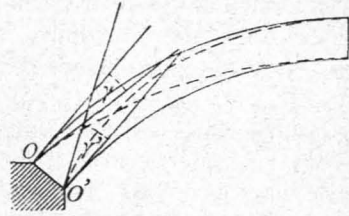


welcher an der ungünstigsten Stelle γ höchstens gleich φ ist, wird dann als Maximalstützlinie einzuführen sein. Eben so ist es möglich, daß die nach Art. 481, S. 450 construirte Minimalstützlinie an irgend einer Stelle um einen Winkel γ' von der Fugennormalen abweicht, welcher größer als φ ist (Fig. 357); alsdann ist H so weit zu vergrößern, bis die sich ergebende Stützlinie nirgends einen größeren Winkel mit der Fugennormalen bildet, als φ ; diese ist dann die Minimalstützlinie.

Aus den Entwicklungen der vorstehenden Artikel folgt, daß die statische Behandlung der Gewölbetheorie keine genauen Gleichungen für die Gewölbefstärke ergeben kann. Sowohl die Richtung, wie die Größe und die Lage der auf die einzelnen Fugen wirkenden Resultirenden ist unbekannt; bekannt sind nur die Grenzen, zwischen denen die Größe und Lage sich bewegen darf, wenn kein Kanten und Zerdrücken, ihre Richtung liegen muß, wenn kein Gleiten stattfinden soll. Will man demnach nicht die Elasticitätstheorie zu Grunde legen, was sich bei den einfachen Fällen des Hochbaues nicht als nöthig erweist, so dürfte sich das folgende Verfahren für die praktische Stabilitätsbestimmung der Gewölbe empfehlen.

Man nimmt zuerst nach empirischen Formeln der Erfahrung entsprechende Werthe für die Gewölbefstärke an, und verzeichnet danach das Gewölbe. Alsdann ermittelt man überschläglich H_{max} und P_{max} und daraus $c = \frac{2 P_{max}}{3 K}$, zieht zwei Curven in den Abständen c von den Laibungen und construirte zwischen denselben die Minimal- und die Maximalstützlinie. Fallen diese beiden Curven nicht zusammen und ergibt sich zwischen den Werthen des Horizontalstschubes, welche den beiden Stützlinien entsprechen, eine nicht zu geringe Differenz, so ist das Gewölbe gegen Kanten und Zerdrücken stabil. Schließlich ist noch zu untersuchen, ob auch die Tangenten an die Stützlinien nicht an irgend einer Stelle einen größeren Winkel mit der Fugennormalen bilden, als den Reibungswinkel, in welchem Falle die Maximal-, bezw. Minimalstützlinie, wie in Art. 482, S. 452 angegeben, zu rectificiren ist. Um für c einen jedenfalls ausreichenden Werth zu erhalten, nehme man ein möglichst großes P an; man erhält ein solches, indem man den Horizontalstschub für eine Stützlinie berechnet, die durch den unteren Punkt der Scheitelfuge und die oberen Punkte der Kämpferfugen geht, und dieses H mit der Belastung der einen Gewölbehälfte zu einer Resultirenden P vereint. Das so ermittelte P ist größer, als es je werden kann, also der unter Zugrundelegung dieses P ermittelte Werth für c keinesfalls zu klein.

Fig. 357.



483.
Graphische
Untersuchung
der
Stabilität.

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder so, daß die Lagerfugen parallel zu den Längsachsen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe besteht, oder auf den Schwalbenschwanz, d. h. im Grundriß normal oder nahezu normal zu den Graten. Das statische Verhalten ist bei den beiden Anordnungen verschieden¹⁷²⁾.

484.
Lagerfugen.

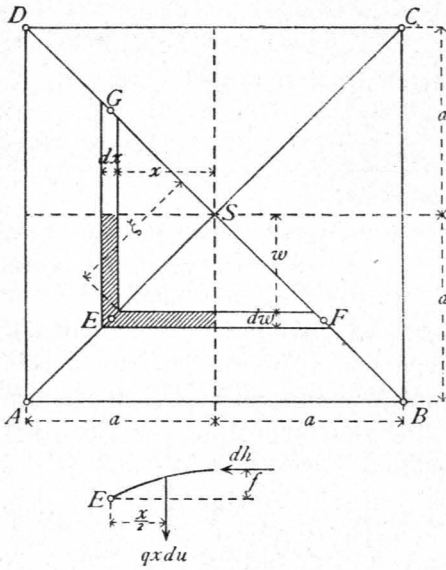
1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsachsen der Kappen parallel.

Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen soll die vereinfachende, mit der Wirklichkeit genügend genau übereinstimmende Annahme einer über die Horizontal-

485.
Berechnung.

¹⁷²⁾ Wegen Raummangels soll hier nur das Kreuzgewölbe über quadratischem Raum behandelt werden; die Erweiterung der gefundenen Resultate für den oblongen und vieleckigen Raum ist nicht schwierig.

Fig. 358.



projection gleichmäßig vertheilten Belastung q pro Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittlung der Seilcurve werden wir hier stets drei Punkte annehmen. Alle Bedingungen, welche für die Lage der Stützlinie im vorigen Kapitel entwickelt sind, gelten natürlich auch hier. Die zu berechnenden Horizontalschübe sind also nur dann richtig, wenn die angenommenen drei Punkte richtig sind. An der Hand der nachfolgenden Untersuchungen können dann leicht die Maxima und Minima der Horizontalschübe ermittelt werden.

Wir zerlegen jede Kappe durch normal zur Längsaxe gelegte Verticalebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriss Paralleltrapeze bilden und betrachten einen solchen Streifen EF (Fig. 358) von der Breite dw im Abstände w vom Centrum S . Die Belastung des Streifens pro Längeneinheit beträgt $q dw$ und der Horizontalschub, welcher einer Pfeilhöhe f der Seilcurve entspricht, ist

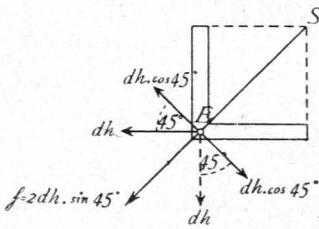
Da $x = w$ ist, so ist auch $dw = dx$ und der Horizontalschub, welcher einer Pfeilhöhe f der Seilcurve entspricht, ist

$$dh = \frac{q x^2 dw}{2f}$$

Da $x = w$ ist, so ist auch $dw = dx$ und $dh = \frac{q x^2 dx}{2f}$.

Der Punkt E repräsentirt den Kämpferpunkt für den Bogen EF und den Bogen EG ; die in diesem Punkte auf den als Widerlager wirkenden Gratbogen von jedem der beiden Nachbarbogen übertragene Kraft hat eine horizontale Komponente dh und eine verticale Komponente $dv = qx dw = qx dx$.

Fig. 359.



Die verticalen Componenten der beiden Kämpferdrücke addiren sich zu einer in E auf den Gratbogen wirkenden Vertikalkraft $v = 2 dv = 2 qx dx$; die horizontalen Componenten dh zerlegen sich nach Fig. 359 in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonale AC fällt, und in je eine normal zu dieser Richtung wirkende Seitenkraft. Letztere

beiden heben einander auf; die beiden ersteren addiren sich zu

$$H = 2 dh \sin 45^\circ = \frac{q x^2 dx}{2f} 2 \sin 45^\circ = \frac{q x^2 dx}{f \sqrt{2}} \dots 368.$$

Wenn als Bogenmittellinie für alle Kappenstreifen dieselbe Curve gewählt wird, so sind für alle Streifen die Gleichgewichtsbedingungen dieselben, und es genügt die Nachweisung der Stabilität in dem äußersten, am weitesten gespannten Streifen. Diese Nachweisung ist in gleicher Weise vorzunehmen, wie bei den Kappengewölben gezeigt ist. Von besonderem Interesse ist hier das Verhalten der Grate, welche als Widerlager für die Kappen dienen.

In den einzelnen Punkten E wirken auf die Grate Vertical- und Horizontalkräfte. Die Verticalkräfte $v = 2q x dx$ sind gleich dem Gewichte der Hälfte beider Nachbarstreifen, d. h. der in Fig. 358 schraffirten Fläche. Die gesammte auf den Eckpunkt A Seitens des Kreuzgewölbes $ABCD$ übertragene Verticalkraft ist demnach

$$V = \sum_0^a (v) = \int_0^a 2q x dx = qa^2, \dots \dots \dots 369.$$

d. h. gleich dem Gewichte des Viertels der Grundfläche.

Die auf den Eckpunkt A übertragene Horizontalkraft setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der erste Theil ist die Summe der einzelnen h , welche in der

Strecke SA wirken; nennt man diesen Theil \mathfrak{S}_1 , so ist $\mathfrak{S}_1 = \int_{x=0}^{x=a} \frac{qx^2 dx}{f\sqrt{2}}$. In diesem

Integral ist f variabel. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastung gleichmäÙig über die Horizontalprojection vertheilt ist, Parabeln, und man kann annehmen, daÙ in allen Streifen dieselbe Seilcurve stattfindet. Dann ist, wenn C eine noch zu bestimmende Constante ist, $x^2 = Cf$, also $f = \frac{x^2}{C}$, und

$h = \frac{Cqx^2 dx}{x^2 \sqrt{2}} = \frac{Cq dx}{\sqrt{2}}$, d. h. h ist für alle Streifen constant. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äußersten Streifen c genannt, so ist $a^2 = Cc$, $C = \frac{a^2}{c}$,

$$h = \frac{qa^2 dx}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_1 = \frac{qa^2}{c\sqrt{2}} \int_0^a dx = \frac{qa^3}{c\sqrt{2}} \dots \dots 370.$$

Der zweite Theil der Horizontalkraft ist diejenige Horizontalspannung \mathfrak{S}_2 , die im Scheitel durch die verticalen Belastungen erzeugt wird. Man erhält dieselbe durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für den Kämpferpunkt \mathcal{F} der Seilcurve im Gratbogen. Wenn dieser Punkt um e höher liegt, als der Punkt L , in welchem die beiden zu den äußersten Streifen gehörigen Seilcurven sich auf dem Gratbogen treffen, so heißt die Gleichung der statischen Momente (Fig. 360):

$$0 = \mathfrak{S}_2 (c - e) + \int h (c - f - e) - \int v \eta.$$

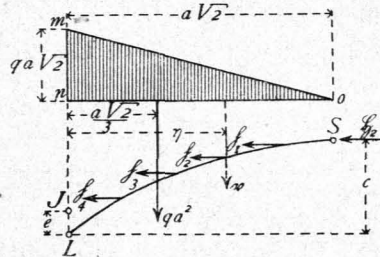
Die Resultirende aller Verticallasten ist gleich qa^2 ; die verticalen Belastungen wachsen von S bis A entsprechend den Ordinaten einer Geraden, da die Belastung $v = 2qx dx = 2q \frac{\xi}{\sqrt{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{2}} = q\xi d\xi$, also pro Längeneinheit $v' = \frac{v}{d\xi} = q\xi$ ist. Für $\xi = 0$ ist $v' = 0$; für $\xi = a\sqrt{2}$ ist $v' = qa\sqrt{2}$. Das Dreieck mno giebt diese Lastvertheilung an. Demnach ist

$$\int v \eta = \frac{qa\sqrt{2} a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{qa^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Wird ferner für h der Werth aus Gleichung 368. eingeführt, so ergibt sich

$$0 = \mathfrak{S}_2 (c - e) + \frac{q}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{x^2 dx}{f} (c - f - e) - \frac{qa^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Fig. 360.



Es ist $f = \frac{x^2}{C} = \frac{x^2}{a^2} c$. Durch Einsetzung dieses Werthes in das Integral und einfache Reductionen erhält man

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{q a^3}{\sqrt{2}} \frac{e}{c(c-e)} \dots \dots \dots 371.$$

Für $e = 0$, d. h. wenn die Seilcurve durch den Punkt L gehen soll, wird $\mathfrak{S}_2 = 0$. Die gefammte Horizontalkraft, welche auf den Eckpfeiler übertragen wird, ist also

$$H = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} \left(1 + \frac{e}{c-e} \right) = \frac{q a^3}{(c-e) \sqrt{2}} \dots \dots \dots 372.$$

Für $e = 0$ ist $H' = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} = \mathfrak{S}_1$.

Da die Pfeilhöhe $c - e$ der Seilcurve innerhalb gewisser Grenzen angenommen werden kann, so erhält man je nach der Wahl derselben verschiedene Werthe für H , und es ergibt sich in früher gezeigter Weise ohne Schwierigkeit H_{max} und H_{min} für den Grat.

Die graphische Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse eines Kreuzgewölbes kann in nachstehender Weise geschehen.

Wir zerlegen die Kappen (Fig. 362) durch normal zu den Gewölbeaxen stehende Verticalebenen in eine Anzahl gleich breiter Streifen $AE, F, B, E, E, F, F, E, E, F, F, \dots$ und ermitteln für die im Grundriss punktirten Schwerlinien dieser Streifen $\mathfrak{F}_1, K_1, \mathfrak{F}_2, K_2, \dots$ die Seilcurven, unter Annahme je dreier Punkte für dieselben. Die Belastungsfläche möge (nach Fig. 361) unten durch die innere Laibungsfläche, oben durch eine geneigte gerade Linie begrenzt sein. Wenn alle Streifen gleiche Bogenform haben, so ergibt die Construction der Seilcurve, bzw. des Resultantenpolygons für den am weitesten gespannten Streifen mit der Schwerlinie \mathfrak{F}_1, K_1 , zugleich die Seilcurven für die übrigen Streifen. Wir ermitteln demnach die Seilcurve für \mathfrak{F}_1, K_1 und legen dabei, wie auch bei den anderen Streifen, statt der trapezförmigen die punktirte rechteckige Form zu Grunde. Bei der Eintheilung der Belastungsfläche in Lamellen empfiehlt es sich, die Lamellenbreiten nach den Abfätzen in den Punkten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ zu bemessen; alsdann wird, wenn $SIIIIV\mathfrak{F}_1$ (Fig. 361) die Seilcurve für \mathfrak{F}_1, K_1 ist, $SIIIIV\mathfrak{F}_2$ diejenige für \mathfrak{F}_2, K_2 , $SIII\mathfrak{F}_3$ diejenige für \mathfrak{F}_3, K_3 , $SII\mathfrak{F}_4$ diejenige für \mathfrak{F}_4, K_4 . Man sieht leicht, dass auch der Horizontalschub bei diesen Annahmen in allen Streifen gleich groß ist. Die in den Punkten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ von der Kappe ASB auf den Grat übertragenen Kräfte werden fomit nach Größe und Richtung durch die Strahlen $O\beta, O\gamma, O\delta, O\varepsilon$ des Kraftpolygons der Fig. 362 dargestellt, falls $\alpha\beta = 1, \beta\gamma = 2, \gamma\delta = 3, \delta\varepsilon = 4$ ist. Genau eben so große Kräfte werden — bei quadratischem Kreuzgewölbe — von den Streifen der Kappe ASD auf den Grat übertragen. Wir setzen zunächst die in den einzelnen Punkten \mathfrak{F} wirkenden Verticalkräfte, dann die eben daselbst wirkenden Horizontalkräfte zusammen und vereinigen darauf beide zu je einer Resultirenden. Die ganze Verticalkraft in \mathfrak{F} ist $2\alpha\beta$, in \mathfrak{F}_1 : $2\alpha\gamma \dots$; die Horizontalkraft in allen Punkten \mathfrak{F} fällt im Grundriss in die Diagonalrichtung und ist gleich $\sqrt{2}H^2 = H\sqrt{2}$. Dieselbe wird nach Größe und Richtung erhalten, indem man $OO_1 = H$ normal zu $O\alpha$ abträgt und $O_1\alpha$ zieht. Man mache nun $\alpha\zeta = 2\alpha\beta$; alsdann ist $O_1\zeta$ nach Größe und Richtung die Resultirende der im Punkte \mathfrak{F} auf den Grat wirkenden Kräfte. In gleicher Weise ergeben sich $O_1\eta, O_1\theta$ und $O_1\kappa$ als Resultirende in den Punkten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$. Es sind nun die im Grat wirkenden Kräfte und die Seilcurve für den Grat zu ermitteln. Die Kräfte $r_1 = O_1\zeta, r_2 = O_1\eta, r_3 = O_1\theta$ und $r_4 = O_1\kappa$ wirken in den Punkten $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \mathfrak{F}'_3$ (Fig. 362); die Resultirende derselben R wird nach Größe, Richtung und Lage mittels des Kraftpolygons O_1abcd (in welchem die Kräfte in vierfach verkleinertem Maßstabe aufgetragen sind) und des für einen beliebigen Pol P construirten Seilpolygons m, m, m, m, m, m, m, m erhalten. Dieselbe ist gleich und parallel O_1d und geht durch den Punkt g .

486.
Graphische
Ermittelung.

Fig. 361.

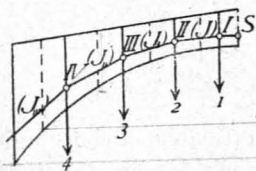


Fig. 362.

Soll nun die Seilcurve für den Gratbogen durch die beiden Punkte S' und N gehen und in S' eine horizontale Tangente haben, so ergibt sich die Gröfse der in S' wirkenden Kraft \mathfrak{S} aus der Bedingung, dafs die Resultirende aller auf die eine Hälfte wirkenden Kräfte durch N geht, für N als Drehpunkt also kein statisches Moment hat. Die Bedingungsgleichung heifst demnach

$$0 = \mathfrak{S}_0 f - R e,$$

woraus

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{R e}{f}.$$

Um \mathfrak{S}_0 zu construiren, mache man in Fig. 362 auf der über O , verlängerten Horizontalen αO , $O, i = e$ und auf der Richtungslinie von R : $O, k = f$, ziehe $k i$ und durch den Endpunkt d von R eine Parallele zu $k i$, bis sie die Horizontale αO , in Q schneidet; alsdann ist

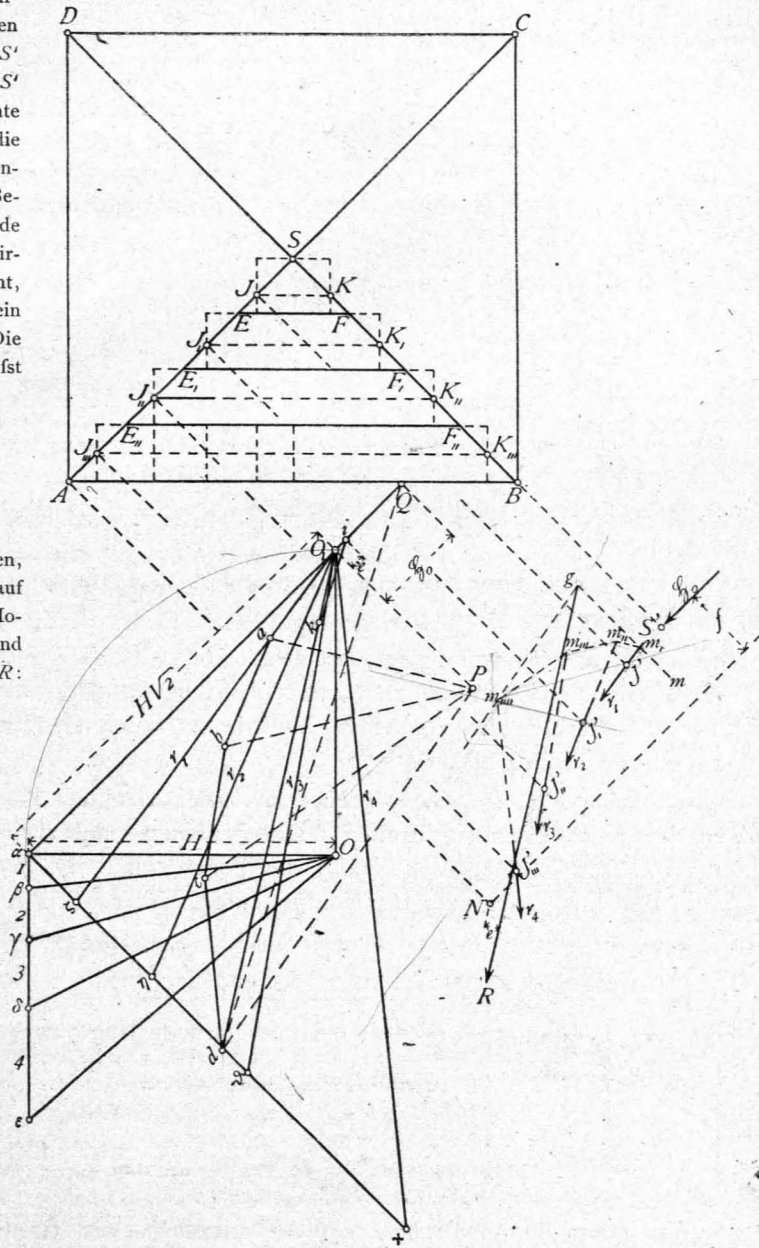
$$\frac{O, i}{O, k} = \frac{O, Q}{O, d},$$

d. h. $\frac{e}{f} = \frac{O, Q}{R}$

und

$$O, Q = \frac{R e}{f} = \mathfrak{S}_0.$$

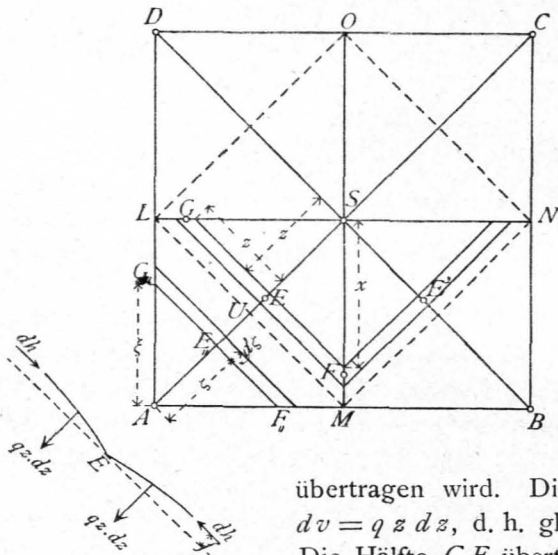
Nun kann man leicht \mathfrak{S}_0 der Reihe nach mit r_1, r_2, r_3, r_4 zusammensetzen und die Seilcurve für den Gratbogen erhalten.



2) Die Lagerfugen sind im Grundriss normal zu den Graten.

Wir denken uns das Gewölbe (Fig. 363) durch Verticalebenen, welche im Grundriss normal zu den Graten gerichtet sind, in Streifen zerlegt; dann besteht jeder Streifen aus zwei Hälften, welche sich im Grat treffen. Für jede Hälfte bildet der Grat das eine Widerlager; das andere Widerlager wird bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ liegenden Streifen durch den entsprechenden Streifen des benachbarten Gewölbviertels gebildet (beim Streifen EF durch FE'), bei den ausserhalb $LMNO$ liegenden Streifen durch die Gurtbogen bei $AB, BC \dots$

Fig. 363.



Wir nehmen wiederum gleichmäÙig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung q pro Flächeneinheit an und betrachten zunächst den Streifen $G E F$. Die Pfeilhöhe, welche sich unter Annahme dreier Punkte für die Seilcurve ergibt, sei f ; alsdann wird der Horizontal Schub im Scheitel (Fig. 363) $dh = \frac{q dz \cdot z^2}{2f}$.

Dieselbe GröÙe hat auch die Horizontalcomponente der Kraft, welche im Punkte E von der Streifenhälfte $E F$ auf den Grat

übertragen wird. Die Verticalcomponente dieser Kraft ist $dv = qz dz$, d. h. gleich dem Gewichte des Streifens $E F$. Die Hälfte $G E$ überträgt auf den Gratbogen im Punkte E eine Resultirende, deren Verticalcomponente ebenfalls

$dv = qz dz$ ist, deren Horizontalcomponente gleiche GröÙe und Richtung, aber entgegengesetzten Sinn hat, wie diejenige von $E F$. Die beiden Horizontalcomponenten heben einander auf, und es verbleibt als Totalresultirende die Verticalkraft $v = 2qz dz$. Bei der angegebenen Construction werden demnach die Grate nur durch verticale Kräfte belastet.

Im Punkte F (Fig. 364) wirken nun zwei horizontale Kräfte dh in den Richtungen der anschließenden Streifen. Die beiden normal zur Längsaxe der Kappe gerichteten Componenten der Kräfte dh heben einander auf; die beiden in die Richtung der Längsaxe fallenden Componenten addiren sich zu einer Kraft

$$dh = 2 dh \sin 45^\circ = dh \sqrt{2}.$$

Setzt man nunmehr für dh den eben gefundenen Werth ein und berücksichtigt man, daß $x = z\sqrt{2}$ oder $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$, daher $dz = \frac{dx}{\sqrt{2}}$ ist, so erhält man

$$dh = \frac{q x^2 dx}{4f} \dots \dots \dots 373.$$

Von jedem Doppeltstreifen $E F E'$ innerhalb der Grenzen $x=0$ bis $x=a$ wird eine Horizontalkraft dh auf den Scheitel des Gurtbogens ausgeübt. Die Gesamtwirkung ist also eine im Scheitel wirkende Horizontalkraft $\mathfrak{H} = \int_0^a \frac{q x^2 dx}{4f}$.

f ist variabel und unter gleichen Annahmen, wie früher, ist $z^2 = Cf$, fonach $f = \frac{z^2}{C} = \frac{x^2}{2C}$. Für $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ sei $f = F$; alsdann ist $\frac{a^2}{2} = CF$, $C = \frac{a^2}{2F}$ und $f = \frac{x^2 F}{a^2}$, mithin

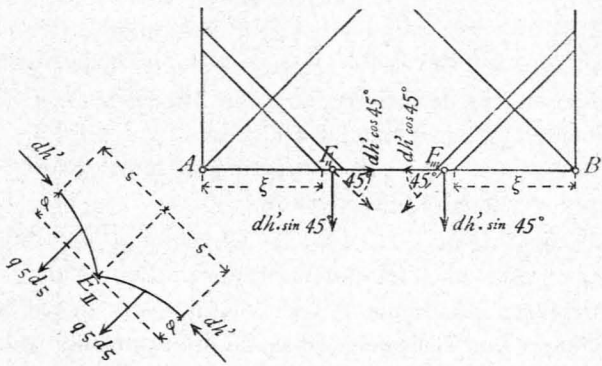
$$\mathfrak{S} = \int_0^a \frac{q x^2 a^2 dx}{4 F x^2} = \frac{q a^3}{4 F} \dots \dots \dots 374.$$

Wir wenden uns jetzt zu einem Streifen $G,, E,, F,,$ (Fig. 363) auferhalb des Viereckes $LMNO$; dabei wird die Annahme gemacht, das in den Streifenhälften, welche hier halbe Spitzbogen bilden, eine Gleichgewichtcurve (Seilcurve) möglich ist, bei welcher im Scheitel nur eine Horizontalkraft dh' wirkt. Die beiden auf den Grat in E'' (Fig. 365) übertragenen Horizontalkräfte, die je $dh' = \frac{q \xi^2 d\xi}{2 \varphi}$ sind, heben einander auf; demnach ist die in E'' übertragene Resultirende die Vertikalkraft $v = 2 q \xi d\xi$.

v ist wiederum gleich dem Gewichte des anschließenden Streifens $G,, E,, F,,$; dasselbe ist aber genau so groß, wie das Gewicht des um $z = \xi$ von der Mitte entfernten Streifens, woraus folgt, das die Gratbogenbelastung von S aus nach A zunächst entsprechend den Ordinaten einer Geraden, nach dem Gesetze $y = 2 q z$, bis zum Punkt U zunimmt und von U bis A nach demselben Gesetze wieder bis zu Null abnimmt.

Im Punkte $F,,$ wirkt (Fig. 365) die Kraft $dh' = \frac{q \xi^2 d\xi}{2 \varphi}$ auf den Gurtbogen unter 45 Grad mit der Richtung AB und zerlegt sich in eine Componente $dh' \cos 45^\circ$, welche in die Richtung AB fällt, und in eine normal dazu gerichtete Componente $dh' \sin 45^\circ$. Die erstere wird durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Componente im fymmetrisch

Fig. 365.



zur Mitte liegenden Punkt $F,,$ aufgehoben. Die letztere ist $dh' \sin 45^\circ = \frac{q \xi^2 d\xi}{2 \sqrt{2} \varphi}$; da $\xi = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ ist, so wird

$$dh' \sin 45^\circ = \frac{q \xi^2 d\xi}{8 \varphi} \dots \dots \dots 375.$$

Seitens des Kreuzgewölbes werden also auf den Gurtbogen AB keine verticalen, sondern nur horizontale Kräfte übertragen: im Scheitel die Einzelkraft $\frac{q a^3}{4 F}$ und auferdem pro laufende Einheit der Horizontalprojection die Kraft $\frac{q \xi^2}{8 \varphi}$. Dieselben werden entweder durch gleiche entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder der Gurtbogen ist mit einer Mauer in Verbindung zu setzen, welche im Stande ist, die Kräfte aufzunehmen.

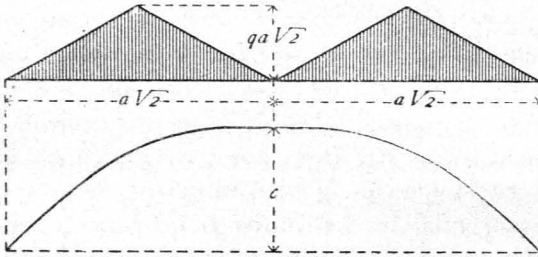
Was den Gratbogen anlangt, so ist die Belastung desselben nach Vorstehendem in Fig. 366 graphisch dargestellt. Nimmt man drei Punkte für den Verlauf der Seilcurve an und bezeichnet die Pfeilhöhe der durch dieselben bestimmten Curve mit c , so ist der im Gurtbogen wirkende Horizontalschub

$$H = \frac{1}{c} \frac{q a \sqrt{2} a \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a \sqrt{2}}{2} = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} \dots \dots \dots 376.$$

488.
Graphische
Ermittlung.

Die Construction der Seilcurven für die einzelnen Theile der Kappen ist so einfach, dafs dieselbe nicht besonders gezeigt zu werden braucht; wir werden nur die Ermittlung der Seilcurve für den Gratbogen zeigen.

Fig. 366.



Wir zerlegen jedes Gewölbeviertel (Fig. 367) in eine Anzahl Lamellen, welche im Grundriss trapezförmig, bezw. dreieckig sind, und ermitteln die diesen Lamellen entsprechenden Gewichte; dieselben sind die Kräfte, welche den Gratbogen vertical belasten und zwar wirken sie (1, 2, 3, 4, 5, 6 in Fig. 367) in den Schwerlinien der einzelnen Lamellen. Unter Annahme dreier Punkte für die Seilcurve des Gratbogens, bezw. zweier Punkte und der horizontalen

Tangente im Scheitel für eine Hälfte wird nun die Seilcurve in der Weise construct, die in Art. 476, S. 444 näher angegeben ist. Für den Pol *O* und die beiden gegebenen Punkte *S* und *A* ergibt sich in

Fig. 367.

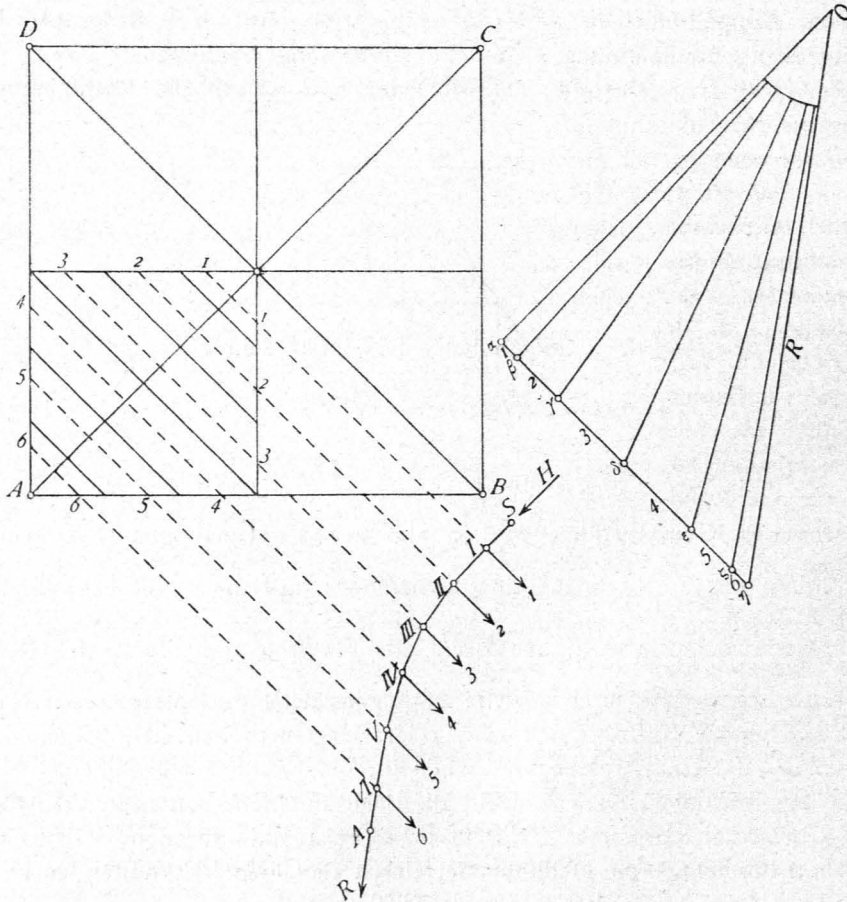


Fig. 367 das Refutantentpolygon $S I I I I I V V V I A$, woraus nun leicht die entsprechende Stützlinie zu finden ist.

Die auf die Gurtbogen übertragenen Horizontalkräfte ergeben sich leicht, wenn für die einzelnen Streifen die Seilcurven construirt werden.

b) Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entsteht durch Rotation einer ebenen Curve um eine Verticalaxe. Wir ermitteln in den folgenden Untersuchungen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme einer ruhenden und derartig vertheilten Belastung, daß dieselbe sich über jeden ganzen, durch zwei Parallelkreise begrenzten Ring gleichmäÙig vertheile. Setzen wir ferner die Gewölbestärke gering im Vergleich zu den Krümmungsradien, so können wir annehmen, daß die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen $M N O P$ (Fig. 368), welches oben und unten durch zwei Parallelkreise, rechts und links durch zwei Meridiane der Kuppel begrenzt ist, wirkenden inneren Kräfte tangential zu der Kuppelfläche gerichtet sind. Indem wir alsdann für irgend eine Rotationsfläche die unter obigen Annahmen aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen anwenden, erhalten wir die inneren Spannungen, welche der angenommenen Fläche als Gleichgewichtsfläche entsprechen.

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 369) in den Scheitel der Kuppel, wählen die verticale Axe als Y -Axe, eine im Scheitel S normal zu ersterer errichtete Axe als X -Axe und untersuchen den Gleichgewichtszustand des oben beschriebenen Kuppeltheilchens $M N O P$ (Fig. 368). Auf $M N$ wirke pro Längeneinheit die Tangentialspannung T , also auf $x d\omega$ Längeneinheiten $T x d\omega$. Auf $O P$ wirkt $(T + dT)(x + dx) d\omega$; auf $M P$ und $N O$ wirken die Ringspannungen R pro Längeneinheit, also pro ds Längeneinheiten je $R ds$. Außerdem wirkt noch die variable Belastung p pro Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf $M N O P$ die Last $p ds x d\omega$. Um sämtliche Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Resultirende der beiden Ringspannungen $R ds$; sie ist $\mathfrak{S} = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2}$, und da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ statt-

findet: $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, so wird

$$\mathfrak{S} = R ds d\omega \dots \dots \dots 377.$$

Die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für $M N O P$ ergibt

489.
Voraussetzungen.

490.
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

Fig. 368.

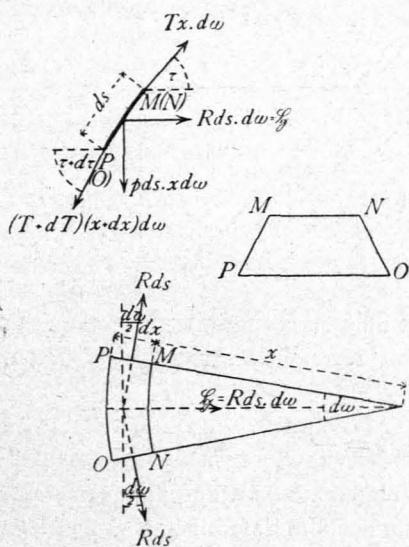
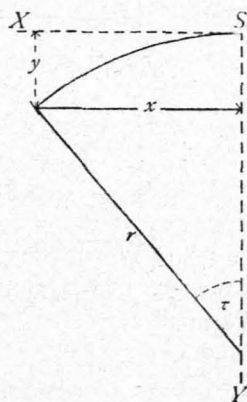


Fig. 369.



$$0 = T x d\omega \cos \tau - (T + dT) (x + dx) d\omega \cos (\tau + d\tau) + R ds d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läßt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, so bleibt

$$0 = T x \sin \tau d\tau - dT x \cos \tau - T dx \cos \tau + R ds = -d(T d \cos \tau) + R ds; \\ R ds = d(T x \cos \tau) \dots \dots \dots 378.$$

Ferner ist

$$0 = p ds \cdot x d\omega - T x d\omega \sin \tau + (T + dT) (x + dT) d\omega \sin (\tau + d\tau) \\ \sin (\tau + d\tau) = \sin \tau + \cos \tau d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p x ds + d(T x \sin \tau)$, daher

$$-p x ds = d(T x \sin \tau) \dots \dots \dots 379.$$

Die beiden Gleichungen 378. und 379. geben Aufschluß über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von T und R , welche irgend welchen Belastungen und Curvenformen entsprechen.

491.
Kugelförmige
Kuppel.

Die erzeugende Curve ist bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden erhalten, wenn in die Gleichungen 378. und 379. für x und ds die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 369 ist $x = r \sin \tau$ und $ds = r d\tau$, mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, daß p für die ganze Kuppel constant ist,

$$-p r \sin \tau \cdot r d\tau = d(T r \sin \tau \sin \tau) \text{ und } \int_0^\tau d(T r \sin^2 \tau) = -p r^2 \int_0^\tau \sin \tau d\tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth von τ und T einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt S , und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ist

$$T r \sin^2 \tau = +p r^2 (\cos \tau)_0^\tau = -p r^2 (1 - \cos \tau), \\ T = -\frac{p r (1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{p r (1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{p r}{1 + \cos \tau} \dots \dots 380.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 378. für R eingesetzt, so erhält man

$$R ds = R r d\tau = d\left(-\frac{p r}{1 + \cos \tau} r \sin \tau \cos \tau\right) = -p r^2 d\frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau}, \\ R = -p r \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 381.$$

Die Werthe der Gleichungen 380. und 381. gelten für oben geschlossene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden erhalten für $\tau = 0$. Für letzteren Werth ist

$$T_0 = -\frac{p r}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{p r}{2}, \dots \dots \dots 382.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind pro Längeneinheit im Scheitel gleich groß; es findet also dafelbst nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p r}{2}$ statt.

492.
Halbkugel-
kuppel.

Für die Halbkugelkuppel ist am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher

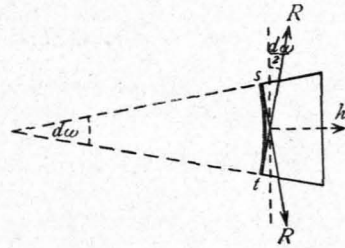
$$T_{\frac{\pi}{2}} = -p r \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +p r \dots \dots \dots 383.$$

Die Meridianspannung nimmt also vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{pr}{2}$ bis auf pr zu, bleibt aber stets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator ist T vertical gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ ist gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflager-Reactionen repräsentiren. Es ist $\Sigma \left(T_{\frac{\pi}{2}} \right) = pr \cdot 2 r \pi = 2 pr^2 \pi$, und das ganze Kuppelgewicht ist gleich $\frac{4 r^2 \pi}{2} p = 2 r^2 p \pi$. Die Ringspannung R geht vom Drucke $\frac{pr}{2}$ im Scheitel zum Zug pr am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel τ_1 , so ist $0 = pr \frac{\cos 2 \tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus sich ergibt

$$\cos \tau_1 = 0,618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^\circ 50' \dots \dots \dots 384.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel τ größer sind als τ_1 , findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile des Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber Gleichgewicht nicht stattfinden; es ist also ohne Hilfsconstruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructionen sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leitet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R ; auf dieselbe wirken also nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück st (Fig. 370), welches zum Winkel $d\omega$ gehört, so ist die Resultirende der beiden R die nach außen gerichtete Kraft h gleich $2R \sin \frac{d\omega}{2} = R d\omega$.

Fig. 370.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung ein:

$$\mu = - \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2}, \dots \dots \dots 385.$$

alsdann wird

$$R = \mu pr \quad \text{und} \quad h = \mu pr d\omega \dots \dots \dots 386.$$

Pro Längeneinheit des $x d\omega$ langen Bogens ist also die nach außen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

$$\eta = \frac{\mu pr d\omega}{x d\omega} = \frac{\mu pr}{x} \dots \dots \dots 387.$$

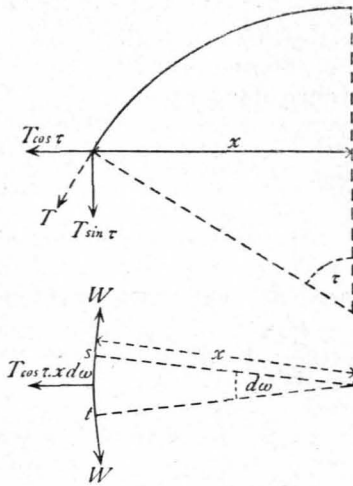
Aus Vorstehendem folgt noch, daß bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muß, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^\circ 50'$ entspricht.

Ist die Kuppel ein Kugelabschnitt, so wirken auf die Widerlager außer den eventuell vorhandenen Kräften η (nach Gleichung 387.) noch die Meridianspannungen T , welche dem größten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entsprechen. T hat eine horizontale Komponente $T \cos \tau$ und eine verticale Komponente $T \sin \tau$. Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergibt sich dann wie folgt. Auf den Bogen st (Fig. 371) von der Länge $x d\omega$ wirkt nach außen $T \cos \tau x d\omega$, und es soll diese Kraft durch die beiden Ringspannungen W aufgehoben werden; es ist demnach

$$T \cos \tau x d\omega = 2 W \sin \frac{d\omega}{2} = W d\omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{pr r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{pr^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \dots \dots \dots 388.$$

Fig. 371.



493.
Graphische
Ermittlung.

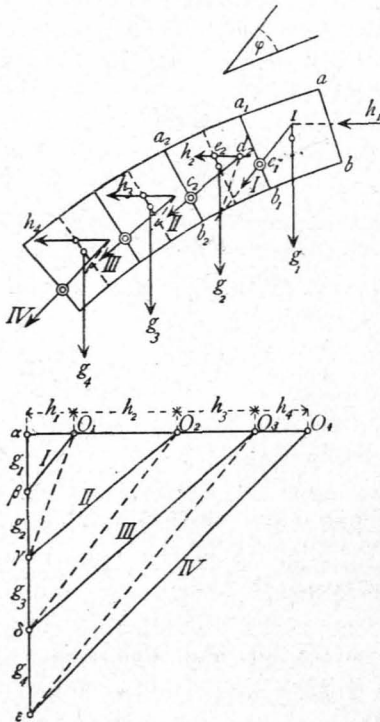
Die vorstehend entwickelten Werthe für T und R entsprechen den Gleichgewichtscurven. Man kann bei verhältnismässig geringer Stärke der Kuppel diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber grössere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

Die graphische Ermittlung der Werthe von T und R an den verschiedenen Stellen der Kuppel kann nun in analoger Weise durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbarten gezeigt ist, indem man bestimmte Bedingungen für die Stützlinie vorschreibt. Man untersucht zu dem Zwecke den einem Centriwinkel α entsprechenden

Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, dass die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben soll und kein Gleiten stattfindet, so ergibt sich die Stützlinie folgender Massen (Fig. 372).

Fig. 372.



Die Belaftung des obersten Ringsteines sei $g_1 (= \alpha \beta)$; alsdann wirken auf diesen Stein (Fig. 372) g_1 und die vor der Hand unbekannte Resultante h_1 der Spannungen im obersten Ringe. Der kleinste Werth von h_1 , bei welchem die Stützlinie die gestellten Bedingungen erfüllt, ergibt sich, wenn die Resultirende I von g_1 und h_1 durch den untersten Punkt c_1 des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$ geht und um einen Winkel φ von der Fugennormalen abweicht. Die durch c_1 unter dem Winkel φ mit der Fugennormalen gelegte Linie schneide die Richtungslinie von g_1 in I ; alsdann ist dieser Punkt auch der Angriffspunkt von h_1 . Die Grösse von h_1 und I ergibt das Kraftpolygon, wenn durch β eine Linie parallel zu der Richtungslinie von I gezogen wird. Man erhält $O_1 \alpha = h_1$ und $O_1 \beta = I$. Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Fuge $a b$ oberhalb des inneren Drittels liege, so würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken haben und den sich alsdann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 verbinden, wobei der Winkel von I mit der Fugennormalen kleiner würde, als φ .

Auf den zweiten Stein wirken nun g_2 , I und h_2 . Der kleinste Werth von h_2 , welcher obigen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch e_2 geht, die Resultirende von I , g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2 , dem Schnittpunkt der Resultirenden der Kräfte I und g_2 mit h_2 , ergibt die Richtung von II ; die Grösse von II erhält man durch Ziehen einer Parallelen γO_2 durch γ zur Richtungslinie von II .

Der Winkel, welchen II mit der Fugennormalen zu $a_2 b_2$ einschließt, ist kleiner als φ , also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel grösser als φ , so wäre h_2 so weit hinabzurücken und zu vergrössern, bis der Winkel höchstens gleich φ ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

- DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.
 TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.
 SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunschweig 1857.
 FABRE, V. *Théorie des voûtes élastiques et dilatables d'une application spéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.
 HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.
 HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.
 FONTAINE, H. *Stabilité des constructions. Extrait de la notice sur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.
 ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.
 FABIAN, W. Ueber Gewölbtheorien mit besonderer Berücksichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.
 BONNIN, R. *Étude sur la stabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.
 PERRODIL. *Résistance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.
 GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches sur la théorie des voûtes.* Paris 1879.
 FÖEPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.
 DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes sphériques.* Paris 1880.

Berichtigungen.

- S. 50, Zeile 1 v. u.: Statt »BOSE« zu lesen: »BOSC«.
 S. 97, » 20 v. o.: Statt »Pietro duro« zu lesen: »Pietra dura«.
 S. 109, » 13 v. u. }
 S. 110, » 21 v. o. } : Statt »E. March« zu lesen: »Ernst March Söhne«.
 S. 113, » 3 v. o.: Statt »Erfcheint seit 1865« zu lesen: »1865—80«.
 » 10 v. o.: Statt »Red. von H. Seger« zu lesen: »Red. v. H. Seeger u. J. Aron«.
 S. 159, » 18 v. o.: Statt »calls« zu lesen: »walls«.
 S. 164, » 3 v. u.: Statt »0,18 kg« zu lesen: »0,18 t«.
 S. 165, » 3 v. o.: Statt »174« zu lesen: »104«.
 S. 166, » 20 v. o.: Statt »0,26 kg« zu lesen: »0,26 t«.
 » 16 v. u.: Hat »und« zu entfallen.
 S. 167, » 16 v. o.: Statt »(6,748)« zu lesen: »(0,748)«,
 S. 174, » 8 v. o.: Statt »unter« zu lesen: »von«.
 S. 178, » 22 v. o. hat zu entfallen.
 S. 192, » 5 v. u.: Statt »25« zu lesen: »28«.
 S. 238, » 14 v. o.: Statt »K« zu lesen: »K₁«.
 S. 244, » 23 v. o.: Statt »die normal« zu lesen: »die geneigt oder normal«.
 S. 251, » 7 v. u.: Statt »Gleichung 16.« zu lesen: »Gleichung 16a«.
 S. 257, » 4 v. o.: Statt »eine normal« zu lesen: »eine geneigt oder normal«.
 » 21 v. o.: Statt »Biegunsmoment« zu lesen: »Biegungs- oder Angriffsmoment«.
 S. 265, » 11 v. o.: Statt »des Moment« zu lesen: »das Moment«.
 S. 265, » 15 v. o.: Statt $\frac{f}{a_2}$ zu lesen: $\frac{f}{a_2}$.
 S. 279, » 6 v. o.: Statt »oberhalb YY« zu lesen: »oberhalb einer leicht zu ermittelnden, durch O gehenden Axe«.
 S. 280, » 11 v. o.: Statt »P« zu lesen »R«.
 S. 290, Fig. 118 links unten: Statt »V d x« zu lesen: »V d z«.
 S. 424, » 320 rechts unten: Statt $\frac{2 x \kappa}{n}$ zu lesen: $\frac{2 x \pi}{n}$.
 S. 454, » 358 unten: Statt »q x d u« zu lesen: »q x d w«.