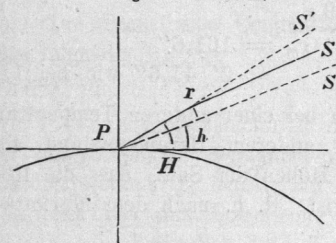


## § 7. Refraction.

Wegen der ungleichen Dichte der Schichten der Atmosphäre kommen

Fig. 1. Refraction.



die Lichtstrahlen von den Himmelskörpern zu einem Erdpunkte nicht in geraden Linien, sondern in nach unten concaven Curven, so dass ein Beobachter in  $P$  (Fig. 1.) ein Gestirn  $S$  in der Tangentenrichtung  $S'$  zu sehen glaubt. Hiebei heisst:

$H$  die scheinbare Höhe,  
 $h$  die wahre Höhe,  
 $H - h = r$  die Refraction.

Die beiden in der Figur mit  $S$  bezeichneten Punkte sind als unendlich entfernt angenommen, und sind daher für den Beobachtungspunkt  $T$  als zusammenfallend zu betrachten. Ohne auf die Refractionstheorie einzugehen, betrachten wir hier nur deren praktische Anwendung und namentlich die dazu nöthigen Refractionstafeln.

Um zuerst einen Ueberblick über die Verhältnisse zu gewinnen, betrachten wir einige Hauptwerthe in runden Zahlen.

Scheinbare Höhe $H$	Refraction $r$	Scheinbare Höhe $H$	Refraction $r$
0°	35'	20°	3'
2°	18'	30°	2'
5°	10'	45°	1'
10°	5'	60°	0,5'
20°	3'	90°	0'

Die Refraction ist nicht von der Höhe allein abhängig, sondern auch von der Temperatur der Luft und von dem Druck der Luft (und von der Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, wovon jedoch hier nicht die Rede ist). Diejenige Refraction, welche bei einer Lufttemperatur von 9,3° C. und bei einem (auf 0° reducirten) Barometerstand von 751,5<sup>mm</sup> stattfindet, nennt man nach Bessel's Annahme, die mittlere Refraction. Die Bessel'schen Refractionstafeln sind enthalten in dem Werke „Tabulae regiontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae, auctore Friderico Wilhelmo Bessel, Regiontani Prussorum, 1830“, S. 538 — 542 und S. LIX—LXIII. Diese Tafeln sind von da in eine Menge Bücher übergegangen.

Wir haben nun zunächst nach den Bessel'schen Original-Tafeln unsere ausführliche Tafel der mittleren Refraction auf S. [5] bis [7] berechnet, und da für grössere Höhen die Refraction nahezu der Cotangente der scheinbaren Höhe proportional ist, nämlich

$$r_m = \alpha \cotg H, \quad (1)$$

gibt S. [12] als Auszug aus Bessel's Originaltafel die Werthe  $\log \alpha$  als Function von  $H$ , von 10° an.

Wir haben also für die Bestimmung der mittleren Refraction  $r_m$  zwei Hilfsmittel, wie ein Beispiel zeigen mag:

Scheinbare Höhe  $H = 19^\circ 30'$  gibt

$$1) \text{ nach S. [7]} \quad r_m = 2' 42''$$

$$2) \text{ nach S. [12]} \quad \log \alpha = 1.7575$$

$$\text{hiez u } \log \cotg 19^\circ 30' = 0.4509$$

$$\log r_m = 2.2084 \quad r_m = 161,6''$$

$$= 2' 41,6'' \text{ wie bei 1).}$$

Es handelt sich nun um die Refraction bei einer anderen Temperatur  $t$  als der Normaltemperatur  $9,3^\circ$  und bei anderem Barometerstand als  $751,5$  mm, und hiez u dient bei grösseren Höhen der Satz, dass die Refraction der Dichte der Luft proportional ist, d. h. nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz ist:

$$r = r_m \frac{1 + 9,3 \varepsilon}{1 + t \varepsilon} \frac{Q_0}{751,5} \quad (2)$$

wo  $\varepsilon = 0,003665$  der Ausdehnungs-Coefficient der Luft für  $1^\circ$  C., und  $Q_0$  der auf  $0^\circ$  reducirte Quecksilberbarometerstand ist. Zur Ausrechnung von (2) könnte man sich der barometrischen Hülftafeln bedienen (Handb. der Verm. Band I S. 516), weil auch bei der barometrischen Höhenmessung solche Ausdrücke vorkommen, bequemer aber ist es, für die beiden Quotienten in (2) besondere Hülftafeln anzulegen. Wir setzen nach Bessel's Bezeichnung

$$\frac{1 + 9,3 \varepsilon}{1 + \varepsilon t} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{Q_0}{751,5} = B \quad (3)$$

stellen die Werthe  $\log \gamma$  und  $\log B$  in der Tafel S. [12] zusammen, und haben nun:

$$r = r_m \times \gamma \times B \quad (4)$$

oder wegen (1)

$$r = \alpha \cotg H \times \gamma \times B \quad (5)$$

z. B.  $H = 30^\circ$ ,  $t = 28^\circ$ ,  $Q_0 = 702$  mm gibt nach der Tafel S. [12] folgende logarithmische Rechnung:

$$H = 30^\circ \text{ gibt}$$

$$\log \alpha = 1.7600$$

$$\log \cotg H = 0.2386$$

$$t = 28^\circ \text{ gibt } \log \gamma = -0,0277 = 9.9723 - 10$$

$$Q_0 = 702 \text{ mm gibt } \log B = -0,0296 = 9.9704 - 10$$

$$\log r = 1.9413 \quad r = 87,4'' = 1' 27,4'' \quad (6)$$

Die Formel (2) gilt aber nur für grössere Höhen, etwa über  $25^\circ$  oder  $30^\circ$ ; für kleinere Höhen kommen noch Exponenten  $\lambda$  und  $A$  zu den Quotienten von (2), so dass dann die Gesamtformel heisst:

$$r = r_m \left( \frac{1 + 9,3 \varepsilon}{1 + \varepsilon t} \right)^\lambda \left( \frac{Q_0}{751,5} \right)^A \quad (7)$$

oder logarithmisch, mit Einführung von (3)

$$\log r = \log r_m + \lambda \log \gamma + A \log B \quad (8)$$

oder, auch mit Einsetzung von (1)

$$\log r = \log (\alpha \cotg H) + \lambda \log \gamma + A \log B \quad (9)$$

Die Bessel'sche Originalformel hat statt des letzten Gliedes  $A \log B$  das folgende

$$A (\log B + \log T),$$

wo  $T$  ein Correctionsfactor für Reduction des Quecksilberbarometers auf  $0^0$  ist; da wir jedoch angenommen haben, dass der in die Rechnung eingehende Barometerstand  $Q_0$  bereits auf  $0^0$  reducirt sei, so fällt in unserer Formel (8) oder (9) das Bessel'sche  $\log T$  fort. Es ist formell und sächlich besser, die Reduction auf  $0^0$  des Quecksilbers nicht in die Refractionsformel aufzunehmen, denn es bestehen anderweitige bequeme Reductionstafeln hiefür (z. B. Handbuch der Verm. I. Band S. 508—510), welche zudem noch die Ausdehnung des Maasstabes mit berücksichtigen; ferner kommt es häufig vor, dass man den Barometerstand gar nicht direct am Quecksilberbarometer abliest, sondern an einem Aneroidbarometer, welches seine besonderen Correctionen hat.

Wir nehmen ein Beispiel zu (8) mit kleinerer Höhe

$$H = 2^0 30', t = 28^0, Q_0 = 702 \text{ mm}$$

S. [5] und S. [12] geben:

$$r_m = 16' 1'' = 961'', \log r_m = 2.9827$$

$$\log \gamma = -0.0277, \lambda = 1.26, \lambda \log \gamma = -0.0349 = 9.9651 - 10$$

$$\log B = -0.0296, A = 1.03, A \log B = -0.0305 = 9.9695 - 10$$

$$\log r = 2.9173$$

$$r = 827'' = 13' 47'' \quad (10)$$

Diese logarithmische Rechnung ist aber immer noch etwas umständlich, weshalb wir, mit einem kleinen Opfer an Genauigkeit, auf S. [8] bis [11] directe Correctionen der mittleren Refraction für Temperatur und Barometerstand berechnet haben. Diese Correctionen entsprechen der Formel (7), welche man sich auf die Form gebracht denken kann:

$$r = r_m (1 + x) (1 + y) = r_m + r_m x + r_m y + r_m xy \quad (11)$$

Nun gibt die Tafel S. [8] und [9] die Correction  $r_m x$ , die Tafel S. [10] und [11] gibt  $r_m y$  und das kleine Glied  $r_m xy$  wird vernachlässigt, wenn man es nicht etwa besonders berechnen will.

Wir behandeln das Beispiel (6) nach den Tafeln S. [5] bis [11]

$$H = 30^0, t = 28^0, Q_0 = 702 \text{ mm}$$

$$\text{S. [7] gibt } r_m = 1' 40''$$

$$\text{S. [9] für } H = 30^0 t = 28^0 \text{ Corr} = - 6''$$

$$\text{S. [11] für } H = 30^0 Q_0 = 702 \text{ Corr} = - 7''$$

$$r = 1' 27'' \text{ wie bei (6).} \quad (12)$$

Das zweite Beispiel (10) ist

$$H = 2^{\circ} 30', t = 28^{\circ}, Q_0 = 702 \text{ mm}$$

$$\text{S. [5] gibt für } 2^{\circ} 30' r_m = 16' 1''$$

$$\text{S. [8] mit } H = 2^{\circ} 30' \text{ und } t = 28^{\circ} \text{ gibt } \textit{Corr.} = -1' 14''$$

$$\text{S. [10] mit } H = 2^{\circ} 30' \text{ mm und } Q_0 = 702 \text{ mm gibt } \textit{Corr.} = -1' 5''$$

$$r = 13' 42'' \quad (13)$$

Die Differenz  $5''$  gegen (10) rührt von dem in (13) vernachlässigten letzten Gliede der Formel (11) her, dasselbe würde nämlich geben:

$$r_m \times y = \frac{r_m \times r_m \times y}{r_m} = \frac{(-74) \times (-5)}{961} = +4'' \quad (14)$$

fügt man dieses zu (13), so fehlt nur noch  $1''$  gegen (10), was sich durch Abrundungshäufung erklärt.

Nach der Entstehungsweise unserer Tafeln und nach den vorgelegten Zahlenbeispielen kann man nun rasch beurtheilen, welche Art der Refractionsberechnung in jedem Falle zu wählen ist. Die Tafeln [5] [6] [7] nebst [12] geben bei Höhen unter  $10^{\circ}$  die Refraction auf etwa  $1''$  genau, und bei grösseren Höhen auf  $0,1''$  genau. Die bequemeren Correctionstafeln [8] bis [11] geben nur bei grösseren Höhen eine Genauigkeit von etwa  $1''$ , bei sehr kleinen Höhen treten wegen der Vernachlässigung des letzten Gliedes in der Gleichung (11) und wegen der Unsicherheit der Interpolation, wohl Fehler von  $5-10''$  ein. Hieran schliesst sich die Frage an, wie genau überhaupt die Refraction bestimmt werden kann. Bessel äussert sich hierüber auf S. LXII—LXIII des oben citirten Werkes „Tabulae Regiomontanae“ folgendermaassen:

„Es ist bekannt, dass die Luftschichten ungleich erwärmt sind, und dass deswegen ihr Gleichgewicht gestört ist. Da nun jede Theorie das Gegentheil annehmen muss, so ist klar, dass die Theorie nicht immer mit den Beobachtungen stimmen kann, sondern sich nur den mittleren Refractionswerthen anschliesst. Deshalb ist es nöthig, den wahrscheinlichen Fehler jeder berechneten Refraction abzuleiten aus den Ungleichheiten, welche in einer langen Reihe gefunden wurden, damit man beurtheilen kann, welches Vertrauen die Tafel in jedem Falle verdient. Die Untersuchung dieses Umstandes, welche sich auf die Königsberger Beobachtungen stützte, hat uns Folgendes geliefert:

#### Wahrscheinlicher Fehler einer mit Hülfe der Tafel berechneten Refraction.

Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
45° 0'	± 0,27''	10° 0'	± 0,92''
30° 0'	0,34''	9° 0'	1,00''
25° 0'	0,37''	8° 0'	1,11''
20° 0'	0,46''	7° 0'	1,25''
15° 0'	0,66''	6° 0'	1,43''



Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
5° 0'	± 1,71"	2° 30'	± 5,30"
4° 30'	2,00"	2° 0'	7,74"
4° 0'	2,40"	1° 30'	10,58"
3° 30'	2,63"	1° 0'	16,84"
3° 0'	3,87"	0° 30'	20,01"

Hieraus ist ersichtlich, dass die aus den genannten Ursachen entspringenden Unregelmässigkeiten, sofern Temperatur und Barometerstand nach Angabe meiner Tafel berücksichtigt sind, nur in den ersten Graden der Höhen erheblich sind.“

Uebrigens dürfte diese Genauigkeit vielleicht noch überschätzt sein. Man weiss ja, dass die terrestrische Refraction, welche auf 100 Kilometer Entfernung etwa 4' beträgt, tägliche Schwankungen von nahezu 50 % ihres Werthes macht, um wie viel mehr muss ein Lichtstrahl, der einen 10fach längeren Weg durch die Atmosphäre zurücklegt, bei kleinem Höhenwinkel, infolge der Aenderung der Wärmevertheilung, auf- und niederschwanken.

Zu dem kommt noch, dass man (wie aus der barometrischen Höhenmessung bekannt ist), die Lufttemperatur  $t$  gar nie genau messen kann, auch der Barometerstand  $Q_0$  ist oft unsicher bestimmt. Nimmt man hiefür Fehler von bezw.  $\Delta t = + 1^\circ$  und  $\Delta Q_0 = + 1$  mm an, so erhält man folgende Vergleichung:

H ö h e	R e f r a c t i o n s f e h l e r	
	für $\Delta t = \pm 1^\circ$	für $\Delta Q_0 = \pm 1$ mm
0°	13"	3"
1°	8"	2"
2°	5"	2"
5°	2"	1"
10°	1"	0,4"
20°	0,6"	0,2"
45°	0,2"	0,0"

Eine genauere Refractionsbestimmung müsste nicht blos Temperatur und Barometerstand, sondern auch die Tages- bezw. Nachtzeit in Rechnung nehmen.

Es kann noch ein Wort über die Form unserer Refractionstafeln gesagt werden. Das letzte Glied  $r_m xy$  in (11) könnte man dadurch berücksichtigen, dass man in den Tafeln [8] bis [11] als zweites Argument nicht die scheinbare Höhe, sondern die mittlere Refraction, bezw. die mittlere Refraction + erste Correction, nähme, d. h. eine Anordnung, welche die Refractionstafel in dem Nautischen Jahrbuch oder die Refractionstafel im Anhang von Bremiker's siebenstelliger Logarithmentafel hat, indessen hat die Höhe als zweites Argument den Vorzug der Anschaulichkeit und der besseren Genauigkeitsabstufung.

Die eben erwähnten Refractionstafeln des nautischen Jahrbuchs gehen

nur bis  $2^{\circ}$  Höhe, indem vorausgesetzt wird, dass unter  $2^{\circ}$  wegen Refractions-Unsicherheit überhaupt nicht gemessen werde. Wenn dieses auch im Allgemeinen der Fall ist, so kommt man doch nicht selten in die Lage, auch für kleine Höhen Refractionen zu berechnen, und für Mondsdistanzen, bei welchen die Refraction eine wichtige Rolle spielt, werden wir die Verhältnisse am Horizont besonders zu untersuchen haben, weshalb die Tafel S. [5] und [6], entgegen der sonst üblichen kurzen Behandlung, mit Vermeidung aller grösseren Differenzen angelegt ist.

Zum Schluss haben wir auf S. [13] noch eine Refractionstafel mit der wahren Höhe als Argument beigegeben, welche zur Anwendung kommt, wenn nicht beobachtete, sondern berechnete Höhen vorliegen, für welche die Refractionen zu bestimmen sind. (Dieser Fall tritt z. B. bei der Reduction von Mondsdistanzen ein.)

Man findet die Tafelwerthe S. [13] durch Rückwärtsinterpoliren aus der Tafel S. [5]—[7], oder, zur Vermeidung der Abrundungsfehler, aus einer auf  $0,1''$  genauen Refractionstafel mit der scheinbaren Höhe als Argument. Bezeichnet man die Refraction als Funktion der scheinbaren Höhe  $H$  mit  $r$ , dagegen mit  $r'$  die Refraction als Funktion der wahren Höhe  $h$  (wobei  $r$  und  $r'$  zu gleichen Werthen  $H$  und  $h$  gehören), wenn ferner  $\Delta H$  und  $\Delta r$  zusammengehörige Differenzen von  $H$  und  $r$  sind, so wird

$$r' = r \frac{\Delta H}{\Delta H + \Delta r} \text{ oder genähert } = r - \frac{\Delta r}{\Delta H} r.$$

Die letztere Formel gibt

$H = 5^{\circ}$	$r - r' = 14,9''$
10	2,6
15	0,8
20	0,4
25	0,2
30	0,1

Da unsere Tafel S. [13] überhaupt auf  $1''$  abgerundet ist, war es nicht nothwendig, sie weiter fortzusetzen als bis  $r - r'$  auf etwa  $0,1''$  sinkt, sie geht daher nur bis zur Höhe  $31^{\circ}$ .

Näherungsformel für die Refraction. Für manche Zwecke ist es erwünscht, die Refraction nicht bloß tabellarisch numerisch, sondern auch in einer Formel zu besitzen. Für Höhen über  $10^{\circ}$  ist die Refraction nahezu proportional der Cotangente des Höhenwinkels, und man kann hier setzen:

$$r = 57'' \cotg h. \quad (15)$$

Die Refractionconstante für  $9,31^{\circ}$  C. und  $751,5$  mm Barometer ist  $57,7269''$ , die Annahme  $57''$  in (15) statt  $57,7''$  gibt jedoch einen besseren Anschluss an die wirklichen Refractionen auch bei kleineren Höhen von  $15^{\circ}$ , wie folgende Vergleichung zeigt:

H ö h e	Refraction	57'' cotg h	Fehler
0°	34' 54''	∞	∞
1°	24' 25''	54' 25''	+ 30' 0''
2°	18' 9''	27' 12''	+ 8' 3''
5°	9' 46''	10' 52''	+ 1' 6''
7°	7' 20''	7' 44''	+ 24''
10°	5' 16''	5' 23''	+ 7''
12°	4' 25''	4' 28''	+ 3''
15°	3' 32''	3' 32''	0''
20°	2' 37''	2' 37''	0''
30°	1' 40''	1' 40''	0''
40°	1' 9''	1' 9''	0''
50°	0' 48''	0' 48''	0''
60°	0' 33''	0' 33''	0''
70°	0' 21''	0' 21''	0''
80°	0' 10''	0' 10''	0''

Wie man sieht, ist die Näherungsformel (15) von 0° bis 5° ganz unbrauchbar, sie kann bei kleinen Höhen schon ihrer Form nach nicht anwendbar sein, weil sie für  $h = 0$  den Werth  $\infty$  annimmt. Dagegen ist sie von 10° an aufwärts sehr gut brauchbar, ja es kann hier auch die Correction für Temperatur und Barometerstand bequem mit berücksichtigt werden durch die beiden Correctionsfactoren  $\gamma$  und  $B$  der Tafel S. [12].

Eine von 1° bis 5° ziemlich anschliessende Interpolationsformel ist:

$$r = 57'' \cotg h - \frac{0,55'' \cos h}{\sin^2 h}.$$

## § 8. Parallaxe und scheinbarer Halbmesser.

Schon bei der Unterscheidung des scheinbaren und wahren Horizonts in § 2. wurde erwähnt, dass in vielen Fällen im Vergleich mit den Entfernungen der beobachteten Himmelskörper der Halbmesser der Erde als verschwindend klein, oder die Erde als Punkt betrachtet werden darf; und dieses Verhältniss hat eben Veranlassung zur Annahme des sogenannten „wahren“ Horizonts u. s. w. gegeben. Völlige Vernachlässigung des Erdhalbmessers findet statt bei Beobachtung des Polarsternes und aller Fixsterne, während bei der Sonne und den Planeten kleine, und beim Mond sogar bedeutende Reductionsrechnungen auszuführen sind.

Die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde werden in der praktischen Astronomie gewöhnlich nicht in linearem Maasse, Meilen oder Kilometern etc. angegeben, sondern zum Erdhalbmesser als Maasseinheit durch eine Winkelgrösse in Beziehung gesetzt. Dieses ist die Parallaxe, d. h. der Winkel, unter welchem, von der Mitte des entfernten Gestirns aus gesehen, der Aequatorhalbmesser der Erde erscheint, d. h. wenn z. B.