CHAPITRE I.

CONTOURS APPARENTS.

Généralités.

269. Les surfaces, telles que nous avons à les considérer, recouvrent des corps opaques, et la courbe de contact d'un cône circonscrit ne forme contour apparent, pour un œil placé au sommet, que quand les génératrices rectilignes sont extérieures. Si, près du point de tangence, les génératrices sont noyées dans la partie opaque, la courbe de contact n'a aucune importance.

La figure 211 représente une section faite dans le corps regardé par un plan contenant l'œil O du spectateur. On peut mener de ce point six tangentes. Les points m, r et q appartiennent au contour apparent : nous dirons que ce sont des points *réels* de contact, tandis que nous appellerons *virtuels* les points s et t situés sur des tangentes géométriques qui n'existent pas comme rayons visuels. Au point n la tangente est extérieure, mais elle traverse le corps avant d'arriver à l'œil. Ce point est donc invisible ; nous le considérerons cependant comme réel : il est dans la position de tout autre point réel, tel que m ou r, devant lequel on placerait un écran. Le point s ne peut appartenir au contour apparent quelque part qu'on suppose l'œil sur la tangente Os; le point n, au contraire, deviendrait *utile*, si l'œil était entre n_1 et n, ou au delà de n en O_1.

Si le corps opaque se trouvait de l'autre côté de la surface, comme il est représenté sur la figure 212, les points réels deviendraient virtuels, et réciproquement.

270. Les points réels et les points virtuels forment quelquefois des courbes séparées ; ainsi, dans le cas de la figure 213, qui représente une surface de révolution vue par un œil placé sur son axe, on trouve un parallèle réel mm', un second virtuel nn', et un troisième réel mais invisible rr'.

Le plus souvent les points réels et les points virtuels forment des parties distinctes d'une même courbe, et alors le contour apparent se compose d'arcs qui se terminent brusquement. On comprend qu'il est utile de connaître la position des *points limites*.

La génératrice du cône circonscrit est extérieure ou intérieure suivant que le point de contact est réel ou virtuel ; au point limite la génératrice, passant de l'intérieur du corps à l'extérieur, a un contact du second ordre avec la surface.

Cette circonstance ne peut pas se présenter sur les surfaces convexes, parce qu'elles n'ont qu'un contact du premier ordre avec leurs tangentes. La courbe de contour apparent d'une surface de ce genre est donc entièrement réelle ou entièrement virtuelle. Elle est réelle pour une sphère en relief, et virtuelle pour une sphère creuse : les génératrices du cône circonscrit à la partie supérieure de la Niche (fig. 128) sont évidemment noyées dans la maçonnerie près le point de contact.

Mais les surfaces à courbures opposées ont en chaque point un contact du second ordre avec deux de leurs tangentes qui sont les asymptotes de l'indicatrice. Les courbes de contour apparent de ces surfaces peuvent donc être composées d'arcs réels et d'arcs virtuels : aux points limites la génératrice du cône circonscrit, c'est-à-dire le rayon visuel, est une des deux asymptotes de l'indicatrice.

271. D'après un théorème dû à M. Dupin, la tangente à la courbe de contact est le diamètre de l'indicatrice conjugué avec la génératrice du cône circonscrit ; or, l'asymptote d'une hyperbole est son propre diamètre conjugué ; donc aux points limites la génératrice du cône circonscrit est tangente à la courbe de contact.

La réciproque est vraie : si la génératrice du cône est tangente à la courbe de contact, elle sera une asymptote de l'indicatrice ; elle aura par suite un contact du second ordre avec la surface, et se trouvera à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures. Le contour apparent réel s'arrêtera donc au point considéré.

Ces résultats sont soumis à certaines restrictions. Si la génératrice du cône qui est asymptote de l'indicatrice du point de contact avait avec la surface une tangence du troisième ordre, elle serait tout entière d'un même côté, en dehors du corps, par exemple, et elle ne formerait plus limite : la courbe serait réelle d'un côté comme de l'autre. On peut supposer qu'elle avait primitivement un arc virtuel, et que l'œil s'est transporté dans l'espace, de manière à le réduire graduellement et à l'anéantir.

Nous ne reviendrons pas sur ces cas d'exception ; toutes les questions de géométrie en présentent d'analogues.

272. Le rayon visuel d'un point limite étant tangent à la courbe de contact qui peut être considérée comme la directrice du cône circonscrit, on voit que ce cône aura un rebroussement (art. 109), et que par suite le contour apparent en aura un en perspective. Une des deux branches qui s'y réuniront sera réelle, et l'autre virtuelle.

En général, quand, en construisant la perspective d'une surface, on trouve un rebroussement, on doit regarder que l'une des branches est réelle et l'autre virtuelle, car la courbe du contour apparent sur la surface ne peut passer sans rebroussement d'une partie à l'autre du cône perspectif, qu'en touchant la génératrice qui forme arête, et celle-ci se trouvant ainsi tangente à la courbe de contact est une asymptote de l'indicatrice ; elle a donc une tangence du second ordre avec la surface et elle doit être, par suite, à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures.

Nous avons supposé que le contour apparent dans l'espace n'avait pas de rebroussement. Il est toujours facile de voir, d'après la forme de la surface, si un rebroussement perspectif est la reproduction d'un rebroussement réel : dans ce cas les deux branches seraient de même nature.

273. Quand on construit directement en perspective le contour apparent d'une surface, les rebroussements se dessinent nettement, et on voit où les arcs réels s'arrêtent. Si l'on établit d'abord une projection, les tangentes à la courbe de contact menées par l'œil détermineront sur cette ligne les points limites ; il n'y aura d'exception que quand le plan tangent sera perpendiculaire au plan de projection, parce qu'alors la tangente à la courbe de contact et le rayon visuel, même lorsqu'ils sont distincts dans l'espace, se confondent en projection.

Nous allons éclaircir ces considérations par l'examen de la perspective d'une surface à courbures opposées.

Perspective d'un piédouche.

(Planche 35.)

274. Conformément aux observations contenues dans les articles 247 et 249, nous plaçons le plan de vue (O, O′) dans le plan passant par l'axe du piédouche, et perpendiculaire au tableau AB.

Nous déterminerons d'abord les projections du contour apparent sur les figures géométrales 207 et 208, puis nous construirons la perspective par les procédés généraux de la Géométrie descriptive, selon la méthode exposée aux articles 107 et suivants. Nous ne nous occuperons que de la scotie.

Si nous menons à la méridienne de cette surface de révolution une tangente quelconque N′I′, en la supposant entraînée dans le mouvement de rotation, elle engendrera un cône qui touchera la scotie tout le long du parallèle (NN_1, $N'N'_1$) : il aura son sommet en C″; sa trace sur le plan d'horizon sera le cercle IVv.

Les tangentes OV et Ov sont, sur le même plan, les traces de deux plans qui passent par l'œil, et qui, touchant le cône auxiliaire le long des génératrices CV et Cv, touchent également la scotie aux points M et m où ces droites rencontrent le parallèle considéré. On obtient ainsi pour la projection horizontale du contour apparent deux points qui correspondent à un seul point M′ sur l'élévation. Pour déterminer avec précision les points V et v, il convient de tracer un cercle sur CO comme diamètre.

La construction que nous venons d'indiquer peut être simplifiée. Les triangles semblables CvO, Cm_1m, donnent :

$$\frac{Cm_1}{Cm} = \frac{Cv}{CO} \text{ (fig. 207) ou } \frac{C'M'}{C'N'_1} = \frac{C'''I'}{C'''O'} \text{ (fig. 208).}$$

Les trois droites $O'N'$, $C'''C'$ et $I'M'$, partageant en parties proportionnelles les horizontales $M'N'$ et $I'O'$, doivent se couper en un même point C^{IV}. On obtiendra donc directement le point M' sur le parallèle $N'N'_1$ en traçant la droite $O'N'$ jusqu'à l'axe, et joignant $C^{\text{IV}}I'$.

On peut, par cette construction, tracer très-rapidement la projection verticale du contour apparent, et même en déterminer les parties parasites situées au delà des points E' et e', car une courbe considérée dans son étendue géométrique ne s'arrête pas brusquement.

275. En menant du point O des tangentes à la projection horizontale de la courbe de contact, nous déterminons six points K, k, R, r, G et g. Aux deux derniers le plan tangent est vertical ; les quatre autres sont nécessairement des points limites (art. 273). D'après cela et eu égard à la forme de la scotie, on voit que le contour apparent n'est réel que sur les arcs RGK et rgk.

En menant de O' des tangentes à la courbe sur l'élévation, on aura les points K' et R' qui correspondent nécessairement à ceux qui ont été déterminés sur le plan.

La manière dont nous obtenons les points limites ne les fait pas connaître avec une grande précision. Pour fixer leur position, on peut employer des courbes d'erreur disposées de diverses manières, mais ces procédés sont peu utiles.

Si l'œil s'élevait graduellement, les points K' et R' se rapprocheraient de G'; chacun des arcs réels diminuerait ainsi peu à peu et finirait par disparaître.

276. Le tableau XY est transporté parallèlement à lui-même en X_1Y_1, et ramené dans le plan vertical CO par une rotation autour de la verticale du point c_1. Un point (μ, μ') perspective d'un point quelconque (M, M') du contour apparent est porté en (μ, μ'_1) et amené en (μ_2, M) (fig. 209).

On voit sur la perspective (fig. 209) les rebroussements qui séparent les arcs virtuels des arcs réels. Ces derniers, du reste, ne sont pas visibles sur toute leur longueur : le bandeau cylindrique supérieur cache leurs extrémités voisines de R et de r.

Le socle n'est pas représenté sur la figure 208. Sa perspective est obtenue, en partie, à l'aide des points principaux de fuite et de distance réduite, suivant la méthode ordinaire.

277. Le théorème des tangentes conjuguées donne un moyen de construire les tangentes aux projections du contour apparent, à l'aide des rayons de courbure de la méridienne, mais nous ne nous arrêterons pas à cette question, parce qu'il n'est pas nécessaire de connaître les tangentes des projections pour construire celles des perspectives, qui sont tout simplement les traces, sur le tableau, des plans tangents de la scotie aux points du contour apparent.

Ainsi, pour avoir la tangente en m (fig. 209), il suffit de porter en s la trace (s, s') de la tangente $(ms, M's')$ du parallèle (fig. 207 et 208). Cette construction, qui est parfaitement applicable aux points limites, fait connaître les tangentes aux rebroussements. On peut employer, au lieu de la tangente au parallèle, celle de tout autre courbe de la surface, par exemple du méridien. Ainsi, pour avoir la tangente au point k (fig. 209) nous traçons la tangente ll_1 du méridien principal, au point l (fig. 208) situé sur le même parallèle que K'. En ce dernier point la tangente du méridien est $K'l_1$, et en projection horizontale KC ; elle perce le tableau au point (u, u') que l'on reporte en u (fig. 209). Le point U a une position symétrique.

278. D'après ce que nous venons de voir, la position de la tangente au contour apparent d'une surface dans l'espace dépend de la forme de l'indicatrice, tandis que la tangente en perspective est obtenue par la simple considération du plan tangent. Il résulte de là que si la méridienne du Piédouche était formée d'arcs de courbes différentes ayant un contact du premier ordre seulement, le contour apparent serait brisé à chaque parallèle de raccordement [1], mais présenterait à l'œil une ligne continue.

[1] Plusieurs auteurs n'ont pas pris garde à cette circonstance, et par suite ont présenté des figures peu exactes pour la perspective du Piédouche.

Nous ferons ressortir ce résultat par un exemple. Considérons un cylindre terminé par une demi-sphère (fig. 192 et 193). Le contour apparent, par rapport à un œil (O, O′), se projette sur la ligne brisée M′N′R′, tandis que la perspective (fig. 194) se compose d'une demi-ellipse prolongée par les deux tangentes extrêmes.

279. La construction que nous venons de donner pour la perspective d'un piédouche est plus commode pour la discussion que dans la pratique. Lorsqu'on veut représenter un corps de ce genre, il convient d'employer la méthode des enveloppes que nous avons déjà indiquée à l'article **144**.

En tout point du contour apparent d'une surface le plan tangent passe par l'œil; par suite la tangente du contour apparent en un point, et celle de toute autre ligne de la surface qui la croise en ce point, ont le même plan perspectif, et les lignes qui représentent ces courbes sur le tableau se touchent.

D'après cela si l'on considère sur une surface une série de courbes qui se succèdent dans un ordre régulier, et qui, par conséquent, puissent être considérées comme des génératrices, elles toucheront toutes, en perspective, le contour apparent qui sera ainsi leur enveloppe. Il peut arriver qu'au delà d'une certaine position, ces génératrices se trouvent disposées de manière à n'avoir pas d'enveloppe; alors le contour apparent ne s'étendra pas sur la partie correspondante de la surface.

280. Nous prenons pour génératrices les parallèles de la surface de révolution. Les points 1, 2, 3... (fig. 208) sont les centres des cercles que nous considérons. On construit leurs perspectives (fig. 210), soit à l'aide des points de fuite et de distance réduite, soit par les procédés généraux de la Géométrie descriptive. Ils doivent être assez rapprochés pour que le tracé de l'enveloppe ne présente pas d'incertitude.

L'arc RK est extérieur aux ellipses; au delà du point K la courbe devient intérieure. Ainsi, les cercles 7 et 9 sont touchés, l'un extérieurement, l'autre intérieurement. L'enveloppe est composée de branches, dont deux se réunissent sur le cercle limite 8 en le touchant l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur.

Les cercles sont pleins à l'intérieur, par conséquent les arcs RK et *rk* qui les touchent à l'extérieur forment un contour apparent réel. Par la raison contraire, les arcs R*r* et K*k* sont virtuels.