CHAPITRE III.

CONSTRUCTIONS DIVERSES SUR LE GÉOMÉTRAL EN PERSPECTIVE.

Constructions qui n'exigent pas le relèvement du géométral.

17. Pour connaître les rapports des parties d'une horizontale fuyante RS (fig. 30), il faut joindre un point quelconque G de la ligne d'horizon aux points de division, et couper les divergentes par une parallèle *rs* à cette ligne. La sécante représente une droite de front dans le plan horizontal de RS, et par suite les rapports de ses différentes parties ne sont pas altérés par la perspective; ils sont d'ailleurs les mêmes que pour RS, car les divergentes représentent des horizontales parallèles ayant leur point de fuite en G.

On emploie les mêmes constructions, mais en ordre inverse, pour partager une droite horizontale AB (fig. 30) en parties proportionnelles à des longueurs données.

Ainsi, par une extrémité A on mène parallèlement à la ligne d'horizon une droite A*b*, sur laquelle on porte les longueurs données, ou des parties proportionnelles à ces longueurs, si elles ne sont pas d'une grandeur convenable. On joint le point extrême *b* à B, et on prolonge cette droite jusqu'à la ligne d'horizon en F. Enfin, on trace des lignes de F aux points de division de A*b*.

Pour partager une horizontale MN (fig. 31) en parties proportionnelles à celles d'une droite AB, située dans le même plan horizontal, on joint les points A et B d'une part, M et N de l'autre, à des points F et G de la ligne d'horizon. Les intersections déterminent une droite RS, qu'on divise en parties proportionnelles à celles de AB par des droites convergeant vers le point F. Des lignes divergeant du point G reportent la division sur MN.

18. On désire porter une longueur donnée à partir du point M, sur une droite CM, située dans le plan horizontal qui a pour trace AB (fig. 23). On connaît le point accidentel de distance réduite $\frac{1}{2}$ D qui correspond à la direction CM.

Il faut tracer la droite $\frac{1}{2}$ D·M, et, à partir du point E où elle rencontre la ligne de terre AB, porter une longueur EG égale à la moitié de la longueur donnée, que nous supposons être à l'échelle du tableau, ou, comme l'on dit, du premier plan de front. La ligne qui joint les points G et $\frac{1}{2}$ D donne le point cherché N.

On voit, en effet, que la longueur représentée par MN est double de EG, parce que les éloignements CM et CN sont doubles de CE et de CG (art. 7). Le segment *eg* fait sur une ligne de front quelconque du géométral serait égal en perspective à la moitié de MN.

Si la longueur EG est un peu grande, le point G sortira de la feuille de dessin ; on place alors cette longueur sur la ligne de terre, dans une position quelconque (fig. 24), et on détermine sur l'horizontale de front du point M un segment M*n* qui lui soit égal en perspective. Il n'y a plus qu'à joindre *n* à $\frac{1}{2}$ D.

On voit, en effet, que si la ligne *n*N était dirigée vers le point accidentel de distance de la droite MN, le triangle MN*n* serait isocèle. La ligne *n*N passant par le point de demi-distance, la longueur M*n* est seulement la moitié de MN, ainsi que cela devait être.

19. Supposons maintenant que trois points R, 1 et 2 étant marqués sur une droite indéfinie RF (fig. 23), on veuille porter sur cette ligne une série de longueurs alternativement égales aux deux premières.

On joint un point quelconque f de la ligne d'horizon aux points 1 et 2, et on prolonge ces droites jusqu'à l'horizontale de front du point R. On détermine ainsi les longueurs R1′ et 1′2′, qu'on porte à la suite autant de fois qu'il est nécessaire. On joint enfin les points de division à f.

Pour justifier cette construction, il suffit de rappeler que les lignes qui convergent vers f sont des horizontales parallèles.

Si les longueurs à porter sur l'horizontale de front du point R sortent du cadre de l'épure, on emploiera successivement plusieurs horizontales de front, sur lesquelles on déterminera des longueurs égales en perspective à R1′ et 1′2′. La figure indique toute la construction.

Quand le point de fuite de la droite considérée est éloigné (fig. 24), après avoir choisi un point de fuite f' sur la ligne d'horizon, et marqué les points 1′ et 2′ sur l'horizontale de front du point R, on trace une horizontale RF′ dont le point de fuite F′ soit sur la feuille ; on porte sur cette ligne une série de longueurs égales en perspective à R1″ et 1″2″, et on prolonge jusqu'à la droite donnée les divergentes du point f'.

20. Il est maintenant facile de comprendre comment le pavage représenté sur la figure 25 a été dessiné. On a porté plusieurs fois sur la ligne de terre les longueurs des diagonales des deux carreaux. Il fallait ensuite mener, par les points de division, des horizontales inclinées à 45 degrés sur le tableau : ces lignes sont dirigées, en perspective, vers les points principaux de distance qui, étant éloignés, ne peuvent pas être utilisés directement. Alors par le milieu m d'un grand carreau on a tracé une ligne mP perpendiculaire au tableau, et on l'a divisée en parties égales à celles de la ligne de terre (art. 18) ; les divisions ont été reportées sur d'autres lignes de diagonale, comme nP et rP, par des horizontales de front ; il n'y a plus eu qu'à reconaître les points qui devaient être sur les mêmes droites, et à les joindre.

21. On a souvent à construire un carré horizontal sur une droite de front telle que UR (fig. 26). Ce problème est facile à résoudre, quand on connaît le point principal de fuite P, et le point $\frac{1}{3}$ D de la distance principale réduite.

En joignant les points U et R au point P, on a la direction des côtés latéraux du carré. On obtient leur longueur en réduisant UR dans le même rapport que la distance : ici au tiers (art. 7). Joignant le point u ainsi obtenu à $\frac{1}{3}$ D, on a le sommet S. Le quatrième côté du carré est une horizontale de front.

Si l'on voulait faire un carré sur une droite RS perpendiculaire au tableau, le point de la distance réduite $\frac{1}{3}$ D ferait connaître le point u, et on triplerait la longueur Ru.

Constructions sur le géométral par relèvement.

22. On ne peut faire directement sur le géométral en perspective que quelques constructions simples ; souvent on est obligé de supposer que ce plan tourne autour d'une de ses horizontales de front jusqu'à devenir parallèle au tableau. On fait alors la construction demandée à l'échelle du plan de front, et on ramène le géométral dans sa position.

Les exemples qui suivent ne laisseront aucune incertitude sur cette méthode.

Proposons-nous de déterminer la véritable grandeur de l'angle ISK (fig. 27) que forment deux droites du géométral données en perspective : les points principaux de fuite et de distance sont connus.

On trace à une petite distance du point S, et parallèlement à la ligne d'horizon, une droite MN que l'on considère comme une horizontale de front du géométral. On fait tourner ce plan autour de MN, jusqu'à le rendre parallèle au tableau. Le point S décrit un quart de cercle, dont le centre est au pied S_2 de la perpendiculaire abaissée de ce point sur MN, et va se placer au point S_1, que l'on obtient en portant sur la verticale de S_2 une longueur égale à $S_2 S'_2$, grandeur réelle de la ligne SS_2 à l'échelle du plan de front de MN.

Les points I et R situés sur l'axe du mouvement ne changent pas. La perspective de l'angle ramené dans un plan de front est donc IS_1K_1 : c'est là sa vraie grandeur.

Si le point R est éloigné, on opérera sur un point quelconque K de SK de la même manière que pour le point S, et on déterminera sa nouvelle position K_1.

Nous avons appuyé la construction sur le point de distance D ; mais en général on se servira du point de distance réduite $\frac{1}{2}$ D, en doublant les longueurs $S_2 S''_2$, $K_2 K''_2$.

La figure 28 représente le tableau, et le géométral d'abord dans sa position naturelle, puis quand il est relevé.

Pour éviter la complication de la figure, nous n'avons tracé qu'un petit nombre de rayons visuels, mais tous les points homologues I et *i*, S et *s*, K et *k*..., sont sur des droites qui divergent du point O.

On résoudrait par les mêmes constructions, faites dans un ordre différent, le problème de mener dans le géométral, et par le point S, une droite faisant un angle donné avec I S (fig. 27).

La droite I S étant relevée en IS_1, on tracerait la ligne $S_1 K_1$ sous l'angle donné, et on ramènerait le point K_1 en K sur le géométral.

23. On peut appuyer un relèvement sur des points accidentels, pourvu qu'on connaisse l'angle que font avec le tableau les droites qui leur correspondent.

Soient F′ et $\frac{1}{2}$D′ (fig. 29) des points accidentels de fuite et de distance réduite. Pour savoir où se place un point S du géométral, quand on relève ce plan en le faisant tourner autour d'une horizontale de front MN, il faut tracer les droites SF′, S.$\frac{1}{2}$D′, puis mener du point E, sous l'angle MES_1 qui doit être donné, une droite ES_1 double de ES''_2.

Pour trouver les points principaux, on tracerait $S_1 S_2$ perpendiculaire à MN, et on porterait de S_2 en S'_2 une fraction simple, aussi grande que possible de cette ligne : ici c'est le tiers.

Il est commode d'employer pour un relèvement les points principaux de fuite et de distance; en conséquence on doit généralement commencer par les déterminer, quand on n'a que des points accidentels.

La figure 29 indique comment on doit disposer les constructions, pour déterminer les points accidentels relatifs à une ligne donnée SE, quand on connaît les points principaux.

24. La méthode du relèvement revient à restituer le géométral sur la figure même; elle peut servir pour tous les tracés à faire sur ce plan.

La figure 32 représente la construction d'un carré sur une ligne oblique AB, qui devient AB_1 quand le géométral a été relevé en tournant autour de MN. Le carré de front est $AB_1C_1E_1$; reporté sur le géométral il devient ABCE. La figure indique toutes les opérations.

Les points I et J qui sont sur l'axe du mouvement ne changent pas et appartiennent aux lignes qui, après le rabatement, forment la perspective du carré. Les côtés AB, CE ont leur point de fuite F sur la ligne d'horizon.

La figure 32 montre comment on opérerait pour trouver le point de fuite F des perpendiculaires à une droite AE. On a souvent ce problème à résoudre.

25. La grandeur de la figure relevée est quelquefois gênante; il est alors nécessaire de faire une réduction.

Soit AB (fig. 35) la droite sur laquelle on veut tracer un carré. On suppose que le relèvement est fait autour de MN; mais au lieu de construire la figure relevée, on en trace une semblable appuyée sur la parallèle *mn* plus rapprochée de la ligne d'horizon; le point de fuite P est le pôle commun de similitude.

On établit très-facilement cette figure; le point homologue de A est en *a*, et celui de B en *b*, sur la verticale du point b_1, à une hauteur triple de $b_1 b_2$ qui correspond à $B_1 B_2$: ces deux lignes représentent le tiers de la longueur de BB_1 aux échelles des plans de front de *mn* et de MN.

Le carré étant tracé, on projette les sommets sur *mn*, et on a les directions PE, PC, les mêmes que si l'on avait construit la figure sur MN. Pour placer le point E, on a considéré PA comme une échelle des éloignements ; alors portant le tiers de ee_1 de a en e_2, on voit que cette longueur devient AE_2 sur MN. La ligne $\frac{1}{3}$ D. E_2 fait connaître le point E_1 qu'on ramène en E par une parallèle à la ligne d'horizon.

On peut éviter de recourir au point de distance, en remarquant que le point R correspond à r sur la transversale $b_1\, e$; il fait trouver le sommet E. On obtient par le point I le sommet C.

On fait quelquefois le relèvement sur une feuille séparée, alors on place les divers points tels que r, i_1, e_1, c_1 sur la droite *mn* transportée. Dans tous les cas on doit regarder cette ligne comme une échelle des largeurs.

Relations géométriques entre les deux perspectives d'une même figure, considérée sur le géométral et dans un plan de front.

26. Les deux perspectives d'une même figure considérée dans un plan horizontal, et relevée dans un plan de front, présentent des relations remarquables.

D'abord des droites SI, SK (fig. 28) ont toujours pour homologues des droites S_1I, S_1K_1, parce qu'elles correspondent nécessairement à des droites *si*, *sk* sur la figure originale qui est plane.

En second lieu nous avons vu que les points de la droite MN autour de laquelle se fait le relèvement appartiennent aux deux perspectives.

La ligne ss_1 qui joint les deux positions d'un même point avant et après le relèvement est inclinée à 45 degrés sur le tableau, et située dans un plan vertical perpendiculaire à la ligne de terre. Son point de fuite est donc au point D_1 placé sur la verticale du point principal à une hauteur égale à la distance : c'est le *point supérieur de distance*. Toutes les droites qui joignent les points homologues S et S_1, K et K_1 des deux perspectives, concourent vers D_1.

Ces relations constituent l'*homologie*, telle qu'elle a été définie par M. Poncelet. Le point de concours D_1 est le *centre d'homologie*. La droite MN, où les points homologues se confondent, est l'axe d'homologie.

Nous aurons souvent à considérer des figures homologiques.

27. Le point D_1 est éloigné comme les points principaux de distance, il n'est donc pas possible de s'en servir directement ; mais on peut porter une distance réduite, la moitié, par exemple, sur la verticale du point principal (fig. 33), et alors, pour avoir le relèvement E_1 du point E autour de MN, il suffit de doubler E_2 E'_2. Cette méthode ne diffère pas essentiellement de celle de l'article 22 ; elle jette quelquefois moins de confusion dans le dessin. Il faut employer l'un ou l'autre des deux procédés suivant les circonstances.

Si on relève successivement un géométral dans différents plans de front, les perspectives des figures relevées seront évidemment semblables, et le point supérieur de distance ser ale pôle commun de similitude, puisque, quelque part qu'on place l'axe MN du relèvement, un point S′ ira toujours se placer sur la ligne SD_1 (fig. 28).

Quand on fait tourner le géométral de manière que la partie antérieure s'abaisse, il faut considérer le *point inférieur de distance* situé au-dessous du point principal.

28. Considérons la ligne FF′ (fig. 34) située au-dessus de l'axe MN du relèvement à une hauteur égale à la distance PD_1. Tout point E_1, situé sur la ligne FF′ de la figure relevée, a pour homologue sur la première figure un point à l'infini, car les lignes PE_2 et D_1E_1 sont parallèles.

La figure 38 explique ce résultat. La droite FF′, placée au-dessus de l'axe MN à une hauteur égale à la distance principale, correspond sur le géométral relevé G_1 à une ligne ff' qui, en rabatement, est la droite $f_1f'_1$ située dans le plan de front du point de vue ; car les triangles OF_0L, Of_0l sont semblables, et la hauteur OP du premier étant égale à la base LF_0, on a également sur le second ol égal à lf_0.

Un point K, situé sur la ligne FF′ du tableau, représente donc un point k, en rabatement k_1, et la perspective de ce point est à l'infini, parce que ok_1 est parallèle au tableau.

Une droite KI de la figure relevée a pour homologue une droite IE menée par le point I de MN parallèlement à D_1K.

La ligne d'horizon représente, comme nous le savons, les points du géométral situés à l'infini ; elle est, par conséquent, homologue de ces mêmes points à l'infini sur la figure relevée, et en effet, si nous prolongeons EI jusqu'en G, le point qui correspond à C est à la rencontre de IK et de CD_1, lignes qui sont évidemment parallèles.

Chacune des deux figures contient ainsi une droite qui représente les points situés à l'infini sur l'autre figure.