

§ 11. Fehlertheorie des astronomischen Theodolits.

Die Achsenfehler des Theodolits haben in der Astronomie wegen der steileren Visuren eine wesentlich andere Bedeutung als in der Geodäsie.

Nennen wir c den Collimationsfehler,
 i den Horizontalachsenfehler,
 v den Verticalachsen- oder Aufstellungsfehler,

so sind deren Einflüsse auf eine Horizontal- oder Azimutalwinkelmessung:

$$(c) = \frac{c}{\cos h} - c \quad (1)$$

$$(i) = i \tan h \quad (2)$$

$$(v) = v \tan h \cos u \quad (3)$$

wenn h der Höhenwinkel der Visur und u deren Azimutalwinkel gegen die Horizontallinie in dem schief liegenden Limbus ist.

Wir werden namentlich die Formel (2) später zu benutzen haben und werden sie dann speciell behandeln.

Deswegen mag es genügen, die Formeln (1) (2) (3) hier einfach zu citiren (s. Jordan, Handb. d. Vermessungskunde, I. Band S. 239—242).

Der Einfluss derselben Achsenfehler c i v auf eine Höhenwinkel-messung ist (nach J. Handb. I S. 247):

$$\Delta h = \frac{i^2 + c^2 + v^2 \cos^2 u}{2 \rho} \tan h + \frac{ci + cv \cos u + iv \cos u \sin h}{\rho \cos h} \quad (4)$$

wo u , wie bei (3), ein Azimutalwinkel ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass eine in der Visurrichtung angebrachte Libelle bei der Höhenwinkel-messung eingespielt habe; ein Fehler dieser Libelle würde mit seiner ganzen Grösse in den Höhenwinkel eingehen. Der Ausdruck (4) für Δh unterscheidet sich dadurch wesentlich von (1) (2) (3), dass Δh nur Glieder zweiter Ordnung i^2 c^2 etc. enthält, während (1) (2) (3) die ersten Potenzen von c i und v enthalten, neben welchen i^2 c^2 etc. in (1) (2) (3) vernachlässigt worden sind. Dieses deutet schon an, dass der Fehler Δh im Allgemeinen klein ist. In der That gibt die Ausrechnung nach (4) für einen einzelnen Theil von der Form $\frac{\delta^2}{2 \rho} \tan h$ Folgendes:

δ	Höhenwinkel h							
	1°	5°	10°	20°	30°	45°	60°	90°
1'	0,000''	0,001''	0,002''	0,003''	0,01''	0,01''	0,02''	∞
5'	0,004''	0,02''	0,04''	0,08''	0,13''	0,22''	0,38''	∞
10'	0,014''	0,08''	0,15''	0,32''	0,50''	0,87''	1,51''	∞
30'	0,136''	0,76''	1,33''	2,86''	4,53''	7,86''	13,60''	∞

Diese Tabelle berechtigt uns, bei Höhenwinkelmessungen mit einem einigermassen berichtigten Theodolit, und bei Höhen, die nicht weit über 60° gehen, die Achsenfehler schlechthin zu vernachlässigen.

Ueber Prüfung und Berichtigung des Theodolits im Allgemeinen verweisen wir auf J. Handb. I S. 231 u. ff., jedoch mit der Bemerkung, dass sich die Formel (8) S. 242 erheblich kürzer begründen lässt durch die am Schlusse unseres gegenwärtigen § 11. gegebene Differentialformel (d).

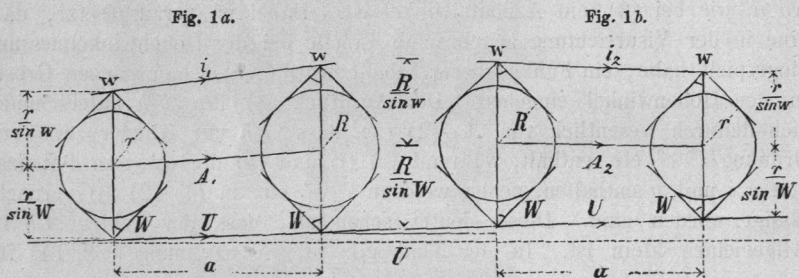
Bestimmung der Horizontalachsenneigung i .

Nachdem die Empfindlichkeit der Aufsatzlibelle bestimmt ist, findet man durch deren Ausschlag beim Aufsetzen auf die horizontale Achse die Neigung der letzteren und zwar unabhängig von dem Libellencollimationsfehler selber, wenn man die Libelle in beiden Lagen aufsetzt und aus beiden Ausschlägen das Mittel nimmt.

Für geodätischen Gebrauch mit schwach geneigten Visuren wird das wohl immer ausreichen, bei astronomischen Azimutmessungen dagegen, wo steile Visuren über 45° kommen, also nach der Formel (2) ($i \tan h$) i mit seiner eigenen Grösse, und sogar noch vergrößert ($\tan h > 1$) in das Resultat der Azimutmessung eingeht, muss unter Umständen noch ein weiterer Fehler in Rechnung gebracht werden, nämlich die Ungleichheit der Zapfendurchmesser der horizontalen Achse.

In Fig. 1. bedeutet W den halben Gabelwinkel des Achsenlagers, in welchem die Achse links mit einem Halbmesser r und rechts mit einem

Fig. 1. Ungleichheit der Zapfenhalbmesser R und r der horizontalen Achse.



Halbmesser R liegt, a sei der Abstand der beiden Lager. (In der Figur sind die Lagerquerschnitte links und rechts um 90° in die Längsebene (in welcher a liegt) gedreht, damit die Querschnittsdimensionen und die Längen in einer Figur zur Anschauung kommen.) Die Libelle sitzt oben mit einem Reitwinkel $2w$. Die Einsenkung des Zapfens R beträgt daher $\frac{R}{\sin W}$ für den Gabelwinkel W , und $\frac{R}{\sin w}$ für den Reitwinkel w und entsprechend für den Zapfen r .

Mit U_1 A_1 i seien die Neigungen der Unterlagslinie, der Zapfenachse

und der Libellenachse bezeichnet, im Sinne des beigesetzten Pfeiles, positiv, wenn links tief und rechts hoch ist.

Nun denke man sich die Horizontalachse mit ihren Zapfen vertauscht, die Unterlagsneigung U aber beibehalten, damit wird Fig. 1 a. in 1 b. übergehen.

Aus diesen Figuren liest man nun folgende Gleichungen:

$$A_1 = U + \frac{\frac{R}{\sin W} - \frac{r}{\sin w}}{a}$$

$$i_1 = U + \frac{\left(\frac{R}{\sin W} + \frac{R}{\sin w}\right) - \left(\frac{r}{\sin W} + \frac{r}{\sin w}\right)}{a}$$

Setzt man $\frac{R - r}{a} = x$ (1)

so wird

$$A_1 = U + \frac{x}{\sin W} \quad (2)$$

$$i_1 = U + \frac{x}{\sin W} + \frac{x}{\sin w} \quad (3)$$

Behandelt man ganz ebenso die Fig. 1 b., so erhält man

$$A_2 = U - \frac{x}{\sin W} \quad (4)$$

$$i_2 = U - \frac{x}{\sin W} - \frac{x}{\sin w} \quad (5)$$

Aus (2) und (3), sowie aus (4) und (5) folgt:

$$A_1 - i_1 = - \frac{x}{\sin w} \quad A_2 - i_2 = + \frac{x}{\sin w} \quad (6)$$

und aus (3) und (5)

$$i_1 - i_2 = \frac{2x}{\sin W} + \frac{2x}{\sin w}$$

Dieses gibt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{i_1 - i_2}{2} \frac{\sin W \sin w}{\sin W + \sin w} \quad (7)$$

also nach (6)

$$A_1 = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{2} \frac{\sin W}{\sin W + \sin w}, \quad A_2 = i_2 + \frac{i_1 - i_2}{2} \frac{\sin W}{\sin W + \sin w} \quad (8)$$

Wenn die Winkel W und w einander gleich sind, was häufig der Fall ist, so vereinfachen sich die Formeln; (8) gibt dann:

$$A_1 = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{4}, \quad A_2 = i_2 + \frac{i_1 - i_2}{4} \quad (9)$$

Die Neigungen i_1 und i_2 selbst müssen durch je zweifaches Aufsetzen einer Libelle auf die Horizontalachse bestimmt werden, damit der Libellenfehler eliminirt wird. Ist die Libelle durchlaufend beziffert, wie in den nachfolgenden Fig. 2. und 3. angenommen ist, so berechnet man aus den Blasenablesungen a und b in zwei Lagen die Neigung:

$$i = \frac{a - b}{2}$$

i ist positiv, wenn in Fig. 2. und 3. R höher ist als L . (10)

Folgendes ist ein Beispiel der Zapfenungleichheitsbestimmung für das Bamberg'sche Universalinstrument Fig. 6. S. 44, mit Veranschaulichung der Umstellungen durch Fig. 2. und Fig. 3. Die Aufsatzlibelle ist durch-

Fig. 2. Achsenlage I.

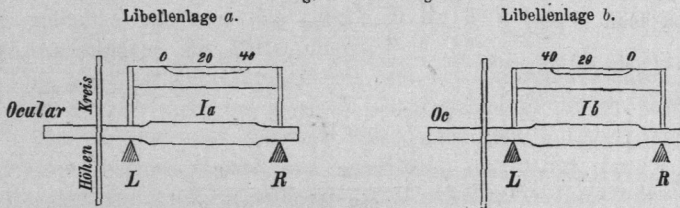
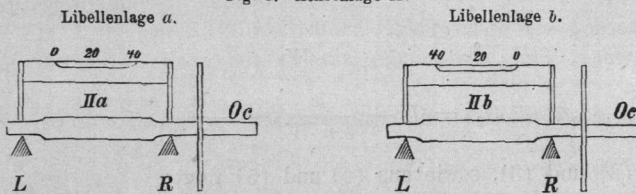


Fig. 3. Achsenlage II.



laufend von 0 bis 40 beziffert, weshalb durch die beige-schriebenen Zahlen 0 20 40 die Lage der Libelle gegen die Achse vollständig bestimmt ist. Zwischen Lage I und Lage II wird die horizontale Fernrohrachse auf den Lagern umgesetzt, wobei die Stützpunkte L und R unverändert bleiben. Ein Versuch gab folgende Ablesungen der Blasenenden an der Libellentheilung:

Ia 10,1 29,3

Ib 9,7 28,8

$$a - b + 0,4 \quad + 0,5 \text{ Mittel}(a - b) = + 0,45, \left(\frac{a - b}{2}\right)_I = + 0,22 = i_1 \quad (11)$$

IIa 9,8 29,2

IIb 10,2 29,6

$$a - b - 0,4 \quad - 0,4 \text{ Mittel}(a - b) = - 0,40, \left(\frac{a - b}{2}\right)_{II} = - 0,20 = i_2 \quad (12)$$

$$i_2 - i_1 = - 0,42$$

$$\frac{i_2 - i_1}{4} = - 0,10$$

Das Mittel aus acht solchen Bestimmungen gab

$$\frac{i_2 - i_1}{4} = (-0,11 \pm 0,03) \text{ Libellenstriche} \quad (13)$$

Dass hiebei i_1 und i_2 die Neigungen in dem Sinne sind, welcher auch in Fig. 1., 2. und 3. für i_1 und i_2 angenommen ist (i positiv, wenn das rechte Ende R höher ist als das linke Ende L), ergibt sich deutlich aus den Libellenablesungen, die man zu noch grösserer Deutlichkeit auch auf die Blasenmitte beziehen kann. Z. B.

I a Blasenende links 10,1 Blasenende rechts 29,3 Blasenmitte 19,70
I b Blasenende rechts 9,7 Blasenende links 28,8 Blasenmitte 19,25

I a Blasenmitte 20 — 19,70 = 0,30 links von 20 (i_1)₁ = — 0,30
I b Blasenmitte 20 — 19,25 = 0,75 rechts von 20 (i_1)₂ = + 0,75

Um die Collimation der im Strich 20 angenommenen Libellenachse gegen die Unterlaglinie zu eliminiren, hat man aus — 0,3 und + 0,75 das Mittel zu nehmen = + 0,225, was mit dem obigen i_1 in (11) stimmt.

Die Libellenempfindlichkeit ist nach S. 44 = 9,5'' auf 1 Strich, also nach (13) und (9):

$$A_1 - i_1 = - (A_2 - i_2) = - 0,11 \times 9,5'' = - 1,04'' \quad (14)$$

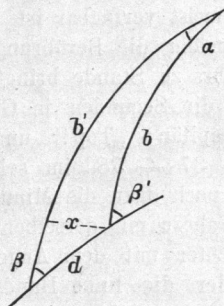
d. h. in Fig. 1 a. ist der linke Zapfen r dicker als der rechte R , und die Achsen i_1 und A_1 convergiren nach rechts um 1,04''.

Differentialformeln des sphärischen Dreiecks.

Zur Theorie der Instrumentenfehler und zu manchen anderen Untersuchungen braucht man häufig Differentialformeln des sphärischen Dreiecks, welche wir daher hier ein für alle Mal aufstellen.

In Fig. 4. betrachten wir ein langgestrecktes schmales sphärisches Dreieck, mit den beiden Langseiten b und b' , dem eingeschlossenen kleinen Winkel α , dessen kleiner Gegenseite d , mit den anliegenden nahe gleichen Winkeln β und β' . x sei ein Bogen rechtwinklig zu b oder zu b' oder auch genähert, rechtwinklig zu b und zu b' , so dass das kleine Dreieck mit d und x als ebenes rechtwinkliges Dreieck behandelt werden kann.

Fig. 4. Sphärisches Differentialdreieck.



Die sphärische Trigonometrie gibt:

$$\sin \alpha = \frac{\sin x}{\sin b} \quad \text{oder auch} \quad \tan \alpha = \frac{\tan x}{\sin b}$$

woraus für kleines a und kleines x wird:

$$x = a \sin b \quad (a)$$

ferner
$$\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin b'}{\sin b} \quad (b)$$

$$\beta' = \beta + (\beta' - \beta) \quad b' = b + x \cotg \beta$$

$$\sin \beta' = \sin \beta + (\beta' - \beta) \cos \beta \quad \sin b' = \sin b + x \cotg \beta \cos b.$$

Damit gibt (b):

$$1 + (\beta' - \beta) \cotg \beta = 1 + x \cotg \beta \cotg b$$

und mit Einsetzung von x aus (a):

$$\beta' - \beta = a \cos b \quad (c)$$

oder mit $x = d \sin \beta$ nach Fig. 4.:

$$\beta' - \beta = d \sin \beta \cotg b \quad (d)$$

Die Formeln (a) und (c) entsprechen den Formeln für den Parallelkreisbogen und für die Meridianconvergenz in der Geodäsie.

§ 12. Die astronomischen Uhren.

Zur Zeitmessung hat man Pendeluhren und Federuhren. Die Pendeluhren mit fester Aufstellung sind bei mässigen Kosten einer grossen Genauigkeit fähig. Das Pendel soll mit Compensation der Wärmeausdehnung versehen sein. Die Federuhren hat man in der Form von gewöhnlichen Taschenuhren, dann Taschenchronometern und sog. Boxchronometern.

Auf die Mechanik und Compensation der Uhren und Chronometer lassen wir uns nicht ein, und beschreiben hier nur die einfachste Behandlung dieser Instrumente.

Die Bestimmung eines Zeitmomentes an einer Uhr geschieht am bequemsten durch zwei Beobachter. Z. B. zur See, wo ein grösseres Personal meist verfügbar ist, misst etwa der Capitän eine Mondsdistanz, indem er allmähig die Berührung zweier Ränder im Gesichtsfelde des Sextantenfernrohres zu Stande bringt, während ein Steuermann mit der Uhr in der Hand die Sekunden in Gedanken zählt. Im Moment der Berührung sagt der Capitän: „Top!“ und der Steuermann hält mit seinem Zählen... 36 — 37 — 38! im selben Moment inne, hält 38^s in Gedanken fest, notirt noch dazu die Minuten und Stunden und hat dann z. B. 7^h 29^m 38^s.

Nahezu mit derselben Genauigkeit und Bequemlichkeit kann auch ein Beobachter mit dem Auge das Fernrohr und die Uhr beherrschen, wenn entweder die linke Hand zum Halten der Uhr frei ist (bei Theodolitheobachtungen) oder wenn wenigstens die Uhr in Sehweite vom Ocular des Beobachtungsinstrumentes gebracht werden kann. Man schaut nämlich, sobald der Beobachtungsmoment, z. B. Antritt des Sonnenrandes an einem Faden des Gesichtsfeldes, eintritt, rasch vom Ocular weg nach der Uhr,