Capitel I.

Allgemeine Vorbereitung der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmungs-Aufgaben.

§ 1. Einleitung.

Die astronomische Zeit- und Ortsbestimmung ist ein Theil der praktischen Astronomie; sie beschäftigt sich mit der Lage der Himmelskörper gegen die Erde, und im besonderen gegen einen einzelnen Punkt der Erde, den Beobachtungspunkt.

Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Richtungen der Sehstrahlen von dem Beobachtungspunkt nach den Himmelskörpern, d. h. um die Winkel, welche diese Sehstrahlen mit festen Geraden auf der Erde oder unter sich selbst bilden. Die Entfernungen der Himmelskörper von dem Erdorte kommen dabei in der Regel nicht in Betracht, sondern werden nur ausnahmsweise zu Hülfsberechnungen gebraucht.

Zur Veranschaulichung der Winkel, welche die verschiedenen durch den Beobachtungspunkt gehenden Geraden und Ebenen bilden, bedient man sich, wie in der sphärischen Trigonometrie, einer fingirten Kugel, welche man sich mit beliebigem Halbmesser um den Beobachtungspunkt beschrieben denkt, diese Kugel heisst das Himmelsgewölbe. Jede von dem Beobachtungspunkt ausgehende Richtung wird veranschaulicht durch einen Punkt des Himmelsgewölbes; der Winkel, welchen zwei Visirrichtungen unter sich bilden, wird dargestellt durch einen grössten Kreisbogen des Himmelsgewölbes etc.

Wenn das Himmelsgewölbe mit allen für unsere Zwecke in Betracht kommenden Punkten feststehend wäre, so würden die astronomischen Beobachtungen sich nicht wesentlich von den geodätischen Winkelmessungen unterscheiden. Die Punkte des Himmels stehen aber nicht fest, sondern sind in stetiger Bewegung begriffen, welche als Maass der Zeit dient; und deswegen kommen zu den reinen Winkelmessungen, welche mit ähnlichen Instrumenten wie in der Geodäsie ausgeführt werden, in der Astronomie noch die Zeitmessungen mit Hülfe der Uhren, und die Gesammtaufgabe der astronomischen Ortsbestimmung besteht in folgenden Theilaufgaben:

1) Bestimmung der Zeit.
2) Bestimmung der Himmelsrichtungen (Azimut).
3) Bestimmung der geographischen Breite.
4) Bestimmung der geographischen Länge.

Von diesen vier Theilaufgaben sind 1) und 4) sehr nahe verwandt; diese Aufgaben greifen überhaupt mehrfach in einander über.

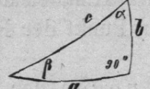
Die Auflösung dieser praktischen Aufgaben setzt verschiedene Hülfsmittel als gegeben voraus, welche in den astronomischen Jahrbüchern niedergelegt sind, und durch die theoretische Astronomie gewonnen worden sind.

Wegen häufigen Gebrauchs stellen wir hier die wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie zusammen, um dieselben nach Bedarf citiren zu können.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck. Fig. 1.

Hypotenuse $= c$
Kathete $= a$ Gegenwinkel $= \alpha$
Kathete $= b$ Gegenwinkel $= \beta$

Fig. 1.
Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.



$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \cos c &= \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \qquad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c} \quad (3)$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \qquad \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \qquad \cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (5)$$

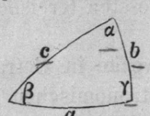
In dieser Gestalt prägen sich diese Formeln leicht dem Gedächtniss ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der ebenen Trigonometrie im Auge behält.

II. Allgemeines sphärisches Dreieck. Fig. 2.

Seiten $a\; b\; c$
Gegenwinkel $\alpha\; \beta\; \gamma$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Fig. 2.
Sphärisches Dreieck.



$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \gamma \\ \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= - \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen (6) (7) (8) (9) genügen immer zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken. Wenn von einer Unbekannten *sin* und *cos* in einer Gleichung vorkommen, z. B. $A \sin \alpha + B \cos \alpha + C = 0$, so erfolgt die

Auflösung durch eine Substitution von der Form $\frac{A}{B} = tang\ \lambda$, wobei λ gewöhnlich eine einfache geometrische Bedeutung hat.

Gauss'sche Gleichungen.

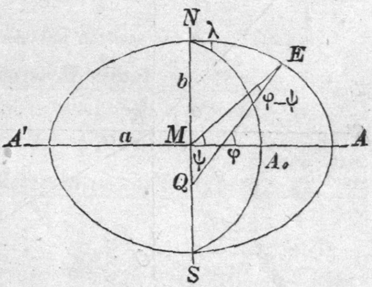
$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Durch Division findet man $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$, sowie $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ und damit β und γ sowie b und c.

§ 2. Feste Punkte und feste Richtungen auf der Erde.

Lage eines Punktes auf der Erdoberfläche. Die Erdoberfläche ist ein Umdrehungsellipsoid von geringer Abplattung (Fig. 1.), dessen Quadrant AN etwa $= 10\,000\,000$ m, und dessen Abplattung $\frac{a-b}{a}$ etwa $= \frac{1}{299}$ ist. Für viele Zwecke ist es hinreichend genau, die Erde als eine Kugel vom Halbmesser 6 370 000 m zu betrachten.

Fig. 1. Das Erdellipsoid.



Auf einem Meridian NEA der Erde wird ein Punkt E bestimmt durch seine geographische Breite φ, d. h. durch den Winkel, welchen die Normale EQ mit der grossen Achse MA macht; eine andere Punktbestimmung im Meridian erhält man durch die geocentrische Breite ψ, d. h. den Winkel, welchen die Linie EM von E nach dem Erdmittelpunkt M, mit der grossen Achse MA bildet. Die Differenz der Winkel φ und ψ ist durchaus nicht unbedeutend, sie hat in runden Zahlen etwa folgende Werthe:

$\varphi = 0^0$	$\varphi - \psi = 0'$	$\varphi = 45^0$	$\varphi - \psi = 12'$
$\varphi = 15^0$	$\varphi - \psi = 6'$	$\varphi = 60^0$	$\varphi - \psi = 10'$
$\varphi = 30^0$	$\varphi - \psi = 10'$	$\varphi = 75^0$	$\varphi - \psi = 6'$
$\varphi = 45^0$	$\varphi - \psi = 12'$	$\varphi = 90^0$	$\varphi - \psi = 0'$

(vgl. J. Handb. d. Verm. II S. 31 und 51).

Die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird bestimmt durch den Längenunterschied λ, welcher entweder als Winkel A_0NA am Pol N, oder als Bogen A_0A auf dem Aequator zur Anschauung kommt.

Unter Voraussetzung eines festen Anfangsmeridians NA_0 (z. B. Meridian von Greenwich) ist somit ein Punkt auf der Erdoberfläche vollständig bestimmt durch seine geographische Breite φ und durch seine geographische Länge λ.

Feste Richtungen in einem Punkte der Erdoberfläche (Fig. 2.).

Die erste Hauptrichtung ist die Normale EQ, welche durch die Schwerkraft bestimmt wird, jede in E rechtwinklig zu EQ gelegte Richtung heisst eine Horizontale (durch die Libelle bestimmt). Der Inbegriff aller Horizontalen, d. h. die Berührungsebene in E, heisst der Horizont.

In der Horizontebene, welche im unteren Theile von Fig. 2. besonders gezeichnet ist, erhält man durch die Beziehung zum Meridian zwei weitere Hauptrichtungen, die Nord-Südlinie NS', in übertragenem Sinne selbst wieder Meridian genannt, und die West-Ostlinie WO. In der Horizontebene wird ein Strahl ES_1 oder ES_2 festgelegt durch sein Azimut, welches vom Meridian, entweder von Nord nach Ost $= a_1$, oder von Süd nach West $= a_2$ gezählt wird.

Ein von E ausgehender Strahl ES, welcher nicht in der Horizontebene liegt, wird bestimmt durch das Azimut seiner Projection ES_1 auf die Horizontebene und durch den Höhenwinkel S_1ES, welchen der Strahl ES mit seiner Horizontalprojektion ES_1 bildet.

Mit der in § 1. S. 1 erwähnten Himmelskugel als Anschauungshülfsmittel haben wir alle bisher behandelten Richtungen in der perspectivisch gezeichneten Fig. 3. zusammengestellt.

E ist ein Beobachtungspunkt der Erdoberfläche, EQ ist die Normale, entsprechend Fig. 1. und Fig. 2., N O S' W und S, sind dieselben wie in Fig. 2. Die Normale EQ gibt nach oben verlängert

Fig. 2. Hauptrichtungen.

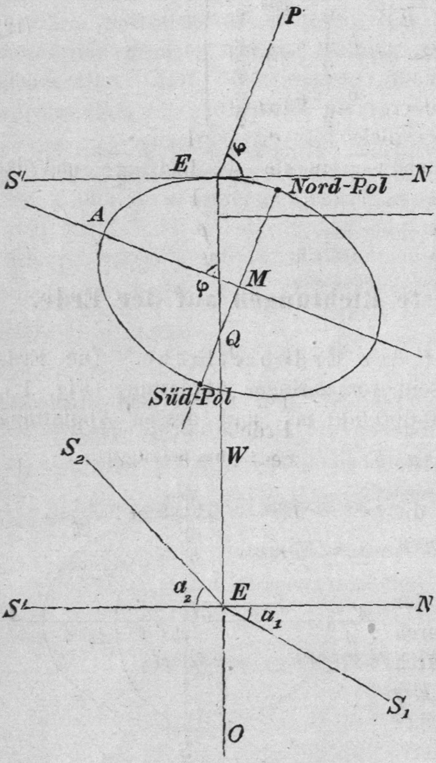
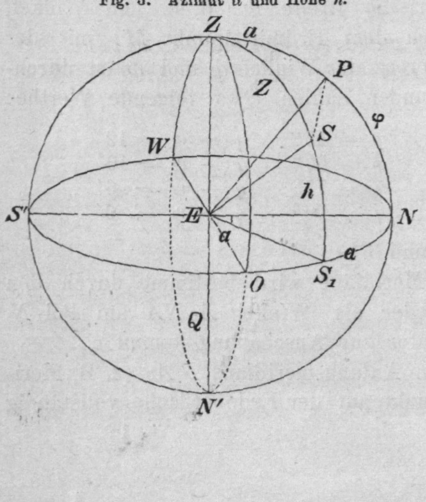


Fig. 3. Azimut a und Höhe h.



am Himmel das Zenit Z und unten das Nadir N'. Durch einen Punkt S des Himmels wird der Verticalkreis ZSS_1 gelegt, wodurch das Azimut a von S in dreierlei Form sich zeigt, nämlich als Winkel NES_1 im Horizont, oder als Bogen NS_1 des Horizontkreises $NOS'W$, endlich als Winkel NZS am Zenit. $S_1ES = h$ ist die Höhe von S, deren Complement $ZES = z$ Zenitdistanz genannt wird.

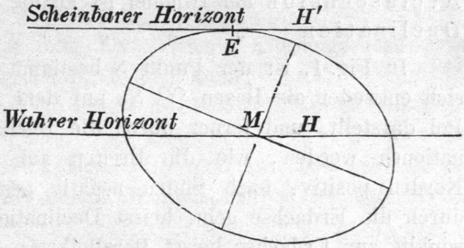
Von den verschiedenen durch EZ gehenden Verticalkreisen, deren einer, ZSS_1 bereits erwähnt wurde, und zu welchen auch der Meridian NZS' gehört, führt der von West nach Ost gerichtete, WZO noch einen besonderen Namen, derselbe heisst der „erste Vertical".

Zieht man von E aus eine Parallele mit der Erdachse, d. h. mit der Geraden MN in Fig. 1., so erhält man in Fig. 3. die Richtung EP, und damit den Himmelspol P, woraus in Verbindung mit Fig. 2. folgt, dass die Polhöhe NEP gleich der geographischen Breite φ ist. Zieht man noch die Verbindung PS, so erhält man in Fig. 3. das wichtige Dreieck ZPS, welches später besonders behandelt werden wird. (§ 4.)

Verschiebung des Horizontes. (Fig. 4.)

Nach der bisherigen Erklärung versteht man unter dem Horizont eines Punktes E die in diesem Punkte an die Erdoberfläche gelegte Berührungsebene EH'. Da jedoch der Erdhalbmesser sehr klein ist im Vergleich mit den Entfernungen der Himmelskörper, so empfiehlt es sich für viele Zwecke, die Horizontebene mit sich selbst parallel in den Erdmittelpunkt zu verschieben, so dass sie die Lage MH annimmt, und man nennt dann

Fig. 4. Scheinbarer Horizont und Wahrer Horizont.



EH' den scheinbaren Horizont,

MH den wahren Horizont,

und sofern man nicht die Verschiebung geradezu vernachlässigen kann, hat man für gegenseitige Reduktion vom scheinbaren auf den wahren Horizont und umgekehrt Sorge zu tragen.

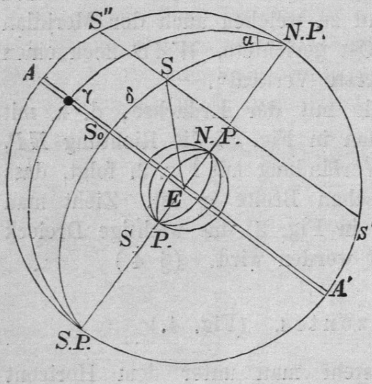
Die Benennungen „scheinbar" und „wahr" (englisch *apparent* und *true*), welche in ähnlichem Sinne auch sonst in der Astronomie vorkommen, sind nach unserer vorstehenden Entwicklung eigentlich nicht gerechtfertigt, man wäre eher versucht, EH' den wahren Horizont und MH einen fingirten Horizont zu nennen; die Benennungen sind jedoch dadurch entstanden, dass man in den Hauptrechnungsformeln alles auf den „wahren" Horizont MH beziehen muss, während der „scheinbare" Horizont nur vorübergehend bei den Beobachtungen gebraucht wird.

Eine mehr treffende Bezeichnung statt „wahr" ist „geocentrisch", z. B. eine geocentrische Monddistanz ist eine solche, wie sie ein im Mittelpunkt der Erde befindlicher Beobachter sehen würde.

§ 3. Eintheilung und Drehung des Himmels.

Indem wir nun den Beobachtungspunkt E sammt seinem Horizont von der Erdoberfläche in den Erdmittelpunkt verschoben denken, und auch die fingirte Himmelskugel um den Erdmittelpunkt als Beobachtungspunkt gelegt denken, erhalten wir die nebenstehende Fig. 1., wobei auch die Erde als kugelförmig angenommen ist.

Fig. 1. Rectascension α und Declination δ.



Denkt man sich nun die Erdachse über den Nordpol $N. P.$ und über den Südpol $S. P.$ hinaus bis zum Himmel verlängert, so erhält man eine entsprechende Himmelsachse $N. P.$ — $S. P.$, um welche sich der Himmel dreht (wovon nachher besonders die Rede sein wird); ebenso gibt die Erweiterung der Ebene des Erdäquators einen Himmelsäquator AA', und ebenso, wie man auf der Erde einen Punkt durch Länge und Breite bestimmt, bestimmt man nun am Himmel einen Punkt S durch die Rectascension und Declination.

Rectascension am Himmel ist analog der geogr. Länge auf der Erde
Declination „ „ „ „ „ „ Breite „ „ „

In Fig. 1. ist der Punkt S bestimmt durch die Rectascension, welche sich entweder als Bogen ♈ S_0 auf dem Aequator oder als Winkel α am Pol darstellt, und ferner durch die Declination $S_0 E S = \delta$. Die Declinationen werden, wie die Breiten auf der Erde, vom Aequator nach Norden positiv, nach Süden negativ gezählt. Ein Kreis $S_0 S$, welcher durch die Erdachse geht, heisst Declinationskreis, ein Kreis $S'' S S'$ rechtwinklig zur Erdachse heisst Parallelkreis.

Declinationskreis am Himmel ist analog dem Meridian auf der Erde,
Parallelkreis am Himmel ist analog dem Parallelkreis auf der Erde.

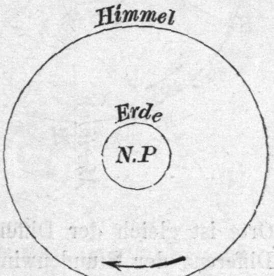
Die Rectascension am Himmel und die geographische Länge auf der Erde sind auch insofern verwandt, als beide willkürlichen Zählungsanfang haben. In Fig. 1. ist der Anfangspunkt der Rectascensionen auf dem Aequator mit ♈ (Widder) bezeichnet, was vorerst ein willkürlicher fester Punkt (ebenso wie z. B. Greenwich auf der Erde) sein soll.

Die Benennung Rectascension (*Ascensio Recta*, abgekürzt *A.R.*), gerade Aufsteigung, deutet darauf hin, dass die Erdachse nahezu horizontal, also die Parallelkreise, in welchen die Gestirne sich bewegen (aufsteigen), nahezu vertical gerichtet gedacht wurden, was in niederen Breiten, woselbst die Wiege der Astronomie zu suchen ist, in der That der Fall ist. In unseren höheren Breiten, wo die Gestirne durchaus nicht gerade, sondern unter sehr schiefen Winkeln vom Horizont aufsteigen, würde jene Benennung kaum entstanden sein.

Drehung des Himmels.

Der Anblick des Himmels zeigt, dass die Himmelskugel sich täglich von Ost nach West um ihre Achse gleichförmig dreht. Thatsächlich dreht sich allerdings nicht der Himmel, sondern umgekehrt die Erde von West nach Ost um ihre mit der Himmelsachse identische Achse; da es sich aber für unsere Zwecke nur um die relative Bewegung der Himmelskörper gegen den Beobachtungspunkt handelt, behalten wir die dem Augenschein entsprechende Vorstellung der Himmelsdrehung von Ost nach West bei, wie in Fig. 2. angedeutet ist.

Fig. 2. Drehung des Himmels.



Diese gleichförmige Drehung der Erde um ihre Achse oder die entsprechende Drehung des Himmels ist das Grundmaass aller Zeitzählung; die zu einer vollen Umdrehung erforderliche Zeit heisst ein Sterntag (verschieden von dem gewöhnlichen, später zu betrachtenden Sonnentag).

Die Drehung des Himmels wird dem Beobachter wahrnehmbar durch die Verschiebung der Gestirne gegen die feste Erde, insbesondere durch die Bewegung gegen den Meridian, welchen man sich als verticale Wand materiell aufgerichtet oder als verticale Kippungsebene eines Theodolits zur Beobachtung eingerichtet denken kann.

Wenn ein Stern oder irgend ein Punkt des Himmels durch den Meridian eines Ortes geht, so sagt man, der Stern culminirt, oder der Durchgangsmoment heisst Culmination. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen desselben Himmelspunktes ist der bereits erwähnte Sterntag.

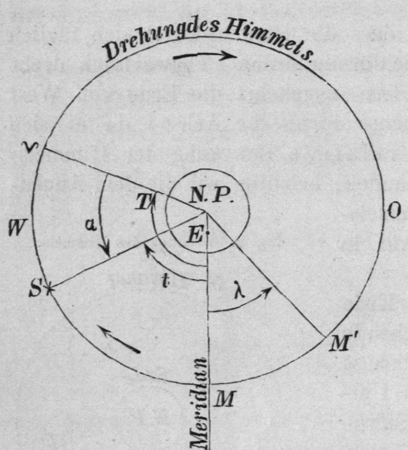
In der Culmination eines Sternes fällt sein Declinationskreis mit dem Meridian zusammen, oder der Winkel beider ist = Null; der Winkel, welchen in irgend einem anderen Momente der Declinationskreis des Sternes mit dem Ortsmeridian von Ost nach West bildet, heisst der Stundenwinkel des Sternes für den betreffenden Ort.

Wenn man die soeben gegebenen Erklärungen von Sternzeit und Stundenwinkel mit der vorher gegebenen Erklärung der Rectascension verbindet, wie in Fig. 3. geschehen ist, so findet man die wichtige Grundgleichung:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \text{Sternzeit} & = & \text{Stundenwinkel} & + & \text{Rectascension.} \\ T & = & t & + & \alpha \end{array}\right\} \quad (1)$$

Es ist nämlich in Fig. 3. (S. 8) NP der Nordpol der Erde, E ein Erdpunkt und EM der Meridian dieses Punktes, Υ der Widderpunkt, von dessen Declinationskreis $N.P.♈$ aus die Rectascensionen α von West nach Ost gezählt werden, $N.P.S$ ist der Declinationskreis eines Sternes S. Die Grundgleichung (1) gestattet besondere Anwendungen:

Fig. 3.
Sternzeit T, Stundenwinkel t, Rectascension α.



1) $\alpha = 0$ gibt $T = t$, d. h. die Sternzeit ist gleich dem Stundenwinkel des Widderpunktes.

2) $t = 0$ gibt $T = \alpha$, d. h. wenn ein Stern culminirt, so ist die Sternzeit gleich der Rectascension dieses Sternes.

In Fig. 3. ist ausser dem Meridian M noch ein zweiter Meridian M' gezeichnet, für einen um die Länge λ weiter östlich gelegenen Ort; wenn für diesen die Sternzeit und der Stundenwinkel T' und t' sind, so bestehen die Gleichungen

$$T' = T + \lambda, \quad t' = t + \lambda \qquad (2)$$

d. h. der Längenunterschied λ zweier Orte ist gleich der Differenz ihrer Sternzeiten, oder allgemeiner gleich der Differenz der Stundenwinkel irgend eines Himmelspunktes.

Man zählt die Zeiten und Längen zum Theil nach verschiedenem Maass, nämlich eine volle Umdrehung entweder = 24 Stunden = 144 Minuten = 8640 Secunden oder = $360^0 = 2160' = 129\,600''$, $1^h = 15^0$, $1^m = 15'$, $1^s = 15''$ etc.

Zur gegenseitigen Verwandlung dieser beiden Maasse dienen die Tafeln auf Seite [2] und [3] im Anhang, deren Anwendung ein Beispiel zeigen mag:

Der Längenunterschied zwischen Greenwich und Berlin $\lambda = 0^h\,53^m\,34{,}9^s$ soll in Bogenmaass verwandelt werden.

Seite [3] gibt	$0^h\,52^m$	=	13^0
	$1^m\,34^s$	=	$23'\,30''$
	$0{,}9^s$	=	$13{,}5''$
	$0^h\,53^m\,34{,}9^s$	=	$13^0\,23'\,43{,}5''$

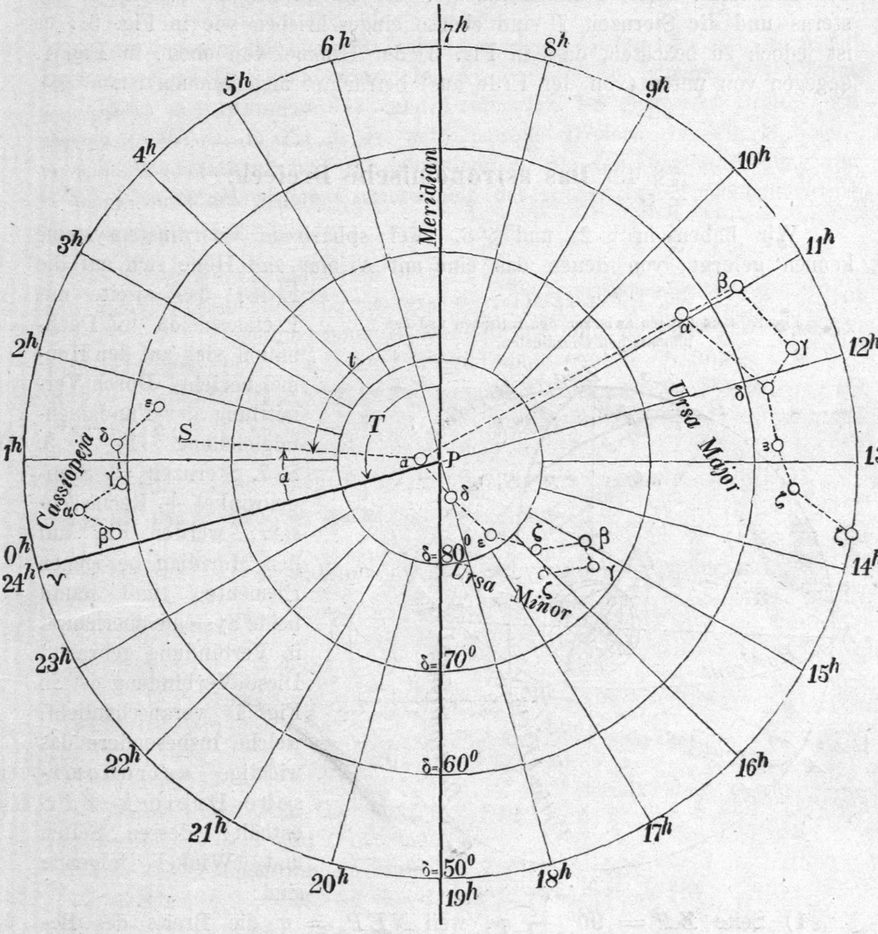
Rückverwandlung:

Seite [2] gibt	13^0	=	$0^h\,52^m$
	$23'$	=	$1^m\,32^s$
	$43''$	=	$2{,}87^s$
	$0{,}5''$	=	$0{,}03^s$
	$13^0\,23'\,43{,}5''$	=	$0^h\,53^m\,34{,}90^s$

Sternkarten, Sternbilder und Sternbezeichnungen. Durch seine Rectascension α und Declination δ ist jeder Stern (für eine gewisse Zeit) mathematisch bestimmt. Durch graphische Darstellung dieser Coordinaten entstehen die Sternkarten, auf welchen sich die Sterne ebenso gruppirt zeigen, wie am wirklichen Himmel. Die Fixsterne werden bekanntlich von Alters her in Gruppen — sog. „Sternbilder“ — eingetheilt, und innerhalb der Gruppen mit Buchstaben und Nummern (bei den grösseren Sternen mit α β γ . . . anfangend) bezeichnet.

Die astronomischen Jahrbücher (vgl. § 6.) geben von einer grossen Zahl von Sternen die Coordinaten von Jahr zu Jahr, z. B. gibt das Berliner Jahrbuch für 1885 auf S. 172 u. ff. die Oerter für 622 Fixsterne und der Nautical Almanac für 1885 auf S. 289 u. ff. für 202 Sterne.

Fig. 4. Orientirung einer Sternkarte.



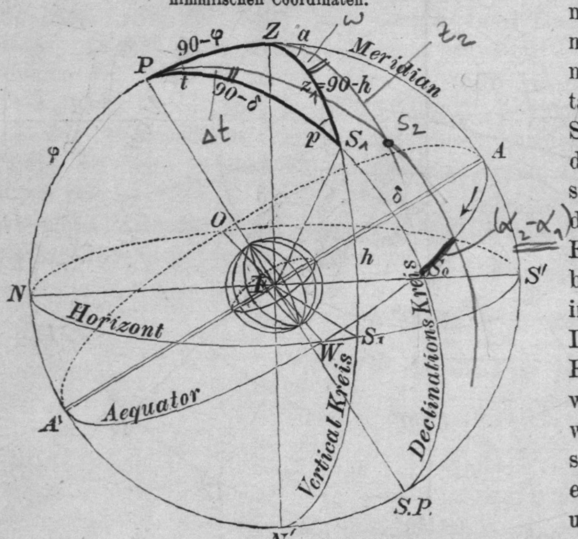
Trägt man diese Rectascensionen und Declinationen in irgend welcher, z. B. stereographischer Projection, auf, und füllt die Bilder etwa nach Argelander's Uranometria mit den noch fehlenden Sternen aus, so erhält man eine richtige Sternkarte für die fragliche Zeit. (Verfasser hat so eine Sternkarte grossen Maassstabes hergestellt.)

Von gedruckten Sternkarten ist zu empfehlen: „Eckhardt's Sternkarte, 6. Auflage, Giessen, Verlag von Emil Roth“, 48 cm Durchmesser mit Horizont zum Orientiren. Nach dieser Karte ist unsere Fig. 4. (S. 9) mit Darstellung der drei nördlichen Hauptsternbilder des Grossen und Kleinen Bären (Ursa Major und Ursa Minor) und der Cassiopeja, gezeichnet und zwar in solcher Orientirung, wie sie im Frühling Abends dem Himmelsanblick entspricht. PS ist der Declinationskreis des Polarsternes, α Ursae Minoris, welcher zu der angegebenen Zeit links vom Pol, etwas höher als der Pol steht. Der Stundenwinkel t, die Rectascension α*) des Polarsterns und die Sternzeit T sind ebenso eingeschrieben wie in Fig. 3., es ist jedoch zu beachten, dass in Fig. 3. der Himmel von oben, in Fig. 4. dagegen von unten (von der Erde aus) betrachtet angenommen ist.

§ 4. **Das astronomische Dreieck.**

Wir haben in § 2. und § 3. zwei sphärische Coordinatensysteme kennen gelernt, von denen das eine mit Azimut und Höhe sich auf die Erde, das zweite mit Rectascension und Declination sich auf den Himmel bezieht. Durch Vermittlung der Fundamentalgleichung (1) § 3. S. 7, Sternzeit = Stundenwinkel + Rectascension, werden die auf den Meridian bezogenen Elemente, und damit beide Systeme überhaupt, in Verbindung gebracht. Diese Verbindung ist in Fig. 1. veranschaulicht, welche insbesondere das wichtige astronomische Dreieck ZPS enthält, dessen Seiten und Winkel folgende sind:

Fig. 1. Beziehungen zwischen den irdischen und den himmlischen Coordinaten.



1) Seite $ZP = 90^0 - \varphi$, weil $NEP = \varphi$ die Breite des Beobachtungspunktes ist.

---

*) In Fig. 4 sind zweierlei Zeichen α angewendet, erstens das Zeichen für den Stern, α Ursae Minoris, zweitens die Rectascension α.

2) Seite $PS = 90^0 - \delta$, weil SS_0 die Declination δ des Sternes S ist.

3) Seite $ZS = z = 90^0 - h$ = Zenitdistanz oder Complement der Höhe, denn es ist $S_1ES = h$, die früher difinirte Höhe.

4) Winkel ZPS = Stundenwinkel t, als Winkel zwischen dem Meridian und dem Declinationskreis des Sternes.

5) Winkel $PZS = 180^0 - a$, wo a das Azimut oder der Winkel zwischen dem Meridian und dem Verticalkreis ist, hiebei ist das Azimut a von Süden über Westen gezählt.

6) Winkel $PSZ = p$ der sogenannte parallaktische Winkel, welcher bis jetzt noch nicht betrachtet worden ist und auch selten gebraucht wird.

Von den verschiedenen Aufgaben, zu deren Lösung das astronomische Dreieck gebraucht wird, behandeln wir hier die Bestimmung von Azimut und Höhe aus Stundenwinkel und Declination bei gegebener Breite. Zu diesem Zweck ist in Fig. 3. das astronomische Dreieck von Fig. 1. besonders herausgezeichnet, und zur Anbindung an die der Formelsammlung von S. 2—3 zu entnehmenden Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ist Fig. 2. daneben gestellt.

Fig. 2. Hülfsdreieck.

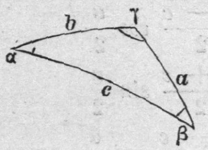
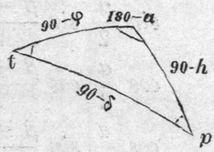


Fig. 3. Astronomisches Dreieck.



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \text{ gibt}$$

$$\cos(90^0 - h) = \cos(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - \delta) + \sin(90^0 - \varphi)\sin(90^0 - \delta)\cos t$$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \qquad (1)$$

$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{cotg}\gamma \text{ gibt}$$

$$\operatorname{tang}\delta\cos\varphi = \sin\varphi\cos t - \sin t \operatorname{cotg} a$$

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} t \sin\varphi - \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin t}\cos\varphi \qquad (2)$$

Durch diese zwei Gleichungen (1) und (2) werden h und a einzeln aus gegebenen φ, δ und t berechnet.

Zu (2) nehmen wir ein einfaches Zahlenbeispiel:

Gegeben $\varphi = 55^0$, $\delta = +20^0$, $t = 1^h = 15^0$

$\log \operatorname{cotg} t$	0.57 195	*Erg.* $\log \sin t$	0.58 700
$\log \sin\varphi$	9.91 336	$\log \cos\varphi$	9.75 859
$\log \operatorname{cotg} t \sin\varphi$	0.48 531	$\log \operatorname{tang}\delta$	9.56 107
			9.90 666

$$
\begin{aligned}
cotg\ t\ sin\ \varphi &= 3{,}0571 \\
\frac{tang\ \delta}{sin\ t}\ cos\ \varphi &= 0{,}8066 \\
cotg\ a &= 2{,}2505 \qquad log\ cotg\ a\ 0{,}35\,228 \\
a &= 23^0\ 57' \qquad a = 23^0\ 57'
\end{aligned}
$$

Ebenso kann man auch direct nach der Höhenformel (1) rechnen.

Die Formeln (1) und (2), und ähnliche, werden zuweilen durch Einführung von Hülfswinkeln deswegen umgeformt, weil die Ausrechnung den wiederholten Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt verlangt. Wir finden jedoch diesen Umstand unwesentlich. Ueberdies kann Jeder, welcher in diesem Uebergang ein Hinderniss findet, zur Vermeidung desselben sich der Additions- und Subtractionslogarithmen bedienen.

Dagegen ist es in dem Falle, dass nicht nur h oder a, sondern diese beiden Grössen zusammen verlangt werden, angezeigt, statt der Formeln (1) und (2) die Gauss'schen Formeln von S. 3 anzuwenden, dieselben lauten mit Anwendung auf Fig. 2.:

$$
\begin{aligned}
sin\ \frac{a}{2}\ cos\ \frac{\beta - \gamma}{2} &= sin\ \frac{b + c}{2}\ sin\ \frac{\alpha}{2} \\
sin\ \frac{a}{2}\ sin\ \frac{\beta - \gamma}{2} &= sin\ \frac{b - c}{2}\ cos\ \frac{\alpha}{2} \\
cos\ \frac{a}{2}\ cos\ \frac{\beta + \gamma}{2} &= cos\ \frac{b + c}{2}\ sin\ \frac{\alpha}{2} \\
cos\ \frac{a}{2}\ sin\ \frac{\beta + \gamma}{2} &= cos\ \frac{b - c}{2}\ cos\ \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Zum Uebergang auf Fig. 3. hat man:

$$
\begin{aligned}
&\beta = p,\ \gamma = 180^0 - a && b = 90^0 - \varphi,\ c = 90^0 - \delta \\
&\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{a - p}{2} && \frac{b + c}{2} = 90^0 - \frac{\varphi + \delta}{2} \\
&\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{a + p}{2} - 90^0 && \frac{b - c}{2} = -\frac{\varphi - \delta}{2} \\
&\frac{a}{2} = \frac{z}{2} && \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin\ \frac{z}{2}\ sin\ \frac{a + p}{2} &= cos\ \frac{\varphi + \delta}{2}\ sin\ \frac{t}{2} \\
sin\ \frac{z}{2}\ cos\ \frac{a + p}{2} &= sin\ \frac{\varphi - \delta}{2}\ cos\ \frac{t}{2} \\
cos\ \frac{z}{2}\ sin\ \frac{a - p}{2} &= sin\ \frac{\varphi + \delta}{2}\ sin\ \frac{t}{2} \\
cos\ \frac{z}{2}\ cos\ \frac{a - p}{2} &= cos\ \frac{\varphi - \delta}{2}\ cos\ \frac{t}{2}
\end{aligned}
$$

Indem man nun bei der Division die Zähler und Nenner $Z\ N\ Z'\ N'$ besonders heraushebt, hat man:

$$\left.\begin{aligned}
tang\,\frac{a+p}{2} &= \frac{\cos\dfrac{\varphi+\delta}{2}\,\sin\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{\varphi-\delta}{2}\,\cos\dfrac{t}{2}} = \frac{Z}{N}\\
\sin\frac{z}{2} &= \frac{Z}{\sin\dfrac{a+p}{2}} = \frac{N}{\cos\dfrac{a+p}{2}}\\
tang\,\frac{a-p}{2} &= \frac{\sin\dfrac{\varphi+\delta}{2}\,\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{\varphi-\delta}{2}\,\cos\dfrac{t}{2}} = \frac{Z'}{N'}\\
\cos\frac{z}{2} &= \frac{Z'}{\sin\dfrac{a-p}{2}} = \frac{N'}{\cos\dfrac{a-p}{2}}
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Beispiel $\varphi = 55^0$, $\delta = +\,20^0$, $t = 1^h = 15^0$.

$$\frac{t}{2} = 7^0\ 30' \qquad \varphi+\delta = 75^0\ 0' \qquad \varphi-\delta = 35^0\ 0' \qquad \frac{\varphi+\delta}{2} = 37^0\ 30' \qquad \frac{\varphi-\delta}{2} = 17^0\ 30'$$

$$\begin{array}{lll}
\log\cos\dfrac{\varphi+\delta}{2} & 9.89\,947 & \\
\log\sin\dfrac{t}{2} & 9.11\,570 & \Big\}\ 9.01\,517 = \log Z \\
\log\sin\dfrac{\varphi+\delta}{2} & 9.78\,445 & \Big\}\ 8.90\,015 = \log Z' \\
 & & \\
\log\cos\dfrac{\varphi-\delta}{2} & 9.97\,942 & \\
\log\cos\dfrac{t}{2} & 9.99\,627 & \Big\}\ 9.97\,569 = \log N' \\
\log\sin\dfrac{\varphi-\delta}{2} & 9.47\,814 & \Big\}\ 9.47\,441 = \log N
\end{array}$$

$\log Z$	9.01 517	$\log Z'$	8.90 015	$\dfrac{a+p}{2} = 19^0\ 9{,}3'$	
Erg. log sin od. *cos*	0.02 473	*Erg. log sin* od. *cos*	0.00 153	$\dfrac{a-p}{2} = 4^0\ 48{,}2'$	
$\log N$	9.47 441	$\log N'$	9.97 569		
$\log tang\,\dfrac{a+p}{2}$	9.54 076	$\log tang\,\dfrac{a-p}{2}$	8.92 446	$a = 23^0\ 57{,}5'$	
$\log\sin\dfrac{z}{2}$	9.49 914	$\log\cos\dfrac{z}{2}$	9.97 722	$p = 14^0\ 21{,}1'$	

$$\underbrace{\frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8' \qquad\qquad \frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8'}$$

$$z = 36^0\ 47{,}6'$$
$$h = 53^0\ 12{,}4'$$

Die Auswahl, ob *Erg. log sin* oder *cos* zu nehmen ist, dann die Entscheidung über den Quadranten nach Maassgabe der Vorzeichen von Zähler und Nenner, wird genau ebenso wie bei den elementaren Formeln der Polygonometrie getroffen (vgl. J. Handb. d. Verm. I S. 281).

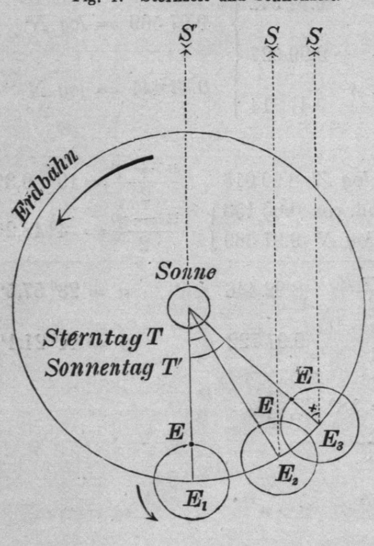
Nach diesen Formeln (1) (2) (3) ist die Tabelle der Azimute und Höhen für die Breiten 45^0 50^0 55^0 auf S. [15] des Anhangs berechnet worden, unter Annahme runder Werthe von δ und t. Auf die praktische Bedeutung dieser Resultate werden wir später zurückkommen.

§ 5. Sonnenzeit, Zeitgleichung.

Nach § 3. S. 8 kann der Stundenwinkel t eines beliebigen Himmelspunktes als Zeitmaass dienen, denn nach der Grundgleichung $T = t + \alpha$ sind T und t nur um ein constantes Stück α verschieden; vorausgesetzt ist aber hiebei, dass der fragliche Punkt S am Himmel fest, oder seine Rectascension α constant sei.

Aus diesem Grunde eignet sich die Sonne, welche eine eigene Bewegung am Himmel hat, nicht unmittelbar zur Zeitbestimmung, aus zwei Gründen: erstens ist ihre Rectascension α veränderlich, und zweitens ist diese Veränderung nicht gleichförmig, und zwar rührt diese Ungleichförmigkeit hauptsächlich davon her, dass die Bahn der Erde um die Sonne nicht ein Kreis, sondern eine Ellipse ist, und dass die Erdachse nicht rechtwinklig, sondern schief auf der Erdbahn steht. Man nimmt nun aber wegen der durch die Sonnenbewegung geregelten Tageszeiten diese Bewegung dennoch als Zeitmaass, indem man die Veränderung in Rechnung bringt.

Fig. 1. **Sternzeit und Sonnenzeit.**



Man versteht zunächst unter Sonnenzeit den Stundenwinkel der Sonne, und unter Sonnentag die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen der Sonne. Da aber aus den angegebenen Gründen die verschiedenen Sonnentage nicht gleich sind, also ein Sonnentag schlechtweg, ohne Datum, gar kein bestimmtes Zeitmaass ist, so hat man das Mittel aller Sonnentage eines Jahres als mittleren Sonnentag in die Zeitrechnung eingeführt, und dieser mittlere Sonnentag hat ein sehr einfaches Verhältniss zu dem Sterntag, welcher als erstes Zeitmaass in § 3. S. 7 erwähnt worden ist.

Um dieses Verhältniss zwischen mittlerem Sonnentag und Sterntag zu finden, betrachten wir in Fig. 1. die Bewegung der Erde um die Sonne unter der Voraussetzung kreisförmiger Erdbahn, und rechtwinkliger Stellung der Erdachse auf der Erdbahn.

E_1 E_2 E_3 sind drei aufeinanderfolgende Lagen des Erdmittelpunktes auf seiner Bahn, wobei E jedesmal denselben Punkt der Erdoberfläche, also $E_1 E$, $E_2 E$, $E_3 E$ jedesmal denselben Meridian vorstellt.

Zwischen E_1 und E_2 sei ein Sterntag T verflossen, d. h. die Erde hat sich einmal vollständig um ihre Achse gedreht, so dass ein unendlich ferner Stern S, welcher in $E_1 E$ culminirt hat, auch in $E_2 E$ wieder culminirt. Nehmen wir nun an, in E_1 habe der Stern S gleichzeitig mit der Sonne culminirt, so wird dieses in E_2 nicht wieder der Fall sein, weil die Sonne nicht ebenfalls unendlich entfernt ist; vielmehr muss die Erde von E_2 noch eine Strecke nach E_3 laufen, bis auch die Sonne zur Culmination kommt, und der Sonnentag T' ist in demselben Verhältniss grösser als der Sterntag T, als die von E_1 bis E_3 abgelaufene Erdrotation eine volle Umdrehung überschreitet.

Also jedenfalls ist der Sonnentag T' grösser als der Sterntag T, und die Differenz sei:

$$T' - T = x \tag{1}$$

Das (siderische) Jahr J habe n Sterntage und n' Sonnentage, d. h.

$$J = nT = n'T' \tag{2}$$

Da sowohl die Drehung der Erde um ihre Achse als auch die Bewegung um die Sonne gleichförmig angenommen sind, besteht die Proportion

$$\frac{x}{T'} = \frac{T'}{J} \tag{3}$$

Diese 3 Gleichungen (1) (2) (3) sagen alles aus, was wir über die fraglichen Zeitverhältnisse wissen, und man berechnet nun aus (1) und (3)

$$T' - T = \frac{T\,T'}{J}$$

Dann wegen (2):

$$T' - T = \frac{T'}{n} = \frac{T}{n'} \tag{4}$$

Um aus diesen in (4) enthaltenen 2 Gleichungen T und T' zu eliminiren, bildet man:

$$T'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = T \text{ und } T\left(1 + \frac{1}{n'}\right) = T'$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

$$n = n' + 1 \tag{5}$$

d. h. die Anzahl n der Sterntage eines Jahres ist um 1 grösser als die Anzahl n' der mittleren Sonnentage.

Die Zahlenwerthe sind (nach den Tafeln des Nautical Almanac):

$$n' = 365{,}2422 \qquad n = 366{,}2422$$

$$T' - T = \frac{T}{n'} = \frac{24 \times 60 \times 60}{365{,}2422} = 236{,}5554^s = 3^m\ 56{,}5554^s$$

Sternzeit

$$T' - T = \frac{T'}{n} = \frac{24 \times 60 \times 60}{366{,}2422} = 235{,}9094^s = 3^m\ 55{,}9094^s$$
mittlere Sonnenzeit.

Zur gegenseitigen Verwandlung von mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit dienen unsere Hülfstafeln auf Seite [4] des Anhangs, wobei die Verwandlung in Form von Zuschlag oder Abzug ausgeführt wird. Hienach hat man z. B.

$7^h\ 19^m\ 0^s$ Sonnenzeit $= 7^h\ 19^m\ 0^s + 1^m\ 12{,}0^s + 0{,}2^s = 7^h\ 20^m\ 12{,}2^s$ Sternzeit

und umgekehrt

$7^h\ 20^m\ 12{,}2^s$ Sternzeit $= 7^h\ 20^m\ 12{,}2^s - 1^m\ 11{,}8^s - 0{,}3^s = 7^h\ 19^m\ 0{,}1^s$ Sonnenzeit.

Der Widerspruch $0{,}1^s$ in der Rückverwandlung rührt von Abrundungen her. Unsere Tafel Seite [4] soll in den Fällen gebraucht werden, in welchen 1^s die letzte Beobachtungseinheit ist und $0{,}1^s$ nur als letzte Rechnungsdecimale dient. Für genauere Zwecke hat man zahlreiche Tafeln, z. B. jeder Jahrgang des Nautical Almanac (vgl. § 6.) gibt etwa auf Seite 470—480 eine Reductionstafel für Sonnenzeit und Sternzeit auf $0{,}0001^s$ genau, ähnlich das Nautische Jahrbuch z. B. 1885 S. 202—203 auf $0{,}01^s$ genau und das Berliner astr. Jahrbuch für 1885 S. 366—367 in anderer Anordnung.

Bürgerliche und astronomische Zeitzählung.

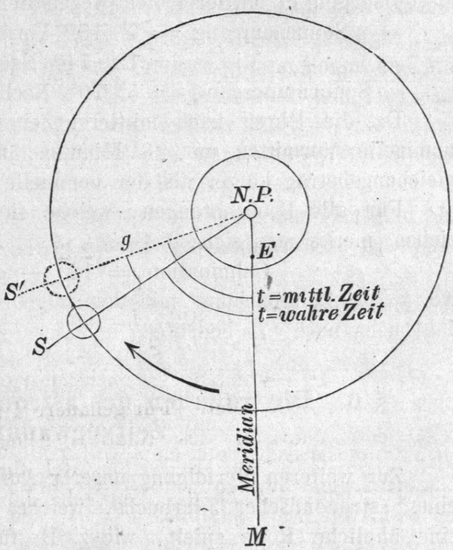
Der bürgerliche Tag beginnt um Mitternacht und endigt in der folgenden Mitternacht. Die Zeit wird zweimal von 0^h bis 12^h gezählt. Die Zeit von Mitternacht bis Mittag heisst Vormittag (V), die Zeit von Mittag bis Mitternacht heisst Nachmittag (N). Der astronomische Tag beginnt um Mittag und endigt im folgenden Mittag. Die Zeit wird einmal von 0^h bis 24^h gezählt. Das Datum des astronomischen Tages entspricht dem Nachmittag des auf ihn fallenden bürgerlichen Tages. Z. B. ist 1885 März 1. $4^h\ 27^m\ 16^s$ N. bürgerliche Zeit $=$ 1885 März 1. $4^h\ 27^m\ 16^s$ astronomische Zeit; dagegen 1885 März 1. $7^h\ 16^m\ 38^s$ V. bürgerliche Zeit $=$ 1885 Februar 28. $19^h\ 16^m\ 38^s$ astronomische Zeit.

Im Folgenden ist nach Umständen die eine oder andere Zeitzählung gewählt.

Die Originalbeobachtungen schreiben wir immer in bürgerlicher Zeit, zumal auch die astronomischen Uhren keine Bezifferung über 12^h hinaus haben.

Zeitgleichung. Die soeben behandelte mittlere Sonnenzeit ist ein willkürlich eingeführtes, fingirtes, aber gleichförmiges Zeitmaass; es entspricht der gleichförmigen, von der gesammten Himmelsbewegung verschiedenen Bewegung einer fingirten Sonne S' im Himmelsäquator (Fig. 2.), welche jedoch von der wahren Sonne S im Sinne des Stundenwinkels sich nicht weit entfernt. Indem wir nun von der Betrachtung der Bewegung der Erde um die Sonne, welche in Fig. 1. behandelt wurde, wieder zu der scheinbaren Bewegung der Sonne um die Erde zurückkehren, haben wir in Fig. 2.:

Fig. 2. Zeitgleichung g.



t' = mittlere Sonnenzeit = Stundenwinkel der fingirten Sonne.

t = wahre Sonnenzeit = Stundenwinkel der wahren Sonne.

Die Differenz $t' - t$ heisst die Zeitgleichung g, welche algebraisch aufgefasst, bald positiv, bald negativ ist, und in Bezug auf das Vorzeichen (nach dem Berliner astr. Jahrbuch) so angenommen wird:

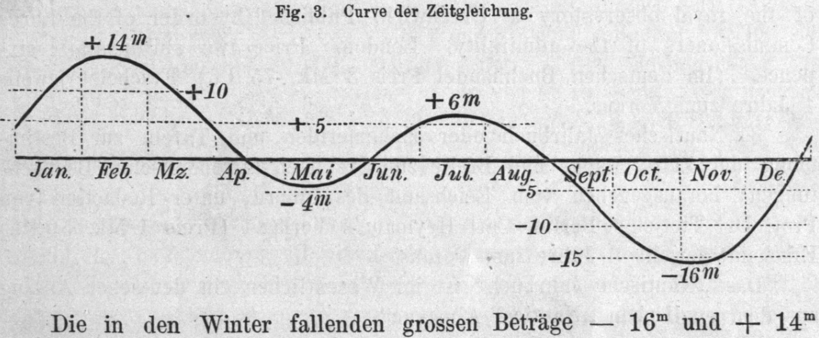
$$\text{Zeitgleichung} = \text{Mittlere Zeit} - \text{Wahre Zeit}$$

$$g = t' - t \tag{6}$$

$$\text{oder } t' = t + g \tag{7}$$

Hiernach erscheint die Zeitgleichung als Correction der wahren Zeit, um daraus die mittlere Zeit abzuleiten. Die extremen Werthe der Zeitgleichung sind $+ 14^m$ im Februar und $- 16^m$ im October. Den weiteren Verlauf zeigt die in Fig. 3. gegebene Zeitgleichungs-Curve, welche auf 1 Minute genau für die folgenden Jahre constant bleibt (vergl. S. [14]).

Fig. 3. Curve der Zeitgleichung.



Die in den Winter fallenden grossen Beträge $- 16^m$ und $+ 14^m$ der Zeitgleichung machen sich in der bürgerlichen Zeitrechnung wohl bemerklich, z. B. am 15. Februar ist in Berlin die halbe Tageslänge $= 4^h\ 56^m$, es ist also:

Sonnenaufgang $= 7^h\ 4^m$ Vormittags Wahre Zeit,
Mittag $= 12^h\ 0^m$ Wahre Zeit,
Sonnenuntergang $= 4^h\ 56^m$ Nachmittags Wahre Zeit.

Dagegen in mittlerer Zeit wegen der Zeitgleichung $+ 14^m$:

Sonnenaufgang $= 7^h\ 18^m$ Vormittags Mittlere Zeit,
Mittag $= 12^h\ 14^m$ Nachmittags Mittlere Zeit,
Sonnenuntergang $= 5^h\ 10^m$ Nachmittags Mittlere Zeit.

Da die Uhren nach mittlerer Zeit gehen, ist am 15. Februar der nominelle Vormittag um 28 Minuten, nämlich um den doppelten Zeitgleichungsbetrag kürzer als der nominelle Nachmittag.

Für alle Beobachtungen, welche sich auf die Sonnenculmination beziehen, merke man sich:

$$\text{Culmination} = 12^h + g,\ \text{mittlere Zeit,} \tag{8}$$

wo g die Zeitgleichung mit dem algebraischen Vorzeichen des Berliner Jahrbuchs nach (7) bedeutet.

§ 6. Die Angaben des astronomischen Jahrbuchs. Zeitverwandlung.

Zur weiteren Verfolgung unserer Aufgaben bedürfen wir der Angaben eines astronomischen Jahrbuchs, welches für den praktischen Astronomen eine ähnliche Rolle spielt, wie z. B. für den praktischen Trigonometer eine logarithmisch-trigonometrische Tafel, indem deren Zahlenangaben schlechthin als gegeben betrachtet werden, ohne dass der Praktiker im Stande wäre, sie sich selbst zu verschaffen.

Die für uns wichtigsten, zum Theil schon auf S. 2 und S. 16 erwähnten, Werke dieser Art sind:

1) Berliner Astronomisches Jahrbuch, herausgegeben von der königlichen Sternwarte zu Berlin, unter Redaction von W. Förster und F. Tietjen. Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung, Harrwitz und Gossmann (Preis 12 Mark). Erscheint jeweils 2—3 Jahre zum Voraus.

2) The Nautical Almanac and astronomical ephemeris for the meridian of the royal observatory at Greenwich. Published by order of the Lords Commissioners of the admirality. London. Price two shillings and sixpence. (Im deutschen Buchhandel Preis 3 Mk. 75 Pf.) Erscheint jeweils 4 Jahre zum Voraus.

3) Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen, herausgegeben vom Reichsamt des Innern, unter Redaction von Prof. Dr. Tietjen. Berlin, Carl Heymann's Verlag. (Preis 1 Mk. 50 Pf.) Erscheint jeweils 3 Jahre zum Voraus.

Das „Nautische Jahrbuch“ ist im Wesentlichen ein deutscher Auszug aus dem englischen „Nautical Almanac“.

Wir nennen noch die „Connaissance des temps“ und die „American Ephemeris“, welche jedoch für uns weniger Interesse haben.

Jeder, der sich praktisch mit astronomischen Messungen und Berechnungen beschäftigen will, muss ein astronomisches Jahrbuch unbedingt haben, wozu dem Anfänger das sehr billige Nautische Jahrbuch und für weiteren Gebrauch der reichhaltigere Nautical Almanac zu empfehlen ist. Das Berliner Astronomische Jahrbuch dient mehr theoretischen Zwecken, enthält aber auch alles für unsere Zwecke wesentlich Erforderliche, dazu für populären Gebrauch die Aufgänge und Untergänge von Sonne und Mond für Berlin (B. J. 1885 S. 74—79). Die Rectascension und Declination der Sonne, und die Zeitgleichung gibt das Berliner Jahrbuch nur für den wahren Mittag, der Nautical Almanac für den wahren und für den mittleren Mittag.

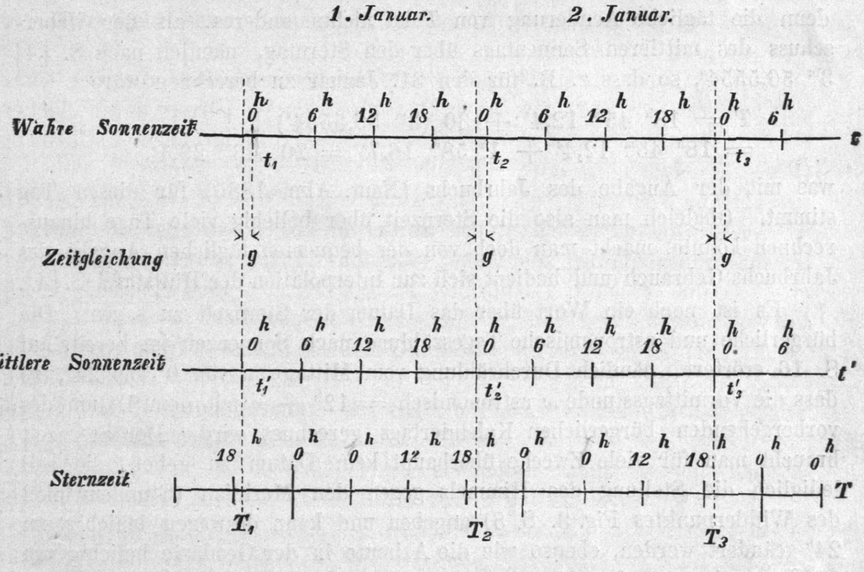
Die Angaben der Jahrbücher beziehen sich auf den Meridian ihrer Sternwarte (Berlin, Greenwich etc.); für jeden anderen Ort ist Zeitverwandlung erforderlich.

Wir haben dreierlei Zeiten kennen gelernt: Sternzeit, mittlere Sonnenzeit, wahre Sonnenzeit, welche ausserdem noch für jeden Meridian wieder verschieden sind. Die Aufgaben der Zeitverwandlung sind zweierlei:

1) Verwandlung von Zeitintervallen,
2) Verwandlung von Zeitpunkten.

Die Verwandlung von Zeitintervallen kann nur Sternzeit und mittlere Sonnenzeit betreffen, weil wahre Sonnenzeit ohne Angabe eines Zeitpunktes gar kein bestimmtes Zeitmaass ist. Die Verwandlung von Intervallen mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit ist bereits auf S. 8 mit den Hülfstafeln S. [4] erledigt. Wir gehen daher zur Verwandlung der Zeitpunkte über.

Fig. 1. Gegenseitige Verwandlung der Zeiten.



In Fig. 1. sind die drei Zeiten durch geradlinige Theilungen veranschaulicht. Die Theilungen für mittlere Sonnenzeit und für Sternzeit sind gleichförmig, die Theilung für wahre Sonnenzeit ist ungleichförmig. Die Aufgabe der Zeitpunktverwandlung ist in dieser geometrischen Darstellung ausgedrückt durch die Projicirung irgend eines Punktes der einen Theilung auf eine andere Theilung.

Der Fig. 1. entsprechen ungefähr folgende Angaben von S. 3 des Nautical Almanac für 1885, wobei der Zeitgleichung das Vorzeichen nach der Berliner Annahme (mittlere Zeit — wahre Zeit) gegeben ist.

	Mittl. Greenw. Zeit t'	Zeitgleichung g	Sternzeit T
1. Januar	0^h	$+ 4^m\ 0,2^s$	$18^h\ 45^m\ 12,4^s$
2. „	0^h	$+ 4^m\ 28,2^s$	$18^h\ 49^m\ 8,9^s$
3. „	0^h	$+ 4^m\ 55,7^s$	$18^h\ 53^m\ 5,5^s$

Durch Proportional-Interpolation kann man hiernach für jeden beliebigen Werth t' der mittleren Greenw. Zeit die zugehörige Zeitgleichung und damit die wahre Sonnenzeit, sowie die Sternzeit finden. Z. B. am 1. Januar 12 Uhr (Nachts) mittlere Zeit, hat man $g = + 4^m\ 14,2^m$, also wahre Zeit $t = 12^h\ 0^m\ 0^s - 4^m\ 14,2^s - 11^h\ 55^m\ 45,8^s$ und Sternzeit $T = 18^h\ 47^m\ 10,6^s$.

Zur Verwandlung zwischen mittlerer und wahrer Sonnenzeit ist die *tägliche* Angabe des Jahrbuchs erforderlich, weil die Differenz g sich nicht gleichförmig ändert, so dass überhaupt die Proportional-Interpolation nicht streng, sondern nur genähert richtig ist; dagegen zur fortlaufenden Beziehung zwischen mittlerer Sonnenzeit t' und Sternzeit T würde streng genommen *eine* Reduction, etwa am Jahresanfang, für alle Zeiten genügen, denn die tägliche Aenderung von T ist nichts anderes, als der Ueberschuss des mittleren Sonnentags über den Sterntag, nämlich nach S. [4] $3^m\ 56,5554^s$, so dass z. B. für den 31. Januar zu berechnen wäre

$$T = 18^h\ 45^m\ 12,4^s + 30\ (3^m\ 56,5554^s)$$
$$= 18^h\ 45^m\ 12,4^s + 1^h\ 58^m\ 16,7^s = 20^h\ 43^m\ 29,1^s,$$

was mit der Angabe des Jahrbuchs (Naut. Alm. 1885) für diesen Tag stimmt. Obgleich man also die Sternzeit über beliebig viele Tage hinausrechnen könnte, macht man doch von der bequemen täglichen Angabe des Jahrbuchs Gebrauch und bedient sich zur Interpolation der Hülfstafel S. [4].

Es ist noch ein Wort über das Datum der Sternzeit zu sagen. Die bürgerliche und astronomische Tageszählung nach Sonnenzeit ist bereits auf S. 16 erörtert, nämlich Durchzählung vom Mittag an von 0^h bis 24^h, so dass die Vormittagsstunde x astronomisch $= 12^h + x$ mit dem Datum des vorhergehenden bürgerlichen Kalendertags gerechnet wird. Der Sternzeit braucht man für viele Zwecke überhaupt kein Datum zu geben, sie soll lediglich die Stellung des Himmels gegen den Meridian (Stundenwinkel des Widderpunktes Fig. 3. S. 8) angeben und kann deswegen beliebig um 24^h geändert werden, ebenso wie die Azimute in der Geodäsie beliebig um 360^0 geändert werden können. Dieses zeigt auch Fig. 1.; es ist z. B. hiernach am 1. Januar 18^h mittlere Sonnenzeit ungefähr $= 13^h$ Sternzeit, geht man aber nicht direct von der einen Scala auf die andere über, sondern am Nullpunkt der Sonnenzeit, so findet man (in runden Zahlen)

$$\begin{array}{lll}
0^h \text{ Sonnenzeitpunkt} & = & 19^h \text{ Sternzeitpunkt} \\
18^h \text{ Sonnenzeitintervall} & = & 18^h \text{ Sternzeitintervall (genähert)} \\
\hline
18^h \text{ Sonnenzeitpunkt} & = & 37^h \text{ Sternzeitpunkt} \\
\text{Abzug von} & & 24^h \\
\hline
\text{gibt} & & 13^h \text{ Sternzeitpunkt wie oben.}
\end{array} \qquad (1)$$

Das Vorstehende gilt zunächst nur für Greenwichzeiten oder allgemeiner für Zeiten der Orte im Meridian des Jahrbuchs; für andere Orte ist der Längenunterschied gegen den Meridian des benützten Jahrbuchs in Rechnung zu nehmen.

An einem Orte, welcher die Länge λ (östlich positiv, westlich negativ) gegen Greenwich hat, sei die mittlere Ortszeit t' gegeben, es soll die zugehörige Ortssternzeit S bestimmt werden. Die aus dem Jahrbuch zu entnehmende Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag sei für den betreffenden Tag $= T$, man hat also jetzt:

$$\text{Sternzeit im mittleren Greenw. Mittag} = T.$$

Die mittlere Ortszeit $t' = (t' - \lambda)$ mittlere Greenw. Zeit gibt vom Greenw. Mittag an einen Zeitverlauf von $t' - \lambda$ mittlere Sonnenzeit $= (t' - \lambda) + \varDelta\,(t' - \lambda)$ Sternzeit, wenn $\varDelta\,(t' - \lambda)$ der Zuschlag für Verwandlung mittlerer Sonnenzeit in Sternzeit nach der Tafel auf S. [4] ist, also:

$$\text{Greenwichsternzeit} = T + t' - \lambda + \varDelta\,(t' - \lambda).$$

Nun geht man wieder zurück auf Ortssternzeit durch Addition von λ, also

$$\text{Ortssternzeit } S = T + t' - \lambda + \varDelta\,(t' - \lambda) + \lambda.$$

$$S = T + t' + \varDelta\,t' - \varDelta\,\lambda. \qquad (2)$$

Wir fassen diese wichtige Rechnungsvorschrift zusammen mit Unterscheidung von $\pm\lambda$; es sei:

t' die mittlere Ortszeit vom Mittag an von 0^h bis 24^h gezählt (also Vormittags grösser als 12^h mit dem Datum des vorhergehenden bürgerlichen Tages).

T die Sternzeit im mittleren Greenw. Mittag, aus dem Jahrbuch zu entnehmen (Vormittags mit dem Datum des vorhergehenden bürgerlichen Tages).

$\pm\lambda$ der Längenunterschied des Ortes gegen Greenwich, östlich positiv, westlich negativ gezählt.

$\varDelta\,t'$ und $(\varDelta\,\lambda)$ die Zuschläge für Verwandlung mittlerer Sonnenzeit in Sternzeit, aus der ersten Tafel von S. [4] zu entnehmen.

Dann ist die Ortssternzeit:

$$S = T + (\varDelta\,\lambda) + t' + \varDelta\,t' \qquad (3)$$

$(\varDelta\,\lambda)$ ist $\begin{smallmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{smallmatrix}$, wenn der Ort $\begin{smallmatrix}\text{östlich}\\\text{westlich}\end{smallmatrix}$ von Greenwich liegt.

Beispiel. Für 2. Januar 1885, Vormittags $7^h\ 19^m\ 52^s$ mittlere Hannoveraner Ortszeit soll die Hannoveraner Sternzeit bestimmt werden.

Zuerst verschafft man sich die Länge λ (wenn andere Mittel fehlen, durch Abstechen aus einer Karte), in unserem Falle ist:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Hannover, technische Hochschule, } \lambda = +\ 0^h\ 38^m\ 52{,}5^s \text{ östlich} \\ \text{von Greenwich}\end{array}\right\} \tag{4}$$

hiezu nimmt man aus der Tafel I S. [4] $5{,}9^s + 0{,}5^s = 6{,}4^s$ und zwar nach (3) betreffs des Vorzeichens

$$(\varDelta\lambda) = -\ 6{,}4^s. \tag{5}$$

(Die zwei Werthe λ und $(\varDelta\lambda)$ notire man sich ein für alle Mal in seinem Jahrbuch.)

Nun gibt der Nautical Almanac für 1. Januar 1885

$$\begin{array}{rrrrr}
 & T = & 18^h & 45^m & 12{,}4^s \\
 & \text{hiezu } (\varDelta\lambda) = & & - & 6{,}4^s \\
\hline
 & T + (\varDelta\lambda) = & 18^h & 45^m & 6{,}0^s \\
7^h\ 19^m\ 52^s \text{ Vormittag gibt} & t' = & 19^h & 19^m & 52{,}0^s \\
\text{Die Tafel I. S. [4] gibt für } 19^h\ 18^m & = & & 3^m & 10{,}2^s \\
\text{„} \quad 1^m\ 52^s \text{ oder rund } 2^m & = & & & 0{,}3^s \\
\hline
\text{Hannoveraner Sternzeit} & S = & 38^h & 8^m & 8{,}5^s
\end{array} \tag{6}$$

oder nach der bei (1) gemachten Bemerkung, Weglassung von 24^h

$$S = 14^h\ 8^m\ 8{,}5^s \tag{7}$$

Die vorstehende Aufgabe, Bestimmung der Sternzeit, wird hauptsächlich gebraucht, um mittelst der Grundgleichung (1) § 3. S. 7 den Stundenwinkel eines Gestirns von bekannter Rectascension zu bestimmen, nämlich

$$\text{Stundenwinkel} = \text{Sternzeit} - \text{Rectascension} \tag{8}$$

Die umgekehrte Aufgabe, nämlich Bestimmung der mittleren Orts-(Sonnen-)Zeit aus bekannter Ortssternzeit, löst man ebenfalls mittelst der Gleichung (3), nämlich zunächst:

$$t' + \varDelta t' = S - (T + (\varDelta\lambda)),$$

wo $t' + \varDelta t'$ der gesuchte Werth in Einheiten von Sternzeit ist, weshalb man auf Sonnenzeit überzugehen hat durch Abzug von $\varDelta t'$ nach der Tafel II. von S. [4], also

$$t' = S - (T + (\varDelta\lambda)) - \varDelta t'. \tag{9}$$

Umkehrung des ersten Beispiels: Gegeben Hannover, 1. Januar 1885, $14^h\ 8^m\ 8{,}5^s$ Sternzeit. Gesucht die entsprechende mittlere Hannoveraner Sonnenzeit.

Der Nautical Almanac gibt zuerst (wie beim ersten Beispiel) Sternzeit

$$\begin{array}{lrrr}
\text{im mittleren Greenw. Mittag } T = & 18^h & 45^m & 12{,}4^s \\
\text{östlich von Greenwich } (\varDelta\lambda) = & & - & 6{,}4^s \\
\hline
T' = T + (\varDelta\lambda) = & 18^h & 45^m & 6{,}0^s
\end{array}$$

Dieses ist von dem gegebenen $S = 14^h\ 8^m\ 8{,}5^s$ abzuziehen, welches wir jedoch, um negative Zeitwerthe zu vermeiden, zuvor um 24^h vergrössern, also:

$$S = 38^h\ 8^m\ 8{,}5^s$$

$$t' + \Delta t' = S - T' = 19^h\ 23^m\ 2{,}5^s$$

Die Tafel II. S. [4] gibt für $19^h\ 18^m$: $3^m\ 9{,}7^s$, für 5^m: $0{,}8^s$ $\Big\}\ -\ 3^m\ 10{,}5^s$

$$t' = 19^h\ 19^m\ 52{,}0^s$$

d. h. wieder der Ausgangswerth des ersten Beispiels.

Bei all' diesen Rechnungen braucht man den Werth $(\Delta\lambda)$, welchen man deshalb, wie schon bei (5) bemerkt wurde, für seinen Beobachtungsort und das benützte Jahrbuch, ein für alle Mal notirt. Das Sternwartenverzeichniss des Berliner Astronomischen Jahrbuchs (etwa S. 368—371) gibt die von uns mit $(\Delta\lambda)$ bezeichneten Werthe unter der Benennung: „Sternzeit im mittleren Mittag weniger Sternzeit im mittleren Berliner Mittag". Als Beispiel diene:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\text{Hannover, techn. Hochschule}} \\ \lambda = 0^h\ 38^m\ 52{,}5^s \text{ östl. v. Greenwich} & (\Delta\lambda) = -\ 6{,}4^s \\ \lambda = 0^h\ 14^m\ 42{,}4^s \text{ westl. v. Berlin} & (\Delta\lambda) = +\ 2{,}4^s \end{array}\right\} \quad (10)$$

Das Berliner Jahrbuch 1885, S. 369 gibt unmittelbar

Greenwich $\lambda = 0^h\ 53^m\ 34{,}9^s$ westlich von Berlin $(\Delta\lambda) = +\ 8{,}8^s$, was als Controlle von (10) dient.

Die Benutzung verschiedener Jahrbücher muss natürlich dasselbe Resultat geben, und nur der erste Theil der Rechnung $T + (\Delta\lambda)$ ist verschieden. Rechnet man das vorstehende Beispiel mit dem Berliner Jahrbuch, so hat man

$$\begin{aligned} \text{Sternzeit im mittleren Berliner Mittag } T &= 18^h\ 45^m\ 3{,}6^s \\ (\Delta\lambda) &= \qquad +\ 2{,}4^s \\ \hline T + (\Delta\lambda) &= 18^h\ 45^m\ 6{,}0^s \end{aligned}$$

d. h. dasselbe wie oben; die übrige Rechnung ändert sich nicht.

Bei der Ermittelung irgend eines anderen Werthes aus dem Jahrbuch hat man stets die betreffende Greenwicher Zeit als Argument zu nehmen. Es soll z. B. am 1. März 1885, $6^h\ 42^m$ Nachmittags mittlere Hannoveraner Zeit die Declination der Sonne gefunden werden. Man hat

$$\begin{array}{ll} \text{Mittlere Hannoveraner Zeit} & = 6^h\ 42^m \\ \text{Länge gegen Greenwich} & -\ 0^h\ 39^m \\ \hline \text{Mittlere Greenwicher Zeit} & \ 6^h\ \ 3^m = 6{,}05^h \end{array}$$

Nautical Almanac für 1885, S. 39 gibt für 1. März $\delta = -\ 7^0\ 24'\ 12''$

stündliche Aenderung (S. 38) $+ 57{,}1'' \times 6{,}05 = + 345'' = \qquad + 5'\ 45''$

für $6^h\ 42^m$ Hannoveraner Zeit $\delta = -\ 7^0\ 18'\ 27''$

Wie genau man die Greenwicher Zeit zur Entnahme irgend eines Werthes haben muss, hängt von der Aenderung ab. Z. B. die Sonnendeclination ändert sich höchstens in einer Stunde um 1', wenn man also 1'' noch sicher haben will, muss die Zeit auf eine Minute genau bekannt sein.

Interpolation. In den meisten Fällen genügt einfache Proportional-Interpolation; in seltenen Fällen müssen zweite Differenzen berücksichtigt werden. Die Interpolationsformel hiefür heisst:

$$y = y_n + z \varDelta y_n - \frac{z(1-z)}{2} \varDelta^2 y_n \tag{11}$$

wo y_n der nächstvorhergehende Funktionswerth ist, $\varDelta y_n$ die zugehörige erste Differenz und $\varDelta^2 y_n$ die zweite Differenz. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Interpolation in die Mitte und in beide Drittel.

$$\text{Ist } z = \frac{1}{2}, \text{ so wird } \frac{z(1-z)}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\text{Ist } z = \frac{1}{3} \text{ oder } = \frac{2}{3}, \text{ so wird } \frac{z(1-z)}{2} = \frac{1}{9} = 0{,}111$$

Als Beispiel für letzteren Fall diene Folgendes: Nautical Almanac für 1883, S. 122 gibt die Sonnen-Monddistanz am 13. Juli:

		Differenzen	
III^h	104° 6′ 45″		
		+ 1° 21′ 45″	
VI^h	105° 28′ 30″		+ 4″
		+ 1° 21′ 49″	
IX^h	106° 50′ 19″		+ 6″
		+ 1° 21′ 55″	
Mitternacht	108° 12′ 14″		

für 7^h und 8^h findet man zunächst durch Dritttheilung der ersten Differenz 1° 21′ 49″:

6^h	105° 28′ 30″	6^h	105° 28′ 30″
	+ 27′ 16,3″		+ 54′ 32,7″
	105° 55′ 46,3″		106° 23′ 2,7″
hiezu $-\frac{1}{9}$ 5″	− 0,6″		− 0,6″
7^h	105° 55′ 45,7″	8^h	106° 23′ 2,1″

die Zusammenstellung mit den begrenzenden Werthen für 6^h bis 9^h gibt jetzt:

		Differenzen	
6^h	105° 28′ 30,0″		
		27′ 15,7″	
7^h	105° 55′ 45,7″		+ 0,7″
		27′ 16,4″	
8^h	106° 23′ 2,1″		+ 0,5″
		27′ 16,9″	
9^h	106° 50′ 19,0″		

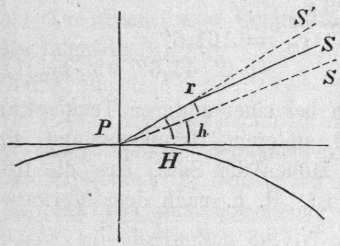
Die zweite Differenz beträgt jetzt nur noch 0,6″, also ihr Maximaleinfluss bei der Interpolation 0,1″, man kann also von hier an schlechthin mit ersten Differenzen weiter interpoliren.

Was weiter über die Benutzung des Jahrbuchs, Interpolation etc. zu sagen ist, werden wir am betreffenden Ort besonders behandeln.

§ 7. **Refraction.**

Wegen der ungleichen Dichte der Schichten der Atmosphäre kommen die Lichtstrahlen von den Himmelskörpern zu einem Erdpunkte nicht in geraden Linien, sondern in nach unten concaven Curven, so dass ein Beobachter in P (Fig. 1.) ein Gestirn S in der Tangentenrichtung S' zu sehen glaubt. Hiebei heisst:

Fig. 1. Refraction.



H die scheinbare Höhe,

h die wahre Höhe,

$H - h = r$ die Refraction.

Die beiden in der Figur mit S bezeichneten Punkte sind als unendlich entfernt angenommen, und sind daher für den Beobachtungspunkt T als zusammenfallend zu betrachten. Ohne auf die Refractionstheorie einzugehen, betrachten wir hier nur deren praktische Anwendung und namentlich die dazu nöthigen Refractionstafeln.

Um zuerst einen Ueberblick über die Verhältnisse zu gewinnen, betrachten wir einige Hauptwerthe in runden Zahlen.

Scheinbare Höhe H	Refraction r	Scheinbare Höhe H	Refraction r
0°	35′	20°	3′
2°	18′	30°	2′
5°	10′	45°	1′
10°	5′	60°	0,5′
20°	3′	90°	0′

Die Refraction ist nicht von der Höhe allein abhängig, sondern auch von der Temperatur der Luft und von dem Druck der Luft (und von der Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, wovon jedoch hier nicht die Rede ist). Diejenige Refraction, welche bei einer Lufttemperatur von 9,3° C. und bei einem (auf 0° reducirten) Barometerstand von 751,5 ^{mm} stattfindet, nennt man nach Bessel's Annahme, die mittlere Refraction. Die Bessel'schen Refractionstafeln sind enthalten in dem Werke „Tabulae regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae, auctore Friderico Wilhelmo Bessel, Regiomontani Prussorum, 1830“, S. 538 — 542 und S. LIX—LXIII. Diese Tafeln sind von da in eine Menge Bücher übergegangen.

Wir haben nun zunächst nach den Bessel'schen Original-Tafeln unsere ausführliche Tafel der mittleren Refraction auf S. [5] bis [7] berechnet, und da für grössere Höhen die Refraction nahezu der Cotangente der scheinbaren Höhe proportional ist, nämlich

$$r_m = \alpha \; cotg \; H, \qquad (1)$$

gibt S. [12] als Auszug aus Bessel's Originaltafel die Werthe $log \; \alpha$ als Function von H, von 10° an.

Wir haben also für die Bestimmung der mittleren Refraction r_m **zwei** Hülfsmittel, wie ein Beispiel zeigen mag:

Scheinbare Höhe $H = 19^0\ 30'$ gibt

$$
\begin{array}{lrl}
\text{1) nach S. [7]} & r_m & = 2'\ 42'' \\
\text{2) nach S. [12]} & \log \alpha & = 1.7575 \\
\text{hiezu} & \log cotg\ 19^0\ 30' & = 0.4509 \\
\hline
& \log r_m & = 2.2084 \quad r_m = 161{,}6'' \\
& & \qquad\qquad\quad = 2'\ 41{,}6'' \text{ wie bei 1).}
\end{array}
$$

Es handelt sich nun um die Refraction bei einer anderen Temperatur t als der Normaltemperatur $9{,}3^0$ und bei anderem Barometerstand als 751,5 mm, und hiezu dient bei grösseren Höhen der Satz, dass die Refraction der Dichte der Luft proportional ist, d. h. nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz ist:

$$r = r_m \frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + t\ \varepsilon} \frac{Q_0}{751{,}5} \tag{2}$$

wo $\varepsilon = 0{,}003665$ der Ausdehnungs-Coefficient der Luft für 1^0 C., und Q_0 der auf 0^0 reducirte Quecksilberbarometerstand ist. Zur Ausrechnung von (2) könnte man sich der barometrischen Hülfstafeln bedienen (Handb. der Verm. Band I S. 516), weil auch bei der barometrischen Höhenmessung solche Ausdrücke vorkommen, bequemer aber ist es, für die beiden Quotienten in (2) besondere Hülfstafeln anzulegen. Wir setzen nach Bessel's Bezeichnung

$$\frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + \varepsilon\ t} = \gamma \text{ und } \frac{Q_0}{751{,}5} = B \tag{3}$$

stellen die Werthe $\log \gamma$ und $\log B$ in der Tafel S. [12] zusammen, und haben nun:

$$r = r_m \times \gamma \times B \tag{4}$$

oder wegen (1)

$$r = \alpha \ cotg\ H \times \gamma \times B \tag{5}$$

z. B. $H = 30^0$, $t = 28^0$, $Q_0 = 702$ mm gibt nach der Tafel S. [12] folgende logarithmische Rechnung:

$$
\begin{array}{lrl}
H = 30^0 \text{ gibt} & \log \alpha & = 1.7600 \\
& \log cotg\ H & = 0.2386 \\
t = 28^0 \text{ gibt } \log \gamma = -\ 0{,}0277 & & = 9.9723 - 10 \\
Q_0 = 702 \text{ mm gibt } \log B = -\ 0{,}0296 & & = 9.9704 - 10 \\
\hline
& \log r & = 1.9413 \qquad r = 87{,}4'' = 1'\,27{,}4''
\end{array} \tag{6}
$$

Die Formel (2) gilt aber nur für grössere Höhen, etwa über 25^0 oder 30^0; für kleinere Höhen kommen noch Exponenten λ und A zu den Quotienten von (2), so dass dann die Gesammtformel heisst:

$$r = r_m \left(\frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + \varepsilon\ t}\right)^\lambda \left(\frac{Q_0}{751{,}5}\right)^A \tag{7}$$

oder logarithmisch, mit Einführung von (3)

$$log\ r = log\ r_m + \lambda\ log\ \gamma + A\ log\ B \tag{8}$$

oder auch mit Einsetzung von (1)

$$log\ r = log\ (\alpha\ cotg\ H) + \lambda\ log\ \gamma + A\ log\ B \tag{9}$$

Die Bessel'sche Originalformel hat statt des letzten Gliedes $A\ log\ B$ das folgende

$$A\ (log\ B + log\ T),$$

wo T ein Correctionsfactor für Reduction des Quecksilberbarometers auf 0^0 ist; da wir jedoch angenommen haben, dass der in die Rechnung eingehende Barometerstand Q_0 bereits auf 0^0 reducirt sei, so fällt in unserer Formel (8) oder (9) das Bessel'sche $log\ T$ fort. Es ist formell und sachlich besser, die Reduction auf 0^0 des Quecksilbers nicht in die Refractionsformel aufzunehmen, denn es bestehen anderweitige bequeme Reductionstafeln hiefür (z. B. Handbuch der Verm. I. Band S. 508—510), welche zudem noch die Ausdehnung des Maasstabes mit berücksichtigen; ferner kommt es häufig vor, dass man den Barometerstand gar nicht direct am Quecksilberbarometer abliest, sondern an einem Aneroidbarometer, welches seine besonderen Correctionen hat.

Wir nehmen ein Beispiel zu (8) mit kleinerer Höhe

$$H = 2^0\ 30', \ t = 28^0, \ Q_0 = 702 \text{ mm}$$

S. [5] und S. [12] geben:

$$r_m = 16'\ 1'' = 961'', \ log\ r_m = 2.9827$$

$$log\ \gamma = -0.0277, \ \lambda = 1{,}26, \ \lambda\ log\ \gamma = -0.0349 = 9.9651 - 10$$

$$log\ B = -0.0296\ A = 1{,}03, \ A\ log B = -0.0305 = 9.9695 - 10$$

$$log\ r = 2.9173$$

$$r = 827'' = 13'47'' \tag{10}$$

Diese logarithmische Rechnung ist aber immer noch etwas umständlich, weshalb wir, mit einem kleinen Opfer an Genauigkeit, auf S. [8] bis [11] directe Correctionen der mittleren Refraction für Temperatur und Barometerstand berechnet haben. Diese Correctionen entsprechen der Formel (7), welche man sich auf die Form gebracht denken kann:

$$r = r_m\ (1 + x)\ (1 + y) = r_m + r_m\ x + r_m\ y + r_m\ xy \tag{11}$$

Nun gibt die Tafel S. [8] und [9] die Correction $r_m\ x$, die Tafel S. [10] und [11] gibt $r_m\ y$ und das kleine Glied $r_m\ xy$ wird vernachlässigt, wenn man es nicht etwa besonders berechnen will.

Wir behandeln das Beispiel (6) nach den Tafeln S. [5] bis [11]

$$H = 30^0, \ t = 28^0, \ Q_0 = 702 \text{ mm}$$

S. [7] gibt $r_m = 1'\ 40''$

S. [9] für $H = 30^0\ t = 28^0$ $Corr = -\ 6''$

S. [11] für $H = 30^0\ Q_0 = 702$ $Corr = -\ 7''$

$r = 1'\ 27''$ wie bei (6). (12)

Das zweite Beispiel (10) ist

$$H = 2^0\ 30',\ t = 28^0,\ Q_0 = 702 \text{ mm}$$

$$
\begin{array}{rr}
\text{S. [5] gibt für } 2^0\ 30'\ r_m = & 16'\ \ 1'' \\
\text{S. [8] mit } H = 2^0\ 30' \text{ und } t = 28^0 \text{ gibt } Corr. = & -1'\ 14'' \\
\text{S. [10] mit } H = 2^0\ 30^0 \text{ mm und } Q_0 = 702 \text{ mm gibt } Corr. = & -1'\ \ 5'' \\
\hline
r = & 13'\ 42''
\end{array} \qquad (13)
$$

Die Differenz 5″ gegen (10) rührt von dem in (13) vernachlässigten letzten Gliede der Formel (11) her, dasselbe würde nämlich geben:

$$r_m\, x\, y = \frac{r_m\, x\, r_m\, y}{r_m} = \frac{(-74) \times (-5)}{961} = +4'' \qquad (14)$$

fügt man dieses zu (13), so fehlt nur noch 1″ gegen (10), was sich durch Abrundungshäufung erklärt.

Nach der Entstehungsweise unserer Tafeln und nach den vorgelegten Zahlenbeispielen kann man nun rasch beurtheilen, welche Art der Refractionsberechnung in jedem Falle zu wählen ist. Die Tafeln [5] [6] [7] nebst [12] geben bei Höhen unter 10^0 die Refraction auf etwa 1″ genau, und bei grösseren Höhen auf 0,1″ genau. Die bequemeren Correctionstafeln [8] bis [11] geben nur bei grösseren Höhen eine Genauigkeit von etwa 1″, bei sehr kleinen Höhen treten wegen der Vernachlässigung des letzten Gliedes in der Gleichung (11) und wegen der Unsicherheit der Interpolation, wohl Fehler von 5—10″ ein. Hieran schliesst sich die Frage an, wie genau überhaupt die Refraction bestimmt werden kann. Bessel äussert sich hierüber auf S. LXII — LXIII des oben citirten Werkes „Tabulae Regiomontanae“ folgendermaassen:

„Es ist bekannt, dass die Luftschichten ungleich erwärmt sind, und dass deswegen ihr Gleichgewicht gestört ist. Da nun jede Theorie das Gegentheil annehmen muss, so ist klar, dass die Theorie nicht immer mit den Beobachtungen stimmen kann, sondern sich nur den mittleren Refractionswerthen anschliesst. Deshalb ist es nöthig, den wahrscheinlichen Fehler jeder berechneten Refraction abzuleiten aus den Ungleichheiten, welche in einer langen Reihe gefunden wurden, damit man beurtheilen kann, welches Vertrauen die Tafel in jedem Falle verdient. Die Untersuchung dieses Umstandes, welche sich auf die Königsberger Beobachtungen stützte, hat uns Folgendes geliefert:

Wahrscheinlicher Fehler einer mit Hülfe der Tafel berechneten Refraction.

Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
45^0 0′	± 0,27″	10^0 0′	± 0,92″
30^0 0′	0,34″	9^0 0′	1,00″
25^0 0′	0,37″	8^0 0′	1,11″
20^0 0′	0,46″	7^0 0′	1,25″
15^0 0′	0,66″	6^0 0′	1,43″

Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
5° 0′	± 1,71″	2° 30′	± 5,30″
4° 30′	2,00″	2° 0′	7,74″
4° 0′	2,40″	1° 30′	10,58″
3° 30′	2,63″	1° 0′	16,84″
3° 0′	3,87″	0° 30′	20,01″

Hieraus ist ersichtlich, dass die aus den genannten Ursachen entspringenden Unregelmässigkeiten, sofern Temperatur und Barometerstand nach Angabe meiner Tafel berücksichtigt sind, nur in den ersten Graden der Höhen erheblich sind."

Uebrigens dürfte diese Genauigkeit vielleicht noch überschätzt sein. Man weiss ja, dass die terrestrische Refraction, welche auf 100 Kilometer Entfernung etwa 4′ beträgt, tägliche Schwankungen von nahezu 50 % ihres Werthes macht, um wie viel mehr muss ein Lichtstrahl, der einen 10fach längeren Weg durch die Atmosphäre zurücklegt, bei kleinem Höhenwinkel, infolge der Aenderung der Wärmevertheilung, auf- und niederschwanken.

Zu dem kommt noch, dass man (wie aus der barometrischen Höhenmessung bekannt ist), die Lufttemperatur t gar nie genau messen kann, auch der Barometerstand Q_0 ist oft unsicher bestimmt. Nimmt man hiefür Fehler von bezw. $\Delta t = +1^0$ und $\Delta Q_0 = +1$ mm an, so erhält man folgende Vergleichung:

Höhe	Refractionsfehler für $\Delta t = \pm 1^0$	Refractionsfehler für $\Delta Q_0 = \pm 1$ mm
0°	13″	3″
1°	8″	2″
2°	5″	2″
5°	2″	1″
10°	1″	0,4″
20°	0,6″	0,2″
45°	0,2″	0,0″

Eine genauere Refractionsbestimmung müsste nicht blos Temperatur und Barometerstand, sondern auch die Tages- bezw. Nacht**zeit** in Rechnung nehmen.

Es kann noch ein Wort über die **Form** unserer Refractionstafeln gesagt werden. Das letzte Glied $r_m\, xy$ in (11) könnte man dadurch berücksichtigen, dass man in den Tafeln [8] bis [11] als zweites Argument nicht die scheinbare Höhe, sondern die mittlere Refraction, bezw. die mittlere Refraction + erste Correction, nähme, d. h. eine Anordnung, welche die Refractionstafel in dem Nautischen Jahrbuch oder die Refractionstafel im Anhang von Bremiker's siebenstelliger Logarithmentafel hat, indessen hat die Höhe als zweites Argument den Vorzug der Anschaulichkeit und der besseren Genauigkeitsabstufung.

Die eben erwähnten Refractionstafeln des nautischen Jahrbuchs gehen nur bis 2° Höhe, indem vorausgesetzt wird, dass unter 2° wegen Refractions-Unsicherheit überhaupt nicht gemessen werde. Wenn dieses auch im Allgemeinen der Fall ist, so kommt man doch nicht selten in die Lage, auch für kleine Höhen Refractionen zu berechnen, und für Monddistanzen, bei welchen die Refraction eine wichtige Rolle spielt, werden wir die Verhältnisse am Horizont besonders zu untersuchen haben, weshalb die Tafel S. [5] und [6], entgegen der sonst üblichen kurzen Behandlung, mit Vermeidung aller grösseren Differenzen angelegt ist.

Zum Schluss haben wir auf S. [13] noch eine Refractionstafel mit der wahren Höhe als Argument beigegeben, welche zur Anwendung kommt, wenn nicht beobachtete, sondern berechnete Höhen vorliegen, für welche die Refractionen zu bestimmen sind. (Dieser Fall tritt z. B. bei der Reduction von Monddistanzen ein.)

Man findet die Tafelwerthe S. [13] durch Rückwärtsinterpoliren aus der Tafel S. [5]—[7], oder, zur Vermeidung der Abrundungsfehler, aus einer auf 0,1″ genauen Refractionstafel mit der scheinbaren Höhe als Argument. Bezeichnet man die Refraction als Funktion der scheinbaren Höhe H mit r, dagegen mit r' die Refraction als Funktion der wahren Höhe h (wobei r und r' zu gleichen Werthen H und h gehören), wenn ferner ΔH und Δr zusammengehörige Differenzen von H und r sind, so wird

$$r' = r \frac{\Delta H}{\Delta H + \Delta r} \text{ oder genähert } = r - \frac{\Delta r}{\Delta H} r.$$

Die letztere Formel gibt

$H = 5^0$	$r - r' = 14{,}9''$
10	2,6
15	0,8
20	0,4
25	0,2
30	0,1

Da unsere Tafel S. [13] überhaupt auf 1″ abgerundet ist, war es nicht nothwendig, sie weiter fortzusetzen als bis $r - r'$ auf etwa 0,1″ sinkt, sie geht daher nur bis zur Höhe 31°.

Näherungsformel für die Refraction. Für manche Zwecke ist es erwünscht, die Refraction nicht blos tabellarisch numerisch, sondern auch in einer Formal zu besitzen. Für Höhen über 10° ist die Refraction nahezu proportional der Cotangente des Höhenwinkels, und man kann hier setzen:

$$r = 57'' \, cotg \, h. \tag{15}$$

Die Refractionconstante für 9,31° C. und 751,5 mm Barometer ist 57,7269″, die Annahme 57″ in (15) statt 57,7″ gibt jedoch einen besseren Anschluss an die wirklichen Refractionen auch bei kleineren Höhen von 15°, wie folgende Vergleichung zeigt:

Höhe	Refraction	57″ cotg h	Fehler
0°	34′ 54″	∞	∞
1°	24′ 25″	54′ 25″	+ 30′ 0″
2°	18′ 9″	27′ 12″	+ 8′ 3″
5°	9′ 46″	10′ 52″	+ 1′ 6″
7°	7′ 20″	7′ 44″	+ 24″
10°	5′ 16″	5′ 23″	+ 7″
12°	4′ 25″	4′ 28″	+ 3″
15°	3′ 32″	3′ 32″	0″
20°	2′ 37″	2′ 37″	0″
30°	1′ 40″	1′ 40″	0″
40°	1′ 9″	1′ 9″	0″
50°	0′ 48″	0′ 48″	0″
60°	0′ 33″	0′ 33″	0″
70°	0′ 21″	0′ 21″	0″
80°	0′ 10″	0′ 10″	0″

Wie man sieht, ist die Näherungsformel (15) von 0^0 bis 5^0 ganz unbrauchbar, sie kann bei kleinen Höhen schon ihrer Form nach nicht anwendbar sein, weil sie für $h = 0$ den Werth ∞ annimmt. Dagegen ist sie von 10^0 an aufwärts sehr gut brauchbar, ja es kann hier auch die Correction für Temperatur und Barometerstand bequem mit berücksichtigt werden durch die beiden Correctionsfactoren γ und B der Tafel S. [12].

Eine von 1^0 bis 5^0 ziemlich anschliessende Interpolationsformel ist:

$$r = 57'' \; cotg \; h - \frac{0{,}55'' \; cos \; h}{sin^2 \; h}.$$

§ 8. Parallaxe und scheinbarer Halbmesser.

Schon bei der Unterscheidung des scheinbaren und wahren Horizonts in § 2. wurde erwähnt, dass in vielen Fällen im Vergleich mit den Entfernungen der beobachteten Himmelskörper der Halbmesser der Erde als verschwindend klein, oder die Erde als Punkt betrachtet werden darf; und dieses Verhältniss hat eben Veranlassung zur Annahme des sogenannten „wahren“ Horizonts u. s. w. gegeben. Völlige Vernachlässigung des Erdhalbmessers findet statt bei Beobachtung des Polarsternes und aller Fixsterne, während bei der Sonne und den Planeten kleine, und beim Mond sogar bedeutende Reductionsrechnungen auszuführen sind.

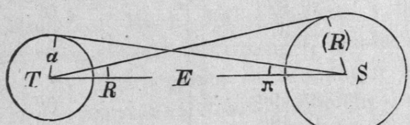
Die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde werden in der praktischen Astronomie gewöhnlich nicht in linearem Maasse, Meilen oder Kilometern etc. angegeben, sondern zum Erdhalbmesser als Maasseinheit durch eine Winkelgrösse in Beziehung gesetzt. Dieses ist die **Parallaxe**, d. h. der Winkel, unter welchem, von der Mitte des entfernten Gestirns aus gesehen, der Aequatorhalbmesser der Erde erscheint, d. h. wenn z. B.

in Fig. 1. von der Sonnenmitte S aus der Erdhalbmesser a unter dem Winkel $\pi = 8{,}9''$ erscheint, so ist $\pi = 8{,}9''$ die Parallaxe der Sonne, aus welcher man die Entfernung E berechnen kann:

$$E = \frac{a}{\sin \pi} = \frac{a}{\pi}\,\varrho. \tag{1}$$

Da die Erde keine Kugel, sondern ein Ellipsoid ist, also verschiedene Halbmesser a hat, so gilt zur Vermeidung jeder Unsicherheit in der Gleichung (1) als a der Aequatorhalbmesser der Erde, und die zugehörige Parallaxe π heisst die Aequatorial-Parallaxe oder auch, zur Unterscheidung von der nachher zu betrachtenden Höhenparallaxe, heisst π nach Fig. 1. die Horizontal-Aequatorial-Parallaxe.

Fig. 1. Horizontal-Parallaxe.



Die Fig. 1. enthält auch den scheinbaren Halbmesser R eingezeichnet, unter welchem der wahre Halbmesser (R) des Himmelskörpers, vom Mittelpunkt der Erde gesehen, erscheint.

Aus den Gleichungen

$$E = \frac{a}{\pi}\,\varrho = \frac{(R)}{R}\,\varrho \tag{2}$$

folgt, dass zwischen der Parallelaxe π und dem scheinbaren Halbmesser R eines Himmelskörpers bei veränderlicher Entfernung immer eine Beziehung besteht

$$\frac{\pi}{R} = \frac{a}{(R)} = \text{constant}. \tag{3}$$

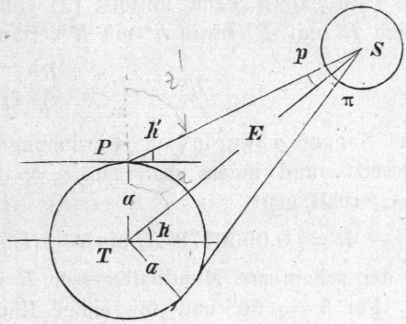
Die wichtigsten Parallaxen- und Halbmesserwerthe sind im Folgenden zusammengestellt:

Gestirn	Parallaxe π			Scheinbarer Halbmesser R			Wahrer Halbmesser (R)	Mittlere Entfernung von der Sonne
	Maximum	Mittel	Minimum	Maximum	Mittel	Minimum	Meilen	
Mond	1° 1′ 24″	57′ 40″	53′ 56″	16′ 46″	15′ 44″	14′ 43″	234	1,00
Sonne	9,0″	8,85″	8,7″	16′ 18″	16′ 2″	15′ 45″	93330	0,00
Merkur	16,9″	11,4″	5,9″	6,3″	4,2″	2,2″	320	0,39
Venus	33,1″	18,9″	4,8″	32,0″	18,3″	4,6″	831	0,72
Mars	23,0″	13,2″	3,3″	11,8″	6,8″	1,7″	441	1,53
Jupiter	2,0″	1,7″	1,4″	22,2″	18,6″	15,0″	9250	5,20
Saturn	1,0″	0,9″	0,8″	8,9″	8,1″	7,2″	7538	9,54
Uranus	0,5″	0,45″	0,4″	2,2″	2,0″	1,8″	3736	19,18
Neptun	0,3″	0,3″	0,3″	1,3″	1,3″	1,3″	3600	30,03
Erde							a=859	1,00

(4)

Indem wir die Parallaxenrechnungen für den Mond, wobei die Abplattung der Erde berücksichtigt werden muss, zur besonderen Behandlung bei den Monddistanzen vorbehalten, stellen wir hier nur die einfachsten Parallaxenformeln für die Annahme einer kugelförmigen Erde zusammen.

Fig. 2. Höhenparallaxe.



In Fig. 2. ist h' die scheinbare, aus der Beobachtung erhaltene, jedoch von Refraction befreite Höhe und h die wahre Höhe eines Gestirns, dessen Horizontalparallaxe $= \pi$ ist. Die Differenz

$$h - h' = p = z' - z \tag{5}$$

heisst die Höhenparallaxe, zu deren Bestimmung man aus Fig. 2. die Beziehungen findet:

$$E = \frac{a}{\sin \pi} = \frac{a}{\sin p} \sin (90^0 + h')$$

$$\sin p = \sin \pi \cos h' \tag{6}$$

oder bei kleinen Werthen:

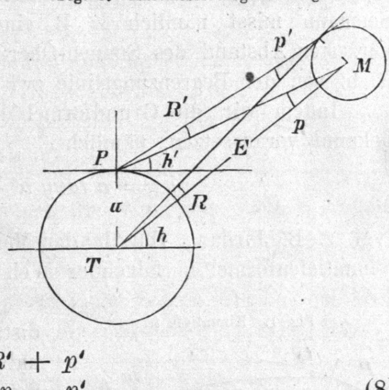
$$p = \pi \cos h' \tag{7}$$

Wenn man die Reductionen einer Höhe für Refraction und Parallaxe nach § 7. und § 8. zusammen nimmt, so erhält man:

Wahre Höhe = Scheinbare Höhe — Refraction + Höhenparallaxe.

Wir haben deswegen die Höhenparallaxe der Sonne auf der Refractionstafel S. [7] unten beigefügt.

Fig. 3. Halbmesservergrösserung.



Die Parallaxe erzeugt auch eine Vergrösserung des scheinbaren Halbmessers der Gestirne. Wenn in Fig. 3. R' der scheinbare Halbmesser des Mondes, von einem Erdpunkte P aus gesehen, ist, und R der Halbmesser wie er vom Erdmittelpunkt T aus gesehen würde, so hat man nach Fig. 3.

$$R + p = R' + p'$$

$$R' - R = p - p' \tag{8}$$

d. h. die Halbmesservergrösserung ist gleich der Parallaxendifferenz für Mitte und Oberrand, oder ebenso genau auch für Unterrand und Mitte.

Man hat also jetzt aus (7) und (8) nach Fig. 3.:

$$R' - R = \pi \cos h' - \pi \cos (h' + R')$$
$$R' - R = \pi \cos h' - \pi (\cos h' - R' \sin h') = \pi R' \sin h' \qquad (9)$$

Die Parallaxe π kann mittelst (3) eliminirt werden, und indem man zugleich R' mit R, sowie h' mit h vertauscht, hat man aus (9):

$$R' - R = \frac{R^2}{\varrho} \frac{a}{(R)} \sin h \qquad (10)$$

Der Nenner ϱ wurde zur Gewinnung gleichen Maasses (Bogensekunden) zugesetzt, und indem man nun $a = 859$ und $(R) = 234$ aus (4) einsetzt, erhält man

$$R' - R = 0{,}0000178\, R^2 \sin h \qquad (\log Coeff. = 5.25\,034 - 10) \qquad (11)$$

wo der scheinbare Mondhalbmesser R in Sekunden zu setzen ist.

Für $h = 90^0$ und für einige Hauptwerthe von R erhält man hiernach folgende Reductionsgrössen:

Mondhalbmesser $R =$	14′ 30″	15′ 0″	15′ 30″	16′ 0″	16′ 30″
$\frac{R^2}{\varrho} \frac{a}{(R)} =$	13,48″	14,41″	15,39″	16,40″	17,44″

Indem man diese Werthe noch mit $\sin h$ multiplicirt, erhält man die Halbmesservergrösserungen für verschiedene Höhen, von welchen wir bei der Reduction von Monddistanzen später Gebrauch machen werden.

Bei der Sonne beträgt die Halbmesservergrösserung durch Parallaxe höchstens 0,04″, und auch bei den Planeten bleibt sie unmerklich.

§ 9. **Kimmtiefe.**

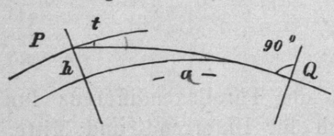
Zur See braucht man ausser der Refraction und der Parallaxe noch die Kimmtiefe, um gemessene Höhen auf wahre Höhen zu reduciren. Der Seemann misst nämlich z. B. eine Sonnenhöhe mit dem Sextanten als kürzesten Abstand des Sonnen-Ober- oder -Unterrandes von der Kimm, d. h. von der Begrenzungslinie zwischen Wasser und Luft.

Indem wir die Grundformel der trigonometrischen Höhenmessung als bekannt voraussetzen, nämlich

$$h = a \tan g\, \alpha + \frac{1-k}{2\,r} a^2 \qquad (1)$$

(vgl. z. B. Jordan, Handb. der Verm. I S. 542), finden wir daraus die Kimmtiefenformel in folgender Weise:

Fig. 1. Kimmtiefe t.



In (1) bedeutet a eine Horizontaldistanz, α einen Höhenwinkel, h den Höhenunterschied, r den Erdhalbmesser, $k = 0{,}13$ den Refractionscoefficienten.

In Fig. 1. betrachten wir die Visur von einem Punkte P, welcher die Höhe h über dem Meere hat, nach der Kimm Q, d. h. eine das Meer in Q berührende Visur. Wendet man hierauf die Grundgleichung (1) zweifach an, nämlich zuerst für die Visur von P nach Q und dann für eine fingirte Visur von Q nach P, so erhält man zwei Gleichungen:

$$\text{von } P \text{ nach } Q \qquad -h = a \operatorname{tang}(-t) + \frac{1-k}{2\,r} a^2 \tag{2}$$

$$\text{von } Q \text{ nach } P \qquad +h = a \operatorname{tang} 0 + \frac{1-k}{2\,r} a^2 \tag{3}$$

Die letzte Gleichung gibt die Sehweite

$$a = \sqrt{\frac{2\,r}{1-k}\,h} \tag{4}$$

$\frac{2h}{t}\rho = \sqrt{}$ $2h\rho$

(2) und (3) subtrahirt geben:

$$2\,h = a \operatorname{tang} t$$

und dieses mit (4) zusammen genommen, zugleich mit $\operatorname{tang} t = \frac{t}{\varrho}$, gibt:

$$t = 2\,\varrho \sqrt{\frac{-k}{2\,r}}\,\sqrt{h} \tag{5}$$

für die Erde im Allgemeinen kann man $r = 6\,370\,000$ m setzen und k ist im Mittel etwa $= 0{,}13$; damit wird (5)

$$t = 107{,}8'' \sqrt{h} \tag{6}$$

Hiernach ist Folgendes berechnet:

Höhe h	Kimmtiefe t	Differenz	Höhe h	Kimmtiefe t	Differenz
0 m	0′ 0″		5 m	4′ 1″	
1 m	1′ 48″	1′ 48″	6 m	4′ 24″	23″
2 m	2′ 32″	44″	7 m	4′ 45″	21″
3 m	3′ 7″	35″	8 m	5′ 5″	20″
4 m	3′ 36″	29″	9 m	5′ 23″	18″
5 m	4′ 1″	25″	10 m	5′ 41″	18″

Ausführlichere Tafeln dieser Art enthalten die nautischen Werke, z. B. Domke, nautische Tafeln S. 73.

Man bemerkt aus der vorstehenden Zahlenübersicht, dass die Differenzen für 1 m Höhe bei wachsender Höhe abnehmen, und dieses hat eine praktische Bedeutung insofern, als ein Fehler in der Höhe bei grosser Höhe weniger schädlich ist als bei kleiner Höhe, wozu noch der Umstand kommt, dass bei sehr kleinen Höhen die Kimm durch Wellenbewegung gestört wird. Man soll also, wenn man die Wahl hat, seinen Augpunkt möglichst hoch über der Wasserfläche wählen.

Das Vorstehende gilt nur für die freie Kimm. Die Kimm vor einem Strande erscheint tiefer, sofern nicht etwa der Strand hinter der Kimm auftaucht, d. h. selbst schon weiter als die Sehweite für freies Meer entfernt ist.

Ist man genöthigt, eine Kimm zu benutzen, welche sich nicht gegen den Himmel, sondern gegen Land abhebt, so wird man zuerst überlegen, ob man die Strandlinie wirklich sieht oder ob sie sich hinter der Kimm befindet.

Hierzu dient die Formel (4), welche mit $r = 6\,370\,000$ m und $k = 0{,}13$ gibt:

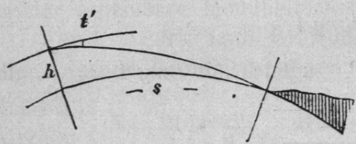
$$a = 3826{,}7 \sqrt{h} \tag{7}$$

womit berechnet wurde:

Höhe h	Sehweite a	Differenz	Höhe h	Sehweite a	Differenz
0 m	0,0 km		5 m	8,6 km	
1 m	3,8 km	3,8 km	6 m	9,4 km	0,8 km
2 m	5,4 km	1,6 km	7 m	10,1 km	0,7 km
3 m	6,6 km	1,2 km	8 m	10,8 km	0,7 km
4 m	7,7 km	1,1 km	9 m	11,5 km	0,7 km
5 m	8,6 km	0,9 km	10 m	12,1 km	0,6 km

Man wird sich in solchem Falle möglichst nieder aufstellen, um nicht die Strandlinie selbst, sondern eine oben freie Kimm zu erhalten. Ist dieses nicht möglich, so hat man den Tiefenwinkel der Strandlinie in Rechnung zu bringen. Hiezu haben wir mit Anwendung der Grundgleichung (1) auf Fig. 2.:

Fig. 2. Strandtiefe.



$$-h = s\,tang\,(-t') + \frac{1-k}{2\,r}\,s^2$$

$tang\,(-t') = -\dfrac{t'}{\varrho}$ gesetzt, gibt die Auflösung nach t':

$$t' = \frac{h}{s}\,\varrho + \frac{1-k}{2\,r}\,\varrho\,s \qquad \left(log\,\frac{1-k}{2\,r}\,\varrho = 8.14\,878\right) \tag{8}$$

Beispielshalber berechnen wir hiernach für $h = 4$ m:

$s = 1$ km	$t = 13'\ 59''$
2 km	$7'\ 21''$
3 km	$5'\ 17''$
4 km	$4'\ 23''$
5 km	$3'\ 55''$
6 km	$3'\ 42''$
7 km	$3'\ 36''$
7,7 km	$3'\ 36''$ freie Kimm.

Für verschiedene Höhen h und Entfernungen s wird diese Strandtiefe t' in Domke's nautischen Tafeln S. 73 (VIII) gegeben, wobei die Entfernungen in Seemeilen gezählt sind. (1 Seemeile = 1 Aequatorminute = 1,855 Kilometer.)

Die Kimmtiefe ist stets von der beobachteten Höhe abzuziehen.

Alle drei bis jetzt von uns betrachteten Höhenreductionen setzen sich so zusammen:

Wahre Höhe = Scheinbare Höhe — Kimmtiefe
— Refraction
+ Höhenparallaxe.