CHAPITRE II.

VOUTES.

Perspective d'une galerie fuyante. — Comparaison des vues de front et des vues obliques sous le rapport du tracé.

(Planche 15.)

64. La figure 97 est le plan d'une galerie fuyante que l'on veut mettre en perspective. La largeur du tableau est augmentée dans le rapport de 1 à 8.

Nous prenons une distance réduite P.$2d$ (fig. 98) double de la longueur Op du plan, parce que celle-ci est trop petite eu égard à l'augmentation des dimensions du tableau. Les éloignements mesurés sur le plan doivent, en conséquence, être doublés.

On obtient le point M en portant huit fois *am* à partir de A. Le point N est déterminé de la même manière. On prend MP pour échelle des éloignements.

Lorsque les points r, v, r' et v' sont obtenus, au lieu de continuer à porter les éloignements sur AB, on peut opérer comme il est indiqué à l'article 19 (fig. 23); puis, quand les lignes qui convergent vers $2d$ coupent trop obliquement la droite PM, on réduit à moitié la distance et les longueurs *rs* et *st*. On remplace ainsi le point $2d$ par d, et les droites sP et tP par s_1P et t_1P.

Connaissant le rapport qui existe entre la hauteur et la largeur d'une arcade, on peut déterminer les naissances. Elles sont sur deux droites r'_1P et u'_1P. Enfin, les courbes étant de front, leur forme est exactement conservée.

65. Quand le point de fuite d'une série de droites peut être placé sur le tableau, il importe peu qu'elles soient obliques ou perpendiculaires : les constructions sont les mêmes dans les deux cas. Pour le montrer, nous avons donné le plan d'une galerie fuyant obliquement (fig. 96), et disposée de manière à avoir la même perspective que la galerie perpendiculaire au tableau que nous venons d'examiner.

Le point de fuite accidentel p a la même position que le point principal de la figure 97. La longueur Pd sur le tableau est égale à la distance rectangulaire p'O ; mais on peut, même avec un point de fuite accidentel, prendre une distance réduite rectangulaire, pourvu que les éloignements soient aussi mesurés perpendiculairement au tableau, car ces quantités se trouvent diminuées dans un même rapport. Les points r, v, r'... se trouvent donc déterminés d'une manière exacte par les constructions déjà faites sur la figure 98 : il n'y a rien à y changer.

Nous avons supposé que les arcades restaient de front pendant que les grandes lignes de la galerie devenaient obliques (fig. 96). Cette disposition ne se présentera que rarement. En général l'édifice sera fait sur un plan rectangulaire, et, si la vue est oblique, les courbes des arcades paraîtront modifiées, et devront être construites par points; mais nous avons voulu montrer, d'une manière précise, ce qu'il y avait de commun et de différent dans les constructions relatives aux vues obliques et aux vues de front.

Sur la figure 95 nous avons augmenté d'un tiers la distance Op' de l'œil au tableau ; alors augmentant dans le même rapport les éloignements des différents points, nous avons une troisième galerie qui a la même perspective que les deux autres.

Arcades vues obliquement.

(Planche 16.)

66. Les arcades que nous voulons mettre en perspective sont représentées sur les figures géométrales 99 et 100. Nous prenons le point f pour point de fuite : les éloignements seront mesurés parallèlement à Of. La largeur du tableau est AB (fig. 101).

Cette droite AB sera notre ligne d'horizon pour la perspective du plan. Nous plaçons au-dessous d'elle la ligne de terre $A_1 B_1$, à une distance suffisante pour que la figure se développe sans confusion.

67. La largeur AB du tableau n'est pas dans un rapport simple avec la ligne ab qui lui correspond sur le plan ; il faut, en conséquence, déterminer par des triangles semblables la position du point de fuite sur la ligne d'horizon. Nous prenons les longueurs Ab et Af (fig. 101) égales à ab et af (fig. 99) ; nous traçons la droite BA_1 et sa parallèle bA', la droite $A'f$ et sa parallèle A_1F'. F' est le point de fuite ; la droite aC menée par le point A', parallèlement à la ligne d'horizon, est l'échelle des largeurs : son origine est a sur $F'A_1$.

On peut être porté à penser qu'on éviterait les constructions que nous venons d'indiquer, sans altérer la perspective, en reculant ou en avançant la ligne ab dans l'angle optique, de manière à la mettre dans un rapport simple avec AB. Les lignes des arcades resteraient en effet les mêmes ; mais on verrait une étendue différente du sol, et, par suite, le tableau serait modifié.

68. Pour que les lignes de construction ne se coupent pas sous un angle trop aigu, nous prenons deux distances $F'.2d$ et $F'.4d$, l'une double, l'autre quadruple de Of (fig. 99). Les éloignements mesurés sur le plan devront être doublés ou quadruplés, suivant qu'on se servira de l'un ou de l'autre des deux points de distance réduite.

Nous portons les points de la ligne *ab* (fig. 99) sur l'échelle des largeurs (fig. 101), et les joignant à F′, nous obtenons la perspective des lignes fuyantes du plan. Si l'on tenait à mieux assujettir leur position, on pourrait transporter l'échelle aA' en $a''A''$, à une distance quadruple de la ligne d'horizon : toutes les largeurs devraient être augmentées dans le même rapport.

Pour achever la perspective du plan, il n'y a plus qu'à déterminer sur deux des lignes fuyantes I.I′ et V.V′ les points 1, 2, 3 et 4, 5, 6, puis à les joindre par des transversales.

69. La perspective du plan étant terminée, nous supposons qu'elle a été déplacée, et nous prenons AB pour base du tableau.

Nous déterminons la ligne d'horizon HH′, en portant de A en *h* sa hauteur relevée sur la figure 100, et traçant F′H parallèle à *fh*.

Enfin nous plaçons l'échelle des hauteurs CZ.

70. Nous ne nous arrêterons pas à la perspective des piliers, et nous passons immédiatement aux courbes.

Nous prenons sur la courbe de tête (fig. 100) le point le plus élevé, et d'autres points placés symétriquement; nous les rapportons sur la ligne *ab* en l, v, l_1 ; nous plaçons ces points sur l'échelle des largeurs (fig. 101), et les joignant au point de fuite accidentel, nous déterminons sur U′V′ les projections l_6, v_4, l_4.

Nous portons ensuite sur l'échelle CZ les hauteurs des points considérés prises sur l'élévation. Comme nous avons plusieurs arcades de même forme, et que les points ont été choisis symétriquement, au lieu de construire leurs diverses hauteurs perspectives, nous allons tracer les horizontales L_3 L_1, V_3 V_1 sur lesquelles ils sont placés. Ces droites sont déterminées à l'aide des verticales des points U′ et V′. On relève enfin les points de leurs projections horizontales. La construction n'est indiquée que sur la seconde arcade.

Pour avoir la perspective de la tangente en L (figure 102), on se sert du point T ou du point G. On trace dans le premier cas l'horizontale

T_8 T_1, et dans le second sa parallèle G_3 G_1, ; enfin on prend T_4 sur la verticale du sommet V_4, ou G_4, G_6 sur les arêtes prolongées des piliers.

La ligne V_5 V_1 est tangente à toutes les courbes.

Les droites $J_6 L_6$, $T_4 V_4$ et $J_4 L_4$ se rencontrent en un même point I_4.

Il suffira généralement d'avoir les cinq points E_4, L_4, V_4, L_6, E_6 et leurs tangentes, pour que la courbe puisse être tracée avec une exactitude suffisante.

La méthode que nous venons d'indiquer convient à toutes les courbes. Dans le cas d'un demi-cercle on pourra employer la construction de l'article 38 ou celle de l'article 39. Cette dernière est représentée pour la détermination d'un point sur la troisième arcade.

71. On peut obtenir la courbe intérieure par les mêmes procédés, mais il est plus simple de la déduire de la courbe de tête, en traçant les génératrices de l'intrados qui passent par les points déterminés L_4, V_4, et relevant sur ces lignes les points l_5, v_5, qu'on trouve immédiatement sur le géométral.

Pour la tangente, on transporte les points G_4 et T_4 en G_5 et T_5.

Nous donnerons aux articles 169 et 170 l'explication du tracé des ombres.

Perspective d'un pont biais.

(Planche 17, figures 104, 105, 107, 108 et 109.)

72. Les figures géométrales 104 et 105 représentent, à l'échelle de deux millimètres et demi par mètre, un pont biais établi sur une route pour le passage d'un chemin de fer. La figure 105 est une coupe verticale sur la ligne RR′ du plan.

Après avoir placé l'œil O et la base *ab* du tableau (fig. 104), on détermine le point de fuite *f* des lignes de la route : ce sera le point de fuite de la perspective.

Les dimensions du tableau sont quadruplées.

Nous nous occuperons d'abord de la perspective du plan (fig. 107). Les points accidentels F′ et d sont placés, comme à l'ordinaire, sur la ligne d'horizon H′ F′. CX est l'échelle des largeurs.

Nous déterminons la position des lignes fuyantes par les points 3, 4, 5... de la droite ab du plan, que nous reportons sur l'échelle des largeurs à leurs distances du point a.

Nous divisons les lignes des points 3 et 9, comme elles le sont sur le plan, en portant sur la ligne de terre A′B′, à partir des points 3′ et 9′, les éloignements des différents points de division mesurés sur la figure 104, et en joignant au point accidentel de distance.

Les angles des dés de la première tête ont été déterminés par la méthode ordinaire. Les dés de la seconde tête ne sont pas vus.

73. La perspective du plan étant terminée, nous plaçons la base AB du tableau (fig. 109), et au-dessus d'elle la ligne d'horizon HF à une hauteur quadruple de la longueur O′ω (fig. 105).

Nous avons représenté sur la figure 108, à une échelle quadruple de celle de la figure 105, la moitié de la tête de l'arche, et la partie correspondante du parapet. Les diverses hauteurs doivent alors être reportées sur la droite C′Z′. L'élévation du terrain naturel peut indifféremment être portée sur la ligne CZ à la grandeur même qu'elle a sur la figure 105, ou au quadruple sur C′Z′.

Les droites qui divergent du point H représentent des horizontales parallèles échelonnées aux diverses hauteurs considérées, dans le plan vertical dont la trace sur le géométral est H′C′.

74. Les différents points 3′, 4′, 5′..., situés sur A′B′, sont relevés aux hauteurs des points V, II, I... situés sur la verticale du point C′. On obtient ainsi le polygone 3″ 4″ 5‴..., profil du terrain par le plan du tableau. On joint les différents sommets au point F, et on a la perspective des talus et des trottoirs.

On voit que le tableau représente une certaine étendue du terrain situé en avant de la ligne ab du plan. Il devait en être ainsi parce que nous avons pris, pour former le bord du cadre, la trace AB d'un géométral passant par les points les plus bas. Si, au contraire nous avions pris pour base du tableau la ligne 3″ 9″ située sur le terrain naturel, le socle des pieds-droits et divers autres objets situés bien au delà de la ligne *ab* du plan n'auraient pas été vus.

Celles des lignes du cordon et du parapet qui se trouvent dans le plan de tête sont déterminées par les points où elles coupent les verticales des points k et K. La première est immédiatement divisée par les lignes de hauteur : on reporte sur la seconde les divisions de la verticale du point K′.

On obtient les autres lignes du parapet de la même manière, au moyen de verticales très-voisines de celles des points k et K′. Nous ne les avons pas tracées, pour éviter la confusion.

Nous n'avons laissé subsister les lignes des opérations relatives à la courbe de tête que pour les points n et n' qui se projettent en n_1 et n_1' (fig. 107) sur les lignes des trottoirs. Ces points sont désignés sur les figures 104 et 105 par les lettres N_1, N'_1 et N, N′ ; ils correspondent, sur la figure 108, au point N qui détermine la ligne de hauteur H. VI.

(Figures 104, 105, 106, 110, 111 et 112.)

75. Nous avons fait une seconde vue du même pont, prise d'un point élevé O_1, O'_1 (fig. 104 et 105). Le tableau est parallèle aux lignes de la route ; celles du petit chemin lui sont perpendiculaires sur le plan.

Les dimensions du tableau sont triplées.

A′B′ et $P'H_1$ (fig. 110) sont les lignes de terre et d'horizon de la perspective du plan.

Les constructions sont appuyées sur les points principaux P′ et d de fuite et de distance réduite. P′A′ est l'échelle des éloignements représentée sur le plan par $a_1 y$; XaC est l'échelle des largeurs. Les points

F_1' et F_2' sont les points de fuite des obliques qui passent par les points 3 et 9 de la ligne a_1b_1 du plan.

Nous plaçons sur l'échelle des largeurs les points 1, 2, 3... de cette ligne a_1b_1, à leurs distances du point a, et nous les joignons à P'. Nous déterminons sur P'A' les positions des points 1, 2, 3... de la ligne a_1y du plan. Les droites de la route étant de front, on peut ensuite les tracer immédiatement; pour celles du chemin de fer, il faut avoir d'autres points, par exemple ceux qui sont sur la droite P'6', axe du petit chemin. Il est avantageux, pour la précision du tracé, de se servir du deuxième point de distance réduite d_1, comme nous l'avons indiqué.

76. Le point accidentel de distance D', correspondant aux lignes du chemin de fer, peut être placé sur la ligne d'horizon.

Du point e (fig. 104) traçons l'arc $e_1\,e_2$, et menons par l'œil une ligne $O_1\,d_1'$ parallèle à sa corde : d_1' est, sur le plan, le point cherché (art. 13). Le point D', qui lui correspond sur la perspective du géométral, peut être employé utilement pour diverses constructions, et notamment pour placer les dés des parapets.

Amenons la droite TT' (fig. 110) sur l'échelle des largeurs, en la faisant tourner autour de son point de rencontre avec cette ligne. Tous les points décriront des arcs dont les cordes concourront au point D'; le point L ira ainsi en l. Les longueurs sont reproduites sur l'échelle CX, à la grandeur même qu'elles ont sur le plan. Nous pouvons donc porter sur cette ligne les divers points de la droite tt' (fig. 104) à leurs distances du point l relevées sur le plan, et ensuite ramener ces points sur TT' par des droites divergeant de D'.

La même opération doit être répétée pour la ligne $T_1\,T_1'$ et pour les droites sur lesquelles se trouvent les angles intérieurs des dés. Nous avons représenté par des amorces les cordes qui servent pour la ligne $T_1\,T'_1$: on se règle sur le point L' qui va en l'.

Cette construction ne pouvait pas être employée pour la figure 107; car en cherchant sur ab (fig. 104) le point accidentel de distance relatif à tt', on trouve un point d' qui ne peut pas être placé sur la ligne d'horizon du tableau (fig. 107).

77. Nous plaçons la base AB du tableau (fig. 112), et au-dessus d'elle la ligne d'horizon H′ H, à une hauteur triple de la longueur $\omega_1 O_1'$ (fig. 105). Nous relevons sur cette droite les points F_1', P' et F_2' en F_1, P et F_2.

Nous traçons la droite H_1C_1 (fig. 111), la verticale du point C qui est l'échelle des hauteurs, et la verticale de C_1; nous déterminons le point I sur le prolongement de l'horizontale AB, et nous le joignons au point H de la ligne d'horizon.

Nous prenons sur H 1 (fig. 108), une longueur Hc_1 triple de Hc, et nous élevons la verticale c_1z. Les hauteurs déterminées sur cette ligne par les divergentes sont triples de leur grandeur à l'échelle des figures géométrales, et, par suite, telles qu'elles doivent être sur la verticale du point C_1 (fig. 111). Portant donc sur cette ligne, à partir de I, les hauteurs relevées sur c_1z (fig. 108), et joignant ces points à H, nous avons toutes nos horizontales échelonnées. Cette construction nous donne plus de précision que si nous avions porté sur l'échelle CZ les hauteurs prises sur les figures géométrales 105 et 106.

78. Les tracés sont maintenant faciles. On relève le point j' en j à la hauteur de V (fig. 111), qui est celle du terrain naturel dans le plan du tableau; on trace jj_1 et on rapporte sur cette ligne 3′ et 9′ en 3″ et 9″. La droite 4″.5″.7″.8″ est au-dessous de la précédente du triple de la grandeur 3.4 (fig. 106), car ces lignes sont dans le plan du tableau. On opère de la même manière pour la ligne 5‴.7‴.

Nous joignons 3″ et 9″ aux points de fuite F_1 et F_2.

Pour avoir le point de fuite F_3 des lignes inclinées du chemin, nous menons par le point O_1 (fig. 104) une droite $O_1 f_3$ parallèle à ces lignes considérées sur la figure 106. La distance pf_3 doit être triplée, et portée ensuite de P en F_3 (fig. 112).

Les points 4″, 5″, 7‴, 7″ et 8″ doivent être joints à F_3. Les rencontres des lignes donnent les points λ et μ où commencent les talus des déblais. En deçà les trottoirs sont horizontaux, et leurs lignes divergent du point principal.

Les courbes sont construites par points. Les contours apparents des cônes sont des droites tangentes aux courbes.

On place directement les rails sur la figure 112, en partageant la largeur du chemin de fer mesurée dans une direction quelconque, comme elle l'est sur le plan (fig. 104). Cette division en parties proportionnelles est représentée à la gauche de la figure 112 (Voir l'article 17).

Vue de front d'une voûte d'arêtes.

(Planche 18, figures 113, 114 et 115.)

79. Une voûte d'arêtes est formée par la rencontre de deux berceaux qui ont même plan de naissance et même montée. Quand les berceaux sont droits, on donne toujours aux intrados des formes telles que chaque arête se trouve située dans un plan vertical.

Les points principaux de fuite et de distance réduites sont indiqués sur la ligne d'horizon (fig. 114).

Les données sont : 1° l'horizontale de front A_1B_1 trace sur le sol du plan du parement des premiers piliers ; 2° les points l, c et k qui déterminent la position et la largeur des piliers et des berceaux perpendiculaires au tableau ; 3° la hauteur cc_1 des piliers dans le plan de front de A_1B_1 ; 4° la courbe c_1Sk_1 trace de l'intrados sur le même plan. Cette ligne est un demi-cercle; elle pourrait avoir toute autre forme sans que la construction fût modifiée.

Nous devons connaître en outre l'épaisseur du pilier et la largeur du berceau parallèle au tableau. Ces grandeurs mesurées à l'échelle du plan de front de A_1B_1, et réduites dans le même rapport que la distance, c'est-à-dire à moitié, sont portées sur A_1B_1 en cI et IJ.

La forme de l'intrados du deuxième berceau est déterminée par la condition déjà indiquée, que les projections horizontales des arêtes soient des lignes droites.

80. La perspective des piliers ne pouvant présenter aucune difficulté, nous nous occuperons immédiatement des voûtes.

Les projections des arêtes sont les droites $c'k''$, $c''k'$, $c'''k^{\text{IV}}$...

Pour avoir les points situés sur une génératrice PM, nous projetons M en M_4 sur le géométral, nous traçons la projection PM_4 de la génératrice, et nous relevons en m, m', m''... les points m_4, m'_4, m''_4..., où cette droite rencontre les projections des arêtes.

On peut déterminer les hauteurs par une construction placée hors du cadre du tableau. Cette disposition est surtout convenable pour les génératrices qui, telles que PN, seraient coupées très-obliquement par les projetantes.

Joignons un point quelconque F de la ligne d'horizon à B_1 et à M_2 (fig. 115) : les droites FB_1, FM_2 représentent deux horizontales situées dans un même plan vertical, l'une sur le sol, l'autre à la hauteur de la génératrice considérée. On ramène le point n'_4 en n_3', puis en n_2' sur FM_2, et enfin en n' sur PN.

On relève les points s et s' où les arêtes se croisent, des points s_4 et s'_4, soit directement, soit par l'intermédiaire de la figure 115, à l'aide de la ligne FS_2.

81. Traçons la droite TE tangente en M à la courbe d'intrados c_1S, et joignons TP. Les tangentes des arêtes aux points m', m'', n' et n'' passeront par le point t où la ligne TP rencontre la verticale du point s.

Ces tangentes, en effet, rencontrent nécessairement la verticale du point s, et elles ne peuvent le faire que sur la ligne TP, intersection du plan vertical qui contient la génératrice SP, par les plans tangents au cylindre d'intrados le long des génératrices PM et PN.

On peut obtenir le point t en ramenant s_4 en s_3, puis en t_2 (fig. 115).

En employant la verticale du sommet s on a cet avantage qu'une seule opération détermine quatre tangentes, mais on peut se servir de toute autre verticale située dans le plan de la courbe considérée. Nous avons indiqué la construction par les arêtes prolongées des pieds-droits. On joint à P le point E de la tangente MT ; les points d'intersection E, e', e''... appartiennent aux tangentes des points m, m', m''...

Ce tracé doit être préféré pour les points voisins des naissances, parce que le point T serait trop élevé.

Les tangentes au sommet s sont horizontales; elles ont, par conséquent, les mêmes points de fuite que leurs projections $c'k''$, $c''k'$. L'un de ces points est en G; il donne immédiatement la tangente sG. S'il avait été éloigné, on eût relevé le point z_4 en z sur FS_2, ou le point V_4 en V sur la ligne VS trace, sur le plan de front de A_1 B_1, du plan tangent au cylindre le long de la génératrice PS.

On peut déterminer la tangente de la seconde arête au point s, en prenant SV_1 égal à SV.

En général, pour tracer une arête $c'_1k''_1$, il suffira de déterminer le sommet s, deux points m' et n'', et les tangentes. On a d'ailleurs les naissances et on sait que les tangentes y sont verticales.

Les opérations sont les mêmes pour les voûtes voisines, mais on peut se dispenser de tracer une nouvelle courbe d'intrados et ses tangentes.

Menons la verticale xy au milieu de la largeur k_1q_1, prenons xR égal à Mx et traçons PR : il suffira de rapporter sur cette ligne n_2, n'_2, n''_2 en r, r', r'' par des parallèles à la ligne d'horizon.

Le point Q placé symétriquement à S, par rapport à xy, fera connaître les sommets v et v'.

La figure auxiliaire 115 permet d'établir simultanément le tracé de toutes les voûtes.

82. Dans cette épure, nous avons opéré sur le plan de front de

A_1B_1, exactement comme si c'était le plan du tableau. Cette manière de procéder est fréquente en Perspective. En réalité le plan du tableau n'a pas de position déterminée ; nous pouvons supposer que ce soit le plan de A_1 B_1 et qu'on représente une partie du sol situé en deçà.

Sur quelque plan de front que l'on opère, les points de distance sont toujours les mêmes, car la distance de l'œil au tableau est égale à sa distance à un plan de front quelconque, réduite à l'échelle de ce plan. Les proportionnalités indiquées par la figure 4 rendent cette proposition évidente.

83. Nous allons maintenant nous occuper de la détermination des points les plus élevés des perspectives des arêtes. Nous examinerons d'abord cette question sur la figure 113, qui comprend la projection d'une voûte d'arêtes sur le plan d'horizon, et deux élévations sur des plans perpendiculaires aux cylindres d'intrados. La droite *ab* est la trace du tableau.

Les traces d'un plan passant par l'œil O, et tangent au cylindre transversal B, seront : sur l'horizon la droite $O'O''$ parallèle au cylindre et au tableau, sur l'élévation de gauche $O''b$, et sur le tableau l'horizontale projetée en I. Cette droite est la perspective de toutes les lignes du plan, et notamment de la tangente de l'arête $c''k'$ au point i. On voit que le point i est celui que nous cherchons, puisque la tangente de l'arête en ce point devient horizontale en perspective.

84. Il faut maintenant faire sur le tableau les constructions que nous venons d'indiquer.

Les diverses lignes qui sont dans le plan d'horizon ayant leur perspective sur la ligne d'horizon, nous sommes obligé, pour les rendre distinctes, de les projeter sur un plan horizontal, et nous choisissons naturellement celui de la ligne A_1 B_1 (fig. 114). La perspective du point O' (fig. 113), situé dans le plan de front de l'œil, est à l'infini sur $c''k'$ (fig. 114). La perpendiculaire au tableau LO' (fig. 113) est donc représentée par la ligne PL' (fig. 114) parallèle à $c''k'$. Prenons son intersection L′ avec A_1 B_1 trace du plan de front de la courbe c_1Sk_1, et relevons L′ en L dans sa position naturelle sur la ligne d'horizon : la tangente L*a* fera connaître la génératrice P*i*.

On détermine le point *i* sur la ligne P*a* par le procédé ordinaire.

La parallèle à la ligne d'horizon menée par le point *i* serait le contour apparent du cylindre transversal, s'il se présentait en relief au spectateur. Cette droite touche les perspectives de toutes les courbes tracées sur l'intrados.

Si le point L′ avait été éloigné, nous aurions pris l'intersection de PL′ avec la trace d'un autre plan de front dans lequel nous aurions construit la courbe d'intrados. On peut opérer sur le plan du demi-cercle $c_1^{v}k_1^{v}$ qui est tout tracé. Le point *l′* relevé en *l* fait connaître le point *a′* de la génératrice P*a*.

Vue oblique d'une voûte d'arêtes.

(Planche 19.)

85. Après les épures que nous avons expliquées, celle que nous présentons ne peut offrir aucune difficulté, bien que nous ayons fait des tracés plus complets qu'il ne serait nécessaire dans la pratique, parce que nous avons voulu montrer les relations graphiques qui existent entre les différentes courbes, et qui permettent de faire rapidement le dessin, quelle que soit la position de la voûte par rapport au tableau.

La voûte est barlongue. Nous avons supposé que les dimensions horizontales des piliers sont proportionnelles aux ouvertures des berceaux ; en d'autres termes, que les projections horizontales des arêtes des différentes voûtes sont sur les mêmes droites prolongées.

La largeur *ab* du tableau (fig. 122) est quadruplée.

L'édifice présente quatre séries de droites parallèles : les génératrices des berceaux, et les horizontales des plans des arêtes. Deux des points de fuite sont éloignés; les deux autres *f* et *g* (fig. 122) peuvent être placés en F' et G' (fig. 124) sur la ligne d'horizon AB du géométral. Toute la perspective est appuyée sur ces deux points, comme dans la construction exposée à l'article 12. Pour éviter la confusion, nous n'avons tracé sur la figure 122 que quelques-unes des lignes de construction qui sont indiquées sur la perspective du plan.

aCb (fig. 124) est l'échelle des largeurs. Les points de *ab* (fig. 122) y sont rapportés. L'origine est au point *a* correspondant à *a* (fig. 122), ou à *b* correspondant à *b*, suivant que les points déterminés doivent être joints à F′ ou à G′.

Si un seul des points de fuite avait pu être utilisé, on aurait eu recours au point accidentel de distance réduite.

86. La base du tableau est placée sur la ligne d'horizon du géométral, et la nouvelle ligne d'horizon HH′ (fig. 126) est établie, d'après sa hauteur, sur la figure 123.

La section droite de l'un des berceaux doit être donnée; ici c'est celle du berceau transversal qui est en plein cintre. On porte sur l'échelle CZ (fig. 125) les hauteurs de plusieurs points de cette courbe, et celles qui servent à déterminer les tangentes, puis on trace les divergentes H'I, H' J... qui représentent des horizontales échelonnées dans un même plan vertical.

Les lignes des piliers sont faciles à déterminer. Nous nous sommes servi du point p qui, reporté en p' sur BB'_1, relevé en p_1' et p_2', puis ramené en p_1 et en p_2, fait connaître les droites Fp_1 et Fp_2.

On aurait pu prendre tout autre point sur $F'k$ (fig. 124), par exemple celui qui est situé sur A_1 B_1.

Les horizontales des points M, S, T... (fig. 125) sont les traces, sur le premier plan, des plans horizontaux situés aux hauteurs considérées, en relevant les points de A_1 B_1 sur ces lignes, et joignant les uns à F et les autres à G, on peut construire toute la perspective, sans avoir besoin de relever individuellement les points du géométral. Ainsi les points T_1, T_2, T_3... sont transportés en S_1', S_2', S_3' et T_1', T_2', T_3'...; ils font connaître les sommets s_1', s_2', s_3'... et les points de concours des tangentes t_1', t_2', t_3'... Ces points sont deux à deux sur des verticales $s't'$, $s_1't_1'$... et se trouvent sur des alignements : nous avons des droites $s_4's_5's_6'$..., $t't_1't_2't_3'$...

Les points intermédiaires des arêtes peuvent être déterminés de la même manière : en relevant T_1 et M_3 en M_1' M_3', et joignant à G et à F on obtient n'_4; mais il est inutile de recommencer ainsi l'épure : on peut se contenter de relever les points n, v, n_4 sur FM_3', puis n_1, v_1, n_5 sur FM_2', et ainsi de suite. En joignant les points obtenus à t', t_1', t_2'... on obtient les tangentes.

On peut aussi déterminer ces droites par les verticales des naissances. Relevant p au point p_3 correspondant à p_3' (fig. 125), on obtient la ligne Fp_3 sur laquelle se placent les points e''', q''', e_4''' que l'on joint à n', v' et n_4'.

Les tangentes aux divers sommets forment deux séries de droites horizontales ; les unes convergent vers le point G : elles sont déjà tracées ; on obtient les autres en joignant les sommets de deux courbes situés dans le même plan, tels que s' et s_5'.

Divers points ont été relevés de la droite BB_1'. Le point N remonté en N' a fait trouver v_2' et n_2'.

Les courbes qui terminent les berceaux sur le plan kK des têtes (fig. 124) sont faciles à tracer. On relève les points l et y sur FS_2' et FM_3'. Les tangentes sont déterminées par les constructions que nous avons exposées à l'article 70, en parlant des arcades.

87. Le bord supérieur du cadre doit être assez abaissé pour que le tableau ne rencontre pas la voûte; il la couperait ici si nous avions conservé la retombée vers le pilier en avant du tableau, mais nous n'avons pas dessiné les arêtes au delà du sommet s_3'. On agit généralement ainsi ; quelques peintres croient même pouvoir supprimer les piliers les plus rapprochés du tableau et les parties de voûte correspondantes ; mais il en résulte un défaut de proportion qui est quelquefois sensible sur le plan du pavage.

Vue d'un berceau avec lunette.

(Planche 20.)

88. On se donne le point principal P, le point de distance réduite $\frac{1}{3}$ D, et toutes les lignes qui déterminent, sur le plan de tête du grand berceau, la hauteur des naissances, l'ouverture de la voûte et la forme de l'intrados.

Nous prenons pour trace du géométral sur le plan de tête, ou premier plan, la droite A'B', assez abaissée pour que les opérations puissent être faites sans confusion. Les dimensions de la feuille ne permettent pas de porter sur cette ligne, à partir de A', le tiers de l'éloignement du plan de la seconde tête ; nous le réduisons en conséquence au sixième, ainsi que la distance, et nous obtenons le point a' qui fait connaître l'extrémité a de l'arête Aa. La seconde tête, entièrement semblable à la première, est ensuite établie sans difficulté.

Nous plaçons en CM_1R_1 la moitié de la section droite du petit berceau à l'échelle du premier plan. Le centre est en A_1, à l'extrémité de la ligne de naissance.

L'éloignement du petit berceau est réduit au tiers, et ensuite porté de A' en c_1. On obtient ainsi la trace c' de la première arête prolongée jusqu'au géométral.

Toutes les données du problème sont maintenant sur l'épure.

89. Pour avoir la trace g' de la seconde arête, on porte sur la ligne de terre une longueur $c_1 g_1$ égale au tiers de l'ouverture du petit berceau, ou aux deux tiers de CA_1. On trace les arêtes jusqu'à la ligne de naissance A_1P. Nous parlerons plus loin des marches qui sont à la partie basse.

En coupant par des plans horizontaux les deux cylindres d'intrados, nous aurons des droites dont les rencontres dessineront l'arête *crg*.

Le plan horizontal, dont la trace sur le premier plan est MM_1, coupe l'intrados du grand berceau suivant la génératrice MP qui se projette sur M'P.

Pour le petit berceau, il faut supposer la section droite dont la moitié est représentée en CR_1 remise à sa place dans le plan du pied-droit A*a*. La projection de M_1 est alors au point m'_1 facile à déterminer par la longueur $c_1 m_1$ égale au tiers de l'éloignement CM_2. La génératrice du petit berceau située dans le plan horizontal considéré est projetée sur $m'_1 m'$. Son intersection m' avec la génératrice du grand berceau doit être relevée en m sur MP. En prenant $g_1 n_1$ égal à $c_1 m_1$, on obtient un second point sur la ligne MP, car chaque génératrice du grand berceau a deux points sur la courbe, jusqu'à celle qui est située dans le plan RR_1 tangent au petit berceau, et qui est elle-même tangente à l'arête.

Nous ramenons les génératrices sur le géométral pour dégager la partie haute du dessin, et porter tous les éloignements sur la même ligne de terre ; mais on pourrait faire la construction dans chaque plan horizontal considéré : on trouverait alors les divers points de l'arête à leur position même.

90. Les abscisses des points de l'arc CR_1 sont des éloignements qui doivent être réduits au tiers et portés sur A'B'. On peut faire cette opération d'une manière très-simple, en prolongeant Cc_1 d'une longueur c_1I égale à sa moitié; il suffit alors, pour avoir sur A'B' les éloignements réduits, de joindre à I les différents points de CA_1.

Si l'arc CR_1 avait été d'une grandeur gênante, on l'eût réduit au tiers, en le supposant dans un plan de front convenablement éloigné, comme nous avons généralement fait jusqu'à présent. On aurait eu alors immédiatement dans les abscisses les éloignements à porter sur $A'B'$.

91. La tangente de l'arête en un point est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres le long des génératrices correspondantes. Nous allons chercher les intersections de ces plans sur le plan de front qui contient l'axe du petit berceau. En opérant ainsi, une seule opération fera connaître la tangente à deux points m et n d'une même génératrice PM.

La trace, sur le géométral, du plan de front considéré est r'_1r'. La droite PM le rencontre au point i relevé de i'.

Le plan tangent au grand berceau, le long de la génératrice PM, a pour trace MT sur le premier plan, et la parallèle it sur le plan de front.

Le plan tangent au petit berceau coupe le plan de front suivant une horizontale, dont la hauteur $A'T_1$, à l'échelle du premier plan, est réduite à $r'_1\, t_1$ dans le plan considéré. La trace est donc t_1t.

Le point t où les traces se coupent appartient aux deux tangentes cherchées.

Au lieu d'un plan de front, nous pourrions employer comme plan auxiliaire un plan horizontal quelconque, par exemple celui des naissances. La trace du plan tangent au grand berceau serait alors TP.

Pour le petit berceau, le point T_2 porté à son éloignement dans le plan vertical $A'a'$ est t'_2 sur le géométral, et t' dans l'espace. La trace du plan tangent, étant horizontale et de front, est la droite $t't'_1$ parallèle à la ligne d'horizon.

Le point t'_1, intersection des traces, appartient à la tangente.

La courbe présente une inflexion. On ne devrait donc pas être surpris si l'on obtenait une tangente qui la traversât.

92. Nous allons voir maintenant comment on peut déterminer le point le plus élevé de la courbe *cg*. En général cette construction n'est pas nécessaire, mais elle peut devenir utile, dans les perspectives exactes, lorsque l'arête ne se dessine pas bien.

Au point le plus élevé, la tangente est la trace, sur le tableau, de celui des plans tangents au petit berceau qui passe par l'œil du spectateur. Cette tangente ne dépend donc en rien de la grande voûte que, par suite, nous pouvons remplacer par un berceau fictif ayant même montée que le petit berceau. Nous aurons alors une voûte d'arête pour laquelle nous opérerons comme il est dit à l'article 84.

Il est nécessaire, pour rendre la construction facile, que le berceau fictif soit en plein cintre. Nous obtenons son ouverture en prenant $A'E$ double de A_1C. La droite $c'l''_1g''$ est la projection de l'une des arêtes; il faut mener par le point P une parallèle PY à cette ligne.

Nous prenons un plan de front d'opération dont la trace $a''e'$ rencontre PY en un point rapproché Y. La trace du berceau fictif, sur ce plan, est $a''le'$. Du point Y_1 correspondant sur la ligne d'horizon à Y, nous menons la tangente Y_1l.

La construction ne présente plus de difficultés. On ramène le point l en l'', puis successivement en l''_1, l', l_1, L_2, L et L_3. Le point cherché x est sur la génératrice L_3P.

Il est facile de se rendre compte de ces opérations. Pl_1'' est, sur le géométral, la génératrice de l'intrados fictif sur laquelle se trouverait le point le plus élevé de la perspective de l'arête projetée sur $c'g''$. $l'l''_1$ est la projection de la génératrice du petit berceau, qui devient en perspective la tangente cherchée. Ayant son éloignement, nous obtenons facilement sa hauteur.

La génératrice L_3P du grand berceau est à la même hauteur que la génératrice lP de l'intrados fictif. On l'obtient par cette condition d'une manière plus rapide et même plus sûre sous le rapport graphique, pourvu qu'on opère à une échelle assez grande, par exemple à celle du plan de la seconde tête. Le point l est transporté en x'_1, puis ramené en x''.

Il faut maintenant déterminer la position du point le plus élevé x sur la génératrice PL_3. Il suffit de relever le point l''_1 en x' sur Pl. x' est un point de la génératrice du petit berceau qui est, en perspective, tangente à la courbe.

On peut encore tracer la tangente LL_1, puis la droite L_1P, qui détermine sur la verticale $t_1r'_1$ un point x'_2 de la tangente horizontale. On voit, en effet, que quand le point m de la courbe va en x, les droites mt et t_1t se confondent.

Ces constructions peuvent être modifiées de diverses manières.

Il n'échappera pas au lecteur que l'intrados fictif donne un moyen de construire la courbe cg. On déterminerait sur chaque génératrice du berceau auxiliaire les deux points situés sur les arêtes planes de la voûte, et on les transporterait horizontalement sur la génératrice correspondante de l'intrados réel. C'est ainsi que le point l''_1 est relevé en x' et transporté en x.

93. Pour l'escalier, on se donne les hauteurs et les girons des marches sur le premier plan. Le profil est indiqué par une ligne pointillée. Il n'y a plus qu'à fixer les saillies des marches en deçà et au delà des pieds-droits du petit berceau. Ce sont des éloignements qui doivent être réduits au tiers et portés sur A'B'.

Nous expliquerons plus loin (art. 168) le tracé des ombres.

94. Si la vue était oblique, on ne pourrait pas déterminer le point le plus élevé de la perspective de l'arête par le contour apparent du cylindre qui forme l'intrados du petit berceau. Toutes les autres constructions resteraient, au fond, les mêmes; mais il faudrait relever sur un plan géométral les largeurs obliques qui devraient être portées sur l'échelle.

Perspective d'une voûte d'arêtes en tour ronde.

(Planche 18, figures 116-121.)

95. Cette voûte est formée par la rencontre d'un berceau tournant avec un berceau conoïde. L'intrados du second est une surface gauche dont toutes les génératrices rencontrent l'axe vertical de la surface de révolution qui forme l'intrados du berceau tournant. Les deux berceaux ont d'ailleurs même plan de naissance et même montée.

Dans la voûte représentée sur les figures géométrales nos 116, 117 et 118, le berceau tournant est en plein cintre; le conoïde a pour directrice une ellipse située dans le plan vertical $i'j_4$ (fig. 118), perpendiculaire à son axe horizontal ci'.

Nous renvoyons aux ouvrages d'architecture et de stéréotomie pour les propriétés géométriques de cette voûte. Nous rappellerons seulement que, pour avoir les projections horizontales des arêtes, on coupe les intrados par des plans horizontaux; les sections du berceau tournant sont des cercles, celles du conoïde des droites convergeant vers le centre commun.

Pour avoir les génératrices du conoïde contenues dans les divers plans horizontaux x_1y_1, x_2y_2 (fig. 117), nous portons les abscisses ii_1, ii_2, sur la droite $i'i'_4$ (fig. 118), et nous menons par les différents points des parallèles à i'_3j_3; elles déterminent les points j_1 et j_2. Cette construction, reproduite de M. Adhémar, est fondée sur ce que, quand le petit axe d'une ellipse est égal au rayon d'un cercle, les abscisses des points de ces courbes qui ont même ordonnée sont dans le rapport du grand axe au rayon. Il est par conséquent inutile de tracer l'ellipse pour avoir la position des génératrices; il suffit d'augmenter les abscisses des points du cercle dans le rapport indiqué.

96. Nous allons maintenant mettre en perspective le plan (fig. 116) avec les projections horizontales des arêtes. Si l'on voulait construire directement les arêtes sur le tableau, les opérations seraient longues et leur résultat peu exact, parce qu'il faudrait tracer les perspectives des différents cercles auxiliaires.

Les dimensions du tableau sont quadruplées.

Nous déterminerons d'abord la perspective du point c (fig. 116), vers lequel convergent les projections des génératrices.

Prenant, sur les lignes de terre et d'horizon, les longueurs A_1R_9 et AF_9 (fig. 119) quadruples de $a9$ et de af_9 (fig. 116), nous obtenons la trace R_9 de la droite $c.9.i'$, et son point de fuite F_9. Nous plaçons ensuite le point de distance d_9 correspondant à F_9, et nous portons sur la ligne de terre l'éloignement oblique du point c, de R_9 en c_9, du même côté que le point de distance d_9, parce que le point c est en avant du tableau. La ligne c_9d_9 donne, par sa rencontre avec R_9F_9, le point cherché C; il se trouve au delà du point de fuite F_9, parce que le point c est derrière le spectateur (art. 48).

97. Pour tracer rapidement les projections des génératrices de l'intrados conoïde, nous avons fait une échelle des largeurs par rapport au point C. Il suffit pour cela de mener une parallèle à la ligne d'horizon par le point 17 situé au quart de la verticale CR_{17}. Les points qui sont sur ab (fig. 116) doivent être portés sur cette ligne à leurs distances de 17, et joints au point C.

Ce qu'il y a de plus simple pour placer les points des arêtes sur les projections des génératrices du conoïde, c'est d'opérer sur chacune d'elles à l'aide du point de distance qui lui convient. Si l'on trace la ligne $a'b'$ (fig. 116), parallèle à ab et à la même distance de c que cette droite l'est du point O, la partie de chaque génératrice comprise entre c et $a'b'$ sera la distance oblique mesurée dans sa direction. On évite ainsi de mener par le point O des parallèles aux génératrices.

Les cercles de la figure 116 sont représentés (art. 51) par des hyperboles. Leurs asymptotes sont les perspectives des tangentes aux points tels que E où chaque cercle coupe le plan de front du point de vue. Les centres correspondent aux points où les tangentes dont nous venons de parler rencontrent le rayon c S perpendiculaire au tableau. Nous avons cru inutile d'indiquer ces centres.

98. La perspective du géométral étant terminée, on placera la ligne d'horizon HH′ du tableau, à quatre fois la hauteur relevée sur la figure 117. Puis, traçant une ligne arbitraire HA_1, on fera passer l'échelle des hauteurs par le point $\frac{1}{4}A_1$ situé au quart de cette ligne.

Comme les points à relever du géométral sont placés sur un petit nombre de droites horizontales, on abrège le travail en plaçant d'abord ces lignes.

Considérons celles qui sont projetées sur R_6F_6 : la trace R_6 est relevée en r_6 et en r'_6, et le point de fuite F_6 en f_6. Les deux droites sont donc r_6f_6 et r'_6f_6. Elles rencontrent en C_a et C_1 la verticale du point C qui représente l'axe de la tour. Ceux des autres rayons qui sont situés aux mêmes hauteurs vont passer par les mêmes points. Si donc nous relevons R_{13} en r_{13} et r'_{13}, il suffira de joindre ces points à C_a et à C_1 pour avoir la perspective des lignes qui limitent les arêtes des pieds-droits du côté de la seconde arcade.

On peut déterminer les points C_a, C_1, C_{11}... par l'échelle des hauteurs, en suivant la méthode ordinaire. Si nous prolongeons AA'_1 jusqu'à la rencontre en C′ de l'horizontale du point C, la verticale $C'C'_1$ représentera l'intersection du plan de front de l'axe de la tour avec le plan vertical qui contient l'échelle des hauteurs, et dont la trace est AA'_1 ; prolongeant les horizontales de ce plan VI.H, V.H....., nous déterminons les points C'_{VI}, C'_V qui doivent être reportés sur l'axe de la tour.

On construit les lignes du bandeau par points et de la même manière que les arêtes de la voûte.

99. Pour avoir les tangentes des courbes, on les détermine d'abord sur les figures géométrales; ainsi pour la tangente à la courbe de tête en n'_3 (fig. 121), on établit (fig. 117) la tangente en y_1 au demi-cercle générateur du berceau tournant. Sa trace i_4 sur la ligne de naissance, est portée en i'_4 sur la figure 118, et fait connaître le point j_4, d'où l'on déduit sur la figure 116 la trace u de la tangente cherchée [1]. Ce point est mis en perspective, d'abord sur le géométral en u (fig. 119), puis dans l'espace en u'; la tangente est n'_3u'.

La construction est analogue pour les arêtes; la difficulté ne consiste que dans la détermination des tangentes sur les figures géométrales.

Aux points situés sur la génératrice supérieure r_9C_{IV}, les tangentes sont toutes dans le plan horizontal qui correspond à H.IV (fig. 120). La courbure des arêtes étant d'ailleurs très-petite sur le géométral (fig. 119), on peut tracer immédiatement les tangentes m_2t_1, m_2t, m_3t_2 avec une approximation suffisante. Il n'y a plus qu'à relever les points t, t_1, t_2, en t', t_1', t'_2.

Vue oblique d'une niche sphérique.

(Planche 21.)

100. Nous allons nous proposer de construire la perspective d'une niche sphérique. Nous nous donnons les points principaux de fuite et de distance P et D, le point de fuite f des horizontales du plan de tête et la verticale cC, axe du demi-cylindre de la Niche. Le point C est le centre de la surface sphérique qui forme le parement de la partie su-

(1) Les personnes qui connaissent la théorie des surfaces gauches verront que la construction du point u n'est graphiquement exacte, que parce que l'angle des lignes $c8$ et $c9$ est petit. Nous ne nous arrêtons pas à la détermination des tangentes sur les figures géométrales; cette question est étrangère à la Perspective, et on en trouve la solution dans tous les ouvrages de géométrie descriptive.

périeure. Nous connaissons enfin la largeur de la Niche à l'échelle du plan de front de la verticale Cc, ou, si l'on veut, le rapport de la largeur de la Nicheà sa hauteur.

101. Si nous supposons que le plan de tête ait tourné autour de la verticale Cc jusqu'à devenir parallèle au tableau, nous pourrons placer les arêtes; elles forment le polygone mixtiligne $a_1A_1C'B_1b_1$. Pour ramener facilement ces lignes dans le plan de tête, il faut avoir le point de distance d correspondant au point de fuite f (art. 43).

Pour cela nous traçons une horizontale de front mm_1, et nous relevons en mM_1 une partie mM de la droite cf prolongée (art. 22); portant la longueur mM_1 en mm_2, la ligne Mm_2 fait connaître le point cherché d. Nous déterminons en même temps le point de fuite f' des perpendiculaires au plan de tête, et le point de distance correspondant d', qui nous seront utiles plus loin.

Nous ramenons sans difficulté les arêtes sur le plan de tête, suivant la méthode de l'article 43. Le demi-cercle de front a été partagé en parties égales correspondant aux voussoirs; il suffit d'opérer sur les points de division, pour déterminer la courbe de tête avec exactitude.

102. On utilise le demi-cercle de front $A_1C'B_1$ pour avoir le demi-cercle perspectif AA_1B (art. 33), et de celui-ci on déduit les autres demi-cercles horizontaux, par cette considération que, si l'on marque sur une verticale quelconque du plan de tête, telle que Cc, les traces des lignes d'assises prolongées, les droites qui joindront ces points à un point F pris arbitrairement sur la ligne d'horizon rencontreront les divers cercles sur une verticale.

103. Il faut maintenant avoir les lignes de division des voussoirs sur la sphère : deux méthodes se présentent. On peut tracer des demi-cercles de front ayant leurs centres sur le diamètre Cf' perpendiculaire au plan de tête, et pour diamètre les cordes du cercle horizontal B_1BA, les diviser en cinq parties, et les faire tourner autour de leur rayon vertical, de manière à les rendre parallèles au plan de tête. Cette construction déjà faite pour le demi-cercle BC'A n'exige aucune nouvelle explication. L'autre méthode que nous allons développer consiste à faire tourner autour de Cf' le demi-cercle qui est dans le plan de naissance, en amenant successivement le point B en B', B''....

Les perpendiculaires abaissées des deux points α et ε de ce cercle sur l'axe du mouvement sont les droites $\alpha\gamma$, $\varepsilon\delta$ qui, prolongées, vont passer par f. Ces lignes et CB restent toujours parallèles. CB se meut dans le plan de tête qui a pour ligne de fuite ff''; quand le point B est en B', CB devenu CB' a son point de fuite en f''. Les deux autres lignes ont donc pris les positions $\gamma f''$, $\delta f''$.

Traçons maintenant les droites $B\alpha\beta$, $B\varepsilon\eta$; les points β et η situés sur l'axe du mouvement seront fixes, et les droites se placeront en $\beta B'$ et $\eta B'$. Les points α' et ε' seront ainsi obtenus par intersection.

Quand le point B' passe en B'', le point de fuite f'' sort de la feuille de dessin. On emploie une des méthodes connues pour suppléer à son éloignement. La construction reste d'ailleurs la même.

Le point ε a été choisi de manière que l'ensemble de ses positions dessinât la courbe du trompillon. Sans entrer à ce sujet dans des détails minutieux, nous ferons observer qu'à l'aide du point de distance d' correspondant à f', on peut donner à $C\delta$ la grandeur perspective que l'on veut.

104. La Niche n'est pas entièrement vue; une partie du cylindre avance au delà de l'arête aA jusqu'à une génératrice a_2A_2 qui est prolongée par une portion de l'ellipse qui formerait le contour apparent de la sphère si elle était en relief.

En rabattant sur le plan de front du centre de la sphère le plan perpendiculaire au tableau passant par PC, nous amènerons l'œil sur la ligne PD_1 perpendiculaire à CP, au point D_1 déterminé par une longueur PD_1 égale à PD; et la section faite dans la sphère se placera sur le cercle dont $A_1C'B_1$ est la moitié. Menant la tangente D_1q et la ligne symétrique D_1r qui serait tangente à la partie non tracée du cercle, ces droites donneront sur l'axe du rabattement les points Q et R extrémités du grand axe de l'ellipse.

Nous pourrions obtenir d'autres points de cette courbe, mais ayant le grand axe, et un point A_2, nous pourrons la tracer par la méthode de Schooten.

105. Il est intéressant de déterminer le point v' où l'arc d'ellipse A_2Q rencontre tangentiellement la courbe de tête; pour cela nous allons construire la droite Vv' intersection du plan de tête de la Niche par le plan du cercle qui formerait le contour apparent de la sphère supposée en relief.

Dans le rabattement le plan de ce cercle est projeté sur la droite qr perpendiculaire à CD_1; le point v_1 situé sur l'axe du rabattement appartient au plan de front du centre de la sphère, et par suite la trace du plan du cercle sur ce plan est vv_1 perpendiculaire à PC. Cc est la trace du plan de tête sur le plan de front. Le point v, intersection des deux traces, appartient à la droite cherchée.

Nous allons maintenant nous occuper des lignes de fuite. Pour avoir celle du plan du contour apparent de la sphère, il faut mener par le point D_1 une parallèle à qr, et tracer par son point de rencontre avec CP une perpendiculaire à cette droite. La ligne de fuite du plan de tête est ff''; l'intersection de ces deux droites sera le point de fuite de Vv'.

La construction ne peut être faite qu'à une échelle réduite (art. 14). Nous avons pris la proportion du sixième. Les lignes de fuite ainsi rapprochées de v sont VV_1 et f_1V; leur intersection achève de déterminer la droite Vv'.

Les tracés que nous venons d'exposer résolvent le problème de la projection conique de la sphère. Nous présenterons plus loin quelques observations sur la représentation de ce corps (art. 245 et suiv.).

Nous expliquerons aux articles 171 et suivants la détermination des ombres de la niche que nous venons de mettre en perspective.

Observations sur la perspective des courbes à double courbure. Construction d'une perspective par les procédés généraux de la Géométrie descriptive.

(Planche 23.)

106. Nous avons rencontré dans les épures de la Lunette et de la Voûte d'arêtes en tour ronde, des courbes qui étaient à double courbure, c'est-à-dire qui ne pouvaient pas être placées dans un plan. Leur perspective ne nous a présenté aucune circonstance particulière; mais, pour certaines positions de l'œil, ces courbes ont sur le tableau des nœuds et même des rebroussements. Nous nous arrêterons un instant à l'étude de ces formes singulières : elles sont intéressantes par elles-mêmes, et il sera nécessaire de les connaître pour comprendre diverses questions relatives à la perspective des surfaces.

107. Les figures 135 et 136 sont le plan et l'élévation d'une porte dans un mur cylindrique. La courbe de tête résulte de l'intersection du cylindre horizontal de l'intrados avec le cylindre vertical du parement. L'œil est en un point O,O′ (fig. 137) sur le prolongement d'une corde mm_1, $m'm'_1$. Nous avons placé le tableau perpendiculairement aux plans de projection : la droite AB forme ses deux traces. Nous supposons qu'on le fasse tourner autour de la verticale du point A, de manière à le rendre parallèle au plan vertical. Chaque point de la perspective est obtenu directement par l'intersection du rayon visuel avec le tableau.

Les deux points m, m' et m_1, m'_1 sont représentés par un seul point M; la courbe y forme un nœud, et comme elle est l'arête d'un corps opaque, d'un côté du nœud elle est entièrement vue, et de l'autre une de ses branches est cachée.

Le point le plus élevé U est donné par le rayon visuel dont la projection verticale $O'u$ est tangente à l'élévation de la courbe. Le point le plus à gauche correspond au rayon visuel tangent Ov (fig. 135). Le contour apparent du parement cylindrique se termine à la courbe qu'il rencontre tangentiellement au point V.

108. Supposons maintenant que l'œil se transporte successivement sur des droites qui rencontrent la courbe en deux points de plus en plus rapprochés l'un de l'autre : la boucle ou feuille MVU se resserrera progressivement, et se réduira à un point quand l'œil sera sur une tangente. Les deux parties de la courbe se rejoindront à ce point, en formant un rebroussement.

Cette circonstance est représentée sur la figure 138. L'œil est en O_1, O'_1 sur la tangente nO_1, $n'O'_1$; le tableau A_1B_1 a été retourné parallèlement à l'élévation. La perspective est construite par les moyens déjà employés pour la figure 137. Nous avons ajouté quelques marches pour élever le plan d'horizon qui se trouvait un peu bas.

On voit facilement, d'après la position de l'œil sur le plan, que l'une des deux parties de la courbe qui se rejoignent au point de rebroussement N est cachée tandis que l'autre reste vue, mais cela n'a pas toujours lieu : la courbe entière serait vue si l'œil était placé sur la même tangente, à gauche du point n, n'.

Nous avons reconnu qu'il y avait un rebroussement en faisant disparaître la boucle MVU (fig. 137) ; il est en effet manifeste que quand les points projetés sur v et u (fig. 135 et 136) viennent se confondre en un seul point n, n', la perspective de ce dernier doit être le point le plus élevé, et le plus à gauche, ce qui exige qu'il soit le sommet d'un rebroussement; mais nous allons arriver à ce résultat d'une autre manière qui aura l'avantage de nous faire connaître la tangente au rebroussement.

109. Considérons un polygone ES (fig. 133) tracé sur une pyramide. Le plan passant par deux côtés contigus MN et NR coupera nécessairement la pyramide, mais il se confondrait avec la face RNO si le côté MN se trouvait précisément sur l'arête ON.

Ces propositions ne cesseront pas de subsister si nous altérons graduellement la forme de la pyramide, et celle du polygone tracé sur elle, de manière à les rapprocher indéfiniment d'un cône et d'une courbe à double courbure. Nous voyons ainsi que les plans osculateurs d'une courbe tracée sur un cône ne sont pas, en général, tangents au cône, mais que cette circonstance se présente quand, en un point, la courbe est tangente à la génératrice rectiligne.

Supposons maintenant que l'on prenne la perspective d'une courbe à double courbure, par rapport à un œil O (fig. 134) situé sur l'une de ses tangentes On. Le plan osculateur de la ligne considérée, au point n, sera tangent au cône perspectif, et sa trace NT, sur le tableau, sera tangente à la perspective de la courbe. D'ailleurs, si la ligne anb n'a pas d'inflexion en n, sa perspective se trouvera entièrement au-dessous d'une droite EG, trace sur le tableau d'un plan passant par On et perpendiculaire au plan osculateur. Il y a donc rebroussement, et comme le plan osculateur d'une courbe la traverse généralement, la trace NT sera entre les deux branches NA et NB de la perspective.

Il est évident que le cône perspectif a un rebroussement tout le long de la génératrice On.

110. Il est intéressant d'avoir la tangente au rebroussement, et malheureusement la méthode ordinaire ne peut pas être employée pour la construire, parce que la tangente de la courbe originale, étant dirigée vers l'œil, est représentée tout entière en perspective par le point N (fig. 138).

Les tangentes à la courbe de tête au point n, n', et aux points voisins r, r' et m, m' rencontrent le plan vertical $m_3 r_3$ aux points n_2, r_2 et m_2. La courbe qui unit ces points est la trace sur le plan $m_3 r_3$ d'une surface qui serait formée par l'ensemble des tangentes à la courbe de tête. La trace du plan osculateur de cette ligne au point n, n' doit être tangente en n_2 à la courbe $m_2 r_2$; c'est donc la droite n_2 T'_0 qui rencontre le tableau au point dont les projections sont T_0, T'_0; on le ramène en T' et la tangente est NT'.

Cette construction présente peu de précision, parce qu'il faut tracer la tangente d'une courbe auxiliaire en un point donné. La Géométrie ne donne aucun procédé graphique plus exact.

111. Nous avons construit les perspectives des figures 137 et 138 par des procédés empruntés à la Géométrie descriptive. Cette méthode est peu commode dans la pratique, parce que le tableau que l'on obtient n'a pas la grandeur qu'on désire, mais celle que lui assigne l'échelle du plan et de l'élévation, de sorte que quand le tracé est terminé, on est généralement obligé de craticuler. En second lieu, quand la distance est un peu grande, il faut qu'on puisse disposer pour le dessin d'une étendue relativement considérable, parce qu'il est nécessaire de placer les projections de l'œil sur le plan et l'élévation; sans cela les tracés seraient très-compliqués.

Cette méthode, dont nous donnerons plus loin une application (art. 274 et suiv.), présente des avantages pour la discussion des courbes. Lorsqu'on y a recours, il ne faut pas négliger entièrement les constructions ordinaires de la Perspective. Ainsi les arêtes des marches, et les horizontales du mur droit qui est incliné à quarante-cinq degrés sur le tableau, sont dirigées vers les points principaux de fuite et de distance P et D (fig. 137). Si tous les points étaient obtenus directement, de petites erreurs suffiraient pour détruire la convergence des perspectives de droites parallèles, ce qui produirait un effet choquant.

On remarquera sur la figure 138 que les droites $e'a'$, $e''a''$... sont des projections de rayons visuels et convergent vers O_1', tandis que les droites qui partent des points a', a''... sont des perspectives de lignes horizontales tracées sur le mur droit, et concourent vers D_1.