§ 19. Bestimmung der Breite aus Sonnenmittagshöhen.

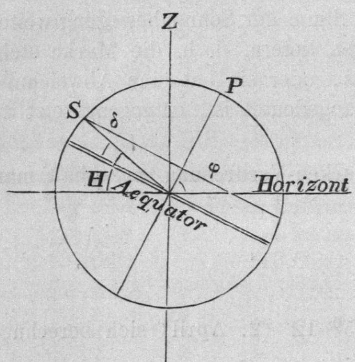
Aus Fig. 1., welche mit S einen culminirenden Stern, oder die Sonne, und mit H deren Höhe bezeichnet, entnimmt man:

$$H - \delta + \varphi = 90^0$$

oder
$$\varphi = 90^0 - H + \delta \tag{1}$$

Diese einfache Beziehung zwischen der Culminationshöhe H eines Gestirns, der Declination δ desselben und der Breite φ liefert eine der bequemsten Breitenbestimmungen. Insbesondere mit der Sonne benützt der Seemann diese Methode zur täglichen Breitenbestimmung, wenn die Witterung es gestattet. Nur zwischen den Wendekreisen, wenn die Sonne nahe dem Zenit culminirt, versagt die Methode.

Fig. 1. Culminationshöhe H.



Ganz genau im Moment der Culmination die Höhe zu messen, wird im Allgemeinen nicht möglich sein, da aber kurz vor der Culmination die Höhenänderung eine geringe ist, so lässt sich auch aus Höhen, welche nur wenigstens in der Nähe des Meridians gemessen sind, immer noch mit Vortheil eine Breitenbestimmung gewinnen.

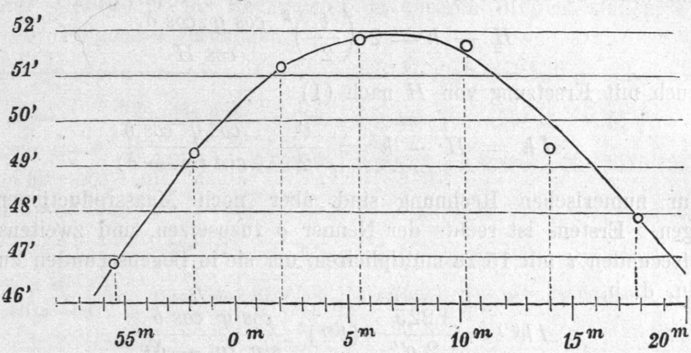
Wir betrachten sofort ein Zahlenbeispiel: Am 31. December 1873 maass ich in der Oase Farafrah folgende 7 Sonnenhöhen:

	Chronometer	Sonnenhöhe		
1.	$10^h\ 54^m\ 33^s$	$39^0\ 46'\ 50''$	Lufttemperatur = 17^0 C.	(2)
2.	10 58 0	39 49 17	Barometer 760 mm	
3.	11 2 1	39 51 10		
4.	11 5 26	39 51 45		
5.	11 10 12	39 51 40		
6.	11 14 0	39 49 27		
7.	11 17 56	39 47 55		

Die Höhen sind mit dem Theodolit von S. 38 in beiden Fernrohrlagen gemessen, d. h. es wurde Fernrohrlage I, Sonnenoberrand, combinirt mit Fernrohrlage II, Sonnenunterrand, so dass die angegebenen Höhen bereits vom Indexfehler befreit, sich auf den Sonnenmittelpunkt beziehen. Eine Ueberlegung nach § 15. S. 69 lässt diese Beobachtungsanordnung mit Rücksicht auf die überhaupt erreichbare Genauigkeit zulässig erscheinen.

Aus dem Verlauf der Höhen, welche allmälig anwachsen, und wieder abnehmen, ist bewiesen, dass die Culmination innerhalb der Beobachtungen fällt, und wenn man nur auf etwa 1′ genau rechnen will, so nimmt man schlechthin $39^0\ 52'$ als Maximalhöhe und damit als Mittagshöhe.

Fig. 2. Circum-Meridianhöhen.



Um auch die Aussenhöhen mitreden zu lassen, und doch keine grosse Rechenmühe aufzuwenden, kann man die 7 Höhen als Ordinaten zu den 7 Zeiten als Abscissen auftragen und graphisch ausgleichen, wodurch man die Fig. 2. erhält, aus welcher man die Maximalhöhe $= 39^0\ 51'\ 50''$ entnimmt. Hiezu kommt nach Seite [7] die Refraction und die Parallaxe $-\ 1'\ 9'' + 7'' = -\ 1'\ 2''$ (Correctionen der Refr. für Temp. und Barom. bleiben bei dieser rohen Methode ausser Betracht), also wahre Culminationshöhe der Sonne $H = 39^0\ 51'\ 50'' - 1'\ 2'' = 39^0\ 50'\ 48''$.

Um die Sonnendeclination aus dem Jahrbuch entnehmen zu können, muss man die geographische Länge des Beobachtungspunktes beiläufig kennen. Diese Länge ist, für die Oase Farafrah, in unserem Fall $1^h\ 52^m$ östlich von Greenwich. Nach S. 222 des Nautical Almanac für 1873 ist am 31. December wahrer Greenwicher Mittag $\delta = -\ 23^0\ 5'\ 0''$ mit stündlicher Aenderung $= +\ 11{,}45''$, was für $1^h\ 52^m$ den Betrag $\frac{112}{60}\,11{,}45'' = 21''$ ausmacht, also Sonnendeclination im Mittag von Farafrah $\delta = -\ 23^0\ 5'\ 0'' - 21'' = -\ 23^0\ 5'\ 21''$ und nun hat man nach der Grundgleichung (1)

$$H = 39^0\ 50'\ 48'' \qquad 90^0 - H = 50^0\ 9'\ 12''$$
$$\delta = -\ 23^0\ 5'\ 21''$$
$$\text{Farafrah}\ \varphi = 27^0\ 3'\ 51'' \qquad (3)$$

Dieses Resultat stimmt sehr nahe überein mit dem Resultat der genaueren Berechnung, zu welcher wir nun übergehen. Die Beziehung zwischen einer Höhe h, der Mittagshöhe H und dem Stundenwinkel t ist durch die Gleichung (15) S. 60 unmittelbar gegeben, nämlich mit Auflösung nach $H - h$

$$\sin \frac{H-h}{2} = \sin^2 \frac{t}{2} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos \frac{H+h}{2}} \tag{4}$$

dabei ist $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$.

Wenn $H - h$ und t klein sind, kann man die Gleichung (4) näherungsweise so schreiben:

$$H - h = 2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H}$$

oder auch mit Ersetzung von H nach (1)

$$\varDelta h = H - h = \frac{t^2}{2} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}$$

Zur numerischen Rechnung sind aber noch Maassreductionen anzubringen. Erstens ist rechts der Nenner ϱ zuzusetzen, und zweitens sind die Zeitsecunden t mit 15 zu multipliciren, um sie in Bogensecunden zu verwandeln, d. h.

$$\varDelta h^{('')} = \frac{225}{2\varrho''} (t^{(s)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{5}$$

Aehnlich hat man auch für andere Maasseinheiten

$$\varDelta h^{(')} = \frac{225}{2\varrho'} (t^{(m)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{6}$$

$$\varDelta h^{('')} = 60 \frac{225}{2\varrho'} (t^{(m)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{7}$$

Wenn man diese Coefficienten ausrechnet, so hat man

$$\varDelta h = 0{,}000\,54542'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(s)})^2 \quad \log Coeff. = 6.73673 \tag{8}$$

$$\varDelta h = 0{,}032\,725' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(m)})^2 \quad \log Coeff. = 8.51488 \tag{9}$$

$$\varDelta h = 1{,}9635'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(m)})^2 \quad \log Coeff. = 0.29303 \tag{10}$$

Zu einem Ueberblick über die Reductionsbeträge $\varDelta h$ dient folgende Reihe, welche mit $\varphi = 50^0$ und $\delta = 0$ berechnet ist:

$t = 0^m$	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m	10^m
$\varDelta h = 0''$	$2''$	$7''$	$15''$	$26''$	$41''$	$59''$	$1'\,21''$	$1'\,45''$	$2'\,13''$	$2'\,45''$

Hieraus erkennt man auch, ob es zulässig ist, die bequeme Höhenmessungsmethode anzuwenden, welche bereits bei der Gruppe (2) erwähnt wurde, nämlich je zwei aufeinander folgende Messungen mit Lage I und Lage II zu combiniren, um den Indexfehler (und Sonnenhalbmesser) sofort zu eliminiren, indem aus den beiden Zeiten und den beiden Höhen die Mittel genommen werden. Ist etwa die erste Messung um 5^m, die zweite um 7^m gemacht, so berechnet man das Mittel 6^m und hiezu die Reduction $59''$, während genauer zu dem Mittel jener zwei Höhen auch das Mittel der Reductionen 41″ und 1′ 21″, d. h. 61″ gehört, was um 2″ vom Vorigen abweicht. (Hiemit stimmt die Tafel auf S. 68 überein, nämlich 40″ für $t = 0$ und $\delta = 0$, $\varDelta t = 10^m$; dieses gibt für $\varDelta t = 2^m$ den Werth $40 \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 1{,}6''$ was auf 1″ abgerundet, 2″ gibt.)

Zur Uebersicht für Rechnungen in unseren Breiten stellen wir für $\varphi = 50^0$ Folgendes zusammen:

$\delta =$	$-23^0\ 27'$	-20^0	-15^0	-10^0	-5^0	0^0
$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$	9.78901	9.80807	9.83573	9.86389	9.89305	9.92382
$\delta =$	$+23^0\ 27'$	$+20^0$	$+15^0$	$+10^0$	$+5^0$	0^0
$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$	0.12034	0.08209	0.03442	9.99335	9.95692	9.92382

Nun führen wir das Beispiel (2) weiter, und brauchen hiezu zuerst die Reduction des Chronometers auf mittlere und wahre Ortszeit. Es ist durch correspondirende Sonnenhöhen vor und nach den Sonnenmittagshöhen, gefunden worden, dass die Sonne culminirte, während die Uhr zeigte $11^h\ 6^m\ 48{,}7^s$. Die Zeitgleichung wird zum Weiteren nicht gebraucht, da aber in anderen Fällen die Reduction auf den wahren Mittag nicht so unmittelbar vorliegt, nehmen wir auch die Zeitgleichung hinzu, welche $= +\ 3^m\ 22{,}3^s$ ist, d. h. die Uhr hätte während der Culmination $12^h\ 3^m\ 22{,}3^s$ zeigen sollen, oder sie hat im Vergleich mit dem was sie wirklich zeigte, $11^h\ 6^m\ 48{,}7^s$, eine Standcorrection $= +\ 0^h\ 56^m\ 33{,}6^s$,

$$\text{d. h. mittlere Ortszeit} = \text{Chronometer} + 0^h\ 56^m\ 34^s \tag{11}$$

Die Breite φ wird aus wenigen Ablesungen vorläufig $= 27^0\ 4'$ gefunden und die Declination der Sonne ist nach (3) $\delta = -\ 23^0\ 5'$, man hat also zur Anwendung der Formel (8)

$$\begin{array}{rcl|rl}
\varphi &=& 27^0\ 4' & \log\cos\varphi & 9.94962 \\
\delta &=& -\ 23^0\ 5' & \log\cos\delta & 9.96376 \\
\hline
\varphi-\delta &=& 50^0\ 9' & \textit{Erg.}\ \log\sin(\varphi-\delta) & 0.11479 \\
 & & & \log \textit{Coeff.} & 6.73673 \\
\hline
 & & & \log C & 6.76490
\end{array} \tag{12}$$

d. h. man hat jetzt nach (8):

$$\varDelta h^{('')} = C\ (t^{(s)})^2 \tag{13}$$

wo C durch seinen Logarithmus nach (12) gegeben ist.

Wir geben im Folgenden die Ausrechnung der 4 Nummern 1. 3. 5. 7. des Beispiels (2) in tabellarischer Anordnung mit allen Einzelheiten.

Beob. Num.	1.	3.	5.	7.
Beobachtete Uhrzeit . . .	$10^h\ 54^m\ 33^s$	$11^h\ 2^m\ 1^s$	$11^h\ 10^m\ 12^s$	$11^h\ 17^m\ 56^s$
Reduction auf Ortszeit . .	+ 56 34	+ 56 34	+ 56 34	+ 56 34
Mittlere Ortszeit	$11^h\ 51^m\ 7^s$	$11^h\ 58^m\ 35^s$	$12^h\ 6^m\ 46^s$	$12^h\ 14^m\ 30^s$
Wahrer Mittag $= 12^h + g$	12 3 22	12 3 22	12 3 22	12 3 22
Stundenwinkel t	$-\ 12^m\ 15^s$	$-\ 4^m\ 47^s$	$+\ 3^m\ 24^s$	$+\ 11^m\ 8^s$
In Secunden $t =$	735	287	204	668
$log\ t$	2.86629	2.45788	2.30963	2.82478
$log\ t^2$	5.73258	4.91576	4.61926	5.64956
$log\ C$	6.76490	6.76490	6.76490	6.76490
$log\ Ct^2$	2.49748	1.68066	1.38416	2.41446
$Ct^2 =$	314″	48″	24″	260″
δ im wahren Mittag . . .	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″
Aenderung für t . . . . . (+ 11,4″ für 1^h)	− 2	− 1	+ 1	+ 2
$\delta =$	− 23° 5′ 23″	− 23° 5′ 22″	− 23° 5′ 20″	− 23° 5′ 19″
Beobachtete Höhe h' . .	39 93° 46′ 50″	39° 51′ 10″	39° 51′ 40″	39° 47′ 55″
Mittlere Refraction	1′ 10″	1′ 9″	1′ 9″	1′ 10″
Lufttemperatur 17°	− 2 } 1′ 2″	− 2 } 1′ 1″	− 2 } 1′ 1″	− 2 } 1′ 2″
Barometer 760.	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
Höhenparall. 8,9″ $cos\ h'$.	− 7	− 7	− 7	− 7
Wahre Höhe h	39° 45′ 48″	39° 50′ 9″	39° 50′ 39″	39° 46′ 53″
S. o. $Ct^2 = \Delta h$.	5 14	48	24	4 20
$H = h + \Delta h$	39° 51′ 2″	39° 50′ 57″	39° 51′ 3″	39° 51′ 13″
$90° - H$.	50 8 58	50 9 3	50 8 57	50 8 47
S. oben $+ \delta$	− 23 5 23	− 23 5 22	− 23 5 21	− 23 5 19
Breite $\varphi =$	27° 3′ 35″	27° 3′ 41″	27° 3′ 37″	27° 3′ 28″

Alle 7 Messungen in gleicher Weise wie diese Nr. 1. 3. 5. 7. behandelt, geben die Resultate folgender Zusammenstellung, in welcher zugleich eine Genauigkeitsschätzung beigefügt ist.

Messung	φ	v	v^2
1.	27° 3′ 35″	+ 10″	100
2.	3 40	+ 5	25
3.	3 41	+ 4	16
4.	3 51	− 6	36
5.	3 37	+ 8	64
6.	4 26	− 41	1681
7.	3 28	+ 17	289
Mittel	27° 3′ 45″	+ 44 − 47	2211

$$m_1 = \sqrt{\frac{2211}{6}} = \pm 19''$$

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{7}} = \pm 7''$$

Die 6. Messung zeigt eine auffallende Abweichung, welche aber nicht berechtigt, diese Messung auszuschliessen.

Gesammt-Resultat:

$$\text{Oase Farafrah Breite } \varphi = 27^0\ 3'\ 45'' \pm 7'' \tag{14}$$

Der mittlere Fehler $\pm$ 7″ gilt natürlich nur vorbehältlich etwaiger constanter Fehlertheile, wovon später gehandelt werden wird.

In dem Resultat (14) sind nur 7 Sonnenhöhen benutzt, es sind aber deren im Ganzen 9 gemessen (zwei sind hier nur zur Raumersparung weggelassen). Alle 9 Höhen zusammen gaben statt (14)

$$\varphi = 27^0\ 3'\ 50'' \pm 6'' \tag{14a}$$

Reihe mit höheren Gliedern.

Wenn man in der Gleichung (1) § 13. S. 56 für *cos t* die Reihe setzt, so entsteht:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta - \cos \varphi \cos \delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right)$$

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta) = \sin H$$

$$\sin h - \sin H = - \cos \varphi \cos \delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right) \tag{15}$$

Zur Reihenentwicklung für $H - h$ setzen wir

$$h = H - \varDelta h \tag{16}$$

$$\sin h = \sin H - \varDelta h \cos H - \frac{\varDelta h^2}{2} \sin H$$

Dieses in (15) eingesetzt gibt:

$$\varDelta h \cos H + \frac{\varDelta h^2}{2} \sin H = \cos \varphi \cos \delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right) \tag{17}$$

$$\text{in erster Näherung ist } \varDelta h = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H} \frac{t^2}{2} + \ldots = C \frac{t^2}{2} + \ldots \tag{18}$$

$$\varDelta h^2 = \mathrm{C}^2 \frac{t^4}{4} + t^6 \ldots$$

Dieses in das zweite Glied links von (17) eingesetzt und mit *cos H* dividirt, gibt:

$$\varDelta h + \frac{C^2\, t^4}{8} \operatorname{tang} H = C \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right)$$

und wenn man nach Potenzen von t ordnet, so erhält man:

$$\varDelta h = C \frac{t^2}{2} - \frac{C t^4}{24} (1 + 3\ C\ tang\ H) \tag{19}$$

Man kann diese Entwicklung auch bis zu t^6 fortsetzen, da dieses aber wenig praktischen Werth hat, schreiben wir, ohne Zwischenresultate, hievon nur das Hauptresultat:

$$\varDelta h = C \frac{t^2}{2} - \frac{C t^4}{24} (1 + 3\ tang\ H)$$
$$+ \frac{C t^6}{720} (1 + 15\ C\ tang\ H + 15\ C^2 [1 + 3\ tang^2\ H])$$

Bei der Formel (19) stehenbleibend, betrachten wir das zweite Glied, welches die Form hat $C' t^4$ mit $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$,

$$\text{wo } C' = \frac{C}{24} (1 + 3\ C\ cotg\ [\varphi - \delta]) \text{ und } C = \frac{cos\ \varphi\ cos\ \delta}{sin\ (\varphi - \delta)}$$

wobei C durch (18) bestimmt ist. Wenn das zweite Glied in Bogensecunden erhalten werden soll, und t in Zeitsecunden gegeben ist, so hat man zu rechnen

$$\varDelta\ h_2^{('')} = \frac{15^4}{24\ \varrho''^3} (t^{(s)})^4 (\ldots) \qquad log\ Coeff. = 7.3809 - 20 \tag{20}$$

und entsprechend

$$\varDelta\ h_2^{(')} = \frac{15^4}{24\ \varrho'^3} (t^{(m)})^4 (\ldots) \qquad log\ Coeff. = 2.7153 - 10 \tag{21}$$

$$\varDelta h_2^{('')} = 60 \frac{15^4}{24\ \varrho'^3} (t^{(m)})^4 (\ldots) \qquad log\ Coeff. = 4.4935 - 10 \tag{22}$$

Die Ausrechnung des Gesammt-Coefficienten für t in Zeitminuten und $\varDelta h$ in Bogensecunden, nämlich

$$C' = 60 \frac{15^4}{24\ \varrho'^3} \frac{cos\ \varphi\ cos\ \delta}{sin\ (\varphi - \delta)} \left(1 + 3 \frac{cos\ \varphi\ cos\ \delta}{sin\ (\varphi - \delta)} cotg\ [\varphi - \delta]\right)$$

gab für einige Hauptwerthe von δ und φ ($\varphi = 52^0\ 23'$, Hannover) Folgendes:

$\delta =$	$-23^0\ 27'$	-20^0	-15^0	-10^0	-5^0	0^0
für $\varphi = 52^0\ 23'$ $log\ C' =$	4.413	4.470	4.554	4.640	4.730	4.825
für $\varphi = 50^0$ $log\ C' =$	4.472	4.532	4.621	4.713	4.808	4.910
$\delta =$	$+23^0\ 27'$	$+20^0$	$+15^0$	$+10^0$	$+5^0$	0^0
für $\varphi = 52^0\ 23'$ $log\ C' =$	5.419	5.306	5.162	5.038	4.927	4.825
für $\varphi = 50^0$ $log\ C' =$	5.564	5.439	5.279	5.142	5.021	4.910

(23)

Als Anwendung der Formel (19) mit den Coefficienten (8) und (20) mag die Reduction einer ziemlich lange nach der Culmination gemessenen Sonnenhöhe dienen.

Am 2. Juni 1873 wurde in Hannover 19 Minuten 59 Secunden nach der Culmination die Sonnenhöhe 59° 34′ 10″ gemessen, oder nach Anbringung von Refraction und Parallaxe $h = 59^0\ 33'\ 42''$. Die Höhenreduction ist nach (19) mit (8) und (20):

$$\varDelta h^{('')} = [6.73673]\, C\, (t^{(s)})^2 - [7.3809]\, C\, (1 + 3\, C\, cotg\, (\varphi - \delta))\, (t^{(s)})^4$$

wo [. . . .] die Logarithmen der Coefficienten sind.

$$\begin{array}{rlrl}
\varphi = & 52^0\ 23' & \log\cos\varphi & 9.78560 \\
\delta = & 22\ \ 11 & \log\cos\delta & 9.96660 \\
\varphi - \delta = & 30\ \ 12 & \log cosec\,(\varphi-\delta) & 0.29841 \\ \hline
 & & \log C & 0.05061 \\
t = 1^m 959^s = & 1199^s & \log t = & 3.07882 \\
 & & \log t^2 & 6.15764 \\
 & & \log Const. & 6.73673 \\ \hline
 & & & 2.94498
\end{array}$$

erstes Glied = 881,0″ = 14′ 41,0″

Die weitere Rechnung gibt:

$$\begin{array}{rl}
\log\,(1 + 3 \ldots) & 0.8320 \\
\log C & 0.0506 \\
\log Const. & 7.3809 \\
\log t^4 & 2.3153 \\ \hline
 & 0.5788
\end{array}$$

zweites Glied = 3,8″

$\varDelta h = 13'\ 37{,}2''$ (24)

Für das zweite Glied dürfte man sich wohl erlauben, den Coefficienten durch flüchtige Interpolation aus der Tabelle (23) zu entnehmen, nämlich

für $\varphi = 52^0\ 23'$ und $\delta = +\ 22{,}4^0$ $\log C' = 5.377$
hinzu in Minuten $t = 20{,}0$ $\log t = 1.301$ $\log t^4$ 5.204
$\log C'\ t^4$ 0.581 zweites Glied = 3,8″ wie vorher.

Nachdem $\varDelta h = 13'\ 37''$ gefunden ist, ist alle übrige Rechnung wie bei dem Beispiel von S. 102, weshalb wir diese übrige Rechnung nicht weiter verfolgen.

Die Kleinheit des zweiten Gliedes (4″) in diesem Falle gibt zu der Ueberlegung Veranlassung, wie gross dieses Glied für extreme Werthe von t wird, oder umgekehrt, wie gross der Abstand t vom wahren Mittag sein darf, wenn das zweite Glied innerhalb gewisser Grenzen bleiben oder vernachlässigt werden soll. Für die Breite $\varphi = 50^0$ erlangt dieses zweite Glied folgende Werthe:

$t =$	10^m	15^m	20^m	25^m	30^m
für $\delta = -\ 23^0\ 27'$ II =	0,0″	0,2″	0,5″	1,2″	2,4″
$\delta = -\ 10$ II =	0,1	0,3	0,8	2,0	4,2
$\delta = \ \ 0$ II =	0,1	0,4	1,3	3,2	6,6
$\delta = +\ 10$ II =	0,1	0,7	2,2	5,4	11,2
$\delta = +\ 23^0\ 27'$ II =	0,4	1,9	5,9	14,3	29,7

Wenn man also Beträge bis zu 1″ vernachlässigen will, so braucht man auf das zweite Glied keine Rücksicht zu nehmen, so lange man nicht über 25 Minuten im Winter und nicht über 12 Minuten im Sommer vom wahren Mittag entfernt beobachtet. Jedenfalls hat man in unseren Breiten 10 Minuten vor und nach Mittag, also zusammen 20 Minuten Zeit, um Breitenbestimmungen auf 1″ genau zu machen, ohne sich um das zweite Reductionsglied zu kümmern.

Einfluss eines Zeitfehlers. Das Hauptreductionsglied nach (5) ist, wenn Δh in Bogensecunden und t in Zeitsecunden gezählt wird:

$$\Delta h = \frac{225}{2\,\varrho''}\,C\,t^2, \text{ wo } C = \frac{\cos\varphi\,\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$$

also
$$d\,(\Delta h) = \frac{225}{\varrho''}\,C\,t\,d\,t.$$

Hiernach ist folgende Uebersicht der Werthe $d\,(\Delta h)$ berechnet, für $d\,t = 1^s$ und $\varphi = 50^0$

$t =$	10^m	15^m	20^m	25^m	30^m
$\delta = -23^0\,27'$	0,4″	0,6″	0,8″	1,0″	1,2″
-10	0,5	0,7	1,0	1,2	1,4
0	0,5	0,8	1,1	1,4	1,6
$+10$	0,6	1,0	1,3	1,6	1,9
$+23\;\;27$	0,9	1,3	1,7	2,2	2,6

Es ist also auch in Hinsicht auf die Zeitfehler angezeigt, die Beobachtungen innerhalb 10^m vor und nach Mittag anzustellen.

Reihenentwicklung nach Potenzen von $\sin\frac{t}{2}$.

Die Gleichung (1) § 13, S. 56 kann auch in folgende Form gebracht werden:

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\left(1 - 2\,\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta - \cos\varphi\,\cos\delta\;2\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\sin h = \sin H - 2\,\cos\varphi\,\cos\delta\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$h = H - \Delta h$$

$$\sin h = \sin H - \Delta h\,\cos H - \frac{\Delta h^2}{2}\,\sin H$$

$$\Delta h + \frac{\Delta h^2}{2}\,\operatorname{tang} H = 2\,\frac{\cos\varphi\,\cos\delta}{\cos H}\,\sin^2\frac{t}{2} = 2\;C\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\text{erste Näherung } \Delta h = 2\, C \sin^2 \frac{t}{2} + \ldots$$

$$\Delta h^2 = 4\, C^2 \sin^4 \frac{t}{2} + \ldots$$

$$\Delta h = 2\, C \sin^2 \frac{t}{2} - 2\, C^2 \operatorname{tang} H \sin^4 \frac{t}{2} \tag{25}$$

oder indem überall φ und δ wieder eingesetzt, und die nöthigen ϱ zugesetzt werden:

$$\Delta h = 2\, \varrho \sin^2 \frac{t}{2} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} - 2\, \varrho \sin^4 \frac{t}{2} \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}\right)^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) \tag{26}$$

Das erste Glied ist offenbar mit (5) identisch, weil $\sin \frac{t}{2} = \frac{t}{2\, \varrho}$.

Der Coefficient des zweiten Gliedes in (25) oder (26) ist etwas bequemer zu berechnen als der Coefficient des zweiten Gliedes von (19).

Für die Coefficienten von (26) hat man mehrfach Hülfstafeln berechnet, z. B. die astronomischen Tafeln und Formeln von Dr. C. F. W. Peters, Hamburg 1871, geben

$$2\, \varrho \sin^2 \frac{t}{2} = m \text{ und } 2\, \varrho \sin^4 \frac{t}{2} = n$$

sowie auch $\log m$ und $\log n$

auch Albrecht's Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1879, geben auf S. 146—151 die Werthe m und $\log m$, und n (nicht $\log n$).

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen heisst die Formel (26):

$$\Delta h = m \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} - n \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}\right)^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta)$$

$$\text{oder } \Delta h = m\, C - n\, C^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta)$$

und die Berechnung unseres zweiten Beispiels von S. 105 gestaltet sich hiernach so:

für $t = 19^m\, 59^s$ $\log m$	2.89400		
hinzu $\log C$	0.05061		
	2.94471	erstes Glied $= 880{,}5 = 14'\, 40{,}5''$	
fürs zweite Glied $\log n$	0.173		
$\log C^2$	0.101		
$\log \operatorname{cotg} (\varphi - \delta)$	0.235		
	0.509	zweites Glied	$3{,}2''$
			$\Delta h = 14'\, 37{,}3''$ (27)

Die zwei Theile von (27) sind verschieden von den Theilen von (24), die Resultate Δh selbst aber müssen in (24) und in (27) gleich sein.

Wenn man eine Tafel dieser Art für $\log m$ und $\log n$ zur Verfügung hat, und beide Glieder von (26) berechnen will, so ist die Anordnung (26) bzw. (27) derjenigen von (19) vorzuziehen, weil der von φ und δ abhängige Theil etwas bequemer zu berechnen ist. Wir haben jedoch die Entwicklung nach Potenzen von t selbst an die Spitze dieser Untersuchungen gestellt, weil erstens für nur ein Glied beide Rechnungen zusammenfallen, und weil zweitens die Rechnung mit Potenzen von t keine besondere Hülfstafel verlangt. Deswegen ist auch im Anhang dieses Buches keine Hülfstafel dieser Art aufgenommen. Ich habe zahlreiche Mittagsbreiten ohne eine solche Hülfstafel für *log m* und *log n* reducirt, wie an dem Beispiel von S. 102 angegeben ist. Für das zweite Glied kann ein besonders angelegtes Hülfstäfelchen von der Art (23) S. 104 dienen.

Declinationsänderung der Sonne. Statt die Declination der Sonne für jede Beobachtung einzeln zu berechnen, wie in unserem Beispiel S. 102 geschehen ist, kann man auch eine constante Declination einführen, welche aber nicht der Zeit der Culmination, sondern der Zeit der grössten Höhe entspricht, und von diesem Zeitpunkt der grössten Höhe sind dann auch die Stundenwinkel t zu zählen. Wir verweisen hierüber auf Brünnow, sphärische Astronomie 3. Aufl. 1871 S. 272. Für strengste Rechnung wäre auch der Stundenwinkel t immer in Sternzeit auszudrücken und die Aenderung der Zeitgleichung während der Beobachtungsdauer zu berücksichtigen, doch macht dieses fast Nichts aus.

Mit dem Instrument Fig. 1. § 10. S. 38 haben wir in der libyschen Wüste im Winter 1883—1884 12 Breiten aus Sonnenmittagshöhen bestimmt, welche in § 24. mit den entsprechenden Polaribreiten verglichen werden sollen.

Mit dem Instrument Fig. 4. § 10. S. 41 wurde an 4 Tagen des Sommers 1883 die Breite von Hannover nach dieser Methode gemessen mit den Resultaten:

2. Juni 1883	$\varphi =$	$52^0\ 22'\ 45''$
12. „ „		52 22 59
18. „ „		52 23 7
21. „ „		52 22 48
Mittel	$\varphi =$	$52^0\ 22'\ 55'' \pm 5''$ (28)

§ 20. Bestimmung der Breite und der Ortszeit aus Sonnenmittagshöhen.

Dass man auch ohne Kenntniss der Ortszeit die Maximalhöhe der Sonne oder eines Sterns aus einer Gruppe von Höhenmessungen, welche die Culmination zwischen sich fassen, bestimmen kann, haben wir schon am Anfang des vorigen § 19. S. 99 erwähnt. Wir wollen nun aber statt der dort angedeuteten graphischen Behandlung Fig. 2. S. 99 eine Ausgleichungsrechnung vornehmen, welche auch die Ortszeit als zweite Unbekannte enthält.

Nach (1) und (6) § 19. S. 100 haben wir die Gleichungen:

$$\varphi = 90^0 - H + \delta \qquad H - h = \Delta h = C\,t^2 \tag{1}$$