

Fig. 367 das Refutantenpolygon  $S I I I I I V V I A$ , woraus nun leicht die entsprechende Stützlinie zu finden ist.

Die auf die Gurtbogen übertragenen Horizontalkräfte ergeben sich leicht, wenn für die einzelnen Streifen die Seilcurven construirt werden.

**b) Kuppelgewölbe.**

Die Kuppelfläche entsteht durch Rotation einer ebenen Curve um eine Verticalaxe. Wir ermitteln in den folgenden Untersuchungen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme einer ruhenden und derartig vertheilten Belastung, daß dieselbe sich über jeden ganzen, durch zwei Parallelkreise begrenzten Ring gleichmäÙig vertheile. Setzen wir ferner die Gewölbestärke gering im Vergleich zu den Krümmungsradien, so können wir annehmen, daß die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen  $MNOP$  (Fig. 368), welches oben und unten durch zwei Parallelkreise, rechts und links durch zwei Meridiane der Kuppel begrenzt ist, wirkenden inneren Kräfte tangential zu der Kuppelfläche gerichtet sind. Indem wir alsdann für irgend eine Rotationsfläche die unter obigen Annahmen aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen anwenden, erhalten wir die inneren Spannungen, welche der angenommenen Fläche als Gleichgewichtsfläche entsprechen.

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 369) in den Scheitel der Kuppel, wählen die verticale Axe als  $Y$ -Axe, eine im Scheitel  $S$  normal zu ersterer errichtete Axe als  $X$ -Axe und untersuchen den Gleichgewichtszustand des oben beschriebenen Kuppeltheilchens  $MNOP$  (Fig. 368). Auf  $MN$  wirke pro Längeneinheit die Tangentialspannung  $T$ , also auf  $x d\omega$  Längeneinheiten  $T x d\omega$ . Auf  $OP$  wirkt  $(T + dT)(x + dx) d\omega$ ; auf  $MP$  und  $NO$  wirken die Ringspannungen  $R$  pro Längeneinheit, also pro  $ds$  Längeneinheiten je  $R ds$ . Außerdem wirkt noch die variable Belastung  $p$  pro Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf  $MNOP$  die Last  $p ds x d\omega$ . Um sämtliche Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Resultirende der beiden Ringspannungen  $R ds$ ; sie ist  $\mathfrak{S} = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2}$ , und da wegen der Kleinheit von  $\frac{d\omega}{2}$  statt-

findet:  $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$ , so wird

$$\mathfrak{S} = R ds d\omega \dots \dots \dots 377.$$

Die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für  $MNOP$  ergibt

489.  
Voraussetzungen.

490.  
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

Fig. 368.

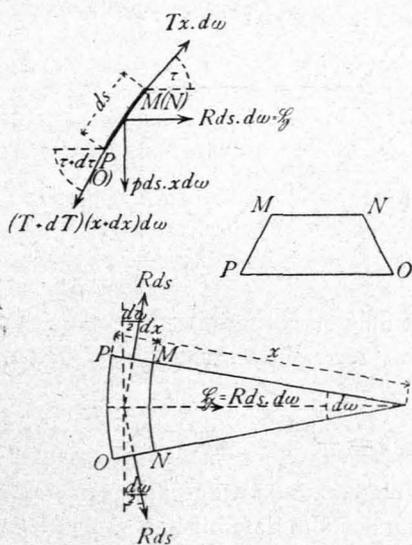
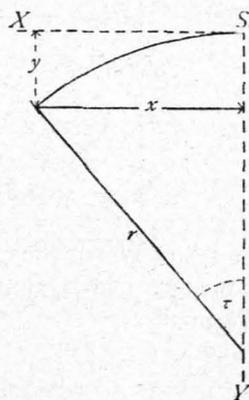


Fig. 369.



$$0 = Tx d\omega \cos \tau - (T + dT)(x + dx) d\omega \cos(\tau + d\tau) + R ds d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läßt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, so bleibt

$$0 = Tx \sin \tau d\tau - dTx \cos \tau - T dx \cdot \cos \tau + R ds = -d(Td \cos \tau) + R ds; \\ R ds = d(Tx \cos \tau) \dots \dots \dots 378.$$

Ferner ist

$$0 = p ds \cdot x d\omega - Tx d\omega \sin \tau + (T + dT)(x + dT) d\omega \sin(\tau + d\tau) \\ \sin(\tau + d\tau) = \sin \tau + \cos \tau d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man  $0 = px ds + d(Tx \sin \tau)$ , daher

$$-px ds = d(Tx \sin \tau) \dots \dots \dots 379.$$

Die beiden Gleichungen 378. und 379. geben Aufschluß über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von  $T$  und  $R$ , welche irgend welchen Belastungen und Curvenformen entsprechen.

491.  
Kugelförmige  
Kuppel.

Die erzeugende Curve ist bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von  $T$  und  $R$  werden erhalten, wenn in die Gleichungen 378. und 379. für  $x$  und  $ds$  die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 369 ist  $x = r \sin \tau$  und  $ds = r d\tau$ , mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, daß  $p$  für die ganze Kuppel constant ist,

$$-pr \sin \tau \cdot r d\tau = d(Tr \sin \tau \sin \tau) \text{ und } \int_0^\tau d(Tr \sin^2 \tau) = -pr^2 \int_0^\tau \sin \tau d\tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth von  $\tau$  und  $T$  einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt  $S$ , und es wird  $\tau_0 = 0$ ; demnach ist

$$Tr \sin^2 \tau = +pr^2 (\cos \tau)_0^\tau = -pr^2 (1 - \cos \tau), \\ T = -\frac{pr(1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{pr(1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{pr}{1 + \cos \tau} \dots \dots 380.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 378. für  $R$  eingesetzt, so erhält man

$$Rds = Rr d\tau = d\left(-\frac{pr}{1 + \cos \tau} r \sin \tau \cos \tau\right) = -pr^2 d\frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau}, \\ R = -pr \frac{\cos 2\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 381.$$

Die Werthe der Gleichungen 380. und 381. gelten für oben geschlossene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden erhalten für  $\tau = 0$ . Für letzteren Werth ist

$$T_0 = -\frac{pr}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{pr}{2}, \dots \dots \dots 382.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind pro Längeneinheit im Scheitel gleich groß; es findet also dafelbst nach allen Richtungen ein gleicher Druck  $\frac{pr}{2}$  statt.

492.  
Halbkugel-  
kuppel.

Für die Halbkugelkuppel ist am Aequator  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , daher

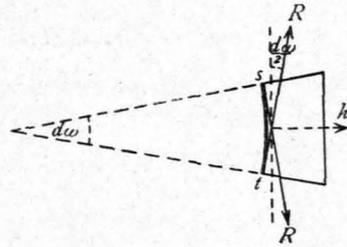
$$T_{\frac{\pi}{2}} = -pr \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +pr \dots \dots \dots 383.$$

Die Meridianspannung nimmt also vom Scheitel nach dem Aequator von  $\frac{pr}{2}$  bis auf  $pr$  zu, bleibt aber stets Druck, da  $1 + \cos \tau$  nie negativ werden kann. Am Aequator ist  $T$  vertical gerichtet, da  $T$  gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller  $T_{\frac{\pi}{2}}$  ist gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die  $T_{\frac{\pi}{2}}$  die Auflager-Reactionen repräsentiren. Es ist  $\Sigma \left( T_{\frac{\pi}{2}} \right) = pr \cdot 2 r \pi = 2 pr^2 \pi$ , und das ganze Kuppelgewicht ist gleich  $\frac{4 r^2 \pi}{2} p = 2 r^2 p \pi$ . Die Ringspannung  $R$  geht vom Drucke  $\frac{pr}{2}$  im Scheitel zum Zug  $pr$  am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel  $\tau_1$ , so ist  $0 = pr \frac{\cos 2 \tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$ , woraus sich ergibt

$$\cos \tau_1 = 0,618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^\circ 50' \dots \dots \dots 384.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel  $\tau$  kleiner als  $\tau_1$  sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel  $\tau$  größer sind als  $\tau_1$ , findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile des Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber Gleichgewicht nicht stattfinden; es ist also ohne Hilfsconstruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructionen sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leitet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte  $R$ ; auf dieselbe wirken also nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte  $R$  in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück  $st$  (Fig. 370), welches zum Winkel  $d\omega$  gehört, so ist die Resultirende der beiden  $R$  die nach außen gerichtete Kraft  $h$  gleich  $2R \sin \frac{d\omega}{2} = R d\omega$ .

Fig. 370.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung ein:

$$\mu = - \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2}, \dots \dots \dots 385.$$

alsdann wird

$$R = \mu pr \quad \text{und} \quad h = \mu pr d\omega \dots \dots \dots 386.$$

Pro Längeneinheit des  $x d\omega$  langen Bogens ist also die nach außen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

$$h = \frac{\mu pr d\omega}{x d\omega} = \frac{\mu pr}{x} \dots \dots \dots 387.$$

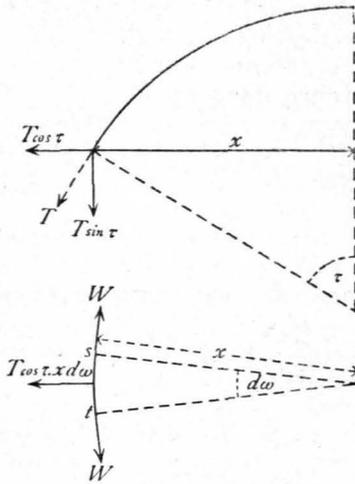
Aus Vorstehendem folgt noch, daß bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muß, welche dem Winkel  $\tau_1 = 51^\circ 50'$  entspricht.

Ist die Kuppel ein Kugelabschnitt, so wirken auf die Widerlager außer den eventuell vorhandenen Kräften  $h$  (nach Gleichung 387.) noch die Meridianspannungen  $T$ , welche dem größten zur Kuppel gehörigen Winkel  $\tau$  entsprechen.  $T$  hat eine horizontale Komponente  $T \cos \tau$  und eine verticale Komponente  $T \sin \tau$ . Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergibt sich dann wie folgt. Auf den Bogen  $st$  (Fig. 371) von der Länge  $x d\omega$  wirkt nach außen  $T \cos \tau x d\omega$ , und es soll diese Kraft durch die beiden Ringspannungen  $W$  aufgehoben werden; es ist demnach

$$T \cos \tau x d\omega = 2 W \sin \frac{d\omega}{2} = W d\omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{pr r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{pr^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \dots \dots \dots 388.$$

Fig. 371.



493.  
Graphische  
Ermittlung.

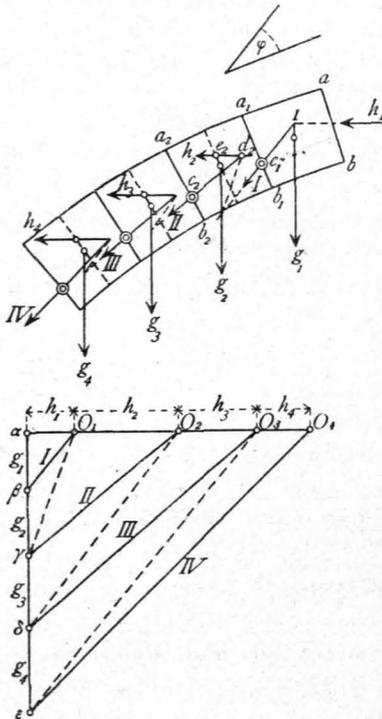
Die vorstehend entwickelten Werthe für  $T$  und  $R$  entsprechen den Gleichgewichtscurven. Man kann bei verhältnismässig geringer Stärke der Kuppel diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber grössere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

Die graphische Ermittlung der Werthe von  $T$  und  $R$  an den verschiedenen Stellen der Kuppel kann nun in analoger Weise durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbarten gezeigt ist, indem man bestimmte Bedingungen für die Stützlinie vorschreibt. Man untersucht zu dem Zwecke den einem Centriwinkel  $\alpha$  entsprechenden

Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, dass die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben soll und kein Gleiten stattfindet, so ergibt sich die Stützlinie folgender Massen (Fig. 372).

Fig. 372.



Die Belaftung des obersten Ringsteines sei  $g_1 (= \alpha \beta)$ ; alsdann wirken auf diesen Stein (Fig. 372)  $g_1$  und die vor der Hand unbekannte Resultante  $h_1$  der Spannungen im obersten Ringe. Der kleinste Werth von  $h_1$ , bei welchem die Stützlinie die gestellten Bedingungen erfüllt, ergibt sich, wenn die Resultirende  $I$  von  $g_1$  und  $h_1$  durch den untersten Punkt  $c_1$  des inneren Drittels der Fuge  $a_1 b_1$  geht und um einen Winkel  $\varphi$  von der Fugennormalen abweicht. Die durch  $c_1$  unter dem Winkel  $\varphi$  mit der Fugennormalen gelegte Linie schneide die Richtungslinie von  $g_1$  in  $I$ ; alsdann ist dieser Punkt auch der Angriffspunkt von  $h_1$ . Die Grösse von  $h_1$  und  $I$  ergibt das Kraftpolygon, wenn durch  $\beta$  eine Linie parallel zu der Richtungslinie von  $I$  gezogen wird. Man erhält  $O_1 \alpha = h_1$  und  $O_1 \beta = I$ . Wenn der Schnittpunkt von  $h_1$  mit der Fuge  $a b$  oberhalb des inneren Drittels liege, so würde man  $h_1$  bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken haben und den sich alsdann ergebenden Schnittpunkt von  $h_1$  und  $g_1$  mit  $c_1$  verbinden, wobei der Winkel von  $I$  mit der Fugennormalen kleiner würde, als  $\varphi$ .

Auf den zweiten Stein wirken nun  $g_2$ ,  $I$  und  $h_2$ . Der kleinste Werth von  $h_2$ , welcher obigen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem  $h_2$  durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch  $e_2$  geht, die Resultirende von  $I$ ,  $g_2$  und  $h_2$  aber die Fuge  $a_2 b_2$  im unteren Grenzpunkte  $c_2$  des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von  $c_2$  mit  $d_2$ , dem Schnittpunkt der Resultirenden der Kräfte  $I$  und  $g_2$  mit  $h_2$ , ergibt die Richtung von  $II$ ; die Grösse von  $II$  erhält man durch Ziehen einer Parallelen  $\gamma O_2$  durch  $\gamma$  zur Richtungslinie von  $II$ .

Der Winkel, welchen  $II$  mit der Fugennormalen zu  $a_2 b_2$  einschließt, ist kleiner als  $\varphi$ , also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel grösser als  $\varphi$ , so wäre  $h_2$  so weit hinabzurücken und zu vergrössern, bis der Winkel höchstens gleich  $\varphi$  ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

## Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

- DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.  
 TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.  
 SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunschweig 1857.  
 FABRE, V. *Théorie des voûtes élastiques et dilatables d'une application spéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.  
 HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.  
 HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.  
 FONTAINE, H. *Stabilité des constructions. Extrait de la notice sur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.  
 ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.  
 FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit besonderer Berücksichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.  
 BONNIN, R. *Étude sur la stabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.  
 PERRODIL. *Résistance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.  
 GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches sur la théorie des voûtes.* Paris 1879.  
 FÖEPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.  
 DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes sphériques.* Paris 1880.

## Berichtigungen.

- S. 50, Zeile 1 v. u.: Statt »BOSE« zu lesen: »BOSC«.  
 S. 97, » 20 v. o.: Statt »Pietro duro« zu lesen: »Pietra dura«.  
 S. 109, » 13 v. u. }  
 S. 110, » 21 v. o. } : Statt »E. March« zu lesen: »Ernst March Söhne«.  
 S. 113, » 3 v. o.: Statt »Erfcheint seit 1865« zu lesen: »1865—80«.  
 » 10 v. o.: Statt »Red. von H. Seger« zu lesen: »Red. v. H. Seeger u. J. Aron«.  
 S. 159, » 18 v. o.: Statt »calls« zu lesen: »walls«.  
 S. 164, » 3 v. u.: Statt »0,18 kg« zu lesen: »0,18 t«.  
 S. 165, » 3 v. o.: Statt »174« zu lesen: »104«.  
 S. 166, » 20 v. o.: Statt »0,26 kg« zu lesen: »0,26 t«.  
 » 16 v. u.: Hat »und« zu entfallen.  
 S. 167, » 16 v. o.: Statt »(6,748)« zu lesen: »(0,748)«,  
 S. 174, » 8 v. o.: Statt »unter« zu lesen: »von«.  
 S. 178, » 22 v. o. hat zu entfallen.  
 S. 192, » 5 v. u.: Statt »25« zu lesen: »28«.  
 S. 238, » 14 v. o.: Statt »K« zu lesen: »K<sub>1</sub>«.  
 S. 244, » 23 v. o.: Statt »die normal« zu lesen: »die geneigt oder normal«.  
 S. 251, » 7 v. u.: Statt »Gleichung 16.« zu lesen: »Gleichung 16a«.  
 S. 257, » 4 v. o.: Statt »eine normal« zu lesen: »eine geneigt oder normal«.  
 » 21 v. o.: Statt »Biegunsmoment« zu lesen: »Biegungs- oder Angriffsmoment«.  
 S. 265, » 11 v. o.: Statt »des Moment« zu lesen: »das Moment«.  
 S. 265, » 15 v. o.: Statt  $\frac{f}{a_2}$  zu lesen:  $\frac{f}{a_1}$ .  
 S. 279, » 6 v. o.: Statt »oberhalb YY« zu lesen: »oberhalb einer leicht zu ermittelnden, durch O gehenden Axe«.  
 S. 280, » 11 v. o.: Statt »P« zu lesen »R«.  
 S. 290, Fig. 118 links unten: Statt »V d x« zu lesen: »V d z«.  
 S. 424, » 320 rechts unten: Statt  $\frac{2 x \kappa}{n}$  zu lesen:  $\frac{2 x \pi}{n}$ .  
 S. 454, » 358 unten: Statt »q x d u« zu lesen: »q x d w«.