweichungen der drei Einzelwerthe von ihrem Mittel berechnet, und gilt nur vorbehältlich constanter Fehlerquellen, und solche muss man allerdings annehmen, wenn man das Resultat (14) mit dem früheren (14) oder (14a) § 19. S. 103, nämlich $\varphi = 27^0\ 3'\ 50'' \pm 6''$ vergleicht.

Zwölf Breiten der libyschen Expedition gaben ähnliche Verhältnisse, nämlich (Phys. Geogr. und Met. der lib. Wüste S. 13):

Punkt	Breite aus Sonnenhöhen *I*	Breite aus Polarishöhen *II*	Differenz *I—II=d*	Abweichung $d_0 - d$	$(d_0 - d)^2$
1. Hamrah	$27^0\ 11'\ 20'' \pm 4''$	$27^0\ 10'\ 41'' \pm 23''$	$+ 39''$	$+ 11''$	121
2. Marak	$27\ \ 23\ \ 20 \pm 7$	$27\ \ 22\ \ 31 \pm 13$	$+ 49$	$+ 1$	1
3. Farafrah	$27\ \ \ 3\ \ 50 \pm 6$	$27\ \ \ 3\ \ \ 1 \pm 7$	$+ 49$	$+ 1$	1
4. Dachel	$25\ \ 42\ \ 14 \pm 6$	$25\ \ 41\ \ 43 \pm 3$	$+ 31$	$+ 19$	361
5. Einsiedel I	$25\ \ 37\ \ 15 \pm 3$	$25\ \ 36\ \ \ 9 \pm 4$	$+ 66$	$- 16$	256
6. Einsiedel II	$25\ \ 25\ \ 36 \pm 7$	$25\ \ 24\ \ 47 \pm 23$	$+ 49$	$+ 1$	1
7. Regenfeld	$25^0\ 11'\ 26'' \pm 7''$	$25^0\ 10'\ 48'' \pm 5''$	$+ 38''$	$+ 12$	144
8. Sandheim	$26\ \ 52\ \ 57 \pm 9$	$26\ \ 52\ \ \ 5 \pm 7$	$+ 52$	$- 2$	4
9. Siuah	$29\ \ 12\ \ 27 \pm 6$	$29\ \ 11\ \ 32 \pm 9$	$+ 55$	$- 5$	25
10. Beharieh	$28\ \ 21\ \ 27 \pm 8$	$28\ \ 20\ \ 56 \pm 27$	$+ 31$	$+ 19$	361
11. Chargeh	$25\ \ 26\ \ 53 \pm 5$	$25\ \ 25\ \ 59 \pm 11$	$+ 54$	$- 4$	16
12. Esneh	$25\ \ 18\ \ 55 \pm 5$	$25\ \ 17\ \ 31 \pm 6$	$+ 84$	$- 34$	1156
		Mittel $d_0 =$	$+ 50''$		2447 (15)

Es ist dieses ein sehr starkes Beispiel des Vorkommens constanter Fehler, deren Hauptursache auch beim Anblick des Instrumentes S. 38 erklärlich ist. Die Libelle, welche unmittelbar vor jeder Einstellung des Fernrohrs auf die Sonne oder auf den Stern mit einer Stellschraube zum Einspielen gebracht wurde (weil auf allgemeine genügende Horizontalstellung unter jenen Umständen nicht gerechnet werden konnte), befindet sich nämlich u n t e r der Bussole, zwischen den Fernrohrträgern, ungünstig angebracht, denn sie musste von vorne sehr schief beobachtet werden. Dadurch entstanden starke Parallaxen bei der Beurtheilung der Stellung der im I n n e r n der Röhre befindlichen Blase gegen die auf der äusseren Glasröhrenwand angebrachten Theilstriche. Die Blase schien einzuspielen, während sie erheblich jenseits der Normalstellung war, d. h. alle Höhenwinkel wurden zu klein erhalten, und zwar nach (15) um den erheblichen Betrag von $\frac{1}{2}\, d_0 = 25''$, weil dieser Fehler bei Sonnenmittagsbreiten positiv, bei Polarisbreiten negativ wirkt.

Bei (15) sind noch die Abweichungen $d_0 - d$ gebildet, deren Quadratsumme $= 2447$ ist, woraus der mittlere unregelmässige Fehler von d wird

$$(d) = \sqrt{\frac{2447}{11}} = \pm 15'' \qquad \frac{(d)}{2} = \pm 7{,}5''$$

und als mittlerer Fehler eines arithmetischen Mittels aus einer Sonnenbreite und der zugehörigen Polarisbreite braucht jetzt nur noch $\pm 8''$ angenommen zu werden, was für jene Verhältnisse vollauf hinreichend war.

Nach dieser Erfahrung müsste die Libelle L' Fig. 1. S. 38 für künftige Messungen anders angeordnet werden, indessen können wohl auch noch andere Ursachen mitgewirkt haben, z. B. der starke Sonnenschein über Mittag.

Auch bei f e i n e r e n Breitenmessungen macht man die Erfahrung constanter Fehler, die sich aber bei Messungen ersten Rangs nur auf Bruchtheile der Secunde zu belaufen pflegen, und gewöhnlich der „Biegung des Fernrohrs" zugeschrieben werden.

Zur Vergleichung mit den Resultaten (28) § 19. S. 108, Breite von Hannover aus Sonnenhöhen, haben wir mit dem alten Meyerstein'schen Instrument Fig. 4. S. 41 auch 3 Polarisbreiten gemessen, nämlich:

4. Juni 1883	$\varphi =$	$52^0\ 22'\ 57''$	Hannover, Technische Hochschule E.
5. „ „		52 22 44	
16. „ „		52 22 47	
Mittel	$\varphi =$	$52^0\ 22'\ 49'' \pm 4''$	

Mit Rücksicht auf die mancherlei Mängel des Instruments Fig. 4. S. 41 stimmt dieses hinreichend mit (28) S. 108 $\varphi = 52^0\ 22'\ 55'' \pm 5''$ und wir nehmen daher bis auf Weiteres:

$$\text{Hannover, Technische Hochschule Punkt } E\text{:}\quad \varphi = 52^0\ 22'\ 52'' \pm 3'' \qquad (16)$$

Die geodätische Uebertragung von Göttingen gibt für diesen Punkt die Breite $52^0\ 23'\ 1''$.

(Eine genauere Messung mit dem neuen Instrument von Bamberg S. 44 liegt noch nicht vor.)

Wenn man die Zeiten für Polarisbreitenmessung auswählen kann, so wird man natürlich die Zeit der oberen oder unteren Culmination wählen, damit der Zeitfehler möglichst wenig ausmacht. Man findet die Culminationszeiten durch die Betrachtungen von S. 119 und S. 131.

Hülfstafeln für Polarisbreiten.

Man hat der Formel (6) entsprechend zuweilen Hülfstafeln zur Berechnung der Breiten aus gemessenen Polarsternhöhen construirt, z. B. gibt der Nautical Almanac für 1884 auf S. 477 — 479 (ähnlich in den folgenden Jahrgängen) 3 Tafeln, von denen die erste das Hauptglied

$-p \cos t$ mit dem Mittelwerth $p_0 = 1^0\ 18'\ 0''$ und mit der Rectascension $\alpha_0 = 1^h\ 17^m\ 0^s$ gibt, die zweite Tafel gibt das Glied $\frac{p^2}{2\,\varrho} \tang h \sin^2 t$ und eine dritte Tafel ist nöthig, um der Jahreszeit entsprechend die Abweichungen der jeweiligen Declination und Rectascension des Sterns von den angenommenen Normalwerthen $1^0\ 18'$ und $1^h\ 17^m$ zu berücksichtigen. Zu beachten ist, dass im Ganzen noch $1'$ abzuziehen ist; es ist nämlich der dritte Tafelwerth um $1'$ zu gross angesetzt, damit keine Zeichenwechsel nöthig werden. Als Zeitargument ist nicht der Stundenwinkel t, sondern die Sternzeit $S = t + \alpha_0$ angenommen.

Bezeichnet man den jeweiligen Polabstand des Sterns mit $p_0 + dp$ und die jeweilige Rectascension mit $\alpha_0 + d\alpha$, also den jeweiligen Stundenwinkel mit $(S - \alpha_0) - d\alpha$, so kann man die 3 Hülfstafeln des Nautical Almanac durch folgende Gleichungen deuten:

$$\varphi = h - (p_0 + dp) \cos\left((S - \alpha_0) - d\alpha\right) + \frac{p^2}{2\,\varrho} \tang h \sin^2 t$$

$$\begin{aligned} \text{Zweites Glied} &= (p_0 + dp)\left(\cos(S - \alpha_0) + d\alpha \sin(S - \alpha_0)\right) \\ &= p_0 \cos(S - \alpha_0) + p_0\, d\alpha \sin(S - \alpha_0) + dp \cos(S - \alpha_0) \end{aligned}$$

also im Ganzen:

$$\varphi = h - 1' - \underbrace{p_0 \cos(S - \alpha_0)}_{I} + \underbrace{\frac{p^2}{2\,\varrho} \tang h \sin^2 t}_{II}$$

$$\underbrace{+\, p_0\, d\alpha \sin(S - \alpha_0) + dp \cos(S - \alpha_0) + 1'}_{III}$$

d. h. $\varphi = h - 1' + I + II + III.$

Diese Tafeln sind für praktische Seefahrer bestimmt. Wenn man aber auch nur auf $1'$ genau rechnen will, so verlangt Tafel I mit Intervall von 10^m und Differenzen bis zu $3'$ bereits Interpolation, und damit ist die ganze Methode unbequemer als die Ausrechnung der zwei letzten Glieder von (6) mit 4—5stelligen Logarithmen.

Auf der libyschen Expedition maass ich abendlich Polarishöhen, und berechnete das Hauptglied $p \cos t$, wo $t = S - \alpha$ ist, logarithmisch, wozu eine kleine Ephemeride für $\log p$ und α zum Voraus angelegt war; für das Glied II diente ein Hülfstäfelchen von ähnlicher Form wie II des Nautical Almanac, jedoch für den besonderen Fall mit kleineren Intervallen. Diese ganze Rechnung verlangt nur wenige Minuten Zeit.

Wenn man die Tafeln des Nautical Almanac auch nicht unmittelbar benutzen will, so ist immerhin die Tafel II erwünscht, wenn es auf $1''$ — $2''$ nicht ankommt, und die Haupttafel I kann man mit dazu brauchen, um ein Instrument bei Tag oder in der Dämmerung (unter Umständen auch bei Nacht) auf den Polarstern einzustellen, wie bereits auf S. 119 behandelt worden ist.