

4. Biegungsfestigkeit.

Es soll hier selbstverständlich keine Theorie der Biegungs- (relativen) Festigkeit gegeben werden, vielmehr beschränken wir uns darauf, die wesentlichsten Ergebnisse derselben und einige Versuchsergebnisse über die Biegungsfestigkeit der Steinmaterialien vorzuschicken und sodann die Maximal-Momente für die wichtigsten Fälle der Belastung eines auf zwei Stützpunkten ruhenden Trägers, ferner die Auflager-Reactionen für continuirliche, auf 3 bis 6 Punkten aufliegende Träger bei einfacher Belastungsweise anzuführen.

Die theoretische Untersuchung eines auf Biegung in Anspruch genommenen Trägers, der in der Regel als horizontal auf zwei oder mehreren Stützpunkten aufliegend und von lothrecht wirkenden, der Länge nach gleichmässig vertheilten oder concentrirten Belastungen, welche ausserdem zu einer die Axe des Trägers enthaltenden Verticalebene symmetrisch gelegen sind, angegriffen vorausgesetzt wird, bezweckt die Ermittlung derjenigen inneren Kräfte und damit auch derjenigen Querschnittsflächen für jede Stelle des Trägers, welche den theils gegebenen, theils durch die Gleichgewichtsuntersuchungen ermittelten äusseren Kräften den erforderlichen Widerstand entgegenzusetzen vermögen.

Die Beziehungen, welche bei diesen über die Belastungen gemachten Voraussetzungen zwischen den in irgend einem durch den Träger angenommenen Verticalschnitte vorhandenen inneren Kräften und zwischen den auf einen abgeschnittenen Theil des Trägers wirkenden, äusseren Kräften im Falle des Gleichgewichtes stattfinden, lassen sich durch die folgenden drei Gleichungen ausdrücken:

$$\Sigma \dot{X} = 0 \dots (1); \quad \Sigma \dot{Y} = \dot{V} \dots (2); \quad \Sigma \dot{X} y = \dot{M}_x \dots (3).$$

Gleichung (1) spricht für den vorliegenden Fall, in welchem horizontale äussere Kräfte nicht einwirken, die Bedingung aus, dass die algebraische Summe der im betrachteten Verticalschnitte vorhandenen inneren Kräfte ($\Sigma \dot{X}$) gleich Null, oder also die Summe der Druckspannungen gleich jener der Zugspannungen zu sein hat.

Nach Gleichung (2) muss der Verticalwiderstand ($\Sigma \dot{Y}$) in diesem Schnitte gleich der algebraischen Summe der auf den betrachteten Trägertheil einwirkenden, äusseren Kräfte (\dot{V}), und nach Gleichung (3) muss das auf einen der Einfachheit wegen im gedachten Verticalschnitte angenommenen Drehpunct bezogene Moment der inneren, horizontalen Kräfte ($\Sigma \dot{X} y$, das Widerstandsmoment) gleich der algebraischen Summe der Momente der äusseren, verticalen Kräfte (\dot{M}_x) für diesen Drehpunct sein.

Wenn, wie nach den vorstehenden Tabellen für Eisen und Holz, die Elasticitätsmodule für Zug und Druck gleich gross sind, so fällt die neutrale Axe mit der Schwerpunktsaxe des Trägerquerschnittes zusammen, und es ist:

$$\Sigma \dot{X} y = \frac{\dot{\phi}_1}{m} \Theta = \frac{\dot{\phi}_2}{n} \Theta \dots (4), \text{ oder auch}$$

$$\Sigma \dot{X} y = \frac{\varepsilon}{r} \Theta = \varepsilon \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (5).$$

Dabei bezeichnet Θ das auf die Schwerpunktsaxe des betreffenden Querschnittes bezogene Trägheitsmoment, $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ die Spannungen der äussersten Fasern pro Flächeneinheit, m und n die bezüglichlichen Abstände dieser Fasern von der neutralen Faserschichte, ε den Elasticitätsmodul des in Frage stehenden Materiales, r den Krümmungshalbmesser der neutralen Faser an der betrachteten Stelle, dessen Reciproke in abgekürzter Form durch $\frac{d^2 y}{dx^2}$ unter der Voraussetzung ausgedrückt ist, dass die thatsächlich auftretenden Biegungen äusserst klein sind, und dass die Gleichung der elastischen Linie auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit horizontaler Abscissenaxe (x) bezogen sein soll.

Wird für die betrachtete Stelle des Trägers das Moment der äusseren, je nach den Belastungsfällen sehr verschieden wirkenden Kräfte mit \dot{M}_x , wie oben, bezeichnet, so hat nach Gleichung (3)

$$\dot{M}_x = \frac{\dot{\phi}_1}{m} \Theta \text{ oder } = \frac{\dot{\phi}_2}{n} \Theta \dots (6)$$

zu sein, und es darf im äussersten Falle $\dot{\phi}_1 = \dot{\alpha}$ oder $\dot{\phi}_2 = \dot{\beta}$ werden. Diejenige Gleichung, bei welcher dieser Grenzwert zuerst erreicht wird, ist der Berechnung des Querschnittes zu Grund zu legen.

Für den sogenannten gefährlichen Querschnitt, woselbst das Moment seinen grössten Werth (\dot{M}_m) annimmt, darf höchstens

$$\dot{M}_m = \frac{\dot{\alpha}}{m} \Theta \text{ oder } = \frac{\dot{\beta}}{n} \Theta \dots (7)$$

werden. Durch die Relationen 2, 6 und 7 lassen sich die erforderlichen Querschnittsdimensionen eines Trägers in jedem Falle der angenommenen Art bestimmen. Bei gleich bleibendem Querschnitte kommen nur die Gleichungen (2) und (7), und bei einem derartigen rechteckigen Querschnitte nur Gleichung (7) in Betracht, da hiebei, wenn dieser genügt wird, Gleichung (2) ohnedies bei den meist vorkommenden Trägerlängen erfüllt ist. —

Nach Gleichung (3) und (5) ergibt sich ferner

$$\varepsilon \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = \dot{M}_x \dots (8),$$

eine Relation, aus welcher die Gleichung der elastischen Linie, und also auch die Einbiegung des Trägers an irgend einer Stelle abzuleiten ist. —

Wenn ausser den auf Biegung, also senkrecht zur Axe des Trägers wirkenden Kräften, gleichmässig über den Querschnitt desselben vertheilte Kräfte, deren Mittelkraft \dot{H} sein soll, vorhanden sind, so darf die Summe aller pro Flächeneinheit an den meist beanspruchten

Stellen auftretenden Spannungen den zulässigen Grenzwert ($\dot{\alpha}$ oder $\dot{\beta}$) nicht überschreiten.

Für die meist gespannten Fasern des gefährlichen Querschnittes wird, wenn die gleichmässig vertheilten Kräfte auf Zug wirken:

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha} = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot m}{\Theta} + \frac{\dot{H}}{F} \dots (9),$$

und für die meist gepressten Fasern jenes Querschnittes wird, wenn diese Kräfte auf Druck wirken:

$$\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 = \dot{\beta} = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot n}{\Theta} + \frac{\dot{H}}{F} \dots (10)$$

als Bedingungsgleichung der Berechnung zu Grund gelegt. —

Da für Steinmaterialien, wie aus den mitgetheilten Versuchsergebnissen zu entnehmen ist, die Elasticitätsmodule für Druck und Zug verschieden gross sind, so fällt die neutrale Axe nicht mehr mit der Schwerpunktsaxe des Querschnittes zusammen, wenn ein derartiger prismatischer Träger auf Biegung angegriffen wird.

Wenn auch Steine nur in seltenen Fällen solchen Angriffen ausgesetzt sind, da hiebei eine ökonomische Verwerthung des Materiales nicht stattfindet, so sind doch die Versuchsergebnisse, welche Herr Professor Bauschinger hiefür erhalten und in seinen mehrfach angezogenen „Mittheilungen etc.“ veröffentlicht hat, von grossem Interesse, und wir fügen deshalb in der folgenden Tabelle einige dieser Werthe an.

Zum richtigen Verständnisse derselben schicken wir voraus, dass die in gleichem Sinne wie die Druck- und Zugfestigkeit aufzufassende Biegefestigkeit $\dot{\delta}_0$ aus der Gleichung abgeleitet wurde:

$$\dot{\delta}_0 = \frac{3}{2} \frac{\dot{Q} l}{b h^2},$$

in welcher \dot{Q} das in der Mitte des Trägers von der Stützweite l aufgelegte, den Bruch bewirkende Gewicht, b die Breite und h die Höhe des rechteckigen Trägerquerschnittes bezeichnet, und in welcher also das auf die Schwerpunktsaxe bezogene Trägheitsmoment des letzteren $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$ analog dem Falle eingeführt ist, dass die neutrale mit der Schwerpunktsaxe zusammenfällt. —

(Siehe folgende Tabelle.)

Die Werthe der auf die Schwerpunktsaxe bezogenen Trägheitsmomente (Θ) wurden bereits früher (S. 12) für die gebräuchlichsten Querschnitte mitgetheilt, die Werthe von \mathfrak{M}_m sind für die wichtigsten Belastungsfälle eines discontinuirlichen Trägers in der ersten Reihe der unten folgenden Zusammenstellung angegeben, während die zweite Reihe nur die Auflager-Reactionen $\dot{D}_1, \dot{D}_2 \dots$ für continuirliche Träger mit einfacher Belastungsweise enthält, indem eine eingehende Untersuchung der letzteren hier zu weit führen würde, mit den gegebenen Auflager-Reactionen aber auch leicht die Kraftmomente für jede beliebige Stelle eines solchen Trägers gefunden werden können.

Etwas ausführlicher ist der Fall eines auf 4 Stützen aufliegenden, continuirlichen Trägers aus dem Grunde behandelt, weil derselbe bei Brücken-Constructionen besonders häufig vorkommt.

Tabelle über die Biegefestigkeit verschiedener Steinmaterialien.

Bezeichnung der Materialien	Richtung der Bruchfläche gegen das Lager.	Biegefestigkeit (Bruchgewicht)	Festigkeits-Coefficient ($\dot{\delta}$) unter den günstigsten Umständen.
		Kilogr. pr. <input type="checkbox"/> Centim.	
Schwarz-weisser Granit von Hauzenberg . .	senkrecht z. Lager	210*	21
Desgl.	parallel „ „	149*	15
Gelblicher Granit von Fürstenstein	senkrecht „ „	92*	9
Desgl.	parallel „ „	95 u. 100*	10
Grünstein von Ottendorf	senkrecht „ „	300*	30
Desgl.	parallel „ „	250*	25
Muschelkalk von Randersacker	—	69*	7
Dolomit von Lohstadt (bei guten Stücken) .	senkrecht „ „	128*	13
Desgl.	parallel „ „	157*	16
Bausandstein von Coburg	senkrecht „ „	30*	3
Grünsandstein von Kapfelberg	„ „ „	50*	5
Prismen von Perlmooser Portland-Cement nach 60 tägiger Erhärtung aus reinem Cemente .	—	25*	2,5
Desgl. aus 1 Th. Cement und 2 Th. Sand . . .	—	28*	3
Desgl. aus 1 Th. Cement und 4 Th. Sand . . .	—	26*	2,6

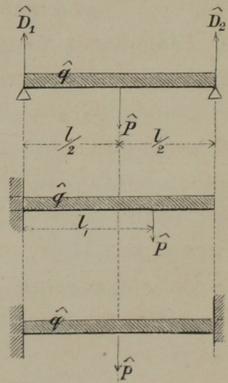
Zusammenstellung der Kraftmomente und Auflager-Reactionen für verschiedene Belastungsfälle relativ angegriffener Träger.

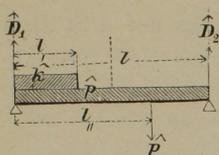
$$\dot{D}_1 = \dot{D}_2 = \frac{\dot{q} l}{2} + \frac{\dot{P}}{2}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{8} + \frac{\dot{P} l}{4} \text{ (für die Trägermitte);}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{2} + \dot{P} l \text{ (für das eingespannte Trägerende);}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{12} + \frac{\dot{P} l}{8} \text{ (für die eingespannten Trägerenden);}$$





$$\hat{D}_1 = \frac{\hat{p}l}{2} + \frac{\hat{k}l}{2l} (2l-1) + \frac{\hat{P}}{1} (1-1)_{,,}$$

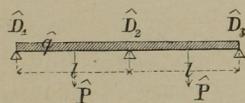
$$\hat{D}_2 = \frac{\hat{p}l}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l} + \frac{\hat{P}l}{1}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{\hat{p}l^2}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l} (2l-1) + \frac{\hat{P}l}{1} (1-1)_{,,} - (\hat{p} + \hat{k}) \frac{l^2}{2}$$

(für $x = l$);

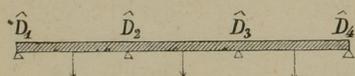
$$\hat{M}_{,,} = \frac{\hat{p}l^2}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l} (2l-1) + \frac{\hat{P}l}{1} (1-1)_{,,} - \frac{\hat{p}l^2}{2}$$

- $\hat{k}l \left(1 - \frac{1}{2}\right)$
(für $x = l$).



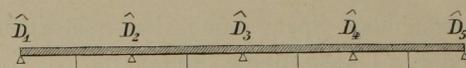
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_3 = \frac{5}{16} \hat{P} + \frac{3}{8} \hat{q}l.$$

$$\hat{D}_2 = \frac{22}{16} \hat{P} + \frac{10}{8} \hat{q}l.$$



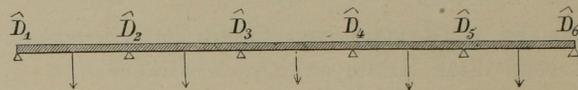
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_4 = \frac{7}{20} \hat{P} + \frac{4}{10} \hat{q}l.$$

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_3 = \frac{23}{20} \hat{P} + \frac{11}{10} \hat{q}l.$$



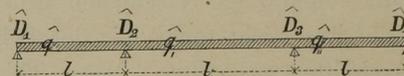
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_5 = \frac{19}{56} \hat{P} + \frac{11}{28} \hat{q}l. \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_4 = \frac{68}{56} \hat{P} + \frac{32}{28} \hat{q}l.$$

$$\hat{D}_3 = \frac{50}{56} \hat{P} + \frac{26}{28} \hat{q}l.$$



$$\hat{D}_1 = \hat{D}_6 = \frac{26}{76} \hat{P} + \frac{15}{38} \hat{q}l. \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_5 = \frac{91}{76} \hat{P} + \frac{43}{38} \hat{q}l.$$

$$\hat{D}_3 = \hat{D}_4 = \frac{73}{76} \hat{P} + \frac{37}{38} \hat{q}l.$$



$$\hat{D}_1 = \frac{\hat{q} (6l^2l^2 + 14l^3l + 6l^4) - \hat{q}l^3(2l+1) + \hat{q}l^3l}{12l^2 + 32l^2l + 16l^3}.$$

$$\hat{D}_2 = \frac{\hat{q} (4l^2l^2 + 6l^2l + 3l^3) + \hat{q}l^3 - \hat{D}_1(12l^2 + 8l^2 + 4l^2)}{4l^2}.$$

$$\hat{D}_3 = \frac{\hat{q} (4l^2l^2 + 6l^2l + 3l^3) + \hat{q}l^3 - \hat{D}_4(12l^2 + 8l^2 + 4l^2)}{4l^2}.$$

$$\hat{D}_4 = \frac{\hat{q} (6l^2l^2 + 14l^3l + 6l^4) - \hat{q}l^3(2l+1) + \hat{q}l^3l}{12l^2 + 32l^2l + 16l^3}.$$