### Observations sur la perspective des courbes à double courbure. Construction d'une perspective par les procédés généraux de la Géométrie descriptive.

(Planche 23.)

**106.** Nous avons rencontré dans les épures de la Lunette et de la Voûte d'arêtes en tour ronde, des courbes qui étaient à double courbure, c'est-à-dire qui ne pouvaient pas être placées dans un plan. Leur perspective ne nous a présenté aucune circonstance particulière; mais, pour certaines positions de l'œil, ces courbes ont sur le tableau des nœuds et même des rebroussements. Nous nous arrêterons un instant à l'étude de ces formes singulières : elles sont intéressantes par elles-mêmes, et il sera nécessaire de les connaître pour comprendre diverses questions relatives à la perspective des surfaces.

**107.** Les figures 135 et 136 sont le plan et l'élévation d'une porte dans un mur cylindrique. La courbe de tête résulte de l'intersection du cylindre horizontal de l'intrados avec le cylindre vertical du parement. L'œil est en un point O,O′ (fig. 137) sur le prolongement d'une corde $mm_1$, $m'm'_1$. Nous avons placé le tableau perpendiculairement aux plans de projection : la droite AB forme ses deux traces. Nous supposons qu'on le fasse tourner autour de la verticale du point A, de manière à le rendre parallèle au plan vertical. Chaque point de la perspective est obtenu directement par l'intersection du rayon visuel avec le tableau.

Les deux points $m$, $m'$ et $m_1$, $m'_1$ sont représentés par un seul point M; la courbe y forme un nœud, et comme elle est l'arête d'un corps opaque, d'un côté du nœud elle est entièrement vue, et de l'autre une de ses branches est cachée.

Le point le plus élevé U est donné par le rayon visuel dont la projection verticale $O'u$ est tangente à l'élévation de la courbe. Le point le plus à gauche correspond au rayon visuel tangent $Ov$ (fig. 135). Le contour apparent du parement cylindrique se termine à la courbe qu'il rencontre tangentiellement au point V.

**108.** Supposons maintenant que l'œil se transporte successivement sur des droites qui rencontrent la courbe en deux points de plus en plus rapprochés l'un de l'autre : la boucle ou feuille MVU se resserrera progressivement, et se réduira à un point quand l'œil sera sur une tangente. Les deux parties de la courbe se rejoindront à ce point, en formant un rebroussement.

Cette circonstance est représentée sur la figure 138. L'œil est en $O_1$, $O'_1$ sur la tangente $nO_1$, $n'O'_1$ ; le tableau $A_1B_1$ a été retourné parallèlement à l'élévation. La perspective est construite par les moyens déjà employés pour la figure 137. Nous avons ajouté quelques marches pour élever le plan d'horizon qui se trouvait un peu bas.

On voit facilement, d'après la position de l'œil sur le plan, que l'une des deux parties de la courbe qui se rejoignent au point de rebroussement N est cachée tandis que l'autre reste vue, mais cela n'a pas toujours lieu : la courbe entière serait vue si l'œil était placé sur la même tangente, à gauche du point $n$, $n'$.

Nous avons reconnu qu'il y avait un rebroussement en faisant disparaître la boucle MVU (fig. 137) ; il est en effet manifeste que quand les points projetés sur $v$ et $u$ (fig. 135 et 136) viennent se confondre en un seul point $n$, $n'$, la perspective de ce dernier doit être le point le plus élevé, et le plus à gauche, ce qui exige qu'il soit le sommet d'un rebroussement; mais nous allons arriver à ce résultat d'une autre manière qui aura l'avantage de nous faire connaître la tangente au rebroussement.

**109.** Considérons un polygone ES (fig. 133) tracé sur une pyramide. Le plan passant par deux côtés contigus MN et NR coupera nécessairement la pyramide, mais il se confondrait avec la face RNO si le côté MN se trouvait précisément sur l'arête ON.

Ces propositions ne cesseront pas de subsister si nous altérons graduellement la forme de la pyramide, et celle du polygone tracé sur elle, de manière à les rapprocher indéfiniment d'un cône et d'une courbe à double courbure. Nous voyons ainsi que les plans osculateurs d'une courbe tracée sur un cône ne sont pas, en général, tangents au cône, mais que cette circonstance se présente quand, en un point, la courbe est tangente à la génératrice rectiligne.

Supposons maintenant que l'on prenne la perspective d'une courbe à double courbure, par rapport à un œil O (fig. 134) situé sur l'une de ses tangentes O$n$. Le plan osculateur de la ligne considérée, au point $n$, sera tangent au cône perspectif, et sa trace NT, sur le tableau, sera tangente à la perspective de la courbe. D'ailleurs, si la ligne *anb* n'a pas d'inflexion en $n$, sa perspective se trouvera entièrement au-dessous d'une droite EG, trace sur le tableau d'un plan passant par O$n$ et perpendiculaire au plan osculateur. Il y a donc rebroussement, et comme le plan osculateur d'une courbe la traverse généralement, la trace NT sera entre les deux branches NA et NB de la perspective.

Il est évident que le cône perspectif a un rebroussement tout le long de la génératrice O$n$.

**110.** Il est intéressant d'avoir la tangente au rebroussement, et malheureusement la méthode ordinaire ne peut pas être employée pour la construire, parce que la tangente de la courbe originale, étant dirigée vers l'œil, est représentée tout entière en perspective par le point N (fig. 138).

Les tangentes à la courbe de tête au point $n$, $n'$, et aux points voisins $r$, $r'$ et $m$, $m'$ rencontrent le plan vertical $m_3 r_3$ aux points $n_2$, $r_2$ et $m_2$. La courbe qui unit ces points est la trace sur le plan $m_3 r_3$ d'une surface qui serait formée par l'ensemble des tangentes à la courbe de tête. La trace du plan osculateur de cette ligne au point $n$, $n'$ doit être tangente en $n_2$ à la courbe $m_2 r_2$; c'est donc la droite $n_2$ $T'_0$ qui rencontre le tableau au point dont les projections sont $T_0$, $T'_0$; on le ramène en $T'$ et la tangente est $NT'$.

Cette construction présente peu de précision, parce qu'il faut tracer la tangente d'une courbe auxiliaire en un point donné. La Géométrie ne donne aucun procédé graphique plus exact.

**111.** Nous avons construit les perspectives des figures 137 et 138 par des procédés empruntés à la Géométrie descriptive. Cette méthode est peu commode dans la pratique, parce que le tableau que l'on obtient n'a pas la grandeur qu'on désire, mais celle que lui assigne l'échelle du plan et de l'élévation, de sorte que quand le tracé est terminé, on est généralement obligé de craticuler. En second lieu, quand la distance est un peu grande, il faut qu'on puisse disposer pour le dessin d'une étendue relativement considérable, parce qu'il est nécessaire de placer les projections de l'œil sur le plan et l'élévation; sans cela les tracés seraient très-compliqués.

Cette méthode, dont nous donnerons plus loin une application (art. 274 et suiv.), présente des avantages pour la discussion des courbes. Lorsqu'on y a recours, il ne faut pas négliger entièrement les constructions ordinaires de la Perspective. Ainsi les arêtes des marches, et les horizontales du mur droit qui est incliné à quarante-cinq degrés sur le tableau, sont dirigées vers les points principaux de fuite et de distance P et D (fig. 137). Si tous les points étaient obtenus directement, de petites erreurs suffiraient pour détruire la convergence des perspectives de droites parallèles, ce qui produirait un effet choquant.

On remarquera sur la figure 138 que les droites $e'a'$, $e''a''$... sont des projections de rayons visuels et convergent vers $O_1'$, tandis que les droites qui partent des points $a'$, $a''$... sont des perspectives de lignes horizontales tracées sur le mur droit, et concourent vers $D_1$.