LIVRE V.

THÉORIE DES EFFETS DE PERSPECTIVE.

CHAPITRE I.

PROBLÈME INVERSE DE LA PERSPECTIVE.

Exposé de la question.

193. Nous avons vu comment on peut établir une perspective lorsqu'on connaît le plan et l'élévation des objets; nous allons maintenant chercher à rétablir le plan et l'élévation d'après la perspective. Le problème paraît indéterminé, car d'abord la position de l'œil est incertaine, ensuite chaque point peut être placé arbitrairement sur le rayon visuel qui passe par sa perspective; cependant, la connaissance que nous avons des lois auxquelles les objets représentés sont soumis dans leur forme fait disparaître l'indétermination en grande partie, et quelquefois même complétement.

Recherche de la ligne d'horizon.

194. S'il y a sur le tableau des droites qui, dans l'espace, doivent être horizontales et parallèles, comme il s'en trouve sur presque tous les édifices, on obtiendra la ligne d'horizon en faisant passer par leur point de concours une perpendiculaire aux verticales.

Si le point de concours est éloigné, on pourra opérer comme il est indiqué à la fin de l'article 15 (fig. 20).

Une seule horizontale fuyante AB (fig. 30) suffit pour déterminer la ligne d'horizon, quand on connaît les rapports des parties dans lesquelles elle est partagée ; car, après avoir porté sur une horizontale de front A*b* des longueurs qui soient dans les rapports donnés, on peut, par les points correspondants, faire passer des lignes qui, représentant des horizontales parallèles, devront concourir en un certain point F de la ligne d'horizon.

Cette construction est souvent applicable. Les croisées d'un édifice ont généralement des largeurs égales, et les trumeaux sont aussi égaux, sinon sur toute la longueur du bâtiment, du moins dans une même partie. On peut, en conséquence, réunir sur la ligne des appuis la largeur des croisées à celle des trumeaux voisins pour former des segments égaux sur une ligne horizontale.

On obtient le même résultat, en projetant les petites arêtes des marches d'un escalier sur l'une d'elles prolongée (fig. 90, 94 et 144).

L'horizon de la mer ou d'une plaine peu inclinée donne la ligne d'horizon (fig. 68).

195. Pour les paysages, on est quelquefois réduit à déterminer la ligne d'horizon par la comparaison de personnages situés à des plans de front différents. Si la disposition des lieux permet de regarder la partie du sol sur laquelle ils sont placés comme à peu près horizontale, les lignes qui passent à leurs pieds et celles qu touchent leurs têtes sont des horizontales sensiblement parallèles.

Si l'un des personnages paraît plus élevé que l'autre, il faut apprécier la hauteur et l'abaisser convenablement, en conservant sa grandeur.

196. Il convient, toutes les fois que cela est possible, de multiplier les vérifications pour la ligne d'horizon, d'abord parce que sa position a beaucoup d'importance, comme nous le montrerons; ensuite parce qu'on reconnaît immédiatement si le dessin est fait avec assez de soin pour qu'il puisse servir de base à des constructions exactes.

Recherche du point principal et de la distance.

197. Le point principal est souvent au milieu de la ligne d'horizon, mais nous verrons qu'il n'y a à ce sujet aucune règle absolue. Il convient, en conséquence, de déterminer directement ce point, quand cela est possible.

On peut placer le point principal et le point de distance sur la ligne d'horizon quand on connaît les véritables grandeurs de deux angles BAG, CAE (fig. 182) formés par des horizontales et ayant leurs sommets en un même point A.

Si, en effet, nous faisons tourner le plan de ces lignes autour d'une horizontale de front MN, jusqu'à le rendre parallèle au tableau, le point A ira se placer en A_1, à l'intersection des segments capables des angles donnés, tracés sur CE et BG. Dans le rabatement la verticale A_1A' devient AA' et fait connaître le point principal (art. 22). En prenant $A'K$ égal à $A'A_1$, on peut tracer la ligne AK dirigée vers le point de distance.

Il est convenable de placer la ligne MN de manière que sa distance au point A soit une fraction simple de la distance de ce point à la ligne d'horizon, le quart, par exemple; alors $A'K$ est précisément la distance principale réduite au quart.

Quelquefois les segments capables se coupent en deux points au-dessus de la ligne MN; on doit alors choisir celle des deux solutions qui satisfait le mieux à la question. Dans l'exemple de la figure 184, le point de section A_1 donne un point principal à peu près au milieu de la ligne d'horizon, et une distance quadruple de A_1A' qui est bien appropriée à la grandeur du tableau. Le point A_2 conduit, au contraire, à une solution inadmissible, car le point principal serait très-éloigné, et la distance insuffisante. Il pourrait y avoir doute si les cercles se coupaient en des points voisins. Quand les deux angles ont un côté commun, un des deux points de section est sur la trace du plan de front, et il n'y a qu'une solution.

Si les angles donnés CAE, KBI (fig. 185) avaient leurs sommets en des points différents A et B, on ramènerait la question au cas précédent en transportant l'un d'eux par des parallèles qui seraient représentées, en perspective, par des droites ayant les mêmes points de fuite sur la ligne d'horizon. On pourrait, si cela était plus commode pour les constructions, transporter les deux sommets en un troisième point.

Quand un côté AE de l'un des deux angles considérés est parallèle à la ligne d'horizon (fig. 183), on n'a plus qu'un segment capable BA_1G; mais l'angle que CA fait avec AE ou sa parallèle MN étant donné, on peut tracer immédiatement le relèvement CA_1 de CA. Le second segment est remplacé par la droite CA_1.

198. Si l'on connaît plus de deux angles réellement différents, c'est-à-dire non formés par des parallèles, on aura une vérification. Si l'on n'en connaît qu'un, on supposera le point principal au milieu de la ligne d'horizon, et alors on pourra déterminer la distance. Dans le cas où elle paraîtrait trop grande ou trop petite, on déplacerait un peu le point principal.

Quand l'angle donné est droit, si l'un de ses côtés est parallèle à la ligne d'horizon, l'autre est dirigé vers le point principal, et la distance reste indéterminée.

On peut appliquer, dans bien des circonstances, les constructions que nous venons de faire connaître. Ainsi, on trouve souvent sur les édifices et dans les intérieurs des horizontales qu'on sait être à angle droit. On a quelquefois sur un plafond, sur un parquet, ou à la base d'une colonne, un quadrilatère qui représente un carré; dans ce cas, deux côtés contigus formant avec la diagonale des angles connus, on peut déterminer le point principal et le point de distance. On obtiendra une solution complète toutes les fois que l'on aura la perspective d'un rectangle dont les côtés seront dans un rapport donné.

199. Si deux horizontales AB, AC (fig. 186) sont égales dans l'espace, la ligne dirigée de leur origine commune A au point G, milieu perspectif de BC, sera l'apothème du triangle isocèle BAC; l'angle CGA sera donc droit, et pourra servir aux constructions des articles précédents.

En plaçant le point principal au milieu de la ligne d'horizon en P, on trouve que le point de distance est sur le prolongement de GK. La moitié de la distance est donnée par la longueur RI interceptée sur une droite tracée à égales distances du point G et de la ligne d'horizon.

Si l'on voit sur un tableau une porte ouverte, la largeur de la porte devant être égale à l'ouverture de la baie, on a immédiatement un triangle horizontal isocèle.

Si les deux horizontales égales AB, AC (fig. 187) sont en perspective également inclinées sur la ligne d'horizon, le point principal sera sur la bissectrice, et la distance restera indéterminée.

Quand deux longueurs égales AB, CE (fig. 191) sont dans un même plan horizontal, on peut, par une construction facile, les transporter parallèlement à elles-mêmes, de manière à leur donner une origine commune M. Alors, si elles n'étaient pas primitivement parallèles, on a un triangle horizontal isocèle NMR, sur lequel on agit comme précédemment. Ce tracé peut être employé pour un tableau sur lequel on voit deux portes, deux fenêtres ou deux meubles dont les largeurs non parallèles sont jugées devoir être égales.

Lorsque deux longueurs horizontales égales ne sont pas dans un même plan, il faut ramener l'une d'elles dans le géométral de l'autre. Lorsque deux droites sont dans un rapport donné, on établit l'égalité par une réduction convenable de l'une des deux (art. 17).

200. Quand on connaît le véritable rapport de deux droites, l'une de front, l'autre horizontale, on prend sur la première une longueur perspectivement égale à la seconde, puis on la fait tourner dans son plan de front, de manière à la rendre horizontale.

Supposons, par exemple, que la verticale AC soit triple de l'horizontale fuyante AB (fig. 188); AE, tiers de AC, sera égal à AB. Ramenant cette longueur sur une parallèle à la ligne d'horizon, le triangle *e*AB est isocèle horizontal.

On emploie cette construction quand on juge qu'une voûte est en plein cintre. Prenant le diamètre horizontal de la courbe de tête, on le divise en deux parties égales : chacune d'elles a la même longueur que la montée.

Souvent on peut supposer le rapport qui existe entre la hauteur et la largeur d'une porte, d'une fenêtre, d'une marche ou d'un meuble ; on détermine alors une distance approximative.

201. Lorsqu'on connaît la perspective d'un cercle horizontal, on peut déterminer le point principal et le point de distance sur la ligne d'horizon. Pour cela on mène deux cordes parallèles à cette ligne ; la droite qui passe par leurs milieux est la perspective du diamètre perpendiculaire au tableau : elle fait connaître le point principal. Traçant ensuite quatre tangentes, deux parallèles à la ligne d'horizon, et les deux autres dirigées vers le point principal, on obtient un trapèze dont les diagonales sont dirigées vers les points de distance.

On peut encore déterminer le centre, milieu perspectif du diamètre dirigé vers le point principal, et former des triangles isocèles avec des rayons (art. 199).

Si l'on a la demi-ellipse S_1NS (fig. 45) qui représente la partie visible de la base d'un cylindre, on trouvera le centre de la courbe au milieu

C du diamètre SS_1. On mènera ensuite une tangente horizontale : son point de contact N fera connaître le rayon NC qui est dirigé vers le point principal. On prendra CM égal à CN, on déterminera le milieu perspectif de NM qui sera le centre du cercle, et on formera des triangles isocèles.

202. Quand une droite est perpendiculaire à un plan, si l'on peut déterminer le point de fuite F′ de la droite (fig. 56), et la ligne de fuite A′B′ du plan, en abaissant une ligne F′A′ perpendiculaire sur A′B′ on obtiendra le point principal P sur la ligne d'horizon ; la distance sera donnée par une moyenne proportionnelle entre PA′ et PF′ (art. 47).

Restitution de divers objets simples.

(Figure 81.)

203. Le Prisme fait connaître la ligne d'horizon par ses horizontales parallèles. Comme il y a lieu de penser que les angles situés dans les plans horizontaux sont droits, on a une première condition pour déterminer la position du point de vue.

La Pyramide ne peut évidemment rien indiquer, si l'on n'a pas des données sur sa forme. Dans le cas où l'on aurait quelque motif de supposer que le triangle de la base est équilatéral, en le considérant deux fois comme isocèle on aurait deux conditions, et la Pyramide suffirait à elle seule pour déterminer le point de vue. La condition donnée par le Prisme fournirait alors une vérification.

Les points principaux étant connus ou supposés, on restituera le Prisme sans difficulté ; mais il y a pour la Pyramide une indétermination qui ne disparaîtra que si l'on peut, par quelque considération, assigner sur la base la position probable de la projection du sommet.

(Figure 82.)

204. Le point de concours des génératrices qui forment le contour apparent du Cylindre fait connaître la ligne d'horizon.

Pour déterminer le point de vue, on a les deux conditions que la base soit un cercle, et que son plan soit perpendiculaire aux génératrices.

On mènera à la base deux tangentes verticales, et, joignant les points de tangence, on aura le diamètre horizontal ; on prendra son milieu, et, traçant le diamètre vertical, on aura deux longueurs égales (art. 200).

Joignant un point quelconque du diamètre horizontal au point de fuite F des génératrices, ces deux lignes seront à angle droit.

Les constructions que nous venons d'indiquer sont entourées de diverses vérifications auxquelles nous croyons inutile de nous arrêter.

La restitution du Cylindre et de la direction des rayons de lumière ne présente aucune difficulté.

(Figure 83.)

205. Le Prisme fait connaître la ligne d'horizon. On détermine ensuite la position du point de vue par l'une ou l'autre des deux bases du Cylindre (art. 201).

Le Cylindre suffit à lui seul pour résoudre entièrement le problème; car si l'on prend sur les deux bases des points correspondants, on pourra tracer des couples de cordes parallèles en aussi grand nombre qu'on voudra.

(Figure 84.)

206. Le point de concours f des droites MN, AB, A_1B_1... fera trouver la ligne d'horizon. On déterminera ensuite le point de fuite F des grandes arêtes. La droite qui passerait par F et f serait la ligne de fuite du plan CEE_1C_1.

On prolongera les arêtes AC, BE, A_1C_1 et B_1E_1 jusqu'à leur point de concours, que l'on trouvera sur la verticale du point F, ce qui indiquera que les plans latéraux du Prisme sont verticaux, comme cela devait être.

Il y a lieu de penser que ces arêtes sont perpendiculaires au plan CEE_1C_1. Ayant leur point de fuite et la ligne de fuite du plan, nous pouvons déterminer la position du point de vue dans le plan d'horizon (art. 202).

Restitution des édifices représentés par des vues obliques.

207. Quand un tableau représente un intérieur, un édifice ou une construction quelconque, on y trouve généralement deux séries de lignes horizontales à angle droit. Si la vue est oblique, l'œil est sur un demi-cercle horizontal dont les extrémités sont aux points de fuite de ces lignes.

Le dessin présente quelquefois des données avec lesquelles on peut achever de déterminer la position du point de vue par une des constructions indiquées dans les articles précédents. Les arcades représentées sur la figure 103 paraissent être en plein cintre (art. 200). On peut facilement tracer sur la figure 94 les horizontales du profil d'angle qui contient le point m ; ces lignes font des angles de quarante-cinq degrés avec les arêtes des grandes marches, et avec les arêtes des marches en retour (art. 197).

Pour les figures 68, 90, 126 et 144, on supposera d'abord et provisoirement le point principal au milieu de la ligne d'horizon.

208. Les points principaux de fuite et de distance étant obtenus d'une manière exacte ou très-approchée, la restitution sera généralement facile. Supposons que l'on s'occupe de la figure 68.

On donnera aux échelles des largeurs et des hauteurs aC et CZ une position telle, que les figures géométrales restituées aient une grandeur convenable : ici la réduction des dimensions du tableau est de moitié, et par suite le point C est le milieu de H'I'. Plusieurs horizontales parallèles concourent au point F; on prendra ce point pour point de fuite de la perspective; on déterminera la distance accidentelle correspondante (art. 23), et, la réduisant à moitié, on aura le point de la distance accidentelle réduite à l'échelle des figures géométrales.

La préparation est maintenant terminée, et on peut construire le plan et l'élévation, en faisant, dans un ordre inverse, les constructions représentées sur les figures 68 et 69, et expliquées aux articles 52, 53 et 54.

La Croix restituée se trouvant avoir des proportions convenables, on adoptera comme définitive la position choisie pour le point de vue.

On obtiendra les dimensions absolues de la Croix, et par suite l'échelle des figures restituées, par la grandeur des personnages de droite qui paraissent être sur le même plan horizontal que le socle. Si l'on n'avait que le personnage de gauche, comme il est évidemment sur une élévation, on devrait l'abaisser sur le géométral, et cette opération présenterait quelque incertitude.

Au lieu de donner au plan des échelles de front une position arbitraire, et de déterminer ensuite le rapport de réduction, nous aurions pu disposer les échelles de manière que les figures géométrales fussent dans un rapport donné avec la grandeur naturelle des objets.

209. On peut faire la restitution par la méthode de la corde de l'arc (art. 43). Pour cela on déterminera le point de distance relatif à la direction Ir (fig. 68), et on fera tourner le plan de la face antérieure de la Croix autour de la verticale II_4, jusqu'à l'amener dans le plan du tableau.

Cette construction est très-commode quand le point accidentel de distance peut être placé sur la feuille de dessin. On doit surtout s'en servir pour déterminer la forme exacte d'une courbe située sur un plan vertical.

210. La restitution des figures géométrales dans les divers exemples de perspective qui sont dans notre atlas se fera, quand le point de vue aura été déterminé, de la même manière que pour la figure 68. En général, quand les différents points d'un objet peuvent être rapportés à un géométral, on obtient sans difficulté, pour chacun d'eux, la hauteur, la largeur et l'éloignement qui fixent sa position dans l'espace.

Lorsque le point de vue n'a pas été obtenu d'une manière entièrement rigoureuse, on ne doit l'adopter définitivement que quand toutes les parties des objets restitués ont des proportions convenables.

Restitution des édifices représentés par des vues de front.

211. Quand un édifice est représenté par une vue de front, les lignes de l'une des séries sont dirigées vers le point principal, qu'elles font connaître d'une manière précise ; mais la distance reste entièrement indéterminée.

On voit que la position du point de vue présente beaucoup plus d'incertitude dans les vues de front que dans celles qui sont obliques ; mais on peut quelquefois, comme pour celles-ci, arriver à une détermination géométrique par des considérations collatérales.

212. Sur la figure 150, la largeur de la porte devant être égale à celle de la baie, on peut construire un triangle isocèle qui fera trouver la distance (art.199).

Pour la figure 127 on pourra supposer que le petit berceau est en plein cintre, et on déterminera la longueur du rayon vertical qui passe par le milieu perspectif de la partie *cg* de la droite A_1P. Il suffira de limiter ce rayon à la génératrice du petit berceau la plus élevée dans l'espace, qui est celle du point *r*, où la tangente à la courbe passe par P. Ayant deux longueurs égales, l'une fuyante, l'autre verticale, on trouvera facilement la distance (art. 200).

213. Pour la figure 98 on fera une supposition sur le rapport de deux longueurs, l'une horizontale fuyante, l'autre de front, telles que la largeur et l'épaisseur d'un pilier, ou bien la hauteur des arcades et leur espacement.

Les figures 95 et 96 sont des restitutions aussi correctes, sous le rapport géométrique, que la figure 97 ; cependant on doit les rejeter, parce qu'on ne peut pas supposer, sans motifs, que les grandes lignes d'une galerie aient une direction oblique sur les plans des arcades.

214. Le plafond (fig. 149) est une vue de front. Le point de concours des arêtes des piliers donne le point principal. Il y a lieu de penser que les berceaux sont en plein cintre ; les demi-axes des ellipses des arcs doubleaux sont ainsi des longueurs égales, les unes de front, les autres fuyantes. On peut, d'après cela, trouver la distance ; la restitution se fait ensuite sans difficulté.

Il convient de remarquer que si l'épure est faite avec un grand soin, la position des centres des cercles de la coupole permettra de déterminer la hauteur de chacun d'eux : il n'y aura qu'à restituer la ligne des centres avec ses divisions. Ainsi on joindra H au point L'_3, milieu de $L'_1L'_2$ (fig. 148); on ramènera les centres sur HL_3, puis sur une droite AA'' ; enfin, sur $P'A'$, qui est l'échelle des éloignements ici transformée en échelle des hauteurs. On joindra les divers points à *d*, et on aura sur $A'A'''$ les hauteurs cherchées.

Restitution des édifices qui présentent des directions biaises ou des parties courbes.

(Figure 109.)

215. On voit immédiatement que le Pont est biais, parce que les droites de la route n'ont pas le même point de fuite que les lignes en retour du premier dé du parapet, qui doivent être perpendiculaires aux plans destêtes.

On le reconnaîtrait également en étudiant les situations relatives des lignes de la route et du chemin de fer. Pour qu'elles fussent à angle droit, il faudrait que l'œil se trouvât sur le demi-cercle *fg* (fig. 104), et on ne peut pas y trouver une position pour le point de vue ; il serait ou trop rapproché du tableau, ou rejeté sur le côté d'une manière inadmissible.

La construction serait faite sur le tableau, comme il est indiqué à l'article 197 ; nous l'avons représentée sur un plan séparé pour éviter la confusion, et parce que cette figure existait déjà.

Pour déterminer la position du point de vue, on supposera le point principal au milieu de la ligne d'horizon, et l'on opérera sur les lignes rectangulaires du premier dé du parapet, celui qui est le plus à droite.

La restitution ne présente pas de difficulté. En projetant le point u sur la droite xx', on déterminera la largeur en plan du talus mesurée suivant l'obliquité du chemin de fer. Pour construire les courbes bases des cônes, on prendra pour plan horizontal celui du terrain naturel.

(Figure 112.)

216. Ici le biais est évident, car les lignes de la route sont de front, et il est impossible de placer le point principal au point de fuite des horizontales du chemin de fer.

On déterminera la position du point de vue comme pour la figure 109, en supposant le point principal au milieu de la ligne d'horizon, et les dés des parapets rectangulaires.

La restitution est facile; on prendra le plan du terrain naturel pour géométral.

La méthode de la corde de l'arc (art. 209) devra être employée pour déterminer la forme exacte de la courbe de tête.

(Figure 121.)

217. On tracera deux horizontales parallèles r_6f_6 et r'_6f_6, l'une par les extrémités inférieures des arêtes, l'autre par les naissances des arcs, que l'on déterminera avec tout le soin possible. Le point f_6 fera connaître la ligne d'horizon.

On peut encore relever des points de l'horizontale inférieure des deux premiers piliers, sur la courbe qui passe par le point m''_3. On aura ainsi des couples de cordes horizontales parallèles. Cette construction a déjà été indiquée à l'article 205.

On voit que la ligne d'horizon peut être déterminée d'une manière précise, bien que sa position ne soit pas indiquée nettement à l'œil, comme dans les exemples précédents.

218. Les horizontales qui sont à la base d'un pilier se rencontrent à angle droit, et, comme aux piliers de gauche et de droite ces lignes ne sont pas parallèles, on a des données suffisantes pour placer le point de vue dans le plan d'horizon.

On pourrait résoudre la question par un des arcs du bandeau, car dès qu'on connaît la perspective d'un cercle horizontal, la position du point de vue est déterminée : la solution que nous avons donnée à l'article 201 convient au cas de l'hyperbole comme à celui de l'ellipse. Toutefois les tracés donnent quelque embarras dans l'application, par suite de l'éloignement du centre du cercle, et de la seconde branche de l'hyperbole. Il est rare d'ailleurs qu'un arc d'hyperbole soit tracé avec assez d'exactitude pour qu'on puisse appuyer sur lui des constructions.

(Figure 128.)

219. On détermine la ligne d'horizon par le point de concours f des lignes d'assise du mur.

Le point C, milieu perspectif de AB, étant obtenu, on trace la ligne CC' qui est égale à CB, ce qui donne une première condition pour la position du point de vue. On en aura une seconde en remarquant que Cf' doit être perpendiculaire à $C'f$; la droite Cf' sera déterminée soit par le centre δ du demi-cercle du trompillon, soit par le point de concours η des lignes telles que $B\varepsilon$.

220. L'analyse que nous venons de faire montre que le problème inverse de la perspective est bien loin d'avoir l'indétermination qu'on lui attribue ordinairement : la plupart des tableaux qui représentent des édifices se prêtent à une discussion géométrique régulière.