CHAPITRE III.

OMBRES PORTÉES OU REÇUES PAR DES SURFACES COURBES.

Ombres d'un cône.

(Figure 85.)

165. Pour que le cône soit déterminé, il est nécessaire d'avoir la projection I′ de son sommet sur le plan horizontal de la base.

s étant le point de fuite des rayons, on trouve en I_1 l'ombre du sommet. Les traces des plans d'ombres sont ainsi I_1A et I_1B. La génératrice IA est la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la partie vue du cône.

Ombres d'un cylindre vertical portant un prisme droit.

(Figure 83.)

166. Cette épure ne présente presque aucune difficulté; nous ne nous occuperons que de la courbe kE.

Considérons un rayon sM passant par un point M de l'arête RG du prisme; sa projection horizontale s'M′ coupe la trace du cylindre en un point m' qui, relevé sur sM, donne le point m de la courbe d'ombre.

La tangente se projette sur la droite m'N$'$, tangente à la base du cylindre ; elle rencontre d'ailleurs la droite RG, parce qu'elle est dans le plan d'ombre de cette arête : relevant donc N$'$ en N, on trouve que la tangente est Nm.

Les extrémités de la partie utile de la courbe se projettent sur les points k' et E$'$; pour les avoir dans l'espace, il faut tracer les rayons projetés s'K$'$ et s'G$'$, puis relever d'abord K$'$ et G$'$ sur RG, et ensuite k' et E$'$ sur sK et sG.

Ombres d'un cylindre horizontal.

(Figure 82.)

167. Les droites AL, aL traces des plans verticaux qui contiennent les bases des cylindres doivent être données.

Les deux plans tangents au cylindre et parallèles aux rayons de lumière ont pour ligne de fuite la droite Fs, qui passe par les points de fuite F et s des génératrices et des rayons de lumière. Les plans des bases ayant pour ligne de fuite Ll, leurs intersections avec les plans tangents que nous considérons auront leur point de fuite en l. Menant de ce point des tangentes à la base la plus rapprochée, on détermine les points extrêmes B et C des génératrices qui forment séparation d'ombre et de lumière. On pourrait déterminer directement de la même manière les points b et c.

La trace lB du plan tangent sur le plan de la base rencontre le plan horizontal en B_2 : l'ombre de la génératrice Bb passe par ce point et est dirigée vers le point F. Les rayons sB et sb placent en B_1 et b_1 les extrémités de cette ligne. On obtient également ces points en employant les projections des rayons telles que s'B$'$.

Les mêmes opérations déterminent la droite C_1c_1 ombre de Cc; elle est invisible sur la plus grande partie de sa longueur.

Pour achever le contour de l'ombre sur le plan horizontal, il faut déterminer l'ombre des arcs BMC, *bac* des bases.

La construction est représentée pour le point M; son ombre M_1 est à la rencontre du rayon sM avec sa projection s'M'. Comme ces lignes se coupent très-obliquement, il est préférable de considérer le plan qui contient la génératrice et le rayon de lumière du point M. Sa trace lM sur le plan de la base perce le plan horizontal en M_2; l'ombre de la génératrice du point M est donc FM_2 : sa rencontre avec sM donne le point M_1.

Les tangentes aux deux courbes en M_1 et M doivent se rencontrer sur la droite B_2L, car la première est l'ombre de la seconde, qui a précisément sa trace au point de rencontre E.

Enfin, comme les droites qui joignent les points homologues des courbes divergent toutes de s, la tangente commune NN_1 doit passer ce point. Les relations d'homologie sont évidentes.

En général, une figure plane et son ombre sur un plan sont homologiques en perspective. Le lieu de la flamme et l'intersection des plans sont le centre et l'axe d'homologie.

Ombres dans un berceau.

(Planche 20.)

168. Les rayons sont parallèles : s est leur point de fuite, s' celui de leurs projections horizontales.

Les droites $s'b$, s'A, s'1, s'3, s'7 prolongées sont les limites des ombres horizontales. Les lignes 2.4 et s.6 convergent vers G (art. 155, fig. 76).

Parlons maintenant de la courbe vk.

Les plans parallèles aux génératrices du berceau et aux rayons de lumière ont pour ligne de fuite Ps; leurs traces sur le plan de la seconde tête sont des parallèles à cette ligne telles que $v'v''$ ou $k'k''$. Le rayon sv' rencontre en v la génératrice Pv''.

Sur le plan de la seconde tête les traces des plans tangents au cylindre d'intrados le long de la génératrice Pv'', et au cylindre d'ombre le long du rayon sv', sont $v''u$ et $v'u$. La tangente au point v étant l'intersection de ces plans doit passer par u.

Une construction analogue fait trouver la tangente qk.

Ombres dans des arcades.

(Planche 16.)

169. Nous supposons que les arcades représentées fig. 103 sont éclairées par un réverbère dont la flamme a sa perspective en s, et la perspective de sa projection en s' sur le sol, et en s'' sur le géométral déplacé et abaissé (fig. 101).

Nous construirons d'abord la courbe cc', intersection du cylindre d'intrados de la première arcade par le cône d'ombre qui a la courbe E_8N pour directrice, et son sommet au point lumineux s.

Des plans passant par le sommet du cône, et parallèles aux génératrices du cylindre, couperont les deux surfaces suivant des droites dont les intersections formeront la courbe cherchée.

La ligne sF dans l'espace et s''F' sur le géométral est une parallèle aux génératrices du cylindre menées par le point lumineux; elle rencontre le parement du mur au point (g', g). Les traces des plans auxiliaires sur le parement divergent donc du point g. L'une d'elles coupera la courbe de tête aux points q et m; le rayon de lumière sq rencontre en n la génératrice Fm de l'intrados.

Cette construction est répétée sur la quatrième arcade. La courbe s'y raccorde en n' avec la ligne droite de l'ombre portée sur la face du pilier par le pilier précédent.

En menant du point g des tangentes aux courbes de tête, on détermine les points tels que q''' (4ᵉ arcade), où la courbe commence. Le triangle $q''n''m''$ est alors réduit à un point.

Nous avons vu (art. 70) comment on construit les tangentes à la courbe de tête en des points tels que q'' et m''. Ces lignes sont les traces des plans tangents au cône d'ombre et au cylindre d'intrados. La tangente à la courbe d'ombre en n'' étant leur intersection passera par le point t''.

Si la courbe de tête est un arc de cercle ou d'ellipse, la courbe d'ombre sera un arc d'ellipse; car, quand un cône et un cylindre ont pour directrice commune une ellipse, leur intersection est une courbe du même genre.

170. Il faut maintenant chercher l'intersection des cônes d'ombre avec le mur du fond de la galerie.

Pour avoir l'ombre portée par un point (N, N′) on trace le rayon sN et sa projection s''N′, puis on relève en M le point M′, où cette dernière ligne rencontre la trace du mur de la galerie sur le géométral.

Le parement du mur du fond et le plan de tête étant parallèles, les tangentes des deux courbes aux points homologues, tels que N et M, sont parallèles dans l'espace, et, en perspective, se rencontrent en un point situé sur la ligne de fuite des plans verticaux des courbes. Cette droite étant éloignée, nous construirons la tangente en M, comme intersection du plan tangent au cône le long de la génératrice sN, avec le plan du mur.

Nous allons chercher les intersections des deux plans avec un plan auxiliaire que nous prenons vertical. Sa trace sur le géométral est une droite quelconque $r'e'$.

L'intersection du plan du mur et du plan auxiliaire est une verticale $r'r$.

La tangente (Ne, $N'e'$) et le rayon (sN, $s''N'$) rencontrent le plan auxiliaire en (e, e') et (i, i'). L'intersection de ce plan avec le plan tangent au cône est donc ie.

Les traces des deux plans sur le plan auxiliaire se coupent en r; la tangente cherchée est donc rM.

Nous avons opéré sur le géométral comme s'il n'avait pas été déplacé : c'est que les figures de ce plan ne servent qu'à donner des points e', i', r' qui fixent la position de diverses verticales.

Le cône qui a pour directrice la courbe intérieure de l'arcade trace la ligne kK. Les deux courbes se rencontrent en k sur le rayon qui passe par c'.

La ligne Y est obtenue à l'aide de la courbe de tête de la seconde arcade.

Les lignes d'ombre sur le sol ne présentent aucune difficulté : ce sont des droites qui divergent de s' sur le sol, et de s'' sur le géométral déplacé. Celle de ces lignes qui a son origine en E_7 prend au delà du deuxième pilier une courbure peu sensible : elle est alors l'ombre de la partie de la courbe de tête de la seconde arcade voisine de E_6.

Nous avons indiqué le lieu de la flamme sur le plan et l'élévation (fig. 99 et 100). Ordinairement on détermine directement ce lieu sur le tableau, d'après les effets qu'on veut obtenir.

Ombres d'une niche vue obliquement.

(Planche 22.)

171. Nous allons nous proposer de déterminer les ombres de la niche dont la perspective, obtenue sur la planche 21 (art. 100 à 105), a été reportée sur la suivante, pour éviter la confusion des tracés. Les rayons de lumière ont leur point de fuite en s.

La détermination des lignes d'ombre aa' et $a'A'$ ne présente aucune difficulté. A'K est l'intersection du cylindre d'ombre avec le cylindre de la Niche. L'ombre d'un point M_1 s'obtient en traçant la projection $s'M'_1$ du rayon de lumière, et relevant le point M' en M sur le rayon sM_1.

La tangente de la courbe au point M est l'intersection des plans tangents au cylindre de la Niche et au cylindre d'ombre. Le premier a pour trace MT_1 sur le plan horizontal, et T_1T sur le plan de tête. La trace du second sur ce même plan est M_1T. La tangente cherchée perce donc le plan de tête au point T.

172. La courbe KC_1 est la trace du cylindre d'ombre sur la partie sphérique de la Niche. Nous allons rappeler le procédé graphique qui sert à construire cette courbe, tel qu'on le trouve dans tous les traités de géométrie descriptive.

Nous supposons que la niche représentée sur les figures géométrales 130 et 131 est éclairée par des rayons parallèles à la droite, dont les projections sont Os'' et $O's$.

Par le centre C de la sphère concevons un plan parallèle aux rayons, et perpendiculaire au plan de tête; sa trace sur ce plan sera la droite NE parallèle à $O's$. Il coupe la sphère à laquelle appartient la surface supérieure de la Niche, suivant un cercle dont nous rabattons la moitié postérieure en N_1i_1 (fig. 132). Le rayon de lumière (NE, N'E') est rabattu en N_1E_1, le point E_1 étant déterminé de manière que E_1E_2 soit égal à $E'E''$. Le point i_1 serait l'ombre de N_1 sur la surface sphérique prolongée; la droite C_1i_1 est la projection de la courbe d'ombre.

Cela résulte de ce que, quand un cylindre coupe une sphère suivant un grand cercle, il la rencontre nécessairement suivant un autre grand cercle, et de telle manière que le diamètre, intersection des plans des cercles, soit perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

Ainsi, si le grand cercle projeté sur N_1M (fig. 132 *bis*) est la directrice d'un cylindre dont les génératrices soient parallèles à N_1i_1, le grand cercle projeté sur i_1j appartiendra également au cylindre, comme il est facile de le reconnaître.

Pour déterminer divers points de la courbe d'ombre, il faut concevoir des plans parallèles à celui de la figure 132. Chacun d'eux coupera le cylindre d'ombre, le plan de tête et le plan de la courbe, suivant trois droites qui formeront un triangle semblable à celui dont les projections sont $N_1C_1i_1$ et $N'ci'$ sur les figures 132 et 130.

173. Si nous avions les points de fuite g et e (fig. 129) des sections des plans auxiliaires par le plan de tête et par le plan de la courbe d'ombre, et l'intersection CC_1 de ces deux derniers plans, nous construirions facilement la perspective KC_1. La droite gm' étant la trace d'un plan auxiliaire, les intersections avec le plan de la courbe, et avec le cylindre d'ombre, seraient m_1e et $m's$; le point d'ombre serait donc m.

On trouverait que la tangente à la courbe rencontre le plan de tête au point t, où la trace $m't$ du plan tangent au cylindre d'ombre coupe la trace CC_1 du plan de la courbe.

Tout le problème se réduit donc à la détermination des points de fuite g et e, et de la droite CC_1.

174. Le point f' rapporté de la figure 128 est le point de fuite des perpendiculaires au plan de tête. Les plans auxiliaires étant perpendiculaires à ce plan, et parallèles aux rayons de lumière, ont pour ligne de fuite $f's$. La ligne de fuite du plan de tête est fg. Le point de rencontre g est donc le point de fuite des intersections de ces plans.

175. Maintenant traçons un cercle du point C comme centre, avec un rayon égal à CC' (fig. 128).

Le plan auxiliaire qui passe par le centre de la sphère a pour trace sur le plan de tête gCN (fig. 129), et sur le plan de front du point C la droite nCi parallèle à la ligne de fuite $f'g$. Si l'on rabat ce plan sur le plan de front en le faisant tourner autour de ni, le grand cercle suivant lequel il coupe la sphère se placera sur le cercle que nous avons tracé. Voyons ce que devient le point N dans ce mouvement.

Les perpendiculaires à l'axe de rotation ni situées dans le plan auxiliaire ont leur point de fuite sur la ligne de fuite $f's$, au pied u de la perpendiculaire abaissée du point principal P (art. 47). La droite Nu est donc dans l'espace perpendiculaire à ni ; elle devient en rabattement nN_1, et le point N va en N_1.

Le rayon de lumière sN devient N_1I_1, et rencontre le cercle en I_1. Quand on relève le plan auxiliaire, la perpendiculaire I_1i devient iu, et le point I_1 se place en I sur le rayon de lumière Ns. La trace du plan auxiliaire sur le plan de la courbe est donc CI ; elle fait connaître le point de fuite e.

Le triangle NCI est celui qui est représenté par $N_1C_1i_1$ et $N'ci'$ sur les figures 132 et 130.

136. On peut obtenir la ligne CC_1 en menant du point g une tangente à la courbe de tête, et joignant le centre C au point de contact C_1 ; mais il convient d'opérer avec plus de précision.

La droite cherchée, étant perpendiculaire aux plans auxiliaires, a son point de fuite sur la droite uP prolongée, à une distance du point P que nous pourrions facilement construire, car son produit par Pu est égal au carré de PD (fig. 128). Mais il est plus simple de remarquer que ce point de fuite est également sur gf, et qu'en conséquence tout le problème consiste à mener une droite du centre C au point éloigné où Pu et gf se rencontrent. Nous avons tracé l'horizontale Cn', puis $n'g$ et une seconde horizontale quelconque $c'u'$ que nous avons relevée de manière que le point u' se plaçât sur uP ; le point c' se trouve alors en C_0 sur la droite cherchée.

137. Nous pouvons déterminer les points de fuite g et e, et la ligne CC_1 par les procédés ordinaires de la géométrie descriptive, en restituant le plan et l'élévation de la Niche. Ces opérations sont représentées sur les figures 130 et 131, qui nous ont déjà servi pour les explications.

Nous opérons sur le plan de front du centre de la sphère ; en d'autres termes nous supposons que le tableau passe par ce point. Une partie de la Niche se trouve alors en saillie. L'échelle des figures est réduite à moitié.

Une droite Pg'' (fig. 130) étant prise arbitrairement pour trace du tableau sur le plan, nous rapportons les points C', P, s' et f (fig. 129) en c, P, s'' et g'' (fig. 130), et nous plaçons l'œil à la distance PD (fig. 128). La ligne Og'' donne la direction du plan de tête de la Niche.

Nous traçons la ligne d'horizon $O'f$ parallèlement à Og'', et nous construisons l'élévation d'après les données de la figure 128.

La direction du rayon de lumière est déterminée par la position de l'œil (O, O'), et par celle du point de fuite (s'', s) : la longueur ss' est la moitié de la ligne indiquée par les mêmes lettres sur la figure 129.

Quand le point (i, i') est déterminé, on cherche les points de fuite des droites $(NC, N'c)$ et (Ci, ci'); on trouve les points (g'', g) et (e'', e) qu'on reporte sur la figure 129.

L'intersection du plan de tête par le plan de la courbe est la droite représentée par $N'c$, CC_1 et C_1 sur les figures 130, 131 et 132. On la met en perspective par les procédés ordinaires.