

bzw. (27) derjenigen von (19) vorzuziehen, weil der von  $q$  und  $\delta$  abhängige Theil etwas bequemer zu berechnen ist. Wir haben jedoch die Entwicklung nach Potenzen von  $t$  selbst an die Spitze dieser Untersuchungen gestellt, weil erstens für nur ein Glied beide Rechnungen zusammenfallen, und weil zweitens die Rechnung mit Potenzen von  $t$  keine besondere Hülftafel verlangt. Deswegen ist auch im Anhang dieses Buches keine Hülftafel dieser Art aufgenommen. Ich habe zahlreiche Mittagsbreiten ohne eine solche Hülftafel für  $\log m$  und  $\log n$  reducirt, wie an dem Beispiel von S. 102 angegeben ist. Für das zweite Glied kann ein besonders angelegtes Hülftäfelchen von der Art (23) S. 104 dienen.

Declinationsänderung der Sonne. Statt die Declination der Sonne für jede Beobachtung einzeln zu berechnen, wie in unserem Beispiel S. 102 geschehen ist, kann man auch eine constante Declination einführen, welche aber nicht der Zeit der Culmination, sondern der Zeit der grössten Höhe entspricht, und von diesem Zeitpunkt der grössten Höhe sind dann auch die Stundenwinkel  $t$  zu zählen. Wir verweisen hierüber auf Brünnow, sphärische Astronomie 3. Aufl. 1871 S. 272. Für strengste Rechnung wäre auch der Stundenwinkel  $t$  immer in Sternzeit auszudrücken und die Aenderung der Zeitgleichung während der Beobachtungsdauer zu berücksichtigen, doch macht dieses fast Nichts aus.

Mit dem Instrument Fig. 1. § 10. S. 38 haben wir in der libyschen Wüste im Winter 1883—1884 12 Breiten aus Sonnenmittagshöhen bestimmt, welche in § 24. mit den entsprechenden Polarbreiten verglichen werden sollen.

Mit dem Instrument Fig. 4. § 10. S. 41 wurde an 4 Tagen des Sommers 1883 die Breite von Hannover nach dieser Methode gemessen mit den Resultaten:

2. Juni 1883	$q =$	$52^{\circ} 22' 45''$	
12. " "		$52 22 59$	
18. " "		$52 23 7$	
21. " "		$52 22 48$	
	Mittel $q =$	$52^{\circ} 22' 55''$	(28)
		$\pm 5''$	

## § 20. Bestimmung der Breite und der Ortszeit aus Sonnenmittagshöhen.

Dass man auch ohne Kenntniss der Ortszeit die Maximalhöhe der Sonne oder eines Sterns aus einer Gruppe von Höhenmessungen, welche die Culmination zwischen sich fassen, bestimmen kann, haben wir schon am Anfang des vorigen § 19. S. 99 erwähnt. Wir wollen nun aber statt der dort angedeuteten graphischen Behandlung Fig. 2. S. 99 eine Ausgleichungsrechnung vornehmen, welche auch die Ortszeit als zweite Unbekannte enthält.

Nach (1) und (6) § 19. S. 100 haben wir die Gleichungen:

$$q = 90^{\circ} - H + \delta \quad H - h = \Delta h = C t^2 \quad (1)$$

Hiebei ist für  $\Delta h$  in Secunden und  $t$  in Zeitminuten:

$$C = 60 \frac{225}{2 \rho'} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \quad (2)$$

also

$$\varphi = 90^\circ - (h + Ct^2) + \delta \quad (3)$$

$\varphi_0$  sei ein Näherungswerth von  $\varphi$ , und  $x$  sei eine noch zu bestimmende Correction von  $\varphi_0$ , also  $\varphi = \varphi_0 + x$ , die Ortszeit sei auch nur genähert =  $t_0$  bekannt, und erhalte noch eine Correction  $y$ , endlich sei  $v$  die Verbesserung der gemessenen Höhe  $h$ , dann ist

$$\varphi_0 + x = 90^\circ - (h + v + C [t_0 + y]^2) + \delta \quad (4)$$

$$C(t_0 + y)^2 = C(t_0^2 + 2t_0y + \dots)$$

$$-v = x + 2Ct_0y + \varphi_0 - 90^\circ + (h + Ct_0^2) - \delta$$

dieses ist eine Fehlergleichung von der Form:

$$-v = ax + by + l \quad (5)$$

wo

$$a = +1 \quad b = 2Ct_0 \quad (6)$$

$$l = \varphi_0 - (90^\circ - [h + Ct_0^2] + \delta) = \varphi_0 - (\varphi) \quad (7)$$

wenn mit  $(\varphi)$  die der Zeit  $t_0$  entsprechende Breitenberechnung ist.

Zu einem Beispiel nehmen wir Folgendes:

Am 2. Juni 1883 wurden in Hannover über Mittag mit dem Theodolit Fig. 4. § 10. S. 41 folgende 10 Sonnenhöhen gemessen:

	Chronometer	Sonnenhöhe	
1.	11 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	59° 45' 42"	} (8)
2.	11 51 23	59 46 55	
3.	11 53 36	59 47 42	
4.	11 55 41	59 48 22	
5.	11 57 47	59 48 38	
6.	12 0 16	59 48 5	
7.	12 3 35	59 47 28	
8.	12 6 14	59 45 42	
9.	12 8 10	59 44 12	
10.	12 11 37	59 40 46	
Culmination, Näherung		11 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup> 10 <sup>s</sup>	

Durch graphische Behandlung findet man, dass die Sonne ihre grösste Höhe erreichte, als die Uhr etwa 11<sup>h</sup> 57<sup>m</sup> 10<sup>s</sup> zeigte, weshalb dieser Werth als Näherungswerth der Culmination bereits den Beobachtungen der Tabelle (8) unten beigefügt worden ist.

Was die Höhenmessungen selbst betrifft, so ist sowohl der Indexfehler des Höhenkreises als auch der Sonnenhalbmesser bereits eliminirt, weil abwechslungsweise der Oberrand der Sonne in Lage I und dann der Unterrand in Lage II des Fernrohrs genommen worden ist.

Da man in der Nähe der Culmination Proportionalität zwischen Zeitänderung und Höhenänderung nur für sehr kleine Zeitintervalle gelten

lassen kann, überlegen wir nach § 15. S. 69, um wie viel etwa unsere so erhaltenen Höhen zu klein sein mögen. Die Zwischenzeit zwischen je zwei in ein Mittel zusammengenommenen Messungen war im Mittel  $1^m 40^s = 1,7^m$ , also nach der Tabelle von S. 68, die Höhengcorrection für Beschleunigung etwa  $= 60''$  für 10 Minuten Zwischenzeit, folglich für 1,7 Minuten Zwischenzeit:

$$\text{Beschleunigungscorrection} = \left(\frac{1,7}{10}\right)^2 60 = 1,7'' \quad (9)$$

d. h. um so viel sind unsere in die Rechnung eingeführten Höhen zu klein und um eben so viel die daraus abgeleitete Breite zu gross.

Mit den bei (8) angegebenen Zahlenwerthen rechnet man nun Alles genau nach der Methode von § 19. S. 102. durch, und zwar hat man dabei (mit Hannover  $\lambda = 38^m 53^s$  östlich von Greenw.) für die Culmination die Sonnendecination  $\delta = + 22^\circ 10' 44,7''$  und nebenbei auch die nachher gebrauchte Zeitgleichung  $g = - 2^m 20^s$ . Für  $C$  nach (2) hat man  $\log C = 0,3436$ . Die Resultate sind:

Nummer	$t$	$(\varphi)$	$l$	$2 Ct = b$	
1.	— 8,30 <sup>m</sup>	52° 22' 56''	— 12''	— 37	
2.	— 5,78	62	— 18	— 25	
3.	— 3,57	61	— 17	— 16	$(bb) = + 11385$
4.	— 1,48	45	— 1	— 7	$(bl) = + 2286$
5.	+ 0,62	34	+ 10	+ 3	$(ll) = + 1965$
6.	+ 3,10	47	— 3	+ 14	
7.	+ 6,42	15	+ 29	+ 28	
8.	+ 9,07	32	+ 12	+ 40	
9.	+ 11,00	37	+ 7	+ 49	
10.	+ 14,45	52	— 8	+ 64	
		$\varphi_0 = 52^\circ 22' 44''$	— 1''	+ 113	
		Mittel	Summe	Summe	

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} (10)$

damit hat man die Coefficienten  $a b l$  nach (5) (6) (7) und die Normalgleichungen werden:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 113y - 1 = 0 \\ 113x + 11385y + 2286 = 0 \end{array} \right\} (ll) = + 1965 \quad (11)$$

Die Auflösung gibt:

$$\left. \begin{array}{l} x = + 2,6'' \pm 4,5'' \\ y = - 0,227^m \pm 0,133^m \\ \quad \quad \quad = - 14^s \pm 8^s \end{array} \right\} (12)$$

die Correction  $x$  zu  $\varphi_0$  addirt gibt:

$$\varphi = \varphi_0 + x = 52^\circ 22' 44'' + 2,6'' \pm 4,5'' = 52^\circ 22' 46,6'' \pm 4,5'' \quad (13)$$

Und wenn man die Correction  $y$  zu den Zeiten  $t$  hinzufügt und mit den neuen Zeiten die ganze Berechnung wiederholt, so erhält man folgende Breitenwerthe:

1.	52° 22' 47"	6.	52° 22' 50"
2.	56	7.	22
3.	57	8.	41
4.	43	9.	48
5.	34	10.	66

$$\text{Mittel } \varphi = 52^{\circ} 22' 46,4''$$

Dieses stimmt mit (13) so nahe überein als unsere meist auf 1'' abgerundete Rechnung erlaubt und wir haben nun das Resultat mit Hinzufügung der Correction (9):

$$\varphi = 52^{\circ} 22' 45'' + 5''$$

Nach (8) war zuerst angenommen, dass der wahre Mittag stattfindet, wenn das Chronometer  $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 10^{\text{s}}$  zeigt und dass die erste Messung zur Zeit  $11^{\text{h}} 48^{\text{m}} 52^{\text{s}} - 11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 10^{\text{s}} = - 8^{\text{m}} 18^{\text{s}}$  vom wahren Mittag an gezählt, stattgefunden habe. Diese Zeit soll nach (12) die Correction  $y = - 14^{\text{s}}$  erhalten, soll also werden  $- 8^{\text{m}} 32^{\text{s}}$ , was andererseits auf  $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 24^{\text{s}}$  als neue Annahme des Uhrstandes im wahren Mittag führt. Da die Zeitgleichung  $g = - 2^{\text{m}} 20^{\text{s}}$  ist, soll die Uhr im wahren Mittag zeigen  $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 40^{\text{s}}$  oder man hat im Vergleich mit  $11^{\text{h}} 57^{\text{m}} 24^{\text{s}}$ :

$$\text{Mittlere Ortszeit} = \text{Chronometer} + 0^{\text{m}} 16^{\text{s}} \pm 8^{\text{s}},$$

wo  $\pm 8^{\text{s}}$  als mittlerer Fehler von  $y$  nach (12) zugesetzt ist.

Es ist noch eine Bemerkung über die Beziehung zwischen den zwei Unbekannten  $x$  und  $y$  zu machen. Die Breiten correction  $x$  ist bei (3) und (4) mit der Näherung  $q_0$  unabhängig eingeführt worden. Wenn jedoch, wie bei (10) geschehen ist, als Näherung  $q_0$  das Mittel der erstmals berechneten ( $q$ ) eingeführt wird, so muss  $[t] = 0$  werden, was auch bei [10] insofern stattfindet, als  $- 1$  nur durch Abrundungshäufung statt 0 entstand. Dann wird die erste Normalgleichung  $10 x = - 113 y$  oder allgemein für  $n$  Messungen:

$$n x = - 2 C [t] y$$

da  $2 C t y$  die Aenderung von  $C (t + y)^2$  ist, so sagt also die letzte Gleichung in der Form:

$$x = - \frac{[t]}{n} 2 C y:$$

es ist  $x$  das negative arithmetische Mittel der durch die Zeitänderung  $y$  herbeigeführten Höhenänderungen, was unmittelbar einzusehen ist.

Endlich bemerkt man noch, dass mit  $[t] = 0$  auch die Breiten correction  $x = 0$  wird, d. h. wenn die Messungen vor und nach der Culmination so gleich vertheilt sind, dass das Zeitemittel nahe auf die Culmination fällt, so ist das Breitenmittel  $q_0$  nahezu unabhängig von der Kenntniss der Ortszeit.

Diesen Umstand soll man sich wohl merken, wenn man Mittagshöhen für Breite ohne vorherige Ortszeitbestimmung misst.