

Die wirkliche Aufgangs- und Untergangszeit eines Gestirns findet man, wenn man in der Gleichung (1) $h = - 0^{\circ} 35'$ setzt, weil das Gestirn im Moment des Aufgangs zwar den scheinbaren Höhenwinkel $0^{\circ} 0'$, aber wegen der Refraction den wahren Höhenwinkel $= - 0^{\circ} 35'$ hat. Man hat also:

$$\cos t_0' = \frac{- \sin 0^{\circ} 35' - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (3)$$

Dieser Formel mit Zufügung der Zeitgleichung entsprechen die Sonnen-Aufgänge und Untergänge, welche im Berliner astronomischen Jahrbuch, etwa auf S. 74—79 jedes Jahrgangs für Berlin (Breite $52^{\circ} 30' 17''$) von Tag zu Tag angegeben sind.

In Behm's Geographischem Jahrbuch, I. Band 1866, S. 17—20 wird von A. Auwers eine Tafel der Tageslängen für alle Breiten vom Südpol bis zum Nordpol von 5° zu 5° , und für Declinationen zwischen $- 25^{\circ}$ und $+ 25^{\circ}$ von 5° zu 5° mitgetheilt, wobei jedoch als Moment des Sonnenaufgangs und Sonnenuntergangs die scheinbare Berührung des oberen Sonnenrandes mit dem Horizont genommen ist.

Für besondere Zwecke kann man sich jederzeit eine Tafel nach Gleichung (3) berechnen, wie z. B. für die Breiten 25° , 27° , 29° eine solche Tafel von mir auf S. 99 der „Physischen Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ mitgetheilt ist. Beim Mangel anderer Zeitbestimmung kann man hiernach immer seine Uhr auf etwa 5^m genau reguliren, was für manche Zwecke ausreicht.

Zur Uebersicht über die schon innerhalb Deutschlands für bürgerliche Zwecke nicht unerheblichen Tageslängen-Differenzen, und zur Uebersicht der zu Polarsternbeobachtungen günstigen Dämmerungszeiten haben wir im Anhang auf S. [14] die Sonnen-Auf- und Untergangszeiten für die Breiten 49° (Karlsruhe) und $52^{\circ} 30'$ (Berlin) von 7 zu 7 Tagen zusammengestellt.

§ 15. Geschwindigkeit und Beschleunigung der Höhenänderung.

Die Geschwindigkeit der Höhenänderung der Sonne oder eines Sterns ist von Interesse, weil davon die Genauigkeit der aus Höhenmessungen abgeleiteten Zeitbestimmungen abhängt, und die Beschleunigung der Höhenänderung ist zu untersuchen zur Beantwortung der Frage, innerhalb welcher Grenzen die Höhenänderung als gleichförmig angenommen werden darf, und mit welcher Näherung man das arithmetische Mittel von 2 oder mehr Messungen in Bezug auf Zeit und Höhe als zusammengehörig gelten lassen darf.

Die Grundgleichung (1) § 13. (S. 56) nämlich

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (1)$$

gibt nach h und nach t differentiirt:

$$\cos h \, dh = - \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt$$

$$\frac{dh}{dt} = - \cos \varphi \cos \delta \frac{\sin t}{\cos h} \quad (2)$$

und wenn man nun Δh in Bogenmaass, Δt in Zeitmaass rechnet, so hat man:

$$\Delta h^{(s)} = - 15 \cos \varphi \frac{\cos \delta \sin t}{\cos h} \Delta t^{(s)} \quad (3)$$

Hiernach ist folgende Tafel für die Breite $\varphi = 50^\circ$ berechnet worden, wobei die zu (3) nöthigen h aus der Tafel von S. [15] des Anhangs genommen wurden.

I. Höhenänderung der Sonne in 1 Zeitsecunde für die Breite $\varphi = 50^\circ$.

Jahreszeit	Declination δ	Stundenwinkel t								
		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h
22. Juni	+ 23° 27'	0,0"	4,7"	7,6"	9,0"	9,6"	9,6"	9,3"	8,6"	7,7"
20. Mai u. 24. Juli	+ 20°	0,0"	4,4"	7,3"	8,8"	9,5"	9,6"	9,4"	8,8"	
16. April u. 27. August	+ 10°	0,0"	3,7"	6,5"	8,2"	9,2"	9,6"	9,6"	9,2"	
20. März u. 23. Sept.	± 0°	0,0"	3,0"	5,4"	7,2"	8,5"	9,3"			
23. Febr. u. 19. Octob.	- 10°	0,0"	2,8"	5,2"	7,1"	8,4"	9,2"			
20. Januar u. 21. Nov.	- 20°	0,0"	2,5"	4,7"	6,5"	7,9"				
21. December	- 23° 27'	0,0"	2,4"	4,5"	6,3"	7,7"				

Wenn man die Höhenmessung mindestens 2 Stunden vom Mittag entfernt hält, so genügt es, den Höhenwinkel auf 5"—10" genau zu messen, um die Zeit auf etwa 1^s genau zu erhalten.

Die Höhenbeschleunigung erhält man durch abermaliges Ableiten von (2), nämlich:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = - \cos \varphi \cos \delta \left\{ \frac{\cos t \cos h + \sin t \sin h \frac{dh}{dt}}{\cos^2 h} \right\}$$

oder mit Einsetzung von $\frac{dh}{dt}$ nach (2)

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = - \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos t}{\cos h} + \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h} \right)^2 \text{tang } h \quad (4)$$

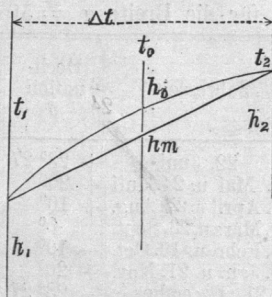
Nun denken wir uns, von zwei zusammengehörigen Werthen h_0 und t_0 ausgehend, die Höhenänderung nach Potenzen der Zeitänderung Δt in einer Reihe entwickelt, d. h. nach Andeutung der schematischen Figur 1.:

$$h_2 = h_0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{dh}{dt} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{\Delta t}{2} \frac{dh}{dt} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

$$\frac{h_1 + h_2}{2} = h_0 + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

Fig. 1. Höhenänderung als Function der Zeitänderung.



Setzt man den Werth (4) hier ein, so wie die Abkürzung h_m für den Mittelwerth aus h_1 und h_2 , wie bei Fig. 1. beigeschrieben ist, und bringt man zugleich die nöthigen Maassumwandlungen an, so erhält man:

$$(h_0 - h_m)'' = (\Delta t^{(s)})^2 \frac{225}{8 \rho''} \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta \cos t}{\cos} - \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h} \right)^2 \operatorname{tang} h \right) \quad (5)$$

$(h_0 - h_m)'' = \frac{225}{8 \rho''} (\Delta t^{(s)})^2$
hier ist

$$\log \frac{225}{8 \rho''} = 6.13467 - 10$$

Für ein Zeitintervall von 10 Minuten, welches wir der nachfolgenden Tafel zu Grunde legen, hat man in (5) einzusetzen

$$\Delta t^{(s)} = 600, \text{ womit man erhält}$$

$$h_0 - h_m = 49,09'' \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta \cos t}{\cos h} - \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h} \right)^2 \operatorname{tang} h \right) \quad (6)$$

Wenn die Werthe Δh nach (3) bereits berechnet vorliegen, wie in unserer vorstehenden Tabelle I., so kann man sie zur Berechnung einer Tabelle für $h_0 - h_m$ benutzen, aus (5) und (3) findet man nämlich:

$$(h_0 - h_m)'' = \frac{15}{8 \rho''} \Delta t^{(s)} \Delta h'' \cotg t - \frac{(\Delta h'')^2}{8 \rho''} \operatorname{tang} h \quad (7)$$

Wenn man hier ein Zeitintervall von 10 Minuten einführen will, so ist $\Delta t^{(s)} = 600$ zu setzen, und wenn man unter $\Delta h''$ die Werthe der Tabelle I. verstehen will, welche selbst zu einem Zeitwerth 1^s gehören, so ist auch für $\Delta h''$ der Factor 600 zuzusetzen, und damit erhält man aus (7):

$$h_0 - h_m = 3,2732'' \Delta h'' \cotg t - 0,2182'' (\Delta h'')^2 \operatorname{tang} h$$

wo $\Delta h''$ aus der Tabelle I. zu entnehmen ist.

Für $t = 0$ versagt indessen diese Formel, weil hier $\Delta h = 0$ ist. In diesem Falle hat man wieder nach (5), mit $h = 90^\circ - (\varphi - \delta)$:

$$h_0 - h_m = \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)}$$

$$(h_0 - h_m)'' = \frac{225}{8 \rho''} 600^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} = 40,99'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \quad (8)$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Tafel II. berechnet worden.

II. Höhendifferenz $h_0 - h_m$ für ein Zeitintervall

$\Delta t = 10$ Minuten nach Fig. 1. und Formel (5) bis (8),

für die Breite $\varphi = 50^\circ$ (Functionswerth C für die Gleichung (10))

Jahreszeit	Declination δ	Stundenwinkel t									
		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	
22. Juni	+ 23° 27'	+65''	+49''	+25''	+11''	+ 3''	-2''	-6''	-10''	-15''	
20. Mai u. 24. Juli	+ 20°	+59''	+43''	+27''	+13''	+ 4''	-1''	-5''	-10''		
16. April u. 27. Aug.	+ 10°	+48''	+42''	+28''	+16''	+ 8''	+2''	-3''	- 7''		
20. März u. 23. Sept.	0°	+40''	+35''	+26''	+18''	+11''	+8''				
23. Febr. u. 19. Oct.	- 10°	+36''	+33''	+27''	+20''	+13''	+7''				
20. Jan. u. 21. Nov.	- 20°	+32''	+30''	+25''	+20''	+14''					
21. December	- 23° 27'	+30''	+29''	+25''	+20''	+14''					

Die Vergleichung dieser Tafel II. mit der früheren Tafel I. zeigt, dass die Beschleunigung gleich Null wird, wenn die Geschwindigkeit ihr Maximum erreicht, dieses wird nachher noch theoretisch klarer gemacht werden. Zuvor ist die praktische Bedeutung der Tabellenwerthe II. zu untersuchen, wozu das Beispiel von § 13. (S. 57) dienen mag. Es wurden am 4. Juli Vormittags 7^h 50^m zwei Höhen mit der Zwischenzeit $\Delta t = 1^m 47^s$ combinirt. Die Tafel II. gibt mit $t = 4^h 10^m$ (nämlich 12^h—7^h 50^m) im Juli etwa $h_0 - h_m = 4''$, gültig für $\Delta t = 10^m$, also, da $h_0 - h_m$ mit dem Quadrate des Zeitintervalls wächst, kommt auf $1^m 47^s = 1,8^m$ nur $\left(\frac{1,8}{10}\right)^2 4'' = 0,1''$, oder es war die Mittelbildung auf S. 57 unbedingt zulässig, während in der Nähe des Mittags auch bei diesem kleinen Zeitintervall doch schon $h_0 - h_m$ den Werth von $1''$ erreicht haben würde.

Wir betrachten noch die Mittelbildung aus Gruppen mehrerer Messungen. Es seien z. B. 4 Höhen $h_1 h_2 h_3 h_4$ auf das Gesamtintervall Δt gleich vertheilt. Ist Δt in Einheiten von 10 Minuten gezählt, und C der Tafelwerth II., so hat man zur Reduction des Mittels aus h_1 und h_4 (Fig. 2.):

$$h' = \frac{h_1 + h_4}{2} + C (\Delta t)^2$$

ferner zur Reduction des Mittels aus h_2 und h_3 :

$$h'' = \frac{h_2 + h_3}{2} + C \left(\frac{\Delta t}{3}\right)^2$$

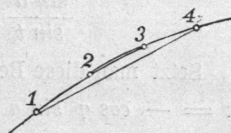
Also Gesamtmittel

$$h_0 = \frac{h' + h''}{2} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} + \frac{5}{9} C (\Delta t)^2 \quad (9)$$

Wenn man diese Betrachtung von 4 Höhen auf allgemein n gleichförmig vertheilte Höhen ausdehnt, so findet man das Resultat, dass das arithmetische Mittel t_0 der n Zeitbeobachtungen und das arithmetische Mittel h_m der Höhenbeobachtungen nicht unmittelbar zusammengehören, sondern es gehört zu der Mittelzeit t_0 eine Mittelhöhe h_0 , welche aus dem arithmetischen Mittel h_m und dem Gesamt-Intervall berechnet wird durch die Formel

$$h_0 - h_m = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n-1} C (\Delta t)^2 \quad (10)$$

Fig. 2.
Mittelbildung aus 4 Höhen.



wo C der Werth der Tabelle II. und Δt in Einheiten von 10 Minuten zu nehmen ist. Insbesondere ist:

Für $n = 2$	$\frac{1}{3} \frac{n+1}{n-1} = 1 = 1,00$	}	(11)
$n = 3$	" $\frac{2}{3} = 0,67$		
$n = 4$	" $\frac{5}{9} = 0,56$		
$n = 5$	" $\frac{1}{2} = 0,50$		
$n = 6$	" $\frac{7}{15} = 0,47$		
$n = 7$	" $\frac{4}{9} = 0,44$		
$n = 8$	" $\frac{3}{7} = 0,43$		
$n = 9$	" $\frac{5}{12} = 0,42$		
$n = 10$	" $\frac{1}{2} = 0,41$		

Man habe z. B. am 20. Mai nahe am Mittag in der Zeit von 5 Minuten rasch hintereinander 5 Sonnenhöhen gemessen, und das arithmetische Mittel der Zeiten t_0 sowie das arithmetische Mittel der Höhen h_m berechnet. Die Tafel II. gibt $C = 59''$, es ist also nach (10) und (11) mit $n = 5$:

$$h_0 - h_m = 0,50 \times 59'' \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 7,4'' \tag{12}$$

d. h. das arithmetische Mittel h_m der 5 gemessenen Höhen ist wegen der Krümmung der Sonnenbahn um $7''$ zu klein. Es ist zwar immer viel besser, schon wegen der Genauigkeits-Uebersicht, alle Höhen einzeln auszurechnen, als Mittel zu bilden; wenn man aber wegen der Rechnungserleichterung zur Mittelbildung sich entschliesst, so gibt vorstehende Theorie wenigstens die Möglichkeit, die dadurch begangenen Fehler zu schätzen und summarisch zu verbessern.

Umformung der Höhengeschwindigkeits-Formel.

Unsere oben gefundene Differentialformel (2), nämlich

$$dh = - \cos \varphi \cos \delta \frac{\sin t}{\cos h} dt \tag{13}$$

lässt sich in zweifacher Weise umformen. Wir nehmen hiezu in Fig. 3. das astronomische Dreieck von § 4. S. 11 Fig. 3. nochmals vor; dasselbe gibt die Sinusbeziehungen

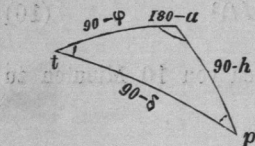
$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\cos \delta}{\cos h} \quad \text{und} \quad \frac{\sin t}{\sin p} = \frac{\cos h}{\cos \varphi} \tag{14}$$

Setzt man diese Beziehungen in (13), so erhält man zwei neue Formen:

$$dh = - \cos \varphi \sin a dt \quad \text{oder} \quad \Delta h^{(c)} = - 15 \cos \varphi \sin a \Delta t^{(m)} \tag{15}$$

$$dh = - \cos \delta \sin p dt \quad \text{oder} \quad \Delta h^{(c)} = - 15 \cos \delta \sin p \Delta t^{(m)} \tag{16}$$

Fig. 3. Astronomisches Dreieck.



Die Formel (15) sagt, dass die Höhengeschwindigkeit an einem Orte (φ constant) nur von dem Azimut a abhängt und für $a = 90^\circ$, d. h. im ersten Vertical, ihr Maximum erreicht. Für Zeitbestimmungen aus Sonnenhöhen ist es daher von Wichtigkeit, zu wissen, wann die Sonne in den ersten Vertical kommt. Setzt

man in Fig. 3. den Winkel $180^\circ - a = 90^\circ$, so wird das Dreieck an dieser Stelle rechtwinklig und man hat dann

$$\cos t = \frac{\text{tang } (90^\circ - \varphi)}{\text{tang } (90^\circ - \delta)} = \text{tang } \delta \cotg \varphi \quad (17)$$

hiernach ist folgende Tafel berechnet:

Stundenwinkel für die Sonne im ersten Vertical.

Jahreszeit	Declination δ	Geographische Breite φ		
		45°	50°	55°
22. Juni	+ 23° 27'	4h 17m	4h 35m	4h 49m
20. Mai und 24. Juli	+ 20°	4h 35m	4h 49m	5h 1m
1. Mai und 12. August	+ 15°	4h 58m	5h 8m	5h 17m
16. April und 27. August	+ 10°	5h 19m	5h 26m	5h 32m
2. April und 10. September	+ 5°	5h 40m	5h 43m	5h 46m
20. März und 23. September	0°	6h 0m	6h 0m	6h 0m

Im Winter kommt die Sonne erst unter dem Horizont in den ersten Vertical.

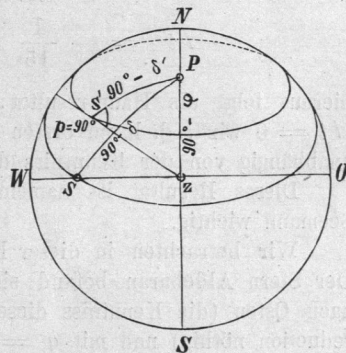
Für solche Gestirne, welche überhaupt nicht in den ersten Vertical gelangen, ist die günstigste Höhenbeobachtungszeit durch die Gleichung (16) bestimmt, nämlich dann, wenn der paralaktische Winkel $p = 90^\circ$ wird. Man sagt dann, das Gestirn befinde sich im „stationären Azimut“, oder auch in der „grössten Digression“. Setzt man, um diese Zeit zu erhalten in Fig. 3. $p = 90^\circ$, so wird

$$\cos t = \frac{\text{tang } (90^\circ - \delta)}{\text{tang } (90^\circ - \varphi)} = \text{tang } \varphi \cotg \delta \quad (18)$$

Die Frage, ob ein Gestirn mit der Declination δ für einen Punkt unter der Breite φ in den ersten Vertical oder ins stationäre Azimut kommt, wird durch den Anblick von Fig. 4. auf die Frage zurückgeführt, ob der Abstand PS oder PS' grösser oder kleiner als PZ ist, d. h. ob $90^\circ - \delta$ grösser oder kleiner als $90^\circ - \varphi$ ist, oder ob δ kleiner oder grösser als φ ist, d. h. also:

Das Gestirn kommt in $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten Vertical} \\ \text{Zenit} \\ \text{stationäres Azimut} \end{array} \right\}$ wenn $\left\{ \begin{array}{l} \delta < \varphi \\ \delta = \varphi \\ \delta > \varphi \end{array} \right\}$

Fig. 4.
Erster Vertical und stationäres Azimut.



Einfluss eines Breitenfehlers auf die Zeitbestimmung.

Um diesen Einfluss zu bestimmen, hat man die Grundgleichung (1) nach t und nach φ zu differentiiren. Diese Gleichung, nach t aufgelöst, ist

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \delta} \frac{1}{\cos \varphi} - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

$$\text{woraus: } - \sin t \, dt = \left(\frac{\sin h}{\cos \delta} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi \quad (19)$$

nach (14) und nach Fig. (3.) ist

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin a \cos h \\ \sin \delta &= \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} - \sin a \cos h \, dt &= \sin h \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a}{\cos^2 \varphi} \\ &= + \frac{\cos h}{\cos \varphi} \cos a \\ dt &= - \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} d\varphi \\ \Delta t^{(s)} &= - \frac{1}{15} \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} \Delta \varphi^{(c)} \quad (20) \end{aligned}$$

hieraus folgt als Hauptresultat, dass im ersten Vertical mit $a = 90^\circ$, $\Delta t = 0$ wird, d. h. im ersten Vertical ist die Ortszeitbestimmung nahezu unabhängig von der Kenntniss der Breite.

Dieses Resultat ist namentlich auf Reisen und insbesondere für den Seemann wichtig.

Wir betrachten in dieser Hinsicht nochmals das Beispiel von S. 61. Der Stern Aldebaran befand sich im Azimut etwa $a = 82^\circ$, von Süden nach Osten (die Kenntniss dieses Azimuts war auch für die Mondstanzreduction nöthig) und mit $\varphi = 27^\circ$ hat man nun aus (20):

$$\Delta t^{(s)} = 0,01 \Delta \varphi^{(c)}$$

Schätzt man $\Delta \varphi^{(c)}$ sogar zu $\pm 30''$, so erzeugt dieses einen Zeitfehler von nur $0,3''$, weil der Stern nahe im Osten stand. Wäre ein Stern im Azimut 45° benützt worden, so würde man in diesem Fall einen Zeitfehler von $2,2''$ erhalten haben.

§ 16. Zeitbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen.

Jeder Fixstern beschreibt am Himmel täglich einen zum Meridian symmetrischen Bogen. Wenn man daher einen solchen Stern in zwei Lagen gleich hoch links und rechts vom Meridian beobachtet, so entspricht