

CHAPITRE II.

LIGNES D'OMBRE.

Generalités.

281. Dans l'étude des ombres d'une surface il faut considérer la courbe de l'ombre propre, et celle de l'ombre portée par le corps sur lui-même. La première est la ligne de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit ; elle présente les circonstances que nous avons déjà remarquées sur les contours apparents. Nous la dirons réelle quand il y aura des rayons de lumière tangents extérieurement, et virtuelle quand les génératrices rectilignes seront, dans l'intérieur du corps, les prolongements de rayons de lumière arrêtés par lui. Un arc réel est utile quand il forme séparation d'ombre et de lumière, et non utile quand il y a ombre des deux côtés, ce qui arrive lorsqu'une partie du corps ou un autre objet forme écran.

Les points limites des arcs réels sont déterminés, sur les lignes d'ombre, par les mêmes procédés que sur les courbes de contour apparent.

La ligne d'ombre portée est la courbe d'intersection du cône d'ombre avec la surface ; mais il ne faut considérer que les points des premières rencontres des génératrices tels que m_1 , et non pas m_2 (fig. 211). Il faut encore que ces points correspondent à des parties réelles et utiles de la courbe de contact ; ainsi les points s_1 et n_2 sont également à rejeter.

282. Il est important d'étudier la manière dont les parties réelles des courbes de l'ombre propre et de l'ombre portée se succèdent et se continuent.

Considérons sur la figure 201 la courbe à nœud A qui est la section d'une surface à courbures opposées par son plan tangent en un point M. Si des rayons de lumière sont parallèles au plan de la section, l'un d'eux $S'm$ passera par le point M qui, par suite, appartiendra à la courbe de l'ombre propre, tandis que le point m sera sur celle de l'ombre portée. Cette dernière touchera la courbe à nœud A au point m , parce que le plan tangent au cylindre d'ombre le long de la génératrice Mm étant tangent à la surface en M, les courbes ont l'une et l'autre pour tangente l'intersection des plans tangents en M et en m .

283. Si les rayons de lumière changent de direction et deviennent parallèles à la droite MS tangente en M à la courbe à nœud A, le point m viendra se confondre avec M; le rayon de lumière aura donc un contact du second ordre avec la surface, et sera, par suite, tangent à la courbe de l'ombre propre (art. 271). Mais la courbe d'intersection se sera transportée en restant toujours tangente à la courbe à nœud; elle se trouvera donc ainsi tangente à la courbe de l'ombre propre, quand le point m sera venu en M.

Les lignes $CMi'C$, $IMüI$, sont les courbes de contact et d'intersection du cylindre circonscrit avec la surface, quand les génératrices sont parallèles à MS.

284. Avant d'aller plus loin, nous devons dire que pour ne pas présenter des lignes tracées au hasard, nous avons voulu que les différentes courbes appartenissent à une surface ayant une génération déterminée. En conséquence, après avoir tracé une ligne plane B, nous avons supposé qu'un demi-cercle de rayon variable se transportait de manière que son diamètre toujours parallèle à XX' eût ses extrémités sur cette courbe directrice. Le plan du cercle restait d'ailleurs constamment perpendiculaire à celui de la figure. M est le point le plus élevé du cercle du plus petit rayon.

Les raisonnements que nous présentons sont du reste applicables à toute surface à courbures opposées.

285. Les points des courbes de contact et de section se correspondent deux à deux sur les rayons de lumière. Ces points sont réels sur le rayon Nn qui touche la surface en N et la rencontre en n ; ils sont virtuels sur la ligne CI qui touche la surface en C et la coupe en I. Ils se trouvent toujours ainsi

réels ensemble, et virtuels ensemble. Ces points se confondent en M , mais, d'après ce que nous avons vu (art. 271), le point M est la limite de la partie réelle de l'ombre propre : il est donc aussi la limite de la partie réelle de l'ombre portée. A l'arc réel C_1NM de la courbe de l'ombre propre, succède tangentielllement l'arc réel Mni de la courbe de l'ombre portée.

La courbe d'ombre propre présente une autre branche $C'C'_1$, mais elle ne peut être tangente à aucun rayon de lumière, parce que dans cette partie la surface est convexe.

286. Une génératrice du cylindre d'ombre telle que Nn perce la surface en deux points n et n_1 : jusqu'à présent nous n'avons considéré que le premier. Si nous supposons que cette génératrice se transporte sur le cylindre, elle arrivera généralement dans une position $i'i$ où les deux points n et n_1 se confondront en un seul i qui sera nécessairement sur une branche de la courbe de contact, car la génératrice du cylindre, déjà tangente en i' , se trouvera évidemment l'être une seconde fois en i . La ligne d'ombre propre iC' succédera alors à la ligne d'ombre portée Mi , mais la rencontre ne sera pas tangentielle comme en M .

La génératrice ii' est l'intersection du cylindre circonscrit complet, avec lui-même. Si l'on reçoit l'ombre du corps sur un plan, le périmètre sera formé par les intersections du plan avec les parties du cylindre circonscrit qui ont pour directrices $C'i$ et $i'C_1$, et ces deux parties formeront généralement un angle brusque. On voit donc qu'un corps peut projeter une ombre anguleuse, même quand la surface est lisse et continue.

Considérons la droite $C'I'$ qui touche la surface en C'_1 , et la coupe en I' et en I'_1 ; si elle s'élève en restant toujours tangente en un point de C'_1C' , elle arrivera dans une position où les points I' et I'_1 se confondront ; la génératrice sera alors bitangente, et par suite ce sera la droite ii' que nous avons déjà examinée, et qui se trouve tangente en i' à la seconde branche de la courbe d'intersection.

Nous allons voir sur un tore l'application de ces principes, mais nous avons désiré les exposer d'une manière générale. Il est d'ailleurs difficile d'adopter pour un tore des proportions qui permettent de représenter les différentes courbes d'une manière tout à fait distincte.

Ombres d'un tore.

(Planche 36.)

287. Le Tore représenté par les figures géométrales 214 et 215 est éclairé par une flamme placée en (S, S'). En employant la méthode exposée à l'article 274 pour la perspective d'un piédouche, nous trouvons que le cône d'ombre est formé de deux parties distinctes : l'une enveloppe le Tore et le touche suivant la ligne entièrement réelle QELe (fig. 214) ; la courbe de contact du second est MRGKNkgr. En menant à cette dernière des tangentes du point S, on détermine quatre points limites R, r, K et k. Les points G et g ne sont pas à considérer, non plus que les points E et e de la courbe extérieure, parce que les rayons de lumière n'y sont tangents, en projection, à la courbe, que par suite de la verticalité du plan tangent (art. 273). Les arcs RMr, KNk sont réels ; les arcs KGR, kgr sont virtuels.

La figure 215 est une coupe par le plan vertical dont la trace est CLS ; elle ne représente en conséquence qu'une moitié du Tore, mais cependant elle suffit pour l'étude complète de la question, parce que les ombres de l'autre moitié du Tore sont évidemment symétriques. La courbe de l'ombre extérieure est Q'E'L', et celle de l'ombre intérieure M'R'G'K'N'. Les points limites sont R' et K'.

288. En faisant un certain nombre de sections par des plans verticaux contenant la flamme, et traçant les rayons de lumière tangents, on trouve que le cône circonscrit intérieur coupe le Tore suivant les courbes M₁I₁RKN₁... et M₂R₂KJ₂N₂... (fig. 214). Elles rencontrent tangentiellement la courbe de contact, l'une aux points limites R et r, l'autre aux points K et k. A ces points correspondent sur le cône circonscrit des rebroussements qui se dessinent sur la surface du Tore aux points R₂, r₂, K₁ et k₁.

Les lignes d'intersection sont sur le plan vertical M'I₁R'K'₁N', et M'₂R'₂K'J'₂N'₂.

Une tangente à la courbe d'intersection est dans les plans tangents du Tore

au point considéré, et au point qui lui correspond sur la courbe de contact. Ainsi, la tangente au point (R_2, R'_2) est l'intersection des plans tangents aux points (R_2, R'_2) et (R, R') .

Les parties réelles et utiles sont uniquement l'arc $(RMr, R'M')$ de la courbe d'ombre propre et l'arc $(r_1M_1I_1R, R'I_1M'_1)$ de la courbe d'ombre portée qui lui correspond. Il est facile de voir que l'arc $(KNk, K'N')$ de la courbe de contact n'est pas à considérer, parce qu'il se trouve dans l'ombre de la partie antérieure du Tore.

289. Les figures 216 et 217 représentent un Tore avec ses lignes d'ombre, dans le cas où les rayons de lumière sont assez peu inclinés pour qu'il en puisse passer par le vide intérieur. Les lettres établissent la correspondance avec les figures 214 et 215.

Le cône circonscrit coupe le Tore suivant la courbe $RI_1BR_2KJ_2AK_1$ (fig. 216) et une autre courbe symétrique indiquée par des minuscules. Les rayons SAB , Sab sont bitangents à la surface et aux courbes de section (art. 286). L'arc RMr de la courbe d'ombre propre est réel et utile; l'arc KNk est réel, mais la partie BNb seule est utile, parce que les arcs BK et bk sont dans l'ombre portée. Enfin, les parties réelles et utiles de la courbe d'ombre portée sont RB et rb ; elles se raccordent avec la courbe d'ombre propre en R et r , et la rejoignent avec un angle en B et b .

On peut suivre les différentes lignes sur la figure 217; on remarquera notamment en B' l'angle que forment les arcs réels et utiles.

La figure 218 montre la partie d'un plan horizontal XX' qui serait éclairée par les rayons qui traversent le Tore.

290. Nous avons représenté sur la droite de la planche 36 les perspectives des deux tores sur les tableaux TT' et tt' , en supposant l'œil au point (S, S') . Nous avons construit les figures 220 et 219, en mettant en perspective les cercles méridiens parallèles au tableau, les divisant en huit parties égales, et traçant les ellipses qui représentent les cercles parallèles passant par ces points (art. 279).

La courbe intérieure du contour apparent a quatre rebroussements, et par suite deux parties réelles et deux virtuelles. Sur la figure 220 l'arc Rr est seul réel et utile; sur la figure 219 une partie de l'arc Kk l'est également.